

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**PROGRAMMAZIONE DINAMICA  
PER OPZIONI AMERICANE**

Tesi di Laurea in Matematica Finanziaria

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:  
FEDERICO BERTONI

I Sessione  
Anno Accademico 2015/16



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1 Opzioni Americane a tempo discreto</b>	<b>9</b>
1.1 Definizioni iniziali e teorema di decomposizione di Doob . . . . .	9
1.2 Prezzo d'arbitraggio per opzioni Americane . . . . .	12
1.3 Strategie ottimali di esercizio . . . . .	16
<b>2 Opzioni Americane a tempo continuo</b>	<b>19</b>
2.1 La formula di Black&Scholes . . . . .	19
2.2 Problema a frontiera libera . . . . .	22
2.3 Soluzione forte del problema ad ostacolo . . . . .	23
2.3.1 Metodo della penalizzazione . . . . .	27
2.3.2 Problema con ostacolo su una regione . . . . .	32
<b>3 Approssimazione numerica</b>	<b>33</b>
3.1 Confronto tra opzioni Europee e Americane . . . . .	33
3.2 La frontiera . . . . .	39
<b>Conclusione</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>



# Elenco delle figure

3.1	Prezzo di una <i>put</i> al variare di $N$ . . . . .	34
3.2	Prezzo di una <i>put</i> al variare di $T$ . . . . .	35
3.3	Prezzo di una <i>put</i> al variare di $T$ con $r = 0$ . . . . .	36
3.4	Prezzo di una <i>put</i> al variare di $K$ . . . . .	37
3.5	Prezzo di una <i>put</i> al variare di $S$ . . . . .	38
3.6	Frontiera di una <i>put</i> con $S_0 = K = 100$ . . . . .	39
3.7	Frontiera di una <i>put</i> con $S_0 = 100$ e $K = 90$ . . . . .	40
3.8	Frontiera di una <i>put</i> con $S_0 = 100$ e $K = 110$ . . . . .	41
3.9	Confronto tra la frontiera di una <i>put</i> e l'approssimazione 3.2 vicino al tempo finale $T$ . . . . .	42
3.10	Frontiera nello spazio $S t$ di una <i>put</i> con $T = 1$ e $N = 300$ . . . . .	43



# Introduzione

La seguente tesi affronta un argomento specifico della finanza matematica: la determinazione del prezzo di un'opzione Americana. Per prima cosa cerchiamo di comprendere in cosa consiste un'opzione e, in particolare, quella Americana.

Un'opzione é un contratto che dá il diritto a chi lo acquista di poter vendere o comprare una certa quantità di un sottostante ad un tempo  $T$  fissato. La tipologia piú semplice di opzione é quella Europea che può essere esercitata solo alla scadenza e il cui valore finale può essere individuato tramite una funzione  $\Phi(S_T)$ . Questa funzione ci permette di conoscere a priori quali sono i possibili guadagni in base al valore che il sottostante avrà al tempo  $T$ .

La tipologia di opzione che abbiamo studiato piú in dettaglio però, é l'opzione Americana, la quale può essere esercitata in qualsiasi momento antecedente il tempo  $T$ .

In questa tesi studieremo per prima cosa il comportamento dell'opzione Americana a tempo discreto, ovvero suddividendo l'intervallo di tempo  $[0, T]$  in  $N$  parti e cercando di individuare una possibile strategia ottimale e un algoritmo per determinarne il prezzo iniziale. Ciò che speriamo che accada é che questo modello approssimi bene il modello a tempo continuo in modo da poterlo implementare su un computer.

Dopodiché, descriveremo il problema a frontiera libera in maniera qualitativa e poi in maniera piú formale dimostrando alcuni teoremi che garantiscano l'esistenza di una soluzione forte. Per fare ciò introdurremo una notazione specifica e definiremo l'operatore di *Black&Scholes*.

Infine, tramite un'implementazione Matlab, metteremo a confronto le opzioni Americane ed Europee osservando come cambia il costo di un'opzione *put* facendo variare un singolo parametro alla volta e lasciando tutti gli altri costanti. Mostriamo inoltre due diverse rappresentazioni della frontiera di una *put* Americana in modo da poter visualizzare anche a livello grafico il problema a frontiera libera.





# Capitolo 1

## Opzioni Americane a tempo discreto

### 1.1 Definizioni iniziali e teorema di decomposizione di Doob

In questo capitolo daremo le definizioni base per lo studio delle Opzioni Americane a tempo discreto e le dimostrazioni di alcuni teoremi che ci permetteranno di poter analizzare le Opzioni Americane a tempo continuo.

**Definizione 1.1** (Derivato Americano). Un derivato Americano è un processo stocastico  $X = (X_n)$  non negativo ed adattato alla filtrazione  $(\mathcal{F}_n^s)$

**Definizione 1.2** (Strategia d'esercizio). Una strategia d'esercizio è un tempo d'arresto ovvero una variabile aleatoria

$$\nu : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, N\} \quad (1.1)$$

tale che  $\nu = n \in \mathcal{F}_n$  con  $n = 0, \dots, N$ . Tutte le strategie d'esercizio sono indicate da  $\mathcal{T}_0$ .

Sostanzialmente una strategia d'esercizio indica l'istante in cui viene esercitato il derivato Americano rispetto ad una traiettoria  $w \in \Omega$  del mercato sottostante. Inoltre la decisione di esercitare l'opzione all'istante  $n$ -esimo dipende solo dalle informazioni disponibili al tempo  $t_n$  visto che  $\nu$  è adattato alla filtrazione  $\mathcal{F}_n$ .

Date queste due definizioni possiamo introdurre la definizione di payoff e di strategia ottimale:

**Definizione 1.3.** Dati un derivato Americano  $X$  e una strategia d'esercizio anticipato  $\nu \in \mathcal{T}_0$ , il payoff di  $X$  rispetto alla strategia  $\nu$  è la variabile aleatoria  $X_\nu$  tale che

$$(X_\nu)(w) = X_{\nu(w)}(w)$$

con  $w \in \Omega$ . Data una misura martingala  $Q$ , una strategia d'esercizio è ottimale per  $X$  in  $Q$  se risulta

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_{\nu_0}] = \max_{\nu \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \quad (1.2)$$

Prima di dimostrare alcuni teoremi riguardo le opzioni Americane, dimostriamo un risultato teorico riguardo i processi adattati, che sarà alla base di quasi tutte le dimostrazioni successive. Infatti il Teorema di decomposizione di Doob ci permetterà di scrivere ogni processo adattato come somma di una martingala e di un processo predicibile.

**Teorema 1.1.1** (Doob). *Ogni processo adattato  $Y$  può essere decomposto in*

$$Y = M + P \quad (1.3)$$

*in modo unico dove  $M$  è una martingala tale che  $M_0 = Y_0$  e  $P$  è un processo predicibile e tale che  $P_0 = 0$ . Si può notare inoltre che  $Y$  è una super-martingala se e solo se  $P$  è decrescente.*

*Dimostrazione.* Per prima cosa definiamo i processi  $M$  e  $P$  in maniera ricorsiva:

$$\begin{cases} M_0 = Y_0 \\ M_n = M_{n-1} + Y_n - \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}], \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_n = P_{n-1} - (Y_{n-1} - \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}]), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Possiamo riscrivere  $M$  e  $P$  come sommatorie degli elementi precedenti nel seguente modo:

$$M_n = Y_n + \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \mathbb{E}[Y_{i+1} | \mathcal{F}_i]) \quad (1.6)$$

$$P_n = - \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \mathbb{E}[Y_{i+1} | \mathcal{F}_i]) \quad (1.7)$$

Per prima cosa notiamo che  $M$  è una martingala:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[M_{n-1} + Y_n - \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} \end{aligned}$$

$P_n$  inoltre risulta essere un processo predicibile dato che lo possiamo scrivere, sfruttando l'equazione 1.5, come somma di processi  $\mathcal{F}_{n-1}$  misurabili ovvero

$$P_n = P_{n-1} - (Y_{n-1} - \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}]).$$

Notiamo quindi che la somma di  $M_n$  e di  $P_n$  non è altro che  $Y_n$ :

$$M_n + P_n = Y_n + \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \mathbb{E}[Y_{i+1} | \mathcal{F}_i]) - \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \mathbb{E}[Y_{i+1} | \mathcal{F}_i]) = Y_n \quad (1.8)$$

dove abbiamo sfruttato le equazioni 1.6 e 1.3; perciò la 1.3 é provata.

Infine dimostriamo l'unicità della decomposizione; per farlo consideriamo la seguente relazione:

$$Y_n - Y_{n-1} = M_n - M_{n-1} + P_n - P_{n-1}$$

Calcolandone l'attesa condizionata rispetto alla filtrazione  $\mathcal{F}_{n-1}$  e notando che

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1},$$

$P_n$  è un processo predicibile e

$$\mathbb{E}[Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1}$$

otteniamo la relazione

$$\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] - Y_{n-1} = P_n - P_{n-1}$$

che è esattamente la formula 1.5 per  $P_n$ .

Dalla relazione precedente abbiamo che

$$M_n = M_{n-1} + Y_n - Y_{n-1} - (P_n - P_{n-1})$$

e sostituendo la relazione appena ottenuta per  $P_n - P_{n-1}$  ritroviamo la formula 1.4 per  $M_n$ .  $\square$

Nella dimostrazione del teorema di decomposizione di Doob abbiamo utilizzato il teorema di optional sampling. Possiamo a questo punto enunciarlo e dimostrarlo per completezza.

**Teorema 1.1.2** (Optional sampling). *Siano  $\nu_1, \nu_2$  due tempi d'arresto limitati q.s. e tali che*

$$\nu_1 \leq \nu_2 \leq N \quad (1.9)$$

con  $N \in \mathbb{N}$ . Se  $X$  é una super-martingala allora  $X_{\nu_1}, X_{\nu_2}$  sono variabili aleatorie sommabili e vale

$$X_{\nu_1} \geq \mathbb{E}[X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}] \quad (1.10)$$

Inoltre, se  $X$  é una martingala la disuguaglianza precedente diventa un'uguaglianza:

$$X_{\nu_1} = \mathbb{E}[X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}] \quad (1.11)$$

e per qualsiasi tempo d'arresto q.s. limitato vale

$$\mathbb{E}[X_\nu] = \mathbb{E}[X_0] \quad (1.12)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo per prima cosa che le due variabili aleatorie  $X_{\nu_1}, X_{\nu_2}$  sono sommabili visto che vale per  $i=1,2$ :

$$|X_{\nu_i}| \leq \sum_{k=0}^N |X_k|$$

Per dimostrare la prima disuguaglianza osserviamo che se  $X$  é un processo adattato e  $\nu$  é un tempo d'arresto finito q.s. allora  $X_\nu$  é  $\mathcal{F}_\nu$ -misurabile. Perciò, nel nostro caso,  $X_{\nu_1}$  é  $\mathcal{F}_{\nu_1}$ -misurabile. Dobbiamo quindi dimostrare che

$$\int_A X_{\nu_1} dP \geq \int_A X_{\nu_2} dP, \quad A \in \mathcal{F}_{\nu_1} \quad (1.13)$$

Per prima cosa consideriamo  $\nu_2 = N$  costante.

Se  $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$  si ha che  $B := A \cap \{\nu_1 = n\} \in \mathcal{F}_n$  e quindi otteniamo:

$$\int_B X_{\nu_1} dP = \int_B X_n dP \geq \int_B \mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_n] dP = \int_B X_N dP \quad (1.14)$$

Da questa disuguaglianza otteniamo che:

$$\int_A X_{\nu_1} dP = \sum_{n=0}^N \int_B X_{\nu_1} dP \geq \sum_{n=0}^N \int_B X_N dP = \int_A X_N dP \quad (1.15)$$

Ora invece consideriamo il caso piú generale in cui abbiamo  $\nu_2 \leq N$  q.s. Essendo  $X$  una super-martingala, allora anche  $X^{\nu_2}$  é una super-martingala e quindi applicando la disuguaglianza 1.15 otteniamo che:

$$\int_A X_{\nu_1} dP = \int_A X_{\nu_1}^{\nu_2} dP \geq \int_A X_N^{\nu_2} dP = \int_A X_{\nu_2} dP \quad (1.16)$$

Osserviamo infine che tutte le disuguaglianze diventano uguaglianze se si parla di martingale e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

## 1.2 Prezzo d'arbitraggio per opzioni Americane

In un mercato libero da arbitraggi e completo, il prezzo di un derivato Europeo è uguale a quello di una strategia replicante; inoltre, il prezzo d'arbitraggio scontato è una  $Q$ -martingala.

Per i derivati Americani invece è impossibile determinare una strategia replicante  $(\alpha, \beta) \in (A)$  perchè  $\tilde{X}_n$  è solo un processo adattato e non una  $Q$ -martingala. Quello che faremo sarà quindi determinare un limite superiore ed uno inferiore per il prezzo  $H_0$  di un

derivato Americano.

Per fare ciò definiamo la famiglia di strategie super-replicanti

$$\mathcal{A}_X^+ = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}; V_n^{(\alpha, \beta)} \geq X_n, n = 0, \dots, N\} \quad (1.17)$$

e sub-replicanti

$$\mathcal{A}_X^- = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}; \exists \nu \in \mathcal{T}_0 \text{ t.c. } X_\nu \geq V_\nu^{(\alpha, \beta)}\}. \quad (1.18)$$

Quello che faremo infatti vedere è che il prezzo  $H_0$  deve soddisfare la disuguaglianza:

$$\sup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-} V_0^{(\alpha, \beta)} \leq H_0 \leq \inf_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+} V_0^{(\alpha, \beta)} \quad (1.19)$$

**Teorema 1.2.1.** *Dato un mercato libero da arbitraggi e una qualsiasi misura martingala  $Q$ , vale la seguente disuguaglianza:*

$$\sup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-} V_0^{(\alpha, \beta)} \leq \max_{\nu \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \leq \inf_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+} V_0^{(\alpha, \beta)} \quad (1.20)$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di  $\mathcal{A}_X^-$  in 1.18, per ogni  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-$ ,  $\exists \nu_0 \in \mathcal{T}_0$  tale che  $V_{\nu_0}^{(\alpha, \beta)} \leq X_{\nu_0}$ . Quindi vale la seguente disuguaglianza:

$$V_0^{(\alpha, \beta)} = \frac{V_0^{(\alpha, \beta)}}{B_0} = \tilde{V}_0^{(\alpha, \beta)} = \mathbb{E}^Q[\tilde{V}_{\nu_0}^{(\alpha, \beta)}] \leq \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_{\nu_0}] \leq \sup_{\nu \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \quad (1.21)$$

Dove abbiamo applicato il teorema di Optional Sampling 1.1.2 nella terza uguaglianza a  $\tilde{V}^{(\alpha, \beta)}$  che è una  $Q$ -martingala. Vista l'arbitrarietà della scelta di  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-$  otteniamo la prima disuguaglianza.

Se invece  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+$ , otteniamo la seguente disuguaglianza  $\forall \nu \in \mathcal{T}_0$ :

$$V_0^{(\alpha, \beta)} = \tilde{V}_0^{(\alpha, \beta)} = \mathbb{E}^Q[\tilde{V}_0^{(\alpha, \beta)}] \geq \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \quad (1.22)$$

Dove anche in questo caso abbiamo applicato il teorema di Optional Sampling nella seconda uguaglianza.

Vista l'arbitrarietà sia di  $\nu \in \mathcal{T}_0$  sia di  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+$  otteniamo la seconda disuguaglianza.  $\square$

Posti quindi i valori estremi per  $\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu]$  definiamo l'inviluppo di Snell e verifichiamo che esso ci permette di trovare il prezzo di un'opzione Americana a tempo discreto. Questo sarà uno strumento fondamentale per lo sviluppo teorico del prezzamento dei derivati Americani anche a tempo continuo.

**Definizione 1.4** (Inviluppo di Snell). Dato un processo adattato  $X$ , chiamiamo *inviluppo di Snell* di  $X$  la più piccola super-martingala che domina  $X$ .

**Lemma 1.2.2.** *Preso un derivato Americano  $X$  e il suo valore scontato  $\tilde{X}$ , definiamo ricorsivamente il seguente processo  $\tilde{H}$*

$$\tilde{H}_n = \begin{cases} \tilde{X}_n & n = N \\ \max\{\tilde{X}_n, \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_{n+1} | \mathcal{F}_n]\} & n = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.23)$$

$\tilde{H}$  risulta essere l'inviluppo di Snell di  $\tilde{X}$  ovvero la piú piccola super-martingala che domina  $\tilde{X}$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa osserviamo che  $\tilde{H}$  è un processo adattato alla filtrazione dato che lo è anche  $\tilde{X}$  e abbiamo costruito  $\tilde{H}$  ricorsivamente sulla base di  $\tilde{X}$ . Inoltre è non negativo visto che un derivato Americano  $X$  è per definizione non negativo. Per ogni  $n < N$  dall'equazione 1.23 abbiamo che

$$\tilde{H}_n = \max\{\tilde{X}_n, \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_{n+1} | \mathcal{F}_n]\} \geq \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \quad (1.24)$$

e quindi  $\tilde{H}$  è una super-martingala.

Per verificare che  $\tilde{H}$  è la piú piccola super-martingala che domina  $\tilde{X}$ , supponiamo che  $Y$  sia una super-martingala, ovvero che valga  $Y_n \geq \tilde{X}_n$ . Notiamo per prima cosa che  $\tilde{H}_N = \tilde{X}_N \leq Y_N$  e procediamo per induzione come segue.

Supponiamo che  $\tilde{H}_n \leq Y_n$  e osserviamo che

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{n-1} &= \max\{\tilde{X}_{n-1}, \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_n | \mathcal{F}_{n-1}]\} \\ &\leq \max\{\tilde{X}_{n-1}, \mathbb{E}^Q[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}]\} \\ &\leq \max\{\tilde{X}_{n-1}, Y_{n-1}\} \\ &= Y_{n-1} \end{aligned}$$

Perciò  $\tilde{H}$  è proprio l'inviluppo di Snell di  $\tilde{X}$ . □

Dopo aver trovato l'inviluppo di Snell per un derivato Americano troviamo il prezzo di arbitraggio di  $X$  grazie al prossimo teorema.

**Teorema 1.2.3** (Prezzo  $X$ ). *Supponiamo che la misura martingala  $Q$  esista e sia unica. Allora esiste una strategia  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_X^-$  tale che:*

1.  $\mathcal{V}_n^{(\alpha, \beta)} \geq X_n \quad n = 0, \dots, N$
2.  $\exists \nu_0 \in \mathcal{T}_0$  tale che  $X_{\nu_0} = V_{\nu_0}^{(\alpha, \beta)}$

*Inoltre il prezzo iniziale di arbitraggio risulta essere*

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_{\nu_0}] = v_0^{(\alpha, \beta)} = \max_{\nu \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \quad (1.25)$$

*Dimostrazione.* Per prima cosa costruiamo l'inviluppo di Snell relativo a  $\tilde{X}$  come in 1.23, definendo  $H_n = B_n \tilde{X}_n$ . Notiamo che al tempo  $t_N$ ,  $H_N = X_N$  mentre a tempo  $t_{N-1}$  il valore di  $H_{N-1}$  può essere  $X_{N-1}$  nel caso in cui l'opzione venga esercitata o  $\frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q[H_N | \mathcal{F}_{N-1}]$  in caso contrario. Quest'ultimo valore altro non è che il prezzo di un'opzione Europea con payoff  $H_N$  e scadenza  $N$ .

Per evitare un possibile arbitraggio poniamo quindi

$$H_{N-1} = \max \left\{ X_{N-1}, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q[H_N | \mathcal{F}_{N-1}] \right\}; \quad (1.26)$$

e procedendo in questo modo con  $\tilde{H}_n = B_n^{-1} H_n$  otteniamo proprio l'inviluppo di Snell di 1.23.

Prima di proseguire con la dimostrazione notiamo che  $\tilde{H}$  è una  $Q$ -super-martingala e quindi decresce in media; sostanzialmente il vantaggio dell'esercizio anticipato diminuisce col passare del tempo dato che si hanno meno opportunità di sfruttare questa possibilità. A questo punto cerchiamo di individuare una strategia  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_X^-$  e per farlo applichiamo il teorema di decomposizione di Doob a  $\tilde{H}$ . Perciò possiamo scrivere  $\tilde{H} = M + P$  dove  $M$  è una  $Q$ -martingala tale che  $M_0 = \tilde{H}_0$  e  $P$  è un processo predicibile con valore iniziale nullo. Notiamo inoltre che esso è decrescente visto che  $\tilde{H}$  è una  $Q$ -super-martingala.

Dato che siamo nell'ipotesi di mercato completo possiamo considerare la martingala  $M_N$  come il payoff di un derivato Europeo; perciò  $\exists(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$  replicante per  $M$  con  $\tilde{V}_N(\alpha, \beta) = M_N$ . Dato che  $M$  e  $\tilde{V} := \tilde{V}^{(\alpha, \beta)}$  sono  $Q$ -martingale con stesso valore finale allora devono essere necessariamente uguali ad ogni tempo; in particolare vale la seguente relazione:

$$\tilde{V}_n = \mathbb{E}^Q[V_N | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^Q[M_N | \mathcal{F}_n] = M_n \quad (1.27)$$

Visto che  $P_n \leq 0$  allora vale anche la seguente disuguaglianza

$$\tilde{V}_n = M_n = \tilde{H}_n - P_n \geq \tilde{H}_n \geq \tilde{X}_n.$$

Inoltre osserviamo che  $\tilde{V}_0 = M_0 = \tilde{H}_0$  e quindi  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+$  poichè è una strategia super replicante.

Per dimostrare che  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-$  poniamo

$$\nu_0(w) = \min_n [\tilde{H}_n(w) = \tilde{X}_n(w)], \quad w \in \Omega$$

e dato che per ogni  $n$  vale

$$\{\nu_0 = n\} = \{\tilde{H}_0 > \tilde{X}_0\} \cap \dots \cap \{\tilde{H}_{n-1} > \tilde{X}_{n-1}\} \cap \{\tilde{H}_n = \tilde{X}_n\} \in \mathcal{F}_n$$

allora  $\nu_0$  risulta essere una strategia d'esercizio. Dato che abbiamo preso il più piccolo istante in cui  $\tilde{H}_n(w) = \tilde{X}_n(w)$ , ovvero in cui  $\tilde{X} \geq \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ , esso sarà intuitivamente

il primo istante in cui conviene esercitare l'opzione.  
 Dal teorema di decomposizione di Doob possiamo scrivere

$$M_n = \tilde{H}_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{H}_k - \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_{k+1} | \mathcal{F}_k])$$

e quindi risulta  $M_{\nu_0} = \tilde{H}_{\nu_0}$  dato che  $\tilde{H}_k = \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_{k+1} | \mathcal{F}_k]$ ,  $\forall k < \nu_0$ . Perciò, visto che  $\tilde{V}_n = M_n$  e, per definizione di  $\nu_0$ ,  $\tilde{H}_{\nu_0} = \tilde{X}_{\nu_0}$ , risulta che

$$\tilde{V}_{\nu_0} = M_{\nu_0} = \tilde{H}_{\nu_0} = \tilde{X}_{\nu_0}$$

e questo prova che  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-$ .

Infine dimostriamo che  $\nu_0$  è una strategia ottimale. Visto che  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_X^-$  e che vale la disuguaglianza 1.19 seguente

$$\sup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-} V_0^{(\alpha, \beta)} \leq \max_{\nu \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \leq \inf_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+} V_0^{(\alpha, \beta)}$$

allora

$$V_0^{(\alpha, \beta)} = \max_{\nu \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu]$$

e questo conclude la dimostrazione. □

**Definizione 1.5** (Prezzo d'arbitraggio). Il processo  $H$  definito come

$$H_n = \begin{cases} X_n & n = N \\ \max\{X_n, \mathbb{E}^Q[H_{n+1} | \mathcal{F}_n]\} & n = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.28)$$

è detto prezzo d'arbitraggio del derivato Americano  $X$ .

### 1.3 Strategie ottimali di esercizio

Dato un processo  $H = (H_n)$  e un tempo d'arresto  $\nu$  definiamo il processo  $H^\nu = (H_n^\nu)$  come

$$H_n^\nu(w) = H_{n \wedge \nu(w)}(w), \quad w \in \Omega$$

ovvero  $H$  arrestato al tempo  $\nu$ . Data questa notazione enunciamo il lemma seguente.

**Lemma 1.3.1.** *Se  $H$  è adattato allora anche  $H^\nu$  lo è. Se  $H$  è una martingala anche  $H^\nu$  lo è.*

**Lemma 1.3.2.**  *$\forall \nu \in \mathcal{T}_0$  vale  $\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \leq H_0$ . In particolare  $\nu \in \mathcal{T}_0$  risulta essere una strategia ottimale d'esercizio per  $X$  in  $Q$  se e solo se  $\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] = H_0$ .*



*Dimostrazione.* Per dimostrare la disuguaglianza osserviamo che

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \leq \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_\nu] = \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_N^\nu] \leq H_0 \quad (1.29)$$

in cui la prima disuguaglianza deriva dal fatto che  $X_\nu \leq H_\nu$  mentre la seconda dal fatto che  $\tilde{H}$  e quindi anche  $\tilde{H}^\nu$  sono  $Q$ -super-martingale dal lemma 1.3.1.

Data la definizione di strategia ottimale e la disuguaglianza appena provata abbiamo che

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] = H_0 \Rightarrow \nu \in \mathcal{T}_0$$

Infatti se vale  $\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \leq H_0$  allora  $H_0 \geq \max_{\nu \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu]$ . Per l'altra implicazione basta far vedere che esiste almeno una strategia ottimale; nella proposizione 1.3.4 costruiremo due strategie e verificheremo che sono ottimali.  $\square$

**Corollario 1.3.3.** *Se  $\nu \in \mathcal{T}_0$  è tale che*

1.  $\tilde{X}_\nu = \tilde{H}_\nu$
2.  $\tilde{H}_\nu$  è una  $Q$ -martingala

*allora  $\nu$  risulta essere una strategia d'esercizio ottimale per  $X$  in  $Q$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo la disuguaglianza 1.29 trovata nel lemma precedente

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] \leq \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_\nu] = \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_N^\nu] \leq H_0$$

e osserviamo che la condizione  $\tilde{X}_\nu = \tilde{H}_\nu$  e la condizione di martingalità di  $\tilde{H}_\nu$  rendono rispettivamente la prima e la seconda disuguaglianze due uguaglianze. Di conseguenza otteniamo  $\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] = H_0$  e per il lemma precedente  $\nu$  è ottimale per  $X$  in  $Q$ .  $\square$

Possiamo ora trovare due strategie ottimali; per farlo definiamo il processo  $E$  come

$$E_n = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q[H_{n+1} | \mathcal{F}_n], \quad n \leq N-1 \quad (1.30)$$

fissando  $E_N = -1$  per convenzione. Risulta quindi che  $H_n = \max\{X_n, E_n\}$   $n \leq N$  e inoltre i seguenti insiemi

$$\{n : X_n \geq E_n\} \text{ e } \{n : X_n > E_n\}$$

sono non vuoti visto che  $X_N \geq 0 > -1 = E_N$ . Perciò sono ben poste le definizioni di strategie d'esercizio seguenti:

$$\nu_{min} = \min\{n : X_n \geq E_n\} \quad (1.31)$$

$$\nu_{max} = \max\{n : X_n > E_n\} \quad (1.32)$$

**Proposizione 1.3.4.** *Le strategie d'esercizio  $\nu_{min}$  e  $\nu_{max}$  sono ottimali per  $X$  in  $Q$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrare la proposizione sfruttiamo il corollario 1.3.3 verificando che entrambe le condizioni vengono soddisfatte da  $\nu_{min}$  e  $\nu_{max}$ . Notiamo per prima cosa che da come abbiamo definito i due tempi d'arresto in 1.31 e 1.32

$$\begin{aligned} H_{\nu_{min}} &= \max\{X_{\nu_{min}}, E_{\nu_{min}}\} = X_{\nu_{min}} \\ H_{\nu_{max}} &= \max\{X_{\nu_{max}}, E_{\nu_{max}}\} = X_{\nu_{max}} \end{aligned}$$

e quindi la prima condizione è verificata da entrambe.

Per il teorema di decomposizione di Doob possiamo scrivere  $\tilde{H}_n = M_n + P_n$  con  $n \leq N$  in cui  $M$  è una  $Q$ -martingala con  $M_0 = H_0$  e  $P$  è un processo predicibile e decrescente tale che  $P_0 = 0$ . In particolare ricordiamo la

$$P_n = - \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{H}_k - \tilde{E}_k), \quad n \leq N$$

Dalle definizioni 1.31 e 1.32 si può notare che  $H_n = E_n$ ,  $n \leq \nu_{max} - 1$  visto che negli istanti precedenti a  $\nu_{max}$ ,  $E_n > X_n$  e il prezzo di arbitraggio sarà quindi

$$H_n = \max\{X_n, E_n\} = E_n.$$

Da queste osservazioni possiamo vedere che  $A_n = 0$  per  $n \leq \nu_{max}$ ; facciamo notare che in particolare  $A_{\nu_{max}} = 0$  poichè vengono sommati solo gli elementi fino al termine  $\nu_{max} - 1$ . Perciò risulta  $\tilde{H}_n = M_n$  per  $n \leq \nu_{max}$  e quindi, dato che  $\nu_{min} \leq \nu_{max}$ , risultano

$$\tilde{H}^{\nu_{min}} = M^{\nu_{min}} \text{ e } \tilde{H}^{\nu_{max}} = M^{\nu_{max}}$$

Di conseguenza, per il lemma 1.3.1 abbiamo che  $\tilde{H}^{\nu_{min}}$  e  $\tilde{H}^{\nu_{max}}$  sono  $Q$ -martingale e questo prova il secondo punto del corollario 1.3.1 e conclude la dimostrazione.  $\square$

**Proposizione 1.3.5.** *Se  $\nu \in \mathcal{T}_0$  è ottimale per  $X$  in  $Q$  allora  $\nu_{min} \leq \nu \leq \nu_{max}$  con probabilità  $P$ -q.s.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $P(\nu < \nu_{min}) > 0$ . Per dimostrare che  $\nu$  non può essere ottimale basta mostrare che  $\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] < \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_\nu]$ .

Visto che le probabilità  $P$  e  $Q$  sono equivalenti risulta che  $Q(\tilde{X}_\nu < \tilde{H}_\nu) > 0$ . Dato che dalla definizione 1.31  $\tilde{X}_\nu \leq \tilde{H}_\nu$ , risulta che  $\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_\nu] < \mathbb{E}^Q[\tilde{H}_\nu]$ .

Ora invece supponiamo che  $P(\nu < \nu_{max}) > 0$  e cerchiamo di provare che  $\mathbb{E}^Q[\tilde{H}_\nu] < H_0$ . Visto che le probabilità  $P$  e  $Q$  equivalenti e dato che il processo predicibile  $P$  è decrescente e non positivo, risulta che  $\mathbb{E}^Q[P_\nu] < 0$  e quindi

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{H}_\nu] = \mathbb{E}^Q[M_\nu] + \mathbb{E}^Q[P_\nu] < M_0 = H_0$$

$\square$

# Capitolo 2

## Opzioni Americane a tempo continuo

### 2.1 La formula di Black&Scholes

Nel primo capitolo abbiamo studiato il comportamento delle Opzioni Americane a tempo discreto. In questo capitolo vorremmo studiare il comportamento a tempo continuo. Per farlo osserveremo come il mercato a tempo discreto approssima il mercato a tempo continuo con  $N$  che tende all'infinito. In particolare definiremo un operatore discreto e mostreremo come esso approssima l'operatore differenziale di *Black&Scholes*. Dopodiché affronteremo il problema a frontiera libera per le Opzioni Americane dandone alcune definizioni e dimostrando un risultato sull'esistenza di soluzioni forti.

Definiamo per prima cosa la notazione che ci servirà nella prima parte di questo capitolo:

$$\delta = \frac{T}{N}, \quad (2.1)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta}} = 1 + \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta), \quad (2.2)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}} = 1 - \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta), \quad (2.3)$$

$$1 + \rho = e^{r\delta} = 1 + r\delta + o(\delta), \quad (2.4)$$

per  $\delta \rightarrow 0$ , da cui abbiamo anche

$$q = \frac{1 + \rho - d}{u - d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta}). \quad (2.5)$$

Prendiamo una funzione  $f = f(t, S)$  definita su  $[0, T] \times \mathbb{R}_+$  che indica il prezzo d'arbitraggio di un derivato sul sottostante  $S$  e definiamo la formula di valutazione nel

modo seguente:

$$f(t, S) = \frac{1}{1 + \rho}(qf(t + \delta, uS) + (1 - q)f(t + \delta, dS)). \quad (2.6)$$

Possiamo riscrivere questa equazione come

$$J_\delta f(t, S) = 0$$

dove l'operatore discreto  $J_\delta f(t, S)$  é definito da

$$J_\delta f(t, S) = -(1 + \rho)f + qf^u + (1 - q)f^d \quad (2.7)$$

avendo posto

$$f = f(t, S), \quad f^u = f(t + \delta, uS), \quad f^d = f(t + \delta, dS).$$

**Proposizione 2.1.1.** *Per ogni  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+)$  vale*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta f(t, S)}{\delta} = L_{BS}f(t, S) \quad (2.8)$$

per ogni  $(t, S) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}_+$ , dove

$$L_{BS}f(t, S) := \partial_t f(t, S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \partial_{SS} f(t, S) + rS \partial_S f(t, S) - rf(t, S) \quad (2.9)$$

é detto operatore differenziale di Black&Scholes.

*Dimostrazione.* Possiamo sviluppare in serie di Taylor al secondo ordine utilizzando la definizione 2.2 di  $u$ :

$$\begin{aligned} f^u - f &= \partial_t f \delta + \partial_S f S(u - 1) + \frac{1}{2} \partial_{SS} f S^2 (u - 1)^2 + o(\delta) + o((u - 1)^2) = \\ &= \sigma S \partial_S f \sqrt{\delta} + Lf \delta + o(\delta), \end{aligned}$$

con  $\delta \rightarrow 0$  dove

$$Lf = \partial_t f + \frac{\sigma^2}{2} S \partial_S f + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \partial_{SS} f.$$

In modo analogo possiamo espandere, utilizzando la serie di Taylor,  $f^d - f$ :

$$f^d - f = -\sigma S \partial_S f \sqrt{\delta} + Lf \delta + o(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Allora otteniamo la seguente formula:

$$\begin{aligned}
J_\delta f(t, S) &= -(1 + \rho)f + qf^u + (1 - q)f^d \\
&= -r\delta f + q(f^u - f - (f^d - f)) + (f^d - f) + o(\delta) = \\
\text{sostituendo le espressioni appena ottenute di } f^u - f \text{ e } f^d - f & \\
&= -\delta r f + \delta L f + \sqrt{\delta}(2q - 1)\sigma S \partial_S f + o(\delta) = \\
\text{sostituendo la definizione 2.5 di } q & \\
&= -\delta r f + \delta L f + \sqrt{\delta} \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta}) \right) \sigma S \partial_S f + o(\delta) \\
&= \delta L_{BS} f + o(\delta),
\end{aligned}$$

per  $\delta \rightarrow 0$ , e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Grazie a questa proposizione otteniamo l'equazione differenziale

$$L_{BS} f(t, S) = 0, \quad (t, S) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}_+$$

con condizione iniziale

$$f(T, S) = F(S), \quad S \in \mathbb{R}_+$$

Queste due equazioni costituiscono un problema di Cauchy e, applicando un cambio di variabile, possiamo risolverlo in maniera esplicita:

$$f(t, S) = u(T - t, \log S)$$

ovvero ponendo  $\tau = T - t$  e  $x = \log S$ . Quindi abbiamo ottenuto il seguente problema di Cauchy parabolico a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} u + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \partial_x u - ru - \partial_\tau u = 0, & (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = F(e^x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Possiamo quindi esprimere  $u$  in termini della soluzione fondamentale  $\Gamma$  dell'equazione differenziale:

$$u(\tau, x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x - y, \tau) F(e^y) dy, \quad \tau \in ]0, T[, x \in \mathbb{R},$$

dove  $\Gamma$  risulta essere in generale

$$\Gamma(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\tau)^N \det C}} \exp \left( -\frac{1}{2\tau} \langle C^{-1}x, x \rangle \right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tau > 0, \quad (2.11)$$

con  $C$  una matrice  $N \times N$  simmetrica e definita positiva.

Osserviamo che nel nostro caso  $N = 1$ .

## 2.2 Problema a frontiera libera

Col teorema precedente abbiamo studiato il comportamento asintotico del modello binomiale al tendere di  $N$  all'infinito. Ciò che abbiamo scoperto é che il modello binomiale approssima bene il modello a tempo continuo e questo ci permette di costruire metodi numerici per l'approssimazione del prezzo di opzioni Americane.

A questo punto vorremmo poter utilizzare i risultati ottenuti per vedere cosa accade nel caso di Opzioni Americane a tempo continuo. Utilizzando la notazione definita in precedenza otteniamo la seguente formula ricorsiva per la determinazione del prezzo d'arbitraggio di una Opzione Americana:

$$\begin{cases} f(T, S) = \varphi(T, S), \\ f(t, S) = \max \left\{ \frac{1}{1+\rho} (qf(t + \delta, uS) + (1 - q)f(t + \delta, dS)), \varphi(t, S) \right\}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Possiamo riscrivere la seconda equazione come:

$$\max \left\{ \frac{J_\delta f(t, S)}{\delta}, \varphi(t, S) - f(t, S) \right\} = 0$$

Dove  $J_\delta$  é l'operatore discreto definito in precedenza. Quando  $\delta \rightarrow 0$  possiamo applicare il teorema precedente 2.1.1 e ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \max\{L_{BS}f, \varphi - f\} = 0, & \text{in } [0, T[ \times \mathbb{R}_+, \\ f(T, S) = \varphi(T, S), & S \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.13)$$

dove  $L_{BS}$  é l'operatore differenziale di *Black&Scholes*.

Questo problema contiene una disuguaglianza differenziale e, a differenza del classico problema di Cauchy, risulta essere piú difficile da studiare dal punto di vista teorico. Dal punto di vista numerico però il problema può essere risolto senza troppe difficoltà.

In questa sezione vogliamo capire qual é l'approccio da seguire per la risoluzione di questo problema. Per prima cosa suddividiamo il dominio della soluzione  $f$  in due regioni:

$$[0, T[ \times \mathbb{R}_+ = R_e \cup R_c$$

dove  $R_e$  é la regione di esercizio anticipato e  $R_c$  é la regione di continuazione. Osserviamo che possiamo scrivere la disuguaglianza differenziale come:

$$\{\max\{L_{BS}f, \varphi - f\}\} = \{L_{BS}f \leq 0, \varphi - f = 0\} \cup \{L_{BS}f = 0, \varphi - f < 0\}$$

Con questa osservazione diventa quasi ovvia la definizione delle due regioni:

$$R_e = \{(t, S) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+ \mid L_{BS}f(t, S) \leq 0 \text{ e } f(t, S) = \varphi(t, S)\} \quad (2.14)$$

e

$$R_c = \{(t, S) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+ \mid L_{BS}f(t, S) = 0 \text{ e } f(t, S) > \varphi(t, S)\} \quad (2.15)$$

Sostanzialmente  $R_c$  indica la regione in cui conviene aspettare e quindi non esercitare l'opzione, mentre  $R_e$  indica la regione nella quale conviene esercitare anticipatamente. Il bordo che separa  $R_e$  da  $R_c$  dipende dalla soluzione  $f$  e quindi non é un dato fornito dal problema; infatti se il bordo fosse noto allora il problema sarebbe un classico problema di Cauchy-Dirichlet per  $L_{BS}$  su  $R_c$  con dato al bordo  $\varphi$ .

Questo però é un problema a frontiera libera e la determinazione della frontiera tra le due regioni risulta essere parte essenziale del problema. Infatti la frontiera libera indica l'istante e il prezzo ottimali d'esercizio ovvero ciò che ci interessa dal punto di vista finanziario.

## 2.3 Soluzione forte del problema ad ostacolo

A questo punto della trattazione vogliamo approfondire il problema ad ostacolo da un punto di vista teorico, dando alcune definizioni e dimostrando alcuni teoremi riguardanti l'esistenza e la regolarità di una soluzione. In particolare studieremo le soluzioni forti che richiedono ipotesi piú stringenti sulla regolarità delle funzioni date dal problema ma che ci permettono di trovare soluzioni molto regolari. Inoltre, nella maggior parte dei casi in ambito finanziario, ci troviamo proprio in questo tipo di situazioni.

Per prima cosa diamo una definizione formale del problema ad ostacolo

$$\begin{cases} \max\{Lu, \varphi - u\} = 0, & \text{in } S_T = ]0, T[ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, \cdot) = \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.16)$$

dove  $L$  é un operatore parabolico definito come:

$$Lu := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_{ij} \partial_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^N b_i \partial_{x_i} u - au - \partial_t u \quad (2.17)$$

e  $\varphi$  é una funzione localmente Lipschitziana che verificherá certe ipotesi che enunceremo a breve. Questo problema altro non é se non una generalizzazione del problema dato nel paragrafo precedente riguardante le Opzioni Americane. Osserviamo però che nel caso delle Opzioni Americane vi é anche un processo stocastico e quindi non é ovvia questa relazione. A breve enunceremo un risultato che lega questi due problemi senza dimostrarlo.

Ora elenchiamo una serie di ipotesi che verranno utilizzate piú volte all'interno degli enunciati di alcuni teoremi e che daremo solamente all'inizio del paragrafo per comodità.

**Ipotesi:**

1.  $\exists \Lambda > 0$  tale che

$$\Lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N c_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2, \quad t \in \mathbb{R}, x, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

2. I coefficienti sono limitati e Hölderiani:

$$c_{ij}, b_i, a \in C_P^\alpha(\mathbb{R}^{N+1})$$

con  $\alpha \in ]0, 1[$  e per ogni  $1 \leq i, j \leq N$

3. La funzione  $\varphi$  é continua su  $\bar{S}_T$ , localmente Lipschitziana e per ogni  $O$  insieme aperto e limitato tale che  $\bar{O} \subseteq S_T$  esiste una costante  $C$  tale che in  $O$  valga:

$$\sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j \partial_{x_i x_j} \varphi \geq C |\xi|^2 \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

in senso distribuzionale, ovvero

$$\sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j \int_O \varphi \partial_{x_i x_j} \psi \geq C |\xi|^2 \int_O \psi \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^N$  e  $\psi \in C_0^\infty(O)$  con  $\psi \geq 0$ .

Dopo aver elencato alcune ipotesi che ricorreranno frequentemente in questo capitolo possiamo partire col dare alcune definizioni e alcuni enunciati che non dimostreremo.

**Definizione 2.1.** Siano  $\alpha \in ]0, 1[$  e  $O$  un dominio di  $\mathbb{R}^{N+1}$ .  $C_P^\alpha(O)$  é lo spazio delle funzioni  $u$ , limitate su  $O$ , per cui esiste una costante  $C > 0$  tale che

$$|u(t, x) - u(s, y)| \leq C(|t - s|^{\frac{\alpha}{2}} + |x - y|^\alpha),$$

per ogni  $(t, x), (s, y) \in O$ . Definiamo inoltre la seguente norma

$$\|u\|_{C_P^\alpha(O)} = \sup_{(t,x) \in O} |u(t, x)| + \sup_{(t,x), (s,y) \in O, (t,x) \neq (s,y)} \frac{|u(t, x) - u(s, y)|}{|t - s|^{\frac{\alpha}{2}} + |x - y|^\alpha} \quad (2.18)$$

Indichiamo inoltre con  $C_P^{1+\alpha}(O)$  e  $C_P^{2+\alpha}(O)$  gli spazi di funzioni Hölderiane definiti dalle seguenti norme:

$$\|u\|_{C_P^{1+\alpha}(O)} = \|u\|_{C_P^\alpha(O)} + \sum_{i=1}^N \|\partial_{x_i} u\|_{C_P^\alpha(O)}, \quad (2.19)$$



$$\|u\|_{C_P^{2+\alpha}(O)} = \|u\|_{C_P^{1+\alpha}(O)} + \sum_{i,j=1}^N \|\partial_{x_i x_j} u\|_{C_P^\alpha(O)} + \|\partial_t u\|_{C_P^\alpha(O)}. \quad (2.20)$$

Inoltre per  $k = 0, 1, 2$  scriviamo  $u \in C_{P,loc}^{k+\alpha}(O)$  se  $u \in C_P^{k+\alpha}(M)$  per ogni dominio limitato  $M$  tale che  $\overline{M} \subseteq O$ .

**Definizione 2.2.** Sia  $O$  un aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  e sia  $1 \leq p \leq \infty$ . Allora indichiamo con  $S^p(O)$  lo spazio delle funzioni  $u \in L^p(O)$  che ammettono derivate in senso debole per ogni  $i, j = 1, \dots, N$ :

$$\partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u, \partial_t u \in L^p(O)$$

Inoltre diciamo che  $u \in S_{loc}^p(O)$  se  $u \in S^p(O_1)$  per ogni  $O_1$  aperto e limitato tale che  $\overline{O_1} \subseteq O$ .

Siano  $O_1$  e  $O_2$  due domini limitati di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  tali che  $\overline{O_1} \subseteq O_2$ . Allora vale il seguente teorema di immersione e valgono le seguenti stime a priori che enunciamo senza dimostrare.

**Teorema 2.3.1** (di immersione di Sobolev-Morrey). *Per ogni  $p > N + 2$  esiste una costante positiva  $C$ , la quale dipende solo da  $p, N, O_1, O_2$ , tale che:*

$$\|u\|_{C_P^{1+\alpha}(O_1)} \leq C \|u\|_{S^p(O_2)},$$

per ogni  $u \in S^p(O_2)$ .

**Teorema 2.3.2** (stime interne di  $S^p$ ). *Assumiamo che  $L$  sia uniformemente parabolico, ovvero l'ipotesi 1. Per ogni  $p \in ]1, \infty[$  esiste  $C$  costante positiva dipendente solo da  $N, L, O_1, O_2$  tale che*

$$\|u\|_{S^p(O_1)} \leq C (\|u\|_{L^p(O_2)} + \|Lu\|_{L^p(O_2)})$$

per ogni  $u \in S^p(O_2)$

**Teorema 2.3.3** (stime interne di Schauder). *Assumiamo le ipotesi 1 e 2. Esiste una costante  $C$  positiva che dipende solo da  $N, L, O_1, O_2$  tale che*

$$\|u\|_{C_P^{2+\alpha}(O_1)} \leq \left( \sup_{O_2} |u| + \|Lu\|_{C_P^\alpha(O_2)} \right)$$

per ogni  $u \in C_P^{2+\alpha}(O_2)$ .

Dopo aver enunciato alcuni teoremi che risulteranno fondamentali nelle dimostrazioni seguenti, diamo una definizione formale di soluzione forte.

**Definizione 2.3.** Una soluzione forte al problema 2.21 é una funzione  $u \in S_{loc}^1(S_T) \cap C(\bar{S}_T)$  che soddisfa l'equazione seguente

$$\max\{Lu, \varphi - u\} = 0$$

q.o. su  $S_T$  ed assume il suo dato iniziale puntualmente. Diremo inoltre che  $\bar{u}$  é una super-soluzione forte di 2.21 se  $\bar{u} \in S_{loc}^1(S_T) \cap C(\bar{S}_T)$  e se essa verifica il problema

$$\begin{cases} \max\{L\bar{u}, \varphi - \bar{u}\} \leq 0, & \text{q.o. in } S_T, \\ \bar{u}(0, \cdot) \geq \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.21)$$

Il risultato principale a cui vogliamo arrivare é il prossimo teorema che verrà dimostrato nelle due sezioni seguenti e che ci permetterà di sapere sotto quali condizioni una soluzione del problema ad ostacolo esiste.

**Teorema 2.3.4.** *Assumiamo le Ipotesi 1,2 e 3. Se esiste una super-soluzione forte  $\bar{u}$  del problema 2.21 allora esiste anche una soluzione forte  $u$  tale che  $u \leq \bar{u}$  in  $S_T$ . Risulta inoltre che  $u \in S_{loc}^p(S_T)$  per ogni  $p \geq 1$  e di conseguenza, per il Teorema 2.3.1 di immersione di Sobolev-Morrey,  $u \in C_{P,loc}^{1+\alpha}(S_T)$  per ogni  $\alpha \in ]0, 1[$ .*

Il teorema 2.3.4 é esattamente quello che ci serve per poter sapere quando esiste una soluzione forte per il problema ad ostacolo. Il teorema che stiamo per enunciare senza dimostrazione ci permette di legare il teorema 2.3.4 al problema a frontiera libera riguardante le opzioni Americane e che quindi delinea le condizioni necessarie per la soluzione del problema 2.13.

**Teorema 2.3.5.** *Esiste ed é unica la soluzione forte  $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}_+)$  per il problema ad ostacolo 2.13:*

$$\begin{cases} \max\{L_{BS}f, \varphi - f\} = 0, & \text{in } ]0, T[ \times \mathbb{R}_+, \\ f(T, \cdot) = \varphi(T, \cdot), & S \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.22)$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\forall (t, y) \in [0, T[ \times \mathbb{R}_+$ , si ha

$$f(t, y) = \sup_{\tau \in \mathcal{I}_T, \tau \in [t, T]} \mathbb{E}^Q [e^{-r(\tau-t)} \varphi(\tau, S_\tau^{t,y})],$$

dove  $S^{t,y}$  é la soluzione della seguente SDE con condizione iniziale  $S_t = y$ :

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

2.  $f$  ammette derivata parziale prima rispetto a  $S$  in senso classico e vale

$$\partial_S f \in C \cap L^\infty([0, T[ \times \mathbb{R}_+).$$

### 2.3.1 Metodo della penalizzazione

In questa sezione proviamo esistenza e unicita di una soluzione forte per il problema seguente con ostacolo, generalizzando poi su tutto  $\mathbb{R}^N$ :

$$\begin{cases} \max\{Lu, \varphi - u\} = 0, & \text{in } B(T) := ]0, T[ \times B, \\ u|_{\partial_P B(T)} = g, \end{cases} \quad (2.23)$$

dove  $B$  é il disco Euclideo di raggio  $R > 0$  fissato in tutta la sezione, ovvero

$$B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\},$$

e  $\partial_P B(T)$  indica il bordo parabolico di  $B(T)$  definito come:

$$\partial_P B(T) := \partial B(T) \setminus (\{T\} \times B).$$

Sull'ostacolo assumiamo una condizione analoga all'Ipotesi 3:

**Ipotesi 4:** La funzione  $\varphi$  é Lipschitziana su  $\overline{B(T)}$  e la condizione di convessita debole (ipotesi 3) vale con  $O = B(T)$ . Inoltre  $g \in C(\partial_P B(T))$  e vale  $g \geq \varphi$ .

Diremo che  $u \in S_{loc}^1(B(T)) \cap C(\overline{B(T)})$  é una soluzione forte del problema 2.23 se l'equazione differenziale é verificata q.o. su  $B(T)$  e il dato al bordo é assunto puntualmente.

A questo punto dimostriamo uno dei risultati principali di questo capitolo che ci porterá a dimostrare il teorema 2.3.4:

**Teorema 2.3.6.** *Assumiamo le Ipotesi 1, 2, 4. Allora esiste una soluzione forte  $u$  del problema 2.23. Inoltre,  $\forall p \geq 1$  e  $O$  con  $\overline{O} \subseteq B(T)$ , esiste una costante  $c > 0$ , dipendente solo da  $L, O, B(T), p$  e dalle norme  $L^\infty$  di  $g$  e  $\varphi$ , tale che*

$$\|u\|_{S^p(O)} \leq c.$$

Proviamo il Teorema 2.3.6 utilizzando una classica tecnica di penalizzazione. Consideriamo una famiglia  $(\beta_\epsilon)_{\epsilon \in ]0, 1[}$  di funzioni  $C^\infty(\mathbb{R})$  tale che  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\beta_\epsilon$  é una funzione crescente, limitata assieme alla sua derivata prima. Inoltre valgono anche i seguenti fatti:

$$\beta_\epsilon(0) = 0, \quad \beta_\epsilon(s) \leq \epsilon, \quad s > 0,$$

e anche

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta_\epsilon(s) = -\infty, \quad s < 0.$$

Per  $\delta \in ]0, 1[$ , indichiamo con  $\varphi^\delta$  la regolarizzazione di  $\varphi$  ottenuta con gli usuali mollificatori. Poiché  $g \geq \varphi$  su  $\partial_P B(T)$ , abbiamo

$$g^\delta := g + \lambda \delta \geq \varphi^\delta, \quad \text{in } \partial_P B(T),$$

dove  $\lambda$  é la costante di Lipschitz di  $\varphi$ .

A questo punto possiamo considerare il seguente problema penalizzato:

$$\begin{cases} Lu = \beta_\epsilon(u - \varphi^\delta), & \text{in } B(T), \\ u|_{\partial_P B(T)} = g^\delta. \end{cases} \quad (2.24)$$

Per prima cosa dimostriamo l'esistenza di una soluzione classica determinando la soluzione dell'equazione non lineare internamente e poi mostrare che é anche una funzione continua al bordo. Per quest'ultimo punto utilizzeremo le funzioni barriera.

**Definizione 2.4.** Fissato un punto  $(t, x) \in \partial_P B(T)$ , una funzione barriera per  $L$  in  $(t, x)$  é una funzione  $w \in C^2(V \cap \overline{B(T)}; \mathbb{R})$ , dove  $V$  é un intorno di  $(t, x)$ , tale che:

1.  $Lw \leq -1$  in  $V \cap B(T)$ ;
2.  $w > 0$  in  $V \cap \overline{B(T)} \setminus \{(t, v)\}$  e  $w(t, x) = 0$ .

Dopo aver definito le funzioni barriera enunciamo senza dimostrare un lemma che le riguarda e che ci servirá piú avanti.

**Lemma 2.3.7.** *In ogni punto  $(t, x) \in \partial_P B(T)$  esiste una funzione barriera.*

**Teorema 2.3.8.** *Assumiamo le ipotesi 1 e 2. Siano  $g \in C(\partial_P B(T))$  e  $h = h(z, u) \in \text{Lip}(\overline{B(T)} \times \mathbb{R})$ . Allora esiste una soluzione classica  $u \in C_P^{2+\alpha}(B(T)) \cap C(\overline{B(T)})$  del problema*

$$\begin{cases} Lu = h(\cdot, u), & \text{in } B(T), \\ u|_{\partial_P B(T)} = g. \end{cases} \quad (2.25)$$

*Inoltre esiste una costante  $c > 0$ , dipendente solo da  $h$  e  $B(T)$ , tale che*

$$\sup_{B(T)} |u| \leq e^{cT} (1 + \|g\|_{L^\infty}). \quad (2.26)$$

*Dimostrazione.* Possiamo assumere  $a = 0$  senza restrizioni dato che, a meno di regolarizzarlo, possiamo includere tale termine nella funzione  $h$ . Usiamo una tecnica di iterazione monotona basata sul principio del massimo. Poniamo per prima cosa

$$u_0(x, t) = e^{ct} (1 + \|g\|_{L^\infty}) - 1,$$

dove  $c$  é una costante positiva tale che

$$|h(t, x, u)| \leq c(1 + |u|), \quad (t, x, u) \in \overline{B(T)} \times \mathbb{R}.$$

Definiamo in modo ricorsivo la successione  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mediante

$$\begin{cases} Lu_j - \lambda u_j = h(\cdot, u_{j-1}) - \lambda u_{j-1}, & \text{in } B(T), \\ u_j|_{\partial_P B(T)} = g, \end{cases} \quad (2.27)$$

dove  $\lambda$  é la costante di Lipschitz della funzione  $h$ . Qui utilizziamo la teoria classica che assicura che il problema lineare 2.27 ha un'unica soluzione appartenente a  $C_P^{2,\alpha}(B(T)) \cap C(\overline{B(T)})$  per ogni  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Ora proviamo per induzione che  $(u_j)$  é una successione decrescente. Per il principio del massimo, abbiamo  $u_1 \leq u_0$ ; infatti dato che  $a = 0$  per ipotesi vale

$$L(u_1 - u_0) - \lambda(u_1 - u_0) = h(\cdot, u_0) - Lu_0 = h(\cdot, u_0) + c(1 + u_0) \geq 0,$$

e inoltre  $u_1 \leq u_0$  anche su  $\partial_P B(T)$ . Ora fissiamo  $j \in \mathbb{N}$  e assumiamo come ipotesi induttiva che  $u_j \leq u_{j-1}$ ; perció, utilizzando  $\lambda$  che é la costante di Lipschitz di  $h$  otteniamo che

$$L(u_{j+1} - u_j) - \lambda(u_{j+1} - u_j) = h(\cdot, u_j) - h(\cdot, u_{j-1}) - \lambda(u_j - u_{j-1}) \geq 0.$$

Inoltre vale  $u_{j+1} = u_j$  su  $\partial_P B(T)$  e quindi il principio del massimo implica che  $u_{j+1} \leq u_j$ .

In mod analogo si puó mostrare che  $u_j$  é limitata inferiormente da  $-u_0$ . Riassumendo, per  $j \in \mathbb{N}$ , abbiamo che

$$-u_0 \leq u_{j+1} \leq u_j \leq u_0. \quad (2.28)$$

Indichiamo ora con  $u$  il limite puntuale della successione  $(u_j)$  su  $\overline{B(T)}$ . Poiché  $u_j$  é soluzione di 2.27 e data la stima uniforme 2.28, possiamo applicare le stime a priori in  $S^p$  e il teorema di immersione, Teoremi 2.3.2 e 2.3.1, e provare che, su ogni aperto  $O$  contenuto con la propria chiusura in  $B(T)$  e per ogni  $\alpha \in ]0, 1[$ , la norma  $\|u_j\|_{C_P^{1+\alpha}(O)}$  é limitata da una costante che dipende solo da  $L$ ,  $B(T)$ ,  $O$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$ . Allora per le stime di Schauder, Teorema 2.3.3, deduciamo che la norma  $\|u_j\|_{C_P^{2+\alpha}(O)}$  é limitata uniformemente rispetto a  $j \in \mathbb{N}$ .

Perció, per il Teorema di Ascoli-Arzelá,  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ammette una sotto-successione (che per semplicitá, indichiamo ancora con  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ) che converge localmente in  $C_P^{2+\alpha}$ . Passando al limite in 2.27 per  $j \rightarrow \infty$ , otteniamo:

$$Lu = h(\cdot, u), \text{ in } B(T),$$

e  $u|_{\partial_P B(T)} = g$ . A questo punto, dobbiamo mostrare che  $u \in C(\overline{B(T)})$ ; per farlo utilizzeremo le funzioni barriera. Fissati  $\bar{z} = (\bar{t}, \bar{x}) \in \partial_P B(T)$  e  $\epsilon > 0$ , consideriamo un intorno aperto  $V$  di  $\bar{z}$  tale che

$$|g(z) - g(\bar{z})| \leq \epsilon, \quad z = (t, x) \in V \cap \partial_P B(T),$$

e sia definita una funzione barriera  $w$  per  $L$  in  $V \cap \partial_P B(T)$ . L'esistenza di questa funzione barriera ci viene garantita dal Lemma 2.3.7. Poniamo ora

$$v^\pm(z) = g(\bar{z}) \pm (\epsilon + k_\epsilon w(z))$$

dove  $k_\epsilon$  é una costante sufficientemente grande, indipendentemente da  $j$ , tale che

$$L(u_j - v^+) \geq h(\cdot, u_{j-1}) - \lambda(u_{j-1} - u_j) + k_\epsilon \geq 0,$$

e  $u_j \leq v^+$  su  $\partial(V \cap B(T))$ . Applicando nuovamente il principio del massimo otteniamo  $u_j \leq v^+$  su  $V \cap B(T)$ . In modo analogo abbiamo  $u_j \geq v^-$  su  $V \cap B(T)$  e, per  $j \rightarrow \infty$ , otteniamo

$$g(\bar{z}) - \epsilon - k_\epsilon w(z) \leq u(z) \leq g(\bar{z}) + \epsilon + k_\epsilon w(z), \quad z \in V \cap B(T).$$

Allora otteniamo la seguente disuguaglianza valida per qualsiasi  $\epsilon$ :

$$g(\bar{z}) - \epsilon \leq \liminf_{z \rightarrow \bar{z}} u(z) \leq \limsup_{z \rightarrow \bar{z}} u(z) \leq g(\bar{z}) + \epsilon, \quad z \in V \cap B(T).$$

Perció la tesi é provata. Infine la stima 2.26 segue direttamente dal principio del massimo e dalla disuguaglianza 2.28. □

*Dimostrazione.* (del teorema 2.3.6). Appliciamo il Teorema 2.3.8 con

$$h(\cdot, u) = \beta_\epsilon(u - \varphi^\delta),$$

per dedurre l'esistenza di una soluzione classica  $u_{\epsilon, \delta} \in C_P^{2+\alpha}(B(T)) \cap C(\overline{B(T)})$  del problema penalizzato 2.24. A meno del cambio di variabile  $v(t, x) = e^{t\|a\|_\infty} u(t, x)$ , possiamo assumere  $a \geq 0$ . Proviamo anzitutto che vale

$$|\beta_\epsilon(u_{\epsilon, \delta} - \varphi^\delta)| \leq \tilde{c} \tag{2.29}$$

con  $\tilde{c}$  costante indipendente da  $\epsilon$  e  $\delta$ . Dato che  $\beta_\epsilon \leq \epsilon$  dobbiamo provare solamente la stima dal basso. Indichiamo con  $\zeta$  un punto di minimo della funzione  $\beta_\epsilon(u_{\epsilon, \delta} - \varphi^\delta) \in C(\overline{B(T)})$  e assumiamo  $\beta_\epsilon(u_{\epsilon, \delta}(\zeta) - \varphi^\delta(\zeta)) \leq 0$ , poiché altrimenti non vi é nulla da dimostrare. Se  $\zeta \in \partial_P B(T)$  allora abbiamo che

$$\beta_\epsilon(g^\delta(\zeta) - \varphi^\delta(\zeta)) \geq \beta_\epsilon(0) = 0.$$

Viceversa supponiamo che  $\zeta \in B(T)$ ; allora, visto che  $\beta_\epsilon$  é una funzione crescente, anche  $u_{\epsilon, \delta} - \varphi^\delta$  assume il minimo (in questo caso negativo) in  $\zeta$  e quindi otteniamo che

$$(L + a)u_{\epsilon, \delta}(\zeta) - (L + a)\varphi^\delta(\zeta) \geq 0 \geq a(\zeta) (u_{\epsilon, \delta}(\zeta) - \varphi^\delta(\zeta)).$$

Perció abbiamo ottenuto la seguente disuguaglianza

$$Lu_{\epsilon, \delta}(\zeta) \geq L\varphi^\delta(\zeta). \tag{2.30}$$

Ora per l'ipotesi 4,  $L\varphi^\delta(\zeta)$  é limitata inferiormente da una costante indipendente da  $\delta$ . Perció dalla disuguaglianza 2.30 otteniamo che

$$\beta_\epsilon(u_{\epsilon,\delta}(\zeta) - \varphi^\delta(\zeta)) = Lu_{\epsilon,\delta}(\zeta) \geq L\varphi^\delta(\zeta) \geq \tilde{c},$$

con  $\tilde{c}$  indipendente da  $\epsilon$ ,  $\delta$  e questo prova la disuguaglianza 2.29. Applicando nuovamente il principio del massimo otteniamo

$$\|u_{\epsilon,\delta}\|_\infty \leq \|g\|_{L^\infty} + T\tilde{c}. \quad (2.31)$$

Allora per la stima a priori in  $S^p$ , Teorema 2.3.2, e le stime 2.29, 2.31 deduciamo che la norma  $\|u_{\epsilon,\delta}\|_{S^p(O)}$  é limitata uniformemente rispetto a  $\epsilon$  e  $\delta$ , per ogni aperto  $O$  incluso con la propria chiusura in  $B(T)$  e per ogni  $p \geq 1$ . Ne segue che  $(u_{\epsilon,\delta})$  ammette una sotto-successione debolmente convergente per  $\epsilon, \delta \rightarrow 0$  in  $S^p$  (e in  $C_P^{1+\alpha}$ ) su ogni sottoinsieme compatto di  $B(T)$  a una funzione  $u$ . Inoltre

$$\limsup_{\epsilon,\delta \rightarrow 0} \beta_\epsilon(u_{\epsilon,\delta} - \varphi^\delta) \leq 0.$$

Perció  $Lu \leq 0$  q.o. in  $B(T)$ . Ma d'altro canto  $Lu = 0$  q.o. nell'insieme  $\{u > \varphi\}$ . Per concludere, osserviamo che  $u \in C(\overline{B}(T))$  e  $u = g$  su  $\partial_P B(T)$  utilizzando l'argomento delle funzioni barriera come nella prova del Teorema 2.3.8.  $\square$

A questo punto proviamo un principio del confronto per il problema con ostacolo che ci servirá per terminare la trattazione.

**Proposizione 2.3.9.** *Sia  $u$  una soluzione forte del problema 2.23 e  $v$  una super-soluzione, ovvero  $v \in S_{loc}^1(B(T)) \cap C(\overline{B}(T))$  e vale*

$$\begin{cases} \max\{Lv, \varphi - v\} \leq 0, & \text{q.o. in } B(T), \\ v|_{\partial_P B(T)} \geq g. \end{cases} \quad (2.32)$$

*Allora  $u \leq v$  in  $B(T)$ . In particolare la soluzione di 2.23 é unica.*

*Dimostrazione.* Per assurdo, supponiamo che l'insieme aperto definito come

$$D := \{z \in B(T) \mid u(z) > v(z)\}$$

non sia vuoto. Allora, visto che  $u > v \geq \varphi$  in  $D$  per ipotesi, abbiamo che

$$Lu = 0, \quad Lv \leq 0 \text{ in } D,$$

e  $u = v$  su  $\partial D$ . Il principio del massimo implica che  $u \geq v$  in  $D$  e quindi abbiamo ottenuto una contraddizione. Perció  $u \leq v$ . L'unicitá risulta ovvia dalla definizione di  $u$ .  $\square$

### 2.3.2 Problema con ostacolo su una regione

Proviamo il Teorema 2.3.4 risolvendo una successione di problemi con ostacolo su una famiglia di cilindri che ricopre la striscia  $S_T$  di  $\mathbb{R}^{N+1}$ . Definiamo quindi:

$$B_n(T) = ]0, T[ \times \{|x| < n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , consideriamo una funzione  $\chi_n \in C(\mathbb{R}^N; [0, 1])$  tale che  $\chi_n(x) = 1$  se  $|x| \leq n - \frac{1}{2}$  e  $\chi_n(x) = 0$  se  $|x| \geq n$ . A questo punto definiamo la seguente successione:

$$g_n(t, x) = \chi_n(x)\varphi(t, x) + (1 - \chi_n(x))\bar{u}(t, x), \quad (t, x) \in S_T.$$

Per il teorema 2.3.6, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , esiste una soluzione forte  $u_n$  del problema

$$\begin{cases} \max\{Lu, \varphi - u\} = 0, & \text{in } B_n(T), \\ u|_{\partial_P B_n(T)} = g_n, \end{cases} \quad (2.33)$$

Per la proposizione 2.3.9 abbiamo che

$$\varphi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \bar{u}, \quad \text{in } B_n(T),$$

e la dimostrazione si conclude utilizzando ancora una volta gli argomenti dei Teoremi 2.3.6 e 2.3.8, basati sulle stime a priori in  $S_{loc}^p$  e le funzioni barriera.



# Capitolo 3

## Approssimazione numerica

In questo capitolo studieremo il comportamento dei metodi per calcolare il prezzo di opzioni Europee e Americane e confronteremo i risultati ottenuti. Per fare ciò ho scritto un programma su Matlab per trovare il prezzo di opzioni Europee e Americane e per trovare la frontiera nel caso di opzioni Americane. Ho poi sfruttato questo programma per confrontare tra di loro i due tipi di opzioni in esame; per esempio ho studiato la convergenza per  $N$  che cresce o come variano i prezzi al variare del prezzo iniziale  $S_0$  del sottostante.

Ho studiato principalmente l'opzione *put* che risulta essere un buon esempio in generale e che ci permette di trovare valori diversi tra opzioni Europee e Americane. La scelta, per esempio, di un'opzione *call* non sarebbe stata molto significativa visto che il prezzo delle opzioni sarebbe stato il medesimo.

Per il confronto tra le opzioni ho fissato alcuni valori per tutto il programma. In particolare, ho fissato la volatilità  $\sigma = 0.15$ , l'interesse  $r = 0.05$  e le altre costanti  $N = 100$ ,  $T = 1$ ,  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$ ; nel caso in cui i valori utilizzati siano diversi verrà specificato nella figura. In tutti i grafici inoltre, ho utilizzato il colore blu per le Opzioni Americane e il colore verde per quelle Europee.

### 3.1 Confronto tra opzioni Europee e Americane

Su Matlab ho creato una funzione che calcola sia il prezzo di un'opzione Europea, sia quello di un'opzione Americana e che richiede in input i valori di  $N$ ,  $T$ ,  $S_0$  e  $K$  dove  $N$  indica il numero di iterazioni da effettuare,  $T$  indica l'intervallo di tempo in cui l'opzione é valida (per comodità l'intervallo  $[0, T]$ ),  $S_0$  indica il valore del sottostante al tempo iniziale e  $K$  é una costante che utilizzeremo nella funzione del payoff dell'opzione *put*. Infatti una *put* ha una funzione payoff del tipo

$$\Phi(S_t) = (K - S_t)^+. \quad (3.1)$$

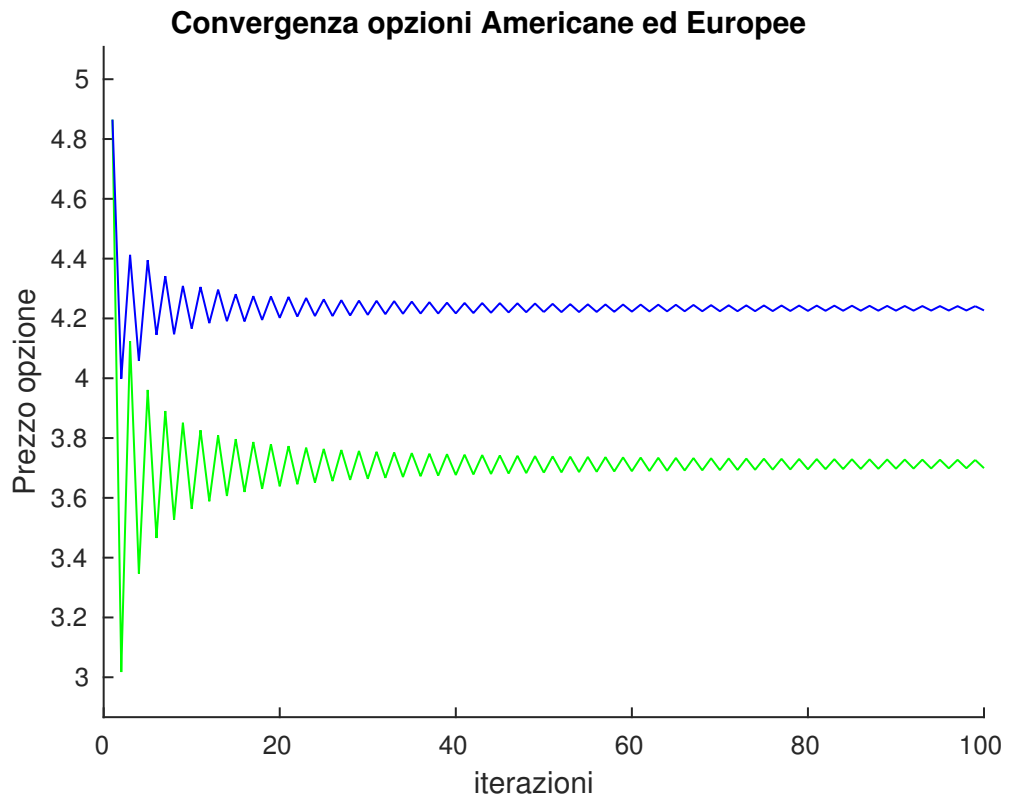


Figura 3.1: Prezzo di una *put* al variare di  $N$

Per prima cosa studiamo la convergenza facendo crescere  $N$ :

Dalla figura 3.1 si possono notare due cose:

- l'approssimazione del valore di entrambe le opzioni tende ad un singolo valore e questo ci dice che il modello discreto approssima bene il modello continuo proprio come avevamo dedotto in precedenza;
- i prezzi delle due opzioni sono diversi e, in particolare, il prezzo di quella Americana risulta maggiore di quello Europeo, proprio come ci aspettavamo.

Perciò i risultati teorici ottenuti riguardanti l'approssimazione del modello continuo con quello discreto vengono avvalorati da questo risultato numerico.

Ora invece vediamo cosa accade facendo variare il tempo  $T$ . Nel grafico 3.2 che proponiamo mettiamo in relazione il tempo  $T$  con il costo delle opzioni.

Notiamo che il prezzo dell'opzione Europea aumenta fino a raggiungere un massimo; dopodiché inizia a decrescere e tende a zero all'aumentare di  $T$ . Questo deriva dal fatto

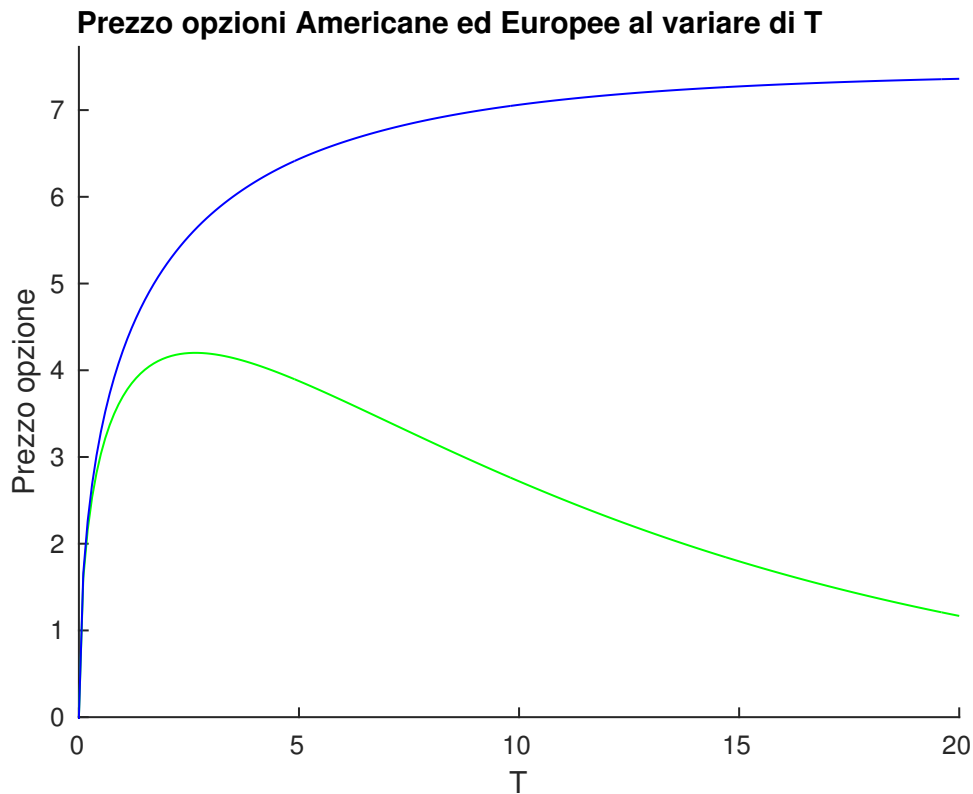


Figura 3.2: Prezzo di una *put* al variare di  $T$

che all'aumentare di  $T$  il prezzo scontato diminuisce come un'esponenziale. Infatti, visto che  $r > 0$ , il valore scontato continua a decrescere visto che viene diviso ad ogni iterazione per  $1 + \rho$  che è maggiore di zero.

Invece il prezzo dell'opzione Americana aumenta asintoticamente fino ad un certo valore e poi rimane approssimativamente costante. Questo può essere motivato dal fatto che l'opzione Americana, a differenza di quella Europea, può essere esercitata in qualsiasi momento prima del tempo  $T$ . Infatti possiamo usare un semplice argomento di arbitraggio per dimostrare che il prezzo non può decrescere fino a zero.

Consideriamo il tempo  $T_1 < T$  e prendiamo due opzioni Americane, la prima a scadenza  $T_1$  con prezzo  $P_1$  e la seconda a scadenza  $T$  con prezzo  $P_2$  entrambe con strike  $K$  e supponiamo che  $P_1 > P_2$ . Allora creiamo un portafoglio acquistando la seconda opzione e vendendo la prima ottenendo  $P_1 - P_2 > 0$  e mettendoli in banca con interesse  $r$ .

Se l'opzione venduta viene esercitata al tempo  $t \leq T_1$  esercitiamo anche noi la nostra; visto che il payoff è lo stesso non guadagniamo o perdiamo nulla. Però i soldi ottenuti all'inizio sono diventati  $(P_1 - P_2) \cdot e^{rt} > 0$  e quindi un arbitraggio esiste. Se l'opzione ven-

duta non viene esercitata noi otteniamo comunque un profitto minimo  $(P_1 - P_2) \cdot e^{rt} > 0$  al quale é possibile aggiungere il guadagno relativo all'opzione acquistata, nel caso in cui convenga utilizzarla dopo il tempo  $T_1$ .

Perció il prezzo dell'opzione Americana non puó decrescere e quindi, in particolare, non potrà tendere a zero.

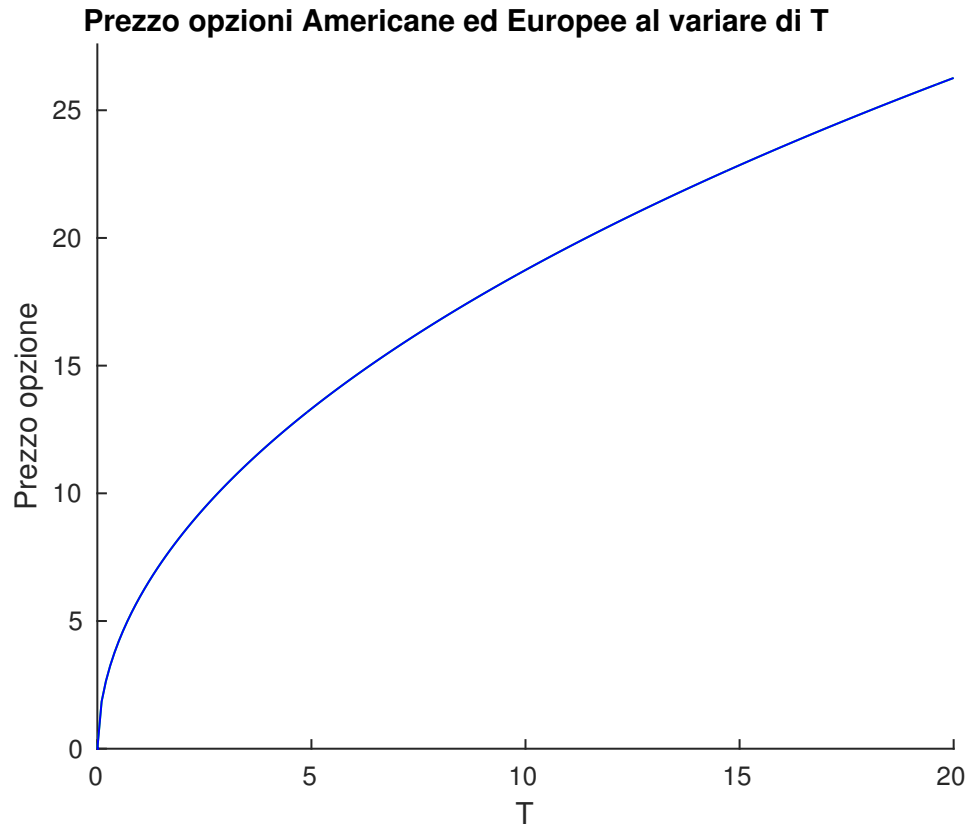


Figura 3.3: Prezzo di una *put* al variare di  $T$  con  $r = 0$

Osserviamo però cosa accade se studiamo lo stesso comportamento ponendo  $r = 0$ . Nella figura 3.3 notiamo per prima cosa che i due grafici coincidono; questo deriva proprio dal fatto che  $r = 0$ . Infatti, da un noto risultato sulle opzioni Americane, sappiamo che il prezzo di una *call* Americana é lo stesso di quello di una Europea quando  $r > 0$ ; per simmetria, i prezzi di due *put* coincidono quando  $r < 0$ . Perció per  $r = 0$  il prezzo di opzioni *put* e *call* sono tutti uguali tra loro. Inoltre, il prezzo continua sempre a crescere e non é limitato; questo deriva dal fatto che, essendo  $r = 0$ , il prezzo scontato viene diviso per 1 e quindi non decresce piú in maniera esponenziale.

Ora studiamo cosa accade quando facciamo variare il valore di  $K$ . Nel grafico 3.4 mettiamo in relazione il prezzo di opzioni Americane e Europee al variare di  $K$  con prezzo del sottostante iniziale  $S_0 = 100$ .

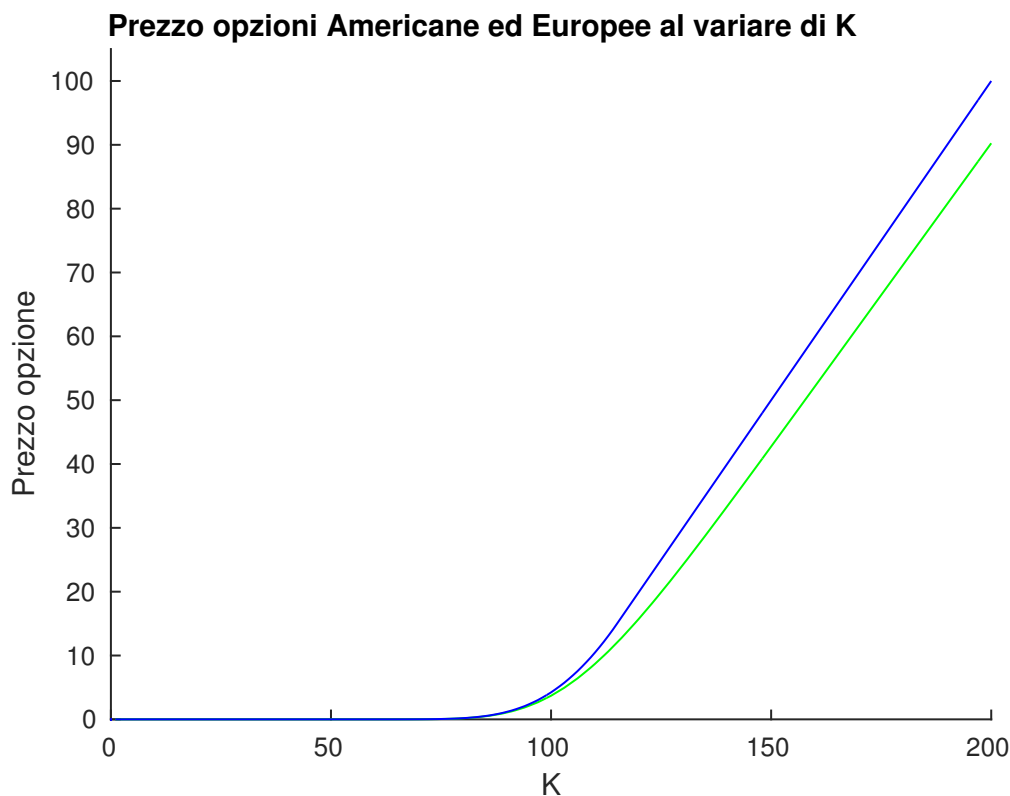


Figura 3.4: Prezzo di una *put* al variare di  $K$

Il prezzo delle opzioni Americana ed Europea hanno un comportamento molto simile; infatti si può notare come entrambe, quando  $K \rightarrow 0$ , hanno un prezzo molto piccolo, anch'esso tendente a zero. Infatti, se il prezzo iniziale del sottostante è  $S_0 = 100$  e  $K$  è molto piccolo, il payoff finale della *put* Europea e il payoff in qualsiasi momento per la *put* Americana saranno in buona approssimazione zero. Quello che ci viene suggerito è che il mercato, non essendo soggetto a variazioni estremamente elevate nel valore del sottostante, molto probabilmente non permetterà all'azione di ottenere un valore più basso di  $K$ .

Notiamo invece che quando  $K$  aumenta, allora anche il prezzo di entrambe le opzioni aumenta; questo è esattamente ciò che ci aspettavamo visto che all'aumentare di  $K$  le possibilità di avere un payoff positivo per una *put* incrementano. Si può notare inoltre che la pendenza di entrambi i grafici, da un certo punto in poi, è la stessa di una retta.

Infine, vogliamo studiare il comportamento del prezzo di opzioni Americane ed Europee al variare del prezzo iniziale del sottostante  $S_0$ . Nella figura 3.5 abbiamo fissato il valore di  $K = 100$  e  $T = 1$ .

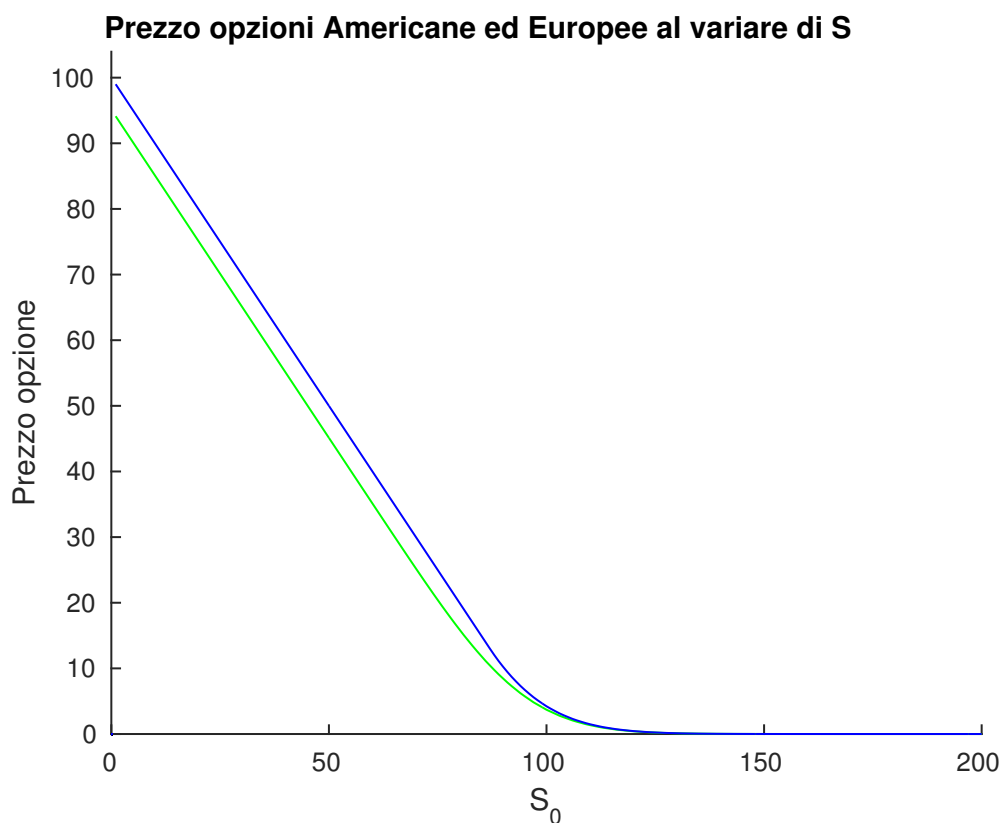


Figura 3.5: Prezzo di una *put* al variare di  $S$

Per prima cosa notiamo che il grafico 3.5 risulta speculare al grafico 3.4; infatti in questo caso abbiamo che all'aumentare del valore iniziale del sottostante il prezzo delle opzioni tende asintoticamente a zero mentre aumenta in maniera quasi lineare per  $S_0 \rightarrow 0$ . In effetti questo é proprio quello ci aspettavamo in analogia con quanto visto al variare del parametro  $K$ .

## 3.2 La frontiera

In questa sezione mostriamo alcuni grafici riguardanti la frontiera che separa la regione in cui conviene esercitare l'opzione Americana da quella in cui conviene aspettare sia nello spazio  $t$   $S$  sia in quello  $S$   $t$ .

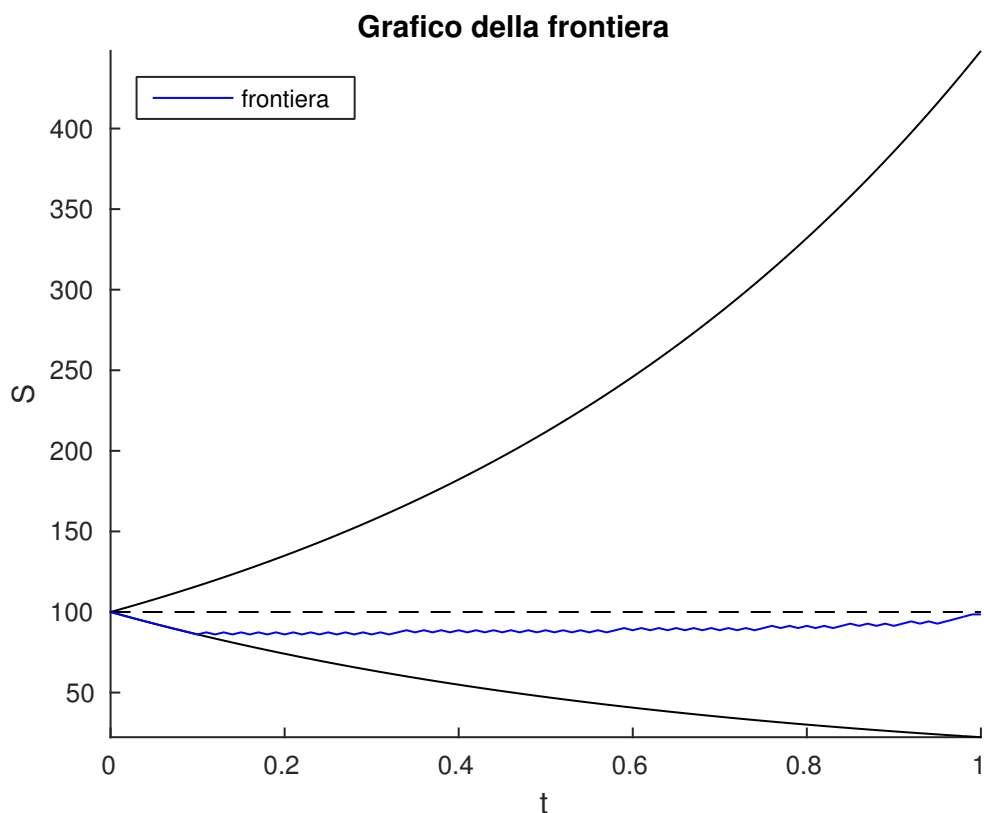


Figura 3.6: Frontiera di una *put* con  $S_0 = K = 100$

Nella figura 3.6 viene rappresentato l'albero dei possibili valori che  $S$  può ottenere mano a mano che ci si avvicina al tempo finale  $T$  e la linea blu indica la frontiera che divide la regione di esercizio anticipato da quella in cui conviene aspettare. In questo grafico, il numero di volte in cui viene diviso l'intervallo  $[0, 1]$  è  $N = 100$  e la funzione payoff che è stata scelta è quella di una *put*. La regione al di sotto della frontiera è proprio quella di esercizio anticipato; possiamo notare come la frontiera non intersechi mai la linea tratteggiata che indica i punti in cui  $S$  è uguale a  $K$ . Infatti, al di sopra di quella linea, esercitare l'opzione non conviene mai visto che il payoff sarebbe nullo.

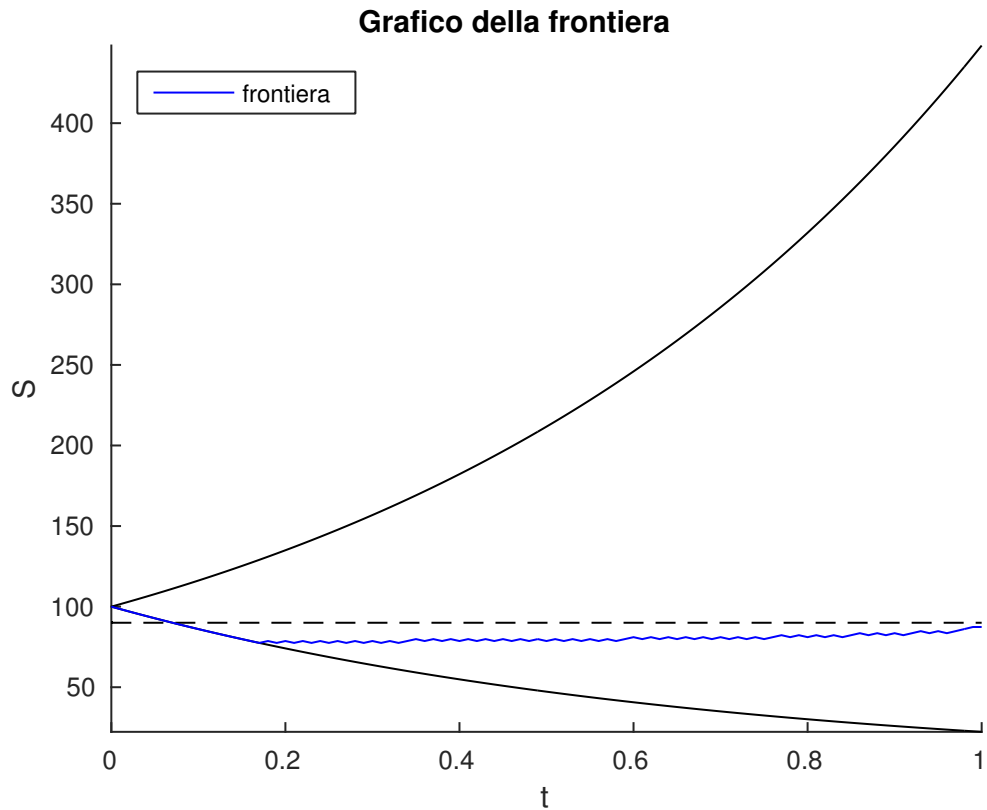


Figura 3.7: Frontiera di una *put* con  $S_0 = 100$  e  $K = 90$

Possiamo notare come inizialmente non convenga mai esercitare l'opzione, finché, da un certo momento in poi, per prezzi abbastanza bassi di  $S_t$ , convenga anche utilizzarla.

Nella figura 3.7 è rappresentata la frontiera nel medesimo spazio ma con valori di  $S_0$  e  $K$  diversi; in particolare,  $S_0 = 100$  e  $K = 90$ . Anche in questo caso la frontiera non attraversa la linea tratteggiata che indica il valore di  $K$  come ci aspettavamo. Possiamo notare come sia necessario aspettare più a lungo per avere valori di  $S$  per cui convenga esercitare l'opzione; questo ovviamente è dovuto al fatto che  $K$  è minore di  $S_0$  e quindi bisogna aspettare un tempo maggiore affinché il valore di  $S$  decresca almeno al di sotto del valore di  $K$ .



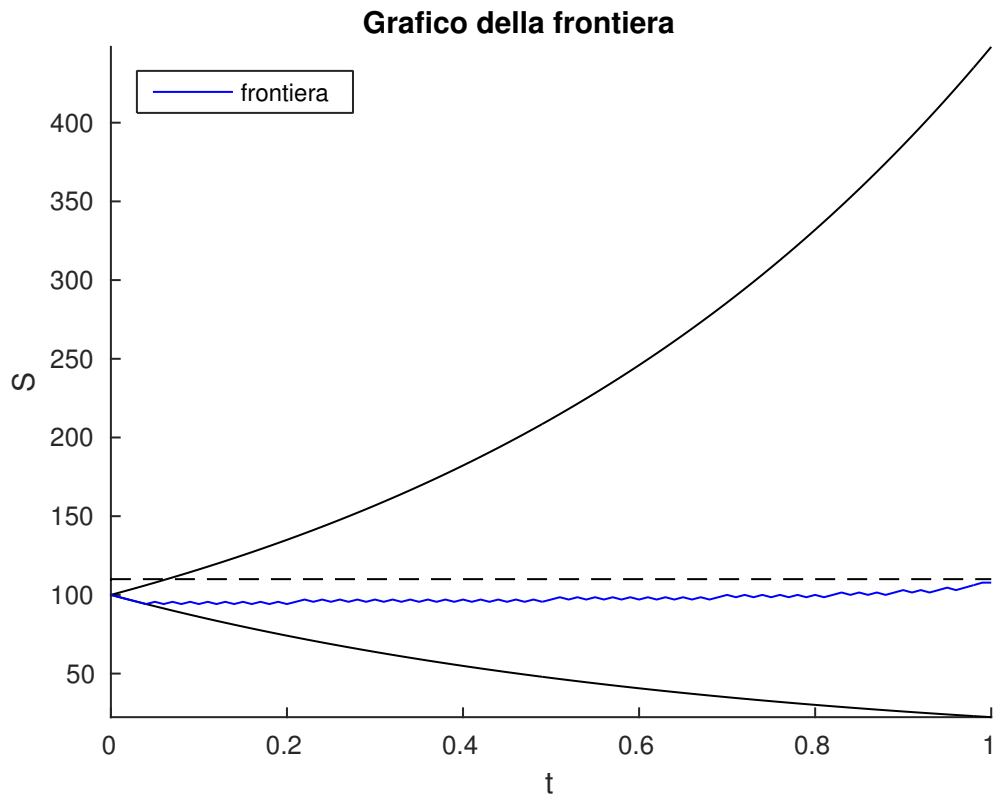


Figura 3.8: Frontiera di una *put* con  $S_0 = 100$  e  $K = 110$

Nella figura 3.8 invece, essendo  $K > S_0$ , basta aspettare poco tempo affinché applicare l'opzione convenga rispetto ad un prezzo futuro. Come detto prima anche qui la frontiera non interseca la linea tratteggiata. Possiamo notare che in tutti e tre i grafici la frontiera si avvicina sempre più alla linea tratteggiata. Infatti, più ci avviciniamo al tempo finale  $T$ , più il valore futuro diminuisce e quindi esercitare l'opzione diventa più conveniente, anche per valori molto vicini a  $K$ .

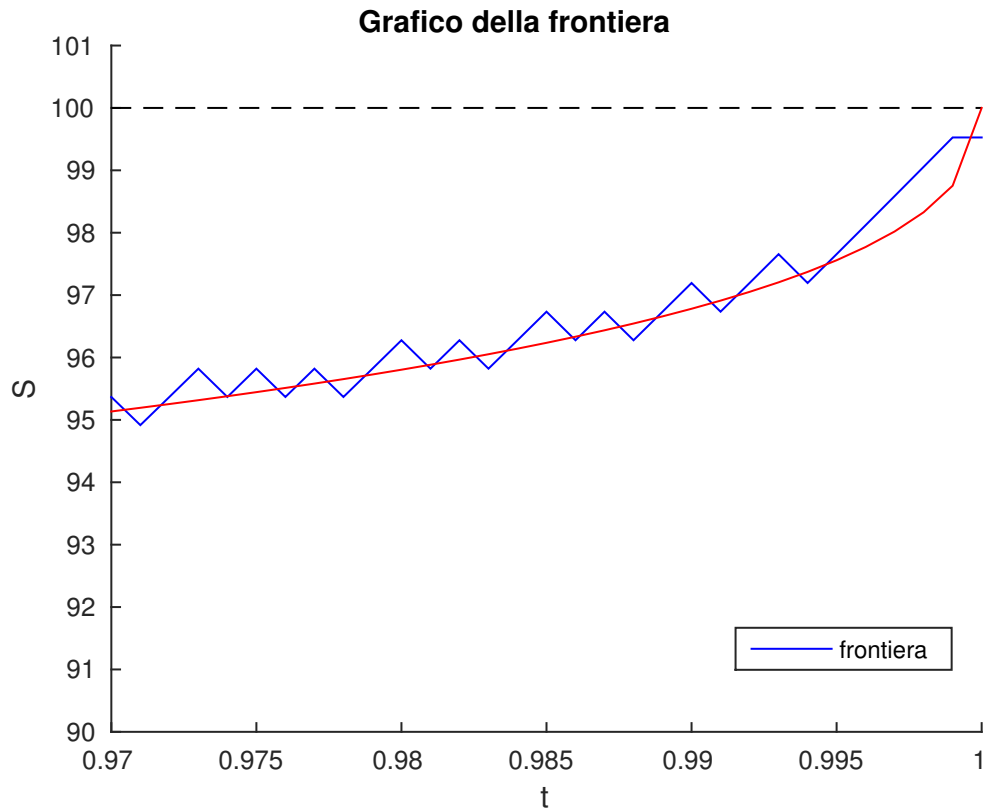


Figura 3.9: Confronto tra la frontiera di una *put* e l'approssimazione 3.2 vicino al tempo finale  $T$

Da un noto risultato in [3] sappiamo che per valori del tempo prossimi a  $T$  il comportamento del prezzo critico soddisfa la seguente espressione:

$$K - s(t) \sim K\sigma\sqrt{(T - t)\log(T - t)} \quad (3.2)$$

dove  $s(t)$  rappresenta la funzione della frontiera rispetto al tempo  $t$ . Dal grafico 3.9 si può notare come l'approssimazione numerica che abbiamo effettuato rispecchi ciò che ci si aspetterebbe dalla formula 3.2 quando  $t$  si avvicina al tempo finale  $T$ .

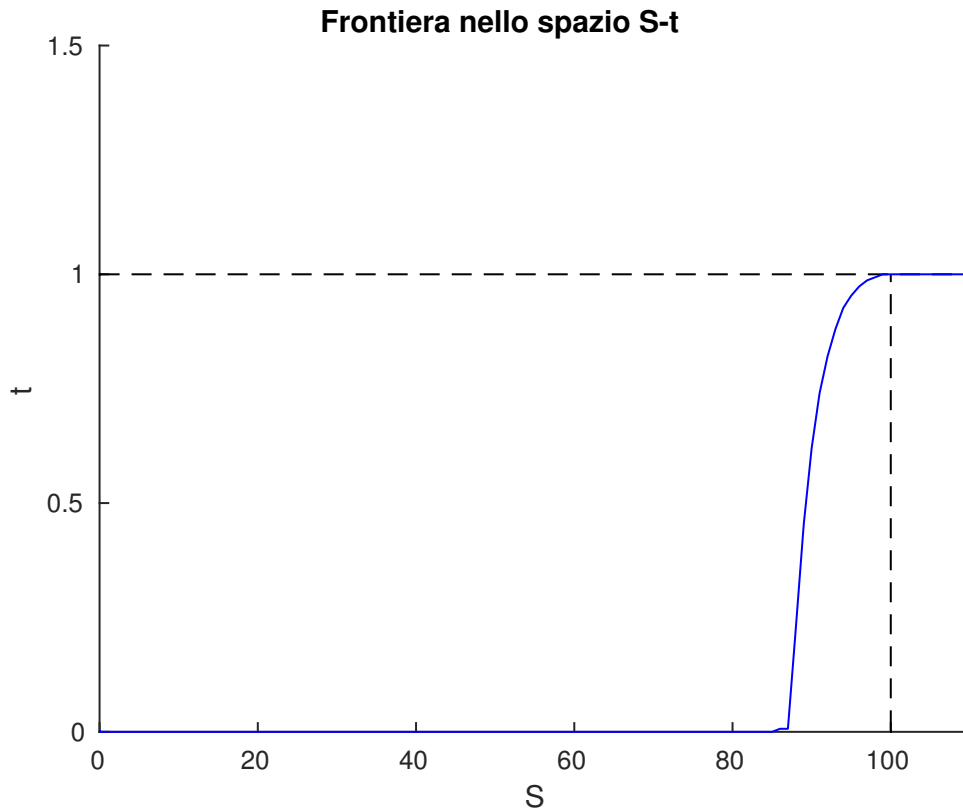


Figura 3.10: Frontiera nello spazio  $S t$  di una *put* con  $T = 1$  e  $N = 300$

Nella figura 3.10 abbiamo costruito un'altra rappresentazione della frontiera nello spazio  $S t$ . Abbiamo suddiviso l'intervallo di tempo  $[0, 1]$  in  $N = 300$  parti in modo tale da avere un grafico piú accurato; notiamo però come ci sia una piccola discontinuitá appena la frontiera si discosta dalla costante zero, dovuta all'approssimazione numerica. Nel grafico, la regione a sinistra della frontiera é quella in cui conviene esercitare l'opzione mentre quella a destra é quella in cui conviene aspettare. Vi é quindi una regione da  $S = 0$  a  $S = \bar{S}$  in cui conviene esercitare l'opzione in qualsiasi momento. Invece, per  $S > K$  conviene sempre aspettare. Infine, nella regione tra  $S = \bar{S}$  e  $S = K$ , abbiamo entrambe le possibilitá; fino ad un certo tempo  $t$  conviene aspettare, mentre dopo questo momento applicare l'opzione risulta essere la cosa migliore.



# Conclusione

Per concludere, cerchiamo di riassumere quelli che sono stati gli argomenti principali di questa tesi.

Nel primo capitolo abbiamo dato le prime definizioni e l'impianto teorico riguardanti le opzioni Americane. Abbiamo innanzitutto dimostrato il teorema di decomposizione di Doob, il quale é stato estremamente utile nelle dimostrazioni successive che ci hanno portato alla determinazione di un prezzo ottimale tramite l'involuppo di Snell. Dopo aver determinato un algoritmo per la determinazione del prezzo di arbitraggio di un'opzione Americana abbiamo individuato un intervallo nel quale vi sono tutte le possibili strategie ottimali.

Nel secondo capitolo abbiamo studiato il problema a tempo continuo, introducendo inizialmente una notazione adatta e poi definendo l'operatore differenziale di *Black&Scholes*. Nella seconda sezione invece é stato descritto il problema a frontiera libera per opzioni Americane in maniera qualitativa il quale mostra la complessità dello studio di questo tipo di opzioni a tempo continuo.

Nella terza sezione abbiamo trattato il problema ad ostacolo in maniera formale dimostrandone l'esistenza di una soluzione forte. Abbiamo anche enunciato, senza dimostrazione, un teorema che lega questi risultati teorici e generali al problema a frontiera libera; infatti non é ovvio questo legame a causa della presenza di una *SDE* nel caso delle opzioni Americane.

Infine, nel terzo capitolo, tramite un'implementazione Matlab, abbiamo potuto studiare il comportamento delle opzioni Americane ed Europee e il legame tra loro. Per prima cosa abbiamo mostrato che, all'aumentare di  $N$ , sia il prezzo di un'opzione Europea, sia quello di una Americana, convergono ad un certo valore. Da ciò abbiamo compreso che il modello discreto approssima bene quello continuo; inoltre si é notato che il prezzo di un'opzione Americana é sempre maggiore di quello di una Europea proprio come ci aspettavamo.

Nel secondo grafico abbiamo osservato cosa accade al prezzo all'aumentare del tempo  $T$  quando  $r > 0$ ; mentre il prezzo di un'opzione Europea tende a zero, quello di una Americana tende asintoticamente ad un certo valore. Abbiamo mostrato nel terzo grafico però che quando  $r = 0$  allora questo non accade ma i prezzi, che risultano essere uguali, divergono.

Il quarto e quinto grafico sono risultati abbastanza simili; in essi abbiamo studiato il comportamento del prezzo al variare di  $K$  e di  $S_0$ . In entrambi i casi vi sono regioni nelle quali il prezzo tende a zero e altre in cui il prezzo aumenta in maniera lineare.

Gli ultimi grafici invece si riferivano unicamente alle opzioni Americane e rappresentavano la frontiera in differenti spazi. In questo modo si é potuto dare una rappresentazione grafica del problema a frontiera libera nel caso di una *put* Americana. In particolare, si é notato che, per tempi prossimi a  $T$ , la nostra approssimazione numerica ha un comportamento simile a quella analitica in [3].

# Bibliografia

- [1] Pascucci A. *Calcolo stocastico per la finanza*. Milano, Springer, 2008
- [2] Pascucci A., Runggaldier W. J. *Finanza matematica: Teoria e problemi per modelli multiperiodali*. Milano, Springer, 2009
- [3] Lamberton D. Critical price for an American option near maturity in *Seminar on stochastic analysis, random fields and application*. Ascona, 1993