Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Geometria Proiettiva Sintetica, da Birkhoff a Faigle ed Herrmann

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Francesco Regonati

Correlatrice:
Chiar.ma Prof.
Francesca Cagliari

Presentata da:
Lorenzo Premi

2° Sessione
Anno Accademico 2016/2017

Indice

"Inutilmente, magnanimo Kublai, tenterò di descriverti la città di Zaira dagli alti bastioni. [...] Non di questo è fatta la città, ma di relazioni tra le misure del suo spazio e gli avvenimenti del suo passato [...]

Ma la città non dice il suo passato, lo contiene come le linee di una mano, scritto negli spigoli delle vie, nelle griglie delle finestre, negli scorrimano delle scale, nelle antenne dei parafulmini, nelle aste delle bandiere, ogni segmento rigato a sua volta di graffi, seghettature, intagli, svirgole."[1]

[1]"Le città Invisibili", Italo Calvino.

Introduzione

Questa tesi presenta una descrizione dei primi aspetti della Teoria dei Reticoli e della Teoria delle Categorie e una loro applicazione alla descrizione di un sistema di corrispondenze fra geometrie proiettive di incidenza in senso ampio e reticoli modulari nel caso finito dimensionale.

Le due Teorie prese in esame costituiscono efficaci linguaggi per descrivere parti importanti della geometria, dell'algebra, dell'analisi e della probabilità, sottolineando così la sostanziale unità della matematica stessa.

La Teoria dei Reticoli, essendo parte della Teoria dei Poset, inizia il suo studio dalla descrizione della struttura d'ordine canonicamente associata a vari oggetti matematici, arrivando a descrivere in forma sintetica molte parti della matematica. Esempi rilevanti di reticoli derivano dalla classe delle sottostrutture di una struttura algebrica ordinate dall'inclusione.

La Teoria delle Categorie concentra l'attenzione sullo studio delle relazioni fra oggetti matematici e fra le diverse tipologie di strutture matematiche. I principali strumenti di indagine di tale teoria sono i morfismi definiti fra gli oggetti di una categoria, i funtori definiti fra categorie e infine le trasformazioni naturali, definite fra funtori.

Fra le descrizioni delle due teorie precedentemente citate il primo capitolo traccia una breve presentazione dell'assiomatica della geometria proiettiva secondo Veblen e Young.[2] Si può osservare la maggiore semplicità di tale assiomatica rispetto a quella operata da Hilbert per identificare univocamente quella euclidea.

Di seguito viene esposta una generalizzazione della geometria proiettiva operata da Faigle ed Herrmann[3] allo scopo di fornire una visione geometrica dei reticoli modulari: in essa si ammettono punti e rette con 'pesi' diversi.

Il secondo capitolo è una prima applicazione della Teoria dei Reticoli e della Teoria delle Categorie alle geometrie proiettive intese in senso ampio, delineando un sistema di teoremi di rappresentazione nel caso di lunghezza finita.

In particolare vengono descritte nell'ordine: dualità fra insiemi e reticoli booleani; dualità fra poset e reticoli distributivi (Birkhoff, 1937); equivalenza fra geometrie proiettive e reticoli modulari complementati (Birkhoff, 1935) [4]; equivalenza fra geometrie proiettive su poset e reticoli modulari (Faigle ed Herrmann, 1981).

[2] Vedi [18].
[3] Vedi [23]
[4] Nelle geometrie proiettive considerate si ammettono rette con almeno due punti.

Nella costruzione della dualità fra reticoli distributivi e poset vengono presentati e utilizzati i rudimenti della Teoria delle Corrispondenze di Galois.

Le equivalenze fra geometrie proiettive e reticoli modulari complementati e fra geometrie proiettive su poset e reticoli modulari si limitano agli isomorfismi. La difficoltà di comprendere una classe più ampia di morfismi si intuisce nei reticoli modulari complementati: se un reticolo corrisponde esattamente ad una geometria proiettiva classica,[5] allora le uniche relazioni di congruenza che ammette sono quelle banali. Conseguentemente gli unici morfismi ammissibili sono le immersioni e i morfismi costanti.

Viene infine presentato il quadro complessivo delle corrispondenze esposte, mostrandone analogie e differenze per sottolineare il riflesso geometrico di ipotesi reticolari e il riflesso reticolare di ipotesi geometriche.

Nel lavoro della tesi si sono considerati gli articoli di Birkhoff del '35 e '37, i testi ad essi connessi come il classico "Projective Geometry" di Veblen e Young, libri successivi di Birkhoff stesso e uno di Rutherford. Infine si è considerato un loro sviluppo nell'articolo del 1981 di Faigle ed Herrmann che ha completato le simmetrie del sistema di corrispondenze, in essi implicitamente presente.

La tesi presenta gli argomenti in modo tendenzialmente autocontenuto, al fine di poter essere letta anche da uno studente di Matematica del primo anno che abbia seguito almeno un corso di base di Algebra.

[5] In cui ad ogni retta incidono almeno tre punti distinti.

Capitolo 1

Basi della Teoria

1.1 Teoria dei Poset e dei Reticoli

"Fare ordine" è una delle espressioni idiomatiche più comuni: essa descrive il processo alla base di ogni nostra scelta e di molta parte del lavoro intellettuale. Tale procedimento è così connaturato nelle attività quotidiane che spesso lo pratichiamo senza neppure rendercene conto. Anche nella matematica il concetto di ordine è parte centrale di molte strutture, o ricavabile da esse in maniera canonica. Viene quindi naturale pensare che una nozione così primitiva possa caratterizzare attraverso il suo linguaggio alcune proprietà nel modo più semplice ed elegante possibile: la branca della matematica che si prefigge tale scopo prende il nome di *Teoria dei Poset.*

Per chi si accinge al suo studio per la prima volta potrebbe sembrare strano che la sola relazione d'ordine contenga abbastanza informazioni da poter costituire un efficace strumento di indagine. Eppure già nei concetti di base della teoria dei poset si mostra come la relazione d'ordine associata alla maggior parte delle strutture matematiche permetta di definire canonicamente due operazioni, l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Da tali operazioni è inoltre possibile ricostruire l'ordine iniziale. I poset ove le precedenti affermazioni sono verificate prendono il nome di 'reticoli' e costituiscono uno strumento di analisi centrale nella presente tesi.

La *Teoria dei Reticoli* si afferma come parte autonoma della matematica negli anni '30 del ventesimo secolo ad opera di G. Birkhoff, Von Neumann, Ore, Stone e Kantorovitch.[1] Fra i lavori di G. Birkhoff verrà preso in esame il contenuto dell'articolo "Combinatorial Relations in Projective Geometries" e dell'articolo "Rings of Sets" in un esposizione che utilizza il linguaggio della teoria delle categorie. Attraverso le corrispondenze ivi descritte è infatti possibile apprezzare, anche nel caso finito dimensionale a cui ci si limita, la bellezza e l'efficacia della teoria dei reticoli nel descrivere le geometrie proiettive, intese in senso ampio.

La teoria dei reticoli utilizza a discrezione la struttura d'ordine e la struttura algebrica, in modo assolutamente naturale. Inoltre per la generalità del suo concetto di base essa riesce a descrivere efficacemente moltissime branche della matematica, fra cui l'algebra degli operatori, la teoria degli insiemi e la combinatoria algebrica.

[1]Vedi pag. iii, [3]

Nel seguito del paragrafo saranno presentati i risultati elementari della teoria, senza alcuna pretesa di esaustività. Lo scopo principale del paragrafo è permettere anche ad un lettore con nozioni di base di algebra di apprezzare la bellezza e le simmetrie della teoria dei reticoli ed arrivare a comprendere le corrispondenze presentate nel capitolo successivo, nella speranza che ciò gli consenta una maggiore comprensione delle strutture matematiche stesse.

1.1.1 Insiemi Parzialmente Ordinati (Poset)

Definizione 1. *Un* insieme parzialmente ordinato*, o* Poset *è una coppia ordinata* $(P, \leq)$ *ove* P *è un insieme e* $\leq$ *è una relazione d'ordine su* P*, ovvero*

- $\forall x \in P \quad x \leq x$ Proprietà Riflessiva
- $\forall x, y \in P \quad$ *se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *allora* $x = y$ Proprietà Antisimmetrica
- $\forall x, y, z \in P \quad$ *se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$ *allora* $x \leq z$ Proprietà Transitiva

Nota 1. *Per semplificare le notazioni, nel caso ciò non comporti ambiguità, per convenzione si identifica il poset con il solo insieme di base* P*.*

È importante notare che se P *ha almeno due elementi allora esso non definisce completamente il poset, lasciando un certo grado di arbitrarietà sulla relazione d'ordine.*

Notazione 1. *Sia* P *un Poset e siano* x *ed* y *elementi di* P*. Si adottano le seguenti notazioni:*

- $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$
- $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ *e* $x \neq y$
- *Le scritture* $x \nleq y$ *e* $y \ngeq x$ *significano entrambe che non vale* $x \leq y$*.*
  Si noti che $x \nleq y$ non *implica* $y \leq x$ *: i due elementi possono non essere confrontabili.*

Esempio 1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$ *dotati dell'ordine naturale sono dei poset.*

Esempio 2. *Se* $\mathcal{P}(X)$ *è l'insieme delle parti di un insieme* X*, allora la coppia ordinata* $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$ *è un poset.*

Se la cardinalità di X *è maggiore od uguale ad* 2 *si nota che non tutti gli elementi del poset sono fra loro confrontabili.*

Per esempio se $A := \{1, 2\}$*, allora* $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ *e* $\{b\} \nsubseteq \{a\}$*.*

Esempio 3. $\mathbb{N}$ *ordinato dalla relazione di divisibilità, indicata dal simbolo* $|$ *è un poset. Nuovamente è facile vedere che in tale poset esistono elementi non confrontabili: per esempio* $2 \nmid 3$ *e* $3 \nmid 2$*.*

Esempio 4. *I sottospazi dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$*, ordinati dalla relazione di inclusione, formano un poset.*

Si introducono le due tipologie più semplici di Poset, le quali vengono utilizzate come strumento di indagine nello studio dei poset.

Definizione 2. *Sia P un Poset. Si dice che:*

- *P è una* catena *se per ogni x, $y \in P$, se $x \nleq y$ allora $y \leq x$.*
- *P è una* anticatena *se per ogni x, $y \in P$, se $x \leq y$ allora $x = y$.*

Le definizioni di catena ed anticatena vanno in direzioni opposte: in una catena tutti gli elementi sono confrontabili fra loro, come in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ dotati dell'ordine naturale; in una anticatena al contrario ogni elemento è confrontabile solo con se stesso, mentre fra elementi distinti non intercorre alcuna relazione, come negli insiemi.

Condizioni di Finitezza

L'ordine definito sulle catene prende il nome di *ordine totale,* mentre l'ordine definito sulle anticatene prende il nome di *ordine discreto.*

Specialmente all'inizio dello studio di una nuova teoria, è bene osservare il maggior numero di proprietà nell'ambiente più semplice: solitamente ciò si traduce in una qualche nozione di finitezza. Viene quindi naturale dare la seguente definizione.

Definizione 3. *Un poset P si dice* finito *se la cardinalità di P, indicata con il simbolo $|P|$ è finita, cioè se P contiene un numero finito di elementi.*

Molti esempi significativi della teoria come gli insiemi infiniti dotati dell'ordine discreto, i quali hanno una struttura abbastanza semplice, o il poset dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ ordinati dall'inclusione, nella cui struttura algebrica come è noto è possibile definire una dimensione finita, non soddisfano tuttavia la condizione di finitezza.
Ciò suggerisce l'esistenza di nozioni di finitezza più sottili.

L'idea alla base della seconda condizione di finitezza deriva dall'osservazione delle catene. Supponiamo di considerare una catena finita $C: \ a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Essa ammette n 'salti': viene quindi naturale porre la seguente definizione.

Definizione 4. *Sia C una catena finita. Si definisce* lunghezza *di C come $l(C) := |C| - 1$.*

Per estendere la definizione 4 ai poset occorre considerare le catene in essi contenute.

Definizione 5. *Sia $(P, \leq)$ un poset. Diciamo che $(P', \leq')$ è un sottoposet di $(P, \leq)$ se $P' \subseteq P$ e per ogni x, $y \in P'$ si ha che $x \leq' y$ se e solo se $x \leq y$.*

Sia A un poset. Si dice che A è contenuto in P se è un sottoposet di P.

Osservazione 1. *Ogni sottoposet di una catena (risp. anticatena) è ovviamente una catena (risp. anticatena).*

Si può ora enunciare la seconda condizione di finitezza.

Definizione 6. *Un Poset P si dice di lunghezza finita*[2] *se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni catena C contenuta in P, $l(C) \leq n$.*

Un Poset finito è ovviamente di lunghezza finita. L'implicazione contraria è falsa.

Esempio 5. *Si consideri il poset dei numeri naturali su cui sia definito l'ordine discreto. Esso è di lunghezza finita pur essendo infinito.*

Il poset dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ ordinati dall'inclusione è un poset di lunghezza finita.

Esistono infine dei poset di lunghezza infinita nei quali ogni elemento vede sopra (risp. sotto) di se soltanto catene di lunghezza finita.

Definizione 7. *Un poset P si dice che soddisfa*

- *l'*Ascending Chain Condition *(ACC) se $\forall x \in P$, ogni catena crescente $x < a_1 < a_2 < \dots$ è finita.*
- *la* Descending Chain Condition *(DCC) se $\forall x \in P$, ogni catena decrescente $x > b_1 > a_2 > \dots$ è finita.*

Esempio 6. $\mathbb{N}$ *con la relazione d'ordine naturale e $(\mathbb{N}, |)$ sono due poset distinti, entrambi di lunghezza infinita, che soddisfano la (DCC).*

Un poset è di lunghezza finita soddisfa ovviamente sia l'(ACC) sia la (DCC). L'altra applicazione è falsa, come mostra il seguente esempio.

Esempio 7. *Si consideri il poset formato affiancando tutte le catene finite, in modo tale che due elementi sono confrontabili se e solo se appartengono alla stessa catena. Ovviamente tale poset soddisfa sia l'(ACC) sia la (DCC), ma non è di lunghezza finita, poichè per ogni naturale n esiste sempre una catena di lunghezza $n + 1$.*

Diagrammi di Hasse

A questo punto si può iniziare a rispondere a una domanda molto naturale: come fare a visualizzare un poset? È chiaro che non si possono rappresentare tutte le coppie della relazione $\leq$, poichè tale procedimento porterebbe anche per reticoli molto piccoli a rappresentazioni estremamente complicate. L'idea è rappresentare il più piccolo sottoinsieme della relazione d'ordine che permetta di ricostruire l'intera relazione.

Definizione 8. *Sia P un Poset, e siano x ed y elementi di P. Si dice che x* copre *y, e si indica con $x \succ y$ se e solo se $x > y$ e per ogni $z \in P$, se $x > z \geq y$ allora $z = y$.*

La notazione $y \prec x$ si legge y è coperto da x, ed equivale alla $x \succ y$.

La relazione di copertura è ovviamente un particolare sottoinsieme dalla relazione d'ordine: un elemento x copre un elemento y se è strettamente maggiore di y e non esiste alcun elemento del poset strettamente compreso fra essi.

La relazione di copertura può anche essere vuota, come nei poset dotati di ordine discreto od in $\mathbb{Q}$. Vale tuttavia la seguente proposizione.

[2] Si nota che Grätzer, in "General Lattice Theory" pag. 2, introduce il concetto di *larghezza* di un poset come la massima cardinalità delle anticatene in esso contenute.

Proposizione 1. *Se P è un poset di lunghezza finita allora la sua relazione di copertura determina completamente la sua relazione d'ordine.*

Dimostrazione. Sia $(P, \leq)$ un Poset di lunghezza finita, e sia $\prec$ la relazione di copertura associata alla relazione d'ordine $\leq$. Si definisce la relazione d'ordine $\sqsubseteq$ su P definita come:

- $\forall x \in P, \quad x \sqsubseteq x$
- $\forall x,\, y \in P,\ x \neq y, \quad x \sqsubseteq y$ se esistono $a_1, \ldots, a_n \in P$ tali che $x = a_1,\ y = a_n$ e valga $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n$.

Mostriamo che $\forall x,\, y \in P, \quad x \leq y$ se e solo se $x \sqsubseteq y$.

Se $x = y$ ciò è vero per definizione.

Si supponga ora $x \neq y$.
Se $x \sqsubseteq y$, allora esistono $a_1, \ldots, a_n$ come sopra, e per la proprietà transitiva di $\leq$ si ha $x \leq y$.
Si supponga $x < y$. Se non esiste $a \in P$ tale che $x < a < y$ allora ponendo $a_1 = x,\ a_2 = y$ si ha per definizione $x \sqsubseteq y$. In caso contrario si considera la catena $x < a < y$. Se non esiste nè b_1 nè b_2 tali che $x < b_1 < a$ e $a < b_2 < y$ allora il processo termina, in caso contrario si procede come prima. Tale algoritmo deve terminare perchè ad ogni passo la lunghezza della catena tra x ed y aumenta, e per definizione essa non può essere più lunga di un certo intero n. Dunque rinominando opportunamente gli a_i si ha $x \sqsubseteq y$.

□

Poichè nei poset di lunghezza finita la relazione di copertura determina completamente la relazione d'ordine, nei diagrammi li rappresentano, detti *diagrammi di Hasse,* viene indicata la sola relazione di copertura.

In un diagramma di Hasse ogni elemento del Poset P corrisponde ad un punto. La relazione di copertura $x \prec y$ viene rappresentata da una linea che sale dall'elemento x all'elemento y. La relazione d'ordine può quindi essere ricostruita come sopra, ovvero due elementi sono fra loro confrontabili se e solo se fra l'uno e l'altro sale un percorso di linee che li collegano.

Di seguito vengono rappresentati i diagrammi di Hasse di una catena e di una anticatena.

Anticatena

Catena

Due nozioni di Dualità

'Gli ultimi saranno i primi'[3] recita un famoso versetto del Vangelo, cogliendo un aspetto fondamentale delle strutture d'ordine: ad ognuna di esse ne corrisponde una 'duale', il cui ordine è invertito. L'idea di invertire l'ordine, presente anche nelle 'Città Invisibili' di Calvino, non ha soltanto una valenza religiosa o letteraria ma è connaturata nella teoria dei poset, e più in generale nella Teoria delle Categorie[4] creando affascinanti simmetrie e generando nuovi concetti.

Definizione 9. *Sia $(P, \leq)$ un poset. Si definisce la relazione d'ordine duale $\leq^{op}$ su P tale che*

$$\forall x,\, y \in P, \quad x \leq^{op} y \Leftrightarrow y \leq x$$

$(P, \leq^{op})$ è i poset duale di $(P, \leq)$ e se non c'è possibilità di errore lo si indica brevemente con il simbolo P^{op}.

A tale definizione è collegato un importante principio logico che permette di risparmiare molto tempo, sia nel definire gli oggetti sia nel dimostrare molti teoremi: il *Principio di dualità*. Per prima cosa si chiarisce cosa si intende con 'dualità'.

Definizione 10. *Sia π proposizione espressa nei termini della teoria dei poset. Si definisce la sua proposizione duale, e la si indica con π^{op}, la proposizione π ove si sia sostituito il simbolo $\leq$ con il simbolo $\geq$ e viceversa. Tale processo prende il nome di* dualizzazione.

Il principio di dualità afferma che se una proposizione π è vera per ogni poset, allora anche la sua duale π^{op} è vera per ogni poset. Inoltre la dimostrazione di π^{op} si ottiene dualizzando la dimostrazione di π.

Ideali e Filtri

Negli insiemi parzialmente ordinati, i sottoinsiemi più interessanti da studiare sono i 'chiusi' rispetto alla relazione d'ordine: gli ideali ed i filtri.

Definizione 11. *Sia P un poset. Si dice che un suo sottoinsieme A è un* ideale *o* ideale discendente *di P se $\forall a \in A$, $\forall b \in P$ se $b \leq a$ allora $b \in A$.*

Dualmente si dice che A è un filtro *se $\forall a \in A$, $\forall b \in P$ se $b \geq a$ allora $b \in A$.*

Un ideale A viene detto ideale principale *se esiste $a \in A$ tale che $A = \{b \in P |\, b \leq a\}$ e lo si indica con il simbolo $\downarrow a$.*

Dualmente vengono definiti i filtri principali.

In una anticatena tutti i sottoinsiemi sono sia ideali sia filtri. Inoltre gli ideali ed i filtri principali sono i singoletti.

In una catena finita tutti gli ideali e tutti i filtri sono banalmente principali. Se tuttavia si lascia cadere l'ipotesi di finitezza ciò non è più valido, come mostra il seguente esempio.

[3](Matteo 20,1-16)

[4]vedi paragrafo 2.4

Esempio 8. *Si consideri $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordine naturale. È banale osservare che l'insieme*

$$A := \{a \in \mathbb{Q}| \; a < 1\}$$

è un ideale. Si osserva che per ogni $a \in A$, si ha $\frac{a+1}{2} \in A$ e $a < \frac{a+1}{2}$, da cui A non è principale.

L'ordine su un poset P si riflette sull'ordine del poset dei suoi ideali principali tramite il seguente lemma.

Lemma 1. *Sia P un poset e siano a, $b \in P$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $a \leq b$
2. $\downarrow a \subseteq \downarrow b$
3. *Per ogni ideale $Q \subseteq P$, se $b \in Q$ allora $a \in Q$.*

Massimi, Massimali, Estrei Superiori e loro duali

Strettamente legati al concetto di ordine sono il concetto di massimo e di minimo.

Definizione 12. *Sia P un Poset. Un elemento $y \in P$ si dice un elemento massimo del poset P se $x \leq y$ per ogni $x \in P$. Un elemento minimo è definito dualmente.*

I poset che ammettono sia elemento massimo sia elemento minimo sono detti limitati.

In un poset P, se esiste un elemento massimo, esso unico per la proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine e si indica con il simbolo 1_P, o semplicemente 1 se non esiste possibilità di equivoco.
Dualmente, se esiste un elemento minimo, esso è unico, e lo si indica con 0_P, o semplicemente 0.

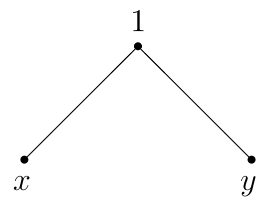
Una naturale generalizzazione di elemento di massimo, è quella di elemento massimale. Si supponga di discutere di pugilato con un amico, chiedendosi chi sia l'alteta più forte. La risposta a tale domanda è soggettiva: esiste soltanto un miglior atleta per ogni categoria di peso, ovvero esistono diversi elementi massimali.

Definizione 13. *Sia P un Poset. Un elemento $x \in P$ si dice* massimale *nel poset P se per ogni $y \in P$, se $x \leq y$ allora $x = y$. Dualmente si definisce la nozione di* elemento minimale.

Nota 2. *Se x è l'elemento massimo in un poset P, allora ovviamente x è un elemento massimale in P.*

La definizione di elemento massimo è più forte di elemento massimale, poichè richiede che tutti gli elementi del reticolo siano minori dell'elemento massimo, e dunque con esso confrontabili, mentre per un elemento massimale, non c'è nessuno più grande di esso, ma possono esistere altri elementi con esso non confrontabili.

Nel seguente diagramma di Hasse, 1 *è l'elemento massimo ed x e y sono elementi minimali distinti: in tale poset non esiste l'elemento minimo.*



Osservazione 2. *Negli insiemi totalmente ordinati, l'eventuale massimo e gli eventuali elementi massimali coincidono.*

Sebbene il concetto di elemento massimale (risp. minimale) sia più generale di elemento massimo (risp. minimo), va notato che non tutti i poset ammettono tali elementi: come esempio si può prendere $\mathbb{Z}$ con l'ordine naturale, il quale non ammette nè elementi massimali nè minimali.

Tuttavia se il poset ha lunghezza finita, allora ammette almeno un elemento massimale ed un elemento minimale.

Lemma 2. *Sia P un poset non vuoto.*

- *Se P soddisfa l'(ACC), allora esiste un elemento massimale in L.*
- *Se P soddisfa la (DCC), allora esiste un elemento minimale in L.*

Un altro modo per generalizzare il concetto di massimo è suggerito dal seguente esempio.

Si supponga di progettare una vacanza fra amici, ed una parte del gruppo propone una località appenninica per le escursioni, mentre un altra propone di andare a Nizza per andare al mare e visitare la Provenza. La scelta potrebbe cadere sulle Cinque Terre, ovvero una località che comprenda le due esigenze e sia più 'vicina' possibile alle due proposte originali.

Definizione 14. *Sia P un poset, e sia $S \subseteq P$ un sottoinsieme (eventualmente infinito) di P. Un elemento $x \in P$ è un* maggiorante *di S se $x \geq s$ per ogni $s \in S$.*

*Si dice che y è l'*estremo superiore *di S se x è il minimo dei maggioranti di S e lo si indica con il simbolo $\bigvee S$.*

*Dualmente si definisce l'*estremo inferiore *di S e lo si indica con il simbolo $\bigwedge S$.*

Notazione 2. *Se $S = \{x, y\}$, l'estremo superiore di S si indica con il simbolo $x \vee y$, mentre l'estremo inferiore di S viene indicato con il simbolo $x \wedge y$. L'estremo superiore di S in tal caso sarà anche detto l'estremo superiore di x ed y, e dualmente per l'estremo inferiore.*

Un altro modo di interpretare l'estremo superiore è di vederlo come il miglior sostituto dell'elemento massimo di un insieme.

Esempio 9. *Considerando $\mathbb{R}$ dotato dell'ordine naturale, sia*[5]

$$A := \mathbb{Q}^- \cup \{a \in \mathbb{Q}^+ |\ a^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}$$

Si verifica facilmente che $\bigvee A = \sqrt{2}$, ovvero il numero reale che meglio fungerebbe da massimo di tale insieme.

Tale idea può essere applicata anche al vuoto, come mostra la seguente osservazione.

Osservazione 3. *In un poset P esiste $\bigvee \emptyset$ se e solo se esiste l'elemento minimo 0, e in tal caso si ha $\bigvee \emptyset = 0$.*

Si ha infatti che $\forall p \in P$, è verificato che $y \leq p$, $\forall y \in \emptyset$, ovvero l'insieme dei maggioranti di $\emptyset$ è P stesso, da cui segue per definizione di estremo superiore come minimo dei maggioranti che $\bigvee \emptyset = 0$.

Dualmente in P esiste $\bigwedge \emptyset$ se e solo se esiste l'elemento massimo 1, e in tal caso si ha $\bigwedge \emptyset = 1$.

Considerando la vicinanza fra il concetto di estremo inferiore (risp. inferiore) e di elemento massimo (risp. minino) di un sottoposet, non stupisce la seguente osservazione.

Osservazione 4. *Siano x ed y elementi di un poset P. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

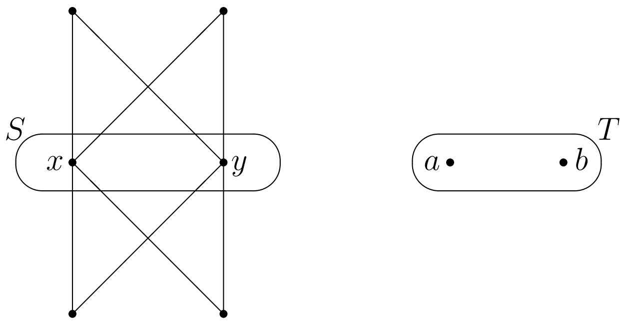
1. $x \leq y$
2. $x \vee y = y$
3. $x \wedge y = x$

Come non tutti i poset ammettono massimo e minimo, così possono non esistere estremo superiore ed estremo inferiore per tutti i sottoinsiemi di un poset.

Per comprendere le principali ragioni di ciò è conveniente concentrare l'attenzione sui sottoinsiemi di S costituiti da due elementi.

I seguenti diagrammi di Hasse rappresentano due poset in cui sono sintetizzate le principali ragioni della non esistenza dell'estremo superiore ed inferiore.

Nel diagramma di sinistra gli elementi dell'insieme $S := \{x, y\}$ sono entrambi coperti da due elementi non confrontabili, mentre nel diagramma di destra gli elementi dell'insieme $T := \{a, b\}$ non ammettono alcun elemento maggiore di entrambi.



[5] $\mathbb{Q}^+ := \{a \in \mathbb{Q}|\ 0 \leq a\}$ $\quad\mathbb{Q}^- := \{b \in \mathbb{Q}|\ b \leq 0\}$

La non esistenza dell'estremo superiore di un insieme infinito può anche essere dovuta alla mancanza di una certa nozione di completezza del reticolo considerato.

Esempio 10. *L'insieme A definito come nell'esempio 9, ovvero*

$$A := \mathbb{Q}^- \cup \{a \in \mathbb{Q}^+ | \ a^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}$$

non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Come è noto infatti $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e poichè $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ per ogni maggiorante q di A, esiste un $q' \in \mathbb{Q}$ tale che $\sqrt{2} < q' < q$.

Morfismi di Poset

Quando ci si accinge allo studio di una particolare classe di strutture matematiche, non ci si può esimere dallo studio delle relazioni fra esse. Fra le funzioni definite sui loro insiemi di base, dette 'protomorfismi', è bene identificare quelle significative rispetto alle strutture studiate. Sono da considerarsi 'buoni' soltanto quei protomorfismi che rispettano le relazioni tipiche della struttura, i quali assumono la denominazione di *morfismi.*

Poichè i poset sono insiemi su cui è definita una relazione d'ordine, i morfismi di poset saranno le funzioni crescenti.

Definizione 15. *Siano $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$ due Poset, e sia $\phi : \ P \to Q$ una funzione. Si dice che ϕ è un morfismo di Poset se*

$$\forall x,\, y \in P, \quad x \leq_P y \ \Rightarrow \ \phi(x) \leq_Q \phi(y)$$

Un esempio di morfismo di poset estremamente semplice ma importante è l'identità insiemistica.

Osservazione 5. *Si può facilmente provare che la composizione di due morfismi di poset è un morfismo di poset.*

Una volta identificati i morfismi di una particolare classe di strutture algebriche, è interessante capire chi sono gli 'isomorfismi'.

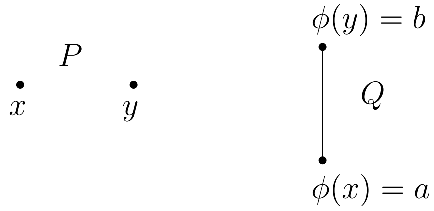
Il concetto di isomorfismo permette infatti di dare un significato rigoroso all'affermazione 'due elementi della classe di strutture considerata hanno la *stessa* struttura', ovvero permette di stabilire una partizione della classe in esame tale che una affermazione è vera in un elemento se e solo se essa è vera in tutti gli elementi ad esso isomorfi.

Nelle strutture algebriche[6] un isomorfismo è un morfismo sia iniettivo sia suriettivo. Tale affermazione tuttavia in un ambito più generale non corrisponde più alla nozione desiderata, come mostra il seguente esempio.

[6]Insiemi dotati di operazioni finitarie, ovvero ogni operazione richiede un numero finito di variabili in ingresso.

Esempio 11. *Sia $(P, \leq)$ il poset discreto in cui $P = \{x,\, y\}$ e sia $(Q, \leq')$ la catena tale che $Q = \{a,\, b\}$ ove $a \leq' b$.*

La funzione ϕ definita come in figura è un morfismo di poset biiettivo ma non può essere un isomorfismo, poichè P è un anticatena, Q è una catena e i due concetti differiscono in ogni poset di cardinalità maggiore od uguale a 2.



Una definizione di isomorfismo è la seguente.

Definizione 16. *Siano P e Q poset, un morfismo $\phi :\ P \to Q$ si dice isomorfismo se esiste un morfismo $\zeta :\ Q \to P$ tale che $\zeta \circ \phi = id_P$ e $\phi \circ \zeta = id_Q$.*

In tal caso P e Q sono detti isomorfi.

Osservazione 6. *La relazione di isomorfismo sui poset, definita ponendo per ogni due poset P e Q,*

$$P \cong Q \text{ se e solo se esiste un isomorfismo } P \to Q$$

è una relazione di equivalenza, inducendo quindi una partizione sulla classe dei poset avente le proprietà desiderate.

Un'altra naturale definizione di isomorfismo equivalente a quella data è la seguente.

Sia $\phi :\ P \to Q$ una funzione fra i poset P e Q.
ϕ è un isomorfismo se è biiettiva e

$$\forall x,\, y \in P, \quad x \leq y \text{ in } P \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y) \text{ in } Q$$

La seguente proposizione giustifica quanto detto.

Proposizione 2. *Siano P e Q poset e $\phi :\ P \to Q$ un morfismo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *ϕ è un isomorfismo.*
2. *ϕ è un morfismo suriettivo e $\forall x,\, y \in P \quad x \leq y$ in P se e solo se $\phi(x) \leq \phi(y)$ in Q*

Dimostrazione.

1. $\Rightarrow$ 2. Per ipotesi esiste $\phi^{-1} :\ Q \to P$ tale che $\phi^{-1} \circ \phi = id_P$ e $\phi \circ \phi^{-1} = id_Q$.

   Per ogni $y \in Q$ si ha che $y = (\phi \circ \phi^{-1})(y) = \phi(\phi^{-1}(y))$, da cui ϕ è suriettiva.

   Poichè sia ϕ che ϕ^{-1} sono morfismi, si ha banalmente per ogni $x\, y \in P, \quad x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$, ove l'implicazione ($\Leftarrow$) vale per le proprietà di ϕ^{-1}.

2. $\Rightarrow$ 1. Come primo passo si mostra che, se ϕ rispetta le ipotesi del punto 2., allora è anche iniettiva.

   Si considerino gli elementi $x, y \in P$, se $\phi(x) = \phi(y)$, allora si ha $\phi(x) \leq \phi(y)$ e $\phi(y) \leq \phi(x)$, da cui $x \leq y$ e $y \leq x$, e per la proprietà transitiva $x = y$.

   Ora, poichè ϕ è biiettiva, ammette inversa insiemistica ϕ^{-1}. Per le proprietà di ϕ si ha che ϕ^{-1} è anch'essa un morfismo, il quale soddisfa le ipotesi di inversa reticolare, e quindi ϕ è un isomorfismo.

$\square$

La proposizione 2 permette di generalizzare la definizione di sottoposet a quella di immersione.

Definizione 17. *Siano $(P, \leq)$ e $(Q, \leq')$ due Poset, e sia $\phi : \ P \rightarrow Q$ morfismo iniettivo. Se*

$$\forall x, y \in P, \quad x \leq y \text{ in } P \Leftrightarrow \phi(x) \leq' \phi(y) \text{ in } Q$$

allora si dice che ϕ è una immersione d'ordine, *e si indica $\phi : \ P \hookrightarrow Q$.*
In tal caso si dice che P viene immerso in *Q.*

L'esistenza di una immersione $i : \ P \hookrightarrow Q$ permette di affermare l'esistenza di un sottoposet di Q isomorfo a P, tramite la corestrizione di i alla sua immagine.

Un'altra importante classe di morfismi che vengono definiti sono i morfismi$-\{0, 1\}$, i quali rispettano la struttura dei poset limitati conservando l'elemento massimo e l'elemento minimo.

Definizione 18. *Siano P e Q due poset limitati. Si dice che un morfismo $\phi : \ P \rightarrow Q$ è un morfismo$-\{0, 1\}$ se valgono le seguenti condizioni:*

- $\phi(0_P) = 0_Q$
- $\phi(1_P) = 1_Q$

Sono infine da notare due importanti categorie di morfismi di poset: i $\vee-$morfismi e gli $\wedge-$morfismi.

Definizione 19. *Siano P, Q poset e $\sigma : \ P \rightarrow Q$ una funzione.*

σ si dice un $\vee-$morfismo (risp. $\wedge-$morfismo) se
$\forall a, b \in P$, se esiste $a \vee b$ (risp. $a \wedge b$), allora esiste $\sigma(a) \vee \sigma(b)$ (risp. $\sigma(a) \wedge \sigma(b)$) e si ha $\sigma(a) \vee \sigma(b) = \sigma(a \vee b)$ (risp. $\sigma(a) \wedge \sigma(b) = \sigma(a \wedge b)$).

Per l'osservazione 4 un $\vee-$morfismo (risp. $\wedge-$morfismo) è un morfismo di poset.

Costruzione di Nuovi Poset

Si presentano infine due modi canonici di costruire nuovi poset a partire da quelli dati: l'unione disgiunta ed il prodotto diretto[7] .

Definizione 20. *Dati due poset* $(P, \leq_P)$ *e* $(Q, \leq_Q)$*, si definisce:*

- il poset unione disgiunta $(P \dot{\cup} Q, \leq)$ *avente come insieme di base l'unione disgiunta insiemistica di* $P \dot{\cup} Q$*, dotata della relazione d'ordine* $\leq$ *tale che* $\forall x,\, y \in P \dot{\cup} Q,\ x \leq y$ *se e solo se* $p,\, q \in P$ *e* $p \leq_P q$ *oppure* $p,\, q \in Q$ *e* $p \leq_Q q$*.*
- il poset prodotto diretto $(P \times Q, \leq)$ *avente come insieme di base il prodotto cartesiano insiemistico* $P \times Q$ *dotato della relazione d'ordine* $\leq$ *tale che* $\forall (p_1, q_1),\, (p_2, q_2) \in P \times Q, \quad (p_1, q_1) \leq (p_2, q_2)$ *se e solo se* $p_1 \leq_P p_2$ *e* $q_1 \leq_Q q_2$*.*

La definizione 20 può essere sollevata ad una famiglia qualsiasi di poset come segue.

Definizione 21. *Data la famiglia di poset* $\{(P_\alpha, \leq_\alpha)|\ \alpha \in A\}$*,*

- il poset unione disgiunta $(\dot{\bigcup}_{\alpha \in A} P_\alpha, \leq)$ *come l'unione disgiunta insiemistica* $\dot{\bigcup}_{\alpha \in A} P_\alpha$ *dotata della relazione d'ordine*

$$\forall p,\, q \in \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} P_\alpha, \quad p \leq q \Leftrightarrow \exists \beta \in A \text{ tale che } p,\, q \in P_\beta \text{ e } p \leq_\beta q$$

- il poset prodotto diretto $(\prod_{\alpha \in A} P_\alpha, \leq)$ *come l'insieme delle funzioni*

$$\prod_{\alpha \in A} P_\alpha = \{f:\ A \to \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} L_\alpha |\ \forall \alpha \in A, \quad f(\alpha) \in L_\alpha\}$$

ordinato dalla relazione d'ordine

$$\forall f,\, g \in \prod_{\alpha \in A} P_\alpha, \qquad f \leq g \ \Leftrightarrow\ \forall \alpha \in A, \quad f(\alpha) \leq g(\alpha) \text{ in } L_\alpha$$

La definizione del prodotto diretto di poset sebbene sia classica, potrebbe non risultare di facile comprensione per il lettore più inesperto. Come esempio chiarificatore si prenda come insieme degli indici $A = \{1, 2\}$ il quale indicizza due poset P_1 e P_2 : dalla precedente definizione risulta che l'insieme di base del poset prodotto è l'insieme $\{\big(f(1), f(2)\big)|\ f(1) \in P_1,\ f(2) \in P_2\}$, ritrovando la definizione più scolastica di prodotto diretto.

Notazione 3. *Se* $\forall \alpha \in A,\ P_\alpha = P$*, la notazione* $\prod_{\alpha \in A} P_\alpha$ *si alleggerisce in* P^A*, e l'insieme dei suoi elementi costituiscono l'insieme delle funzioni* $f:\ A \to L$*.*

Si dimostra che le definizioni 20 e 21 individuano dei poset, qualora tutti gli elementi della famiglia di cui si fa l'unione disgiunta e il prodotto diretto siano dei poset.

[7] Si rimanda per una trattazione più completa delle costruzioni di poset a pag. 17, [8].

Esempi Significativi

Giunti alla fine di questo paragrafo ci si accinge infine a rivedere due esempi significativi ove agiscono le nozioni presentate.

Esempio 12. *Si consideri il poset* $(\mathbb{N}\setminus\{0\}, |)$, *ovvero il poset dei naturali ordinati dalla relazione di divisibilità.*

Per il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica, ogni numero naturale $a \neq 0$ *può essere scritto in uno ed un solo modo come*

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$$

ove per ogni $p \in \mathbb{P}$, $\alpha_p \in \mathbb{N}$. *È bene osservare che in ciascuna di tali scritture soltanto un numero finito di numeri primi hanno esponente diverso da* 0.

Indicato con $\mathbb{P}$ *l'insieme di tutti i numeri primi, tale teorema descrive quindi una biiezione fra* $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ *e le funzioni* $f : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ *tali che* $f(p) \neq 0$ *per un numero finito di numeri primi. Tale insieme sarà indicato con il simbolo* $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$, *poichè è il sottoposet di* $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ *delle funzioni nulle* quasi dappertutto.[8]

Dato un numero naturale non nullo a, *sia* $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ *la sua scomposizione unica in potenze di primi. Tale biiezione associa ad* a *la funzione*

$$f_a : \mathbb{P} \to \left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$$
$$p \mapsto \alpha_p$$

È facile verificare che, dati a, $b \in \mathbb{N}$ *aventi le decomposizioni in potenze di primi* $a = p_1^{\alpha_1} * p_2^{\alpha_2} * \cdots * p_n^{\alpha_n}$ *e* $b = q_1^{\beta_1} * q_2^{\beta_2} * \cdots * q_m^{\beta_m}$, *si ha*

$$a|b \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \exists j \in \{1, \dots, m\} \text{ tale che } p_i = q_j \text{ e } \alpha_i \leq \beta_j$$

Per quanto detto, la biiezione descritta è un isomorfismo di poset, ovvero $(\mathbb{N}, |)$ *è isomorfo come poset a* $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$.

Alla base dell'esempio 12 sta il teorema fondamentale dell'Aritmetica, il quale garantisce che ogni elemento sup-irriducibile del reticolo $(\mathbb{N}, |)$ è una potenza di un numero primo.

Esempio 13. *Si consideri* $\mathbb{Q}$ *dotato dell'ordine naturale e si indichi la classe degli ideali di* $\mathbb{Q}$ *con il simbolo* $\mathfrak{I}(\mathbb{Q})$.

Una domanda che potrebbe sorgere dalla lettura degli esempi 8 e 9 è chi sia il poset $\big(\mathfrak{I}(\mathbb{Q}), \subseteq\big)$.

Si nota in primo luogo che la funzione

$$i : \mathbb{Q} \to \mathfrak{I}(\mathbb{Q})$$
$$a \mapsto \downarrow a = \{x \in \mathbb{Q} | x \leq a\}$$

è un immersione di poset per il Lemma 1, ovvero per quanto detto il poset degli ideali d'ordine di $\mathbb{Q}$ *contiene un sottoposet isomorfo a* $\mathbb{Q}$ *stesso. Tale funzione tuttavia non è suriettiva, come mostra l'esempio 9.*

Si verifica facilmente che le sezioni di Dedekind formano un poset isomorfo a $\big(\mathfrak{I}(\mathbb{Q}), \subseteq\big)$, *il quale risulta essere quindi una costruzione concreta di* $\mathbb{R}$.

[8] Tali che $f(p) \neq 0$ per un numero finito di $p \in \mathbb{P}$.

1.1.2 Reticoli

Si analizzano ora quei particolari poset per i quali è possibile definire una struttura algebrica derivabile canonicamente dalla sola relazione d'ordine, i *reticoli.* Tali particolari poset derivano la loro importanza oltre che dalla semplicità della loro definizione, dall'importanza degli esempi che ad essa afferiscono, come il poset delle sottoalgebre di un algebra.

Due Definizioni Equivalenti

Definizione 22. *Sia $(L, \leq)$ un Poset non vuoto. Si dice che L è un* reticolo *se per ogni coppia di elementi x, $y \in L$ esiste l'estremo superiore di x ed y, indicato con $x \vee y$, e l'estremo inferiore di x ed y, indicato con $x \wedge y$.*

Si nota che la definizione 22 è autoduale, e quindi il principio di dualità dei poset può essere ristretto alla teoria dei reticoli.

Il concetto di dualità percorre l'intera teoria dei reticoli, fungendo da potente strumento per risparmiare tempo e creando affascinanti simmetrie.

Esso tuttavia può essere applicato soltanto a quelle classi di poset chiuse rispetto alla dualità: la classe dei reticoli lo è, insieme ad altre classi contenenti esempi rilevanti, come la classe dei reticoli distributivi e quella dei reticoli modulari che verranno presentate nel seguito.

Va tutttavia notato che non tutte lo sono: per esempio, il reticolo duale del reticolo dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione infinita non è detto che sia isomorfo al reticolo dei sottospazi di uno spazio vettoriale.

In un reticolo $(L, \leq)$ si possono quindi definire due funzioni binarie: l'estremo superiore e l'estremo inferiore.

$$\vee : L \times L \to L, \quad (x, y) \mapsto x \vee y$$

$$\wedge : L \times L \to L, \quad (x, y) \mapsto x \wedge y$$

Esempio 14. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$ *sono reticoli, ove dati due elementi l'estremo superiore è il maggiore dei due e l'estremo inferiore è il minore.*

Esempio 15. *Sia X un insieme e $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti.*

$\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$ *è un reticolo ove l'estremo superiore corrisponde all'unione e l'estremo inferiore all'intersezione.*

Esempio 16. *Si consideri il poset $(\mathbb{N}, |)$, ovvero i numeri naturali ordinati dalla relazione di divisibilità.*

Per ogni a, b, $c \in \mathbb{N}$, per la definizione 14 si ha che c è l'estremo superiore di a e di b se $a|c$ e $b|c$ e per ogni $d \in \mathbb{N}$ tale che $a|d$ e $b|d$, allora $c|d$.

In tale poset l'estremo superiore di due numeri è dunque per definizione il minimo comune multiplo, e dualmente si mostra che l'estremo inferiore di due numeri è il massimo comun divisore.

Poichè ogni coppia di numeri naturali ammette il minimo comune multiplo ed il massimo comun divisore, $(\mathbb{N}, |)$ *è un reticolo.*

Tale reticolo è limitato: il suo elemento massimo è il numero 0 *e il suo elemento minimo è il numero* 1.

Si enunciano ora alcune proprietà algebriche dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.

Proposizione 3.
Se $(L, \leq)$ *è un reticolo, allora valgono le seguenti identità:* $\forall x,\, y,\, z \in L$

(L1) $x \vee y = y \vee x$ (L1') $x \wedge y = y \wedge x$ *Proprietà Commutativa*

(L2) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (L2') $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ *Proprietà Associativa*

(L3) $(x \vee y) \wedge x = x$ (L3') $x \vee (y \wedge x) = x$ *Legge di Assorbimento*

(L4) $x \vee x = x$ (L4') $x \wedge x = x$ *Idempotenza*

Dimostrazione. Si dimostrano le identità (L1), (L2), (L3) e (L4), poichè poichè le restanti seguono per dualità.

- Per definizione si ha $x \vee y = \bigvee\{x,\, y\} = \bigvee\{y,\, x\} = y \vee x$
- $(x \vee y) \vee z = \bigvee\{x,\, y\} \vee z = \bigvee\{x,\, y,\, z\} = x \vee \bigvee\{y,\, z\} = x \vee (y \vee z)$
- Per dimostrare (L3) si osserva che $x \leq (x \vee y)$ e $x \leq x$, inoltre banalmente se $t \leq (x \vee y)$ e $t \leq x$ allora $t \leq x$.
- Le leggi di idempotenza sono ovviamente vere.

$\square$

Tali proprietà suggeriscono un modo equivalente per definire un reticolo come struttura algebrica.

Definizione 23. *Una terna ordinata* $(L, \vee, \wedge)$ *si dice* reticolo *se* L *è un insieme non vuoto dotato di due operazioni binarie* $\vee,\ \wedge :\ L \times L \to L$ *che godono delle proprietà (L1)-(L4) e (L1')-(L4').*

Si noti che la definizione 23 è autoduale, ovvero le due operazioni vi compaiono in modo simmetrico.

Osservazione 7. *Nella definizione 23, gli assiomi (L4) ed (L4') possono esser omessi, essendo conseguenza logica degli assiomi (L3) ed (L3').*

Sostituendo nell'assioma (L3) il termine $(y \wedge x)$ *al posto di* y *si ha* $x = (x \vee (y \wedge x)) \wedge x = x \wedge x$

e dualmente per (L4').

Si è visto come ad ogni reticolo come struttura d'ordine si possa canonicamente associare un reticolo come struttura algebrica. Ora si mostra come ad ogni reticolo come struttura algebrica possa essere canonicamente associato un reticolo come struttura d'ordine.

In un reticolo $(L, \vee, \wedge)$ si può definire canonicamente la relazione $\leq$ come: $\forall x,\ y \in L, \quad x \leq y$ se e solo se $x \vee y = y$ se e solo se $x \wedge y = x$.

Tale definizione è ben posta, infatti se vale $y = x \vee y$, allora $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ per la legge commutativa e di assorbimento e dualmente per l'altra implicazione.

Proposizione 4. *Per ogni reticolo $(L, \vee, \wedge)$, la relazione $\leq$ è una relazione d'ordine, inoltre $(L, \leq)$ è un reticolo.*

Dimostrazione. Per prima cosa si verifica ora che la relazione $\leq$ è una relazione d'ordine: $\forall x,\ y,\ z \in L$

- Per la proprietà di idempotenza dell'operazione $\vee$, si ha per ogni $x \in L,\ x = x \vee x$, ovvero $x \leq x$ per ogni x.
- Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = x \wedge y = y \wedge x = y$ per la legge commutativa del $\wedge$.
- Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x = x \wedge y$ e $y = y \wedge z$. Per la legge associativa segue $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$

Si ha inoltre $(x \vee y) \vee x = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ da cui $(x \vee y) \geq x$, ed analogamente si mostra che $(x \vee y) \geq y$.
Se inoltre $t \geq x$ e $t \geq y$ allora $t \vee x = t$ e $t \vee y = y$, da cui $t \vee (x \vee y) = (t \vee x) \vee y = t \vee y = t$, ovvero $t \geq (x \vee y)$.

Dualmente si prova che $x \wedge y$ è l'estremo inferiore di x ed y in $(L, \leq')$.

□

Teorema 1. *Dato un reticolo d'ordine $(L, \leq)$, sia $(L, \vee, \wedge)$ il reticolo algebrico ove $\vee$ e $\wedge$ sono le operazioni di estremo superiore ed estremo inferiore in $(L, \leq)$.*
Sia $\leq'$ la relazione d'ordine associata canonicamente al reticolo $(L, \vee, \wedge)$.
Sotto tali ipotesi $(L, \leq)$ e $(L, \leq')$ sono uguali.

Analogamente, dato un reticolo algebrico $(L, \vee, \wedge)$, si consideri il reticolo d'ordine $(L, \leq')$, ad esso associato.
Sia $(L, \vee', \wedge')$ il reticolo algebrico ove $\vee'$ e $\wedge'$ sono l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $(L, \leq')$.
Sotto tali ipotesi $(L, \vee, \wedge)$ e $(L, \vee', \wedge')$ sono uguali.

Dimostrazione. Dato un reticolo $(L, \leq)$, si consideri la struttura algebrica $(L, \vee, \wedge)$, ove le operazioni $\vee$ e $\wedge$ corrispondono all'estremo superiore ed all'estremo inferiore definiti nel reticolo $(L, \leq)$.

Per l'osservazione 4, la relazione d'ordine $\leq'$ definita in $(L, \vee, \wedge)$ coincide con la relazione d'ordine iniziale $\leq$.

Dato il reticolo $(L, \vee, \wedge)$, sia $(L, \leq')$ il reticolo associato a $(L, \vee, \wedge)$.
Nella dimostrazione della proposizione 4 si mostra collateralmente che l'estremo superiore di x ed y in $(L, \leq')$ è proprio $x \vee y$, ovvero $x \vee y = x \vee' y$.

Per l'estremo inferiore si dimostra dualmente.

$\square$

Dato un reticolo, il Teorema 1 permette di passare dalla sua struttura d'ordine alla sua struttura algebrica (e viceversa) senza perdere informazioni, garantendo il ritorno alla struttura originale.

Notazione 4. *Nel seguito, per brevità, si individuerà un reticolo tramite il suo insieme di base, sottintendendo la struttura d'ordine ed algebrica ad esso correlate.*

Sottoreticoli

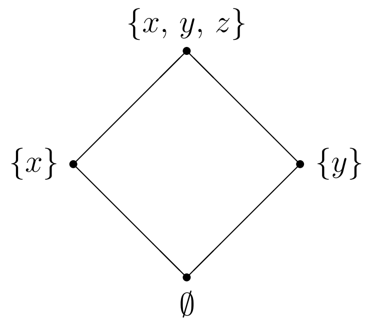
Concentrando l'attenzione sui reticoli come strutture algebrice, viene naturale parlare di sottostrutture (i sottoreticoli) e di suoi morfismi (i morfismi reticolari).[9]

Definizione 24. *Per ogni reticolo L, un suo sottoinsieme $N \subseteq L$ è un sottoreticolo di L se è chiuso rispetto alle operazioni di L.*

Nota 3. *Un sottoposet $(M, \leq)$ di un reticolo $(L, \leq)$ può essere un reticolo senza essere un sottoreticolo di L.*

Il seguente esempio illustra come le ipotesi di reticolo possano essere soddisfatte, senza tuttavia che l'estremo superiore in M coincida con l'estremo superiore in L.

Esempio 17. *Il reticolo rappresentato dal diagramma di Hasse sottostante non è un sottoreticolo dell'insieme delle parti dell'insieme $\{x, y, z\}$.*



Di seguito si presentano due importanti tipi di sottoreticolo dell'insieme delle parti di un insieme X.

[9] Di fondamentale importanza nello studio di una struttura algebrica sono le relazioni di *congruenza* su di essa definite. Anche i reticoli ammettono le loro congruenze, tuttavia non essendo trattate direttamente nel seguito non verranno qui presentate. Si rimanda il lettore a pag.20, [4], per approfondimenti.

Esempio 18. *Si consideri uno spazio topologico* (X, τ) *e si indichi con* $\mathcal{A}$ *la classe degli aperti della topologia* τ *e con* $\mathcal{C}$ *la classe dei chiusi della topologia* τ.

Poichè per definizione l'unione e l'intersezione di due aperti è un aperto, e similmente l'unione e l'intersezione di due chiusi è un chiuso, si ha che $(\mathcal{A}, \subseteq)$ *e* $(\mathcal{C}, \subseteq)$ *sono sottoreticoli dell'insieme delle parti di* X *ordinato dall'inclusione.*

Come è noto l'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto e l'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso. Tali fatti indicano che $(\mathcal{A}, \subseteq)$ *e* $(\mathcal{C}, \subseteq)$ *sono reticoli con una struttura più ricca di quelle finora presentate.*[10]

Esempio 19. *Sia* X *un insieme dotato di una misura e si indichi con* $\mathcal{M}$ *la classe dei sottoinsiemi misurabili di* X.

Poichè si richiede ad ogni misura che l'unione di due insiemi misurabili sia un misurabile e l'intersezione due insiemi misurabili sia misurabile, si ha che $(\mathcal{M}, \subseteq)$ *è un sottoreticolo dell'insieme delle parti di* X *ordinato dall'inclusione.*

Come è noto, per avere uno spazio misurabile, si richiede una condizione più forte agli insiemi misurabili, ovvero che l'unione e *l'intersezione di una famiglia* numerabile *di insiemi misurabili sia misurabile. Tale fatto ammette la sua caratterizzazione reticolare, qui taciuta per ragioni di spazio.*[11]

Nel poset più familiare nella scuola del secondo ordine, ovvero $\mathbb{R}$, è usuale parlare di *intervalli*: dati a, $b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, allora l'intervallo $[a, b]$ è formato dal poset degli elementi di $\mathbb{R}$ compresi fra a e b con la relazione d'ordine indotta. Applicando lo stesso procedimento ad un reticolo qualsiasi si ottiene la nozione reticolare di intervallo.

Definizione 25. *Sia* L *un reticolo ed* a, $b \in L$ *tali che* $a \leq b$.
L'intervallo $[a, b]$ *è definito come il poset:*

$$[a,\, b] := \{x \in L |\ a \leq x \leq b\}$$

$$\forall x,\, y \in [a,\, b], \qquad x \leq_{[a,b]} y \Leftrightarrow x \leq_L y$$

Nota 4. *Un intervallo di un reticolo* L *è un sottoreticolo limitato di* L. *Infatti* $\forall x$, $y \in [a, b]$, *per definizione* $a \leq x \leq b$ *e* $a \leq y \leq b$, *quindi* $a \leq x \wedge y \leq x \leq x \vee y \leq b$, *ovvero* $[a, b]$ *è un sottoreticolo di* L.

Morfismi Reticolari

Giunti a questo punto, non si può prescindere dallo studio dei morfismi di reticolo. Le due definizioni date ad inizio paragrafo suggeriscono tuttavia due definizioni distinte:

- Guardando i reticoli come strutture algebriche, i morfismi ad essi associati sono quelle particolari funzioni che conservano il $\vee$ e l'$\wedge$.

- Se si guardano i reticoli come strutture d'ordine, i morfismi sono le funzioni crescenti, ovvero sono i morfismi di poset.

[10] Vedi pag. 51 [3]
[11] Vedi pag. 51, [3]

Definizione 26. *Siano L ed N due reticoli. Una funzione $f : L \to N$ è un morfismo reticolare se è sia un $\vee-$morfismo sia un $\wedge-$morfismo.*

La definizione 26 privilegia come si è visto la definizione di reticolo come struttura algebrica: ciò poichè la definizione di morfismo che ne deriva è più forte. Infatti se una funzione è un $\vee-$morfismo od un $\wedge-$morfismo, allora è una funzione monotona.

Il viceversa è falso: come controesempio si prenda l'immersione canonica del sottoposet dell'esempio 17.

Sebbene non tutti i morfismi di poset fra reticoli siano morfismi reticolari, è tuttavia vero che, poichè gli isomorfismi di poset identificano i poset con la stessa struttura d'ordine, gli isomorfismi reticolari sono tutti e soli gli isomorfismi di poset fra reticoli.

Proposizione 5. *Sia $f : L \to N$ un morfismo reticolare fra i reticoli L ed N. Se f è biiettiva allora f è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Poichè f è biiettiva, esiste la sua inversa insiemistica f^{-1}. Se si dimostra che f^{-1} è anch'essa un morfismo reticolare la dimostrazione è conclusa.

Per ogni $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ elementi di N, esistono $a, b \in L$ tali che $f(a) = \tilde{a}$ e $f(b) = \tilde{b}$. Ricordando che f è un morfismo reticolare si ha $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = \tilde{a} \vee \tilde{b}$, da cui $f^{-1}(\tilde{a} \vee \tilde{b}) = a \vee b = f^{-1}(\tilde{a}) \vee f^{-1}(\tilde{b})$.

Dualmente si prova che per ogni $\tilde{a}, \tilde{b} \in N$ si ha $f^{-1}(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) = f^{-1}(\tilde{a}) \wedge f^{-1}(\tilde{b})$, e la dimostrazione è conclusa. □

Relazioni di Congruenza

Strettamente correlato al concetto di morfismo è quello di 'congruenza'. Per descriverlo è tuttavia necessaria qualche premessa.

Definizione 27. *Sia A un insieme. Una relazione su A, $\sim \subseteq A \times A$, è detta una* relazione di equivalenza *se*

- $\forall a \in A, \quad a \sim a$ *Proprietà Riflessiva*
- $\forall a, b \in A, \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a$ *Proprietà Simmetrica*
- $\forall a, b, c \in A, \quad a \sim b$ *e* $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ *Proprietà Transitiva*

Le relazioni di equivalenza su un insieme sono strettamente connesse alle partizioni dell'insieme stesso.

Definizione 28. *Una partizione di A è una classe $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di A tale*

- $\forall C \in \mathcal{C}, \quad C \neq \emptyset$
- $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$
- $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, *con* $C_1 \neq C_2, \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 6. *Sia A un insieme.*

- *Ad ogni relazione di equivalenza $\sim \subseteq A^2$ è canonicamente associata la seguente partizione di A :*

$$\{[a]_\sim |\ a \in A\}, \qquad \textit{ove } [a]_\sim := \{b \in A |\ b \sim a\}$$

- *Ad ogni partizione $\mathcal{C}$ di A è canonicamente associata la relazione di equivalenza $\sim \subseteq A^2$ definita ponendo*

$$\forall a, b \in A, \quad a \sim b \textit{ se } \exists C \in \mathcal{C} \textit{ tale che } a \in C \textit{ e } b \in C$$

Inoltre se $\sim$ è una relazione di equivalenza e $\mathcal{C}$ è la partizione ad essa associata, la relazione di equivalenza associata a $\mathcal{C}$ è esattamente $\sim$, e viceversa.

In una struttura algebrica acquisteranno particolare importanza quelle relazioni di equivalenza compatibili con le operazioni di strutture: tali relazioni prendono il nome di *relazioni di congruenza.*

Definizione 29. *Sia A un reticolo. Una relazione di equivalenza $\equiv \subseteq A^2$ è detta una* relazioni di congruenza *se*

$$\forall x, y, z \in L, \qquad \textit{se } x \equiv y \textit{ allora } x \vee z \equiv y \vee z \textit{ e } x \wedge z \equiv y \wedge z$$

Se $\equiv$ è una relazione di congruenza allora le classi di equivalenza ad essa associate sono dette classi di congruenza.

Conseguenza diretta della definizione 29 è che se $x \equiv y$, allora $x \equiv y \equiv (x \vee y) \equiv (x \wedge y)$. Si invita il lettore a verificare ciò.

Una tipologia di esempi fondamentali di relazioni di congruenza è la seguente.

Esempio 20. *Siano L, M reticoli e $\phi : L \to M$ un morfismo. Si definisce la relazione di congruenza $\equiv$ come segue:*

$$\forall x, y \in L, \quad x \equiv y \ \textit{ se } \ \phi(x) = \phi(y)$$

In tal caso le classi di congruenza indotte da $\equiv$ si indicano con il simbolo $[x]_\phi$, con $x \in L$.

Verificare che $\equiv$ è una relazione di equivalenza è un facile esercizio.

Si verifica che $\equiv$ è una relazione di congruenza.
$\forall x, y, z \in L$ se $x \equiv y$, ovvero $\phi(x) = \phi(y)$, allora $\phi(x \vee z) = \phi(x) \vee \phi(z) = \phi(y) \vee \phi(z) = \phi(y \vee z)$, ovvero $x \vee z \equiv y \vee z$. Per dualità segue che $\equiv$ è una relazione di congruenza.

Teorema Fondamentale di Scomposizione

È ora possibile enunciare il Teorema Fondamentale di Scomposizione, applicato alla Teoria dei Reticoli.

Teorema 2 (Teorema Fondamentale di Scomposizione, Caso Reticolare)**.**
Siano L, M due reticoli e $\phi : L \to M$ un morfismo reticolare. Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & M \\ (L/\equiv) := \{[x]_\phi \mid x \in L\} \arrow[r, "\overline{\phi}"] & Imm(\phi) := \{\phi(x) \mid x \in L\} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

ove

- *$\phi : x \mapsto [x]_\phi$ è la proiezione canonica di ogni elemento del reticolo L nella sua classe di congruenza.*
- *$\overline{\phi} : [x]_\phi \mapsto \phi(x)$ è l'isomorfismo reticolare canonicamente associato a ϕ.*
- *$i : \phi(x) \mapsto \phi(x)$ è la proiezione canonica dell'immagine di ϕ nel reticolo M.*

Per dimostrare che tale Teorema è ben posto è necessario dimostrare che $L/\equiv$ e $Imm(\phi)$ sono reticoli, che π, $\overline{\phi}$ e i sono morfismi di reticoli ed in particolare che $\overline{\phi}$ è un isomorfismo reticolare. Infine va dimostrato che tale diagramma commuta.

Tali verifiche sono di facile applicazione: si rimanda per una esposizione più completa degli argomenti a pag. 114, [8].

Esempi Rilevanti

Dopo aver delineato gli aspetti chiave della teoria dei reticoli, è importante vedere alcuni degli esempi significativi a cui essa può essere applicata.

Esempio 21. *Si dice che la quaterna $(A, V, +, *)$ è un modulo se A è un anello, $(V, +)$ è un gruppo abeliano e $*$ è una funzione $* : K \times V \to V$, detta 'prodotto per scalari', che gode delle seguenti proprietà:*

1. *Per ogni $v \in V$, $\quad 1_K * v = v$*
2. *Per ogni a_1, $a_2 \in A$, per ogni $v \in V$, $\quad (a_1 + a_2) * v = a_1 v + a_2 v$*
3. *Per ogni a_1, $a_2 \in A$, per ogni $v \in V$, $\quad (a_1 a_2) * v = a_1 * (a_2 * v)$*

4. Per ogni $a \in A$, per ogni $v_1, v_2 \in V$, $\quad a*(v_1+v_2) = a*v_1 + a*v_2$

Se A è un corpo, ovvero un campo non necessariamente commutativo, allora la quaterna $(A, V, +, *)$ è detta spazio vettoriale.

Nel seguito si segue per comodità l'usuale notazione moltiplicativa, ovvero se $v \in V$ ed $a \in A$, allora $a * v$ si scrive semplicemente av.

Ogni sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ chiuso rispetto alle operazioni di somma interna e di prodotto per scalari, è detto sottomodulo *di V.*

La relazione di inclusione fra i sottomoduli di un modulo V è ovviamente una relazione d'ordine.

Si mostra ora che tale poset è un reticolo.

Si considerino due sottomoduli S, T di V. Si ha che:

- $S \wedge T = S \cap T$

  Ogni sottomodulo di V contenuto sia in S sia in T è contenuto ovviamente in $S \cap T$.
  Per ogni $x_1, x_2 \in S \cap T$, si ha che $x_1, x_2 \in S$ e $x_1, x_2 \in T$, da cui $x_1 + x_2 \in S$ e $x_1 + x_2 \in T$, ovvero $x_1 + x_2 \in S \cap T$.
  Per ogni $a \in A$, per ogni $v \in S \cap T$ si mostra analogamente che $av \in S \cap T$.

- $S \vee T = S + T := \{s + t |\ s \in S,\ t \in T\}$

  Ogni sottomodulo di V che contenga sia S sia T deve contenere banalmente anche $S + T$: è quindi sufficiente mostrare che il sottoinsieme $S + T$ è un sottomodulo.
  Per ogni $x_1, x_2 \in S + T$, si ha $x_i = s_i + t_i$ ove $s_i \in S$, $t_i \in T$ $(i = 1, 2)$, da cui $x_1 + x_2 = (s_1 + t_1) + (s_2 + t_2) = \underbrace{s_1 + s_2}_{\in S} + \underbrace{t_1 + t_2}_{\in T} \in S + T$

  Per ogni $x \in S + T$ e per ogni $a \in A$, $ax = a(\underbrace{s}_{\in S} + \underbrace{t}_{\in T}) = \underbrace{as}_{\in S} + \underbrace{at}_{\in T} \in S + T$

L'esempio 35 è un caso particolare della proposizione seguente. Essa individua uno dei modi più ricorrenti attraverso il quale i reticoli emergono in ambiti anche molto diversi della matematica: tutti i reticoli che compariranno nelle corrispondenze del capitolo 2 rientrano in tale tipologia.

Proposizione 7. *Sia X un insieme, e sia $\mathfrak{I}$ una classe di sottoinsiemi di X.*

Se $\mathfrak{I}$ è chiusa rispetto ad intersezioni arbitrarie ed esiste un $J \in \mathfrak{I}$ tale che per ogni $I \in \mathfrak{I}$ si ha $I \subseteq J$, allora $(\mathfrak{I}, \subseteq)$ è un reticolo limitato.

Dimostrazione. Per prima cosa si nota che tale classe forma un poset limitato, con elemento minimo $\bigcap_{I \in \mathfrak{I}} I$ ed elemento massimo J.

Per ogni $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{I}$ si ha ovviamente $\bigwedge_{I \in \mathfrak{C}} I = \bigcap_{I \in \mathfrak{C}} I$.

Si verifica inoltre facilmente che $\bigvee_{I \in \mathfrak{C}} I = \bigcap \{I \in \mathfrak{I} |\ \forall C \in \mathfrak{C},\ C \subseteq I\}$.
Si nota che, per l'ipotesi dell'esistenza dell'elemento massimo J, la classe di cui si fa l'intersezione non è vuota, da cui la definizione di estremo superiore è ben posta per ogni sottoclasse. $\square$

Per dualità nella proposizione 7 è possibile richiedere come ipotesi che la classe di sottoinsiemi $\mathfrak{I}$ sia chiusa rispetto ad unioni arbitrarie ed ammetta un insieme contenuto in ogni altro insieme ad essa appartenente, ottenendo sempre un reticolo.[12]

Proposizione 8. *Il poset delle sottoalgebre di un algebra* $\mathcal{A}$[13] *è una classe chiusa rispetto ad intersezioni arbitrarie avente come elemento massimo* $\mathcal{A}$ *stessa, ovvero è un reticolo.*

La proposizione 8 è conseguenza della proposizione 7.

Esempio 22. *Il poset dei sottogruppi di un gruppo ordinati dall'inclusione è un reticolo.*

Se si applica la definizione di prodotto diretto a una famiglia di reticoli, la seguente proposizione assicura che si riottiene un reticolo. [14] .

Proposizione 9. *Data la famiglia di reticoli* $\{L_\alpha |\ \alpha \in A\}$, *il poset prodotto diretto* $\prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ *è un reticolo.*

Inoltre per ogni f, $g \in \prod_{\alpha \in A} L_\alpha$,

$$\forall \alpha \in A, \qquad (f \vee g)(\alpha) = f(\alpha) \vee g(\alpha),$$

$$\forall \alpha \in A, \qquad (f \wedge g)(\alpha) = f(\alpha) \wedge g(\alpha)$$

Nota 5. *Applicando la definizione di unione disgiunta ad una famiglia con almeno due di reticoli* non *si ottiene un reticolo poichè non esiste alcun maggiorante di due elementi appartenenti a due reticoli distinti.*[15]

Giunto a questo punto, il lettore è in grado di rileggere quanto letto nell'esempio 16, e di conseguenza quanto imparato fin dalle scuole medie sulla procedura di calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comun divisore.

Esempio 23. *Per quanto detto nell'esempio 12,* $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ *è isomorfo al sottoposet di* $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ *delle funzioni nulle quasi dappertutto, indicato con il simbolo* $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$.

Per la proposizione 9 si ha che, essendo $\mathbb{N}$ *una catena, e quindi un reticolo, anche il poset prodotto cartesiano* $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ *è un reticolo. Si mostra che* $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$ *è chiuso rispetto all'operazione di estremo superiore ed inferiore del reticolo* $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$, *ovvero è un sottoreticolo di* $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$.

[12] I reticoli che ammettono estremo superiore ed inferiore per qualunque insieme di elementi prendono il nome di *reticoli completi.* In lunghezza finita tutti i reticoli sono completi: la completezza è un'ipotesi importante quando si considerano reticoli di lunghezza infinita.

[13] Un algebra $\mathcal{A}$ è un insieme X dotato di una famiglia $\{f_\alpha |\ \alpha \in A\}$ di operazioni finitarie. Si nota che, sebbene tale famiglia possa essere infinita, ogni singola operazione ammette un numero finito di variabili in ingresso.

[14] La gamma delle costruzioni di nuovi reticoli è molto più ampia di quella ivi riportata. Per una trattazione più completa si rimanda il lettore a pag. 33, [8].

[15] La somma *categoriale* di una famiglia infinita di reticoli $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ corrisponde alla sottoclasse di $\prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ delle funzioni non nulle su un numero finito di elementi.
Nel caso finito la somma ed il prodotto categoriale coincidono.

Da ciò segue collateralmente che $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ *è un reticolo in cui effettivamente il calcolo dell'estremo superiore ed inferiore coincide esattamente con il calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comun divisore.*

Date $f,\, g \in \left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$, *tenuto conto che l'ordine naturale su* $\mathbb{N}$ *è totale, si ha*

$$\forall p \in \mathbb{P}, \quad (f \vee g)(p) = f(p) \vee g(p) = max\{f(p), g(p)\}$$

$$\forall p \in \mathbb{P}, \quad (f \wedge g)(p) = f(p) \wedge g(p) = min\{f(p), g(p)\}$$

Si denoti con $A_f := \{p \in \mathbb{P}|\ f(p) \neq 0\}, \quad A_g := \{p \in \mathbb{P}|\ g(p) \neq 0\}$ *ed analogamente per* $A_{f\vee g}$ *e* $A_{f\wedge g}$.

Poichè sia A_f *sia* A_g *hanno cardinalità finita e per quanto detto sopra si ha*

$$|A_{f\vee g}| + |A_{f\wedge g}| = |A_f \cup A_g| + |A_f \cap A_g| = |A_f| + |A_g| < +\infty$$

ovvero sia $f \vee g$ *sia* $f \wedge g$ *appartengono a* $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$.

Proprietà Algebriche Reticolari

In tutti i reticoli valgono le seguenti proposizioni.

Proposizione 10. *Se* L *è un reticolo, allora le operazioni* $\vee$ *e* $\wedge$ *sono isotone, ovvero* $\forall x,\, y,\, z \in L$, *se* $x \leq y$ *allora* $(x \vee z) \leq (y \vee z)$ *e* $(x \wedge z) \leq (y \wedge z)$.

Dimostrazione. Se $x \leq y$ allora $x \vee y = y$. Si ha dunque per le proprietà dell'estremo superiore $(x \vee z) \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (z \vee z) = y \vee z$, ovvero $(x \vee z) \leq (y \vee z)$.

Dualmente si prova la seconda disuguaglianza. □

Proposizione 11. *Sia* L *un reticolo. Per ogni* $x,\, y,\, z \in L$ *valgono le* disuguaglianze distributive:

1. $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
2. $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$

Dimostrazione. Per ogni $x,\, y,\, z \in L$ si ha per definizione di estremo superiore
$x \leq (x \vee y), \qquad x \leq (x \vee z)$
$(y \wedge z) \leq y \leq (x \vee y), \qquad (y \wedge z) \leq z \leq (x \vee z)$
da cui per definizione di estremo superiore $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y)$ e $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee z)$, e per definizione di estremo inferiore $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

La seconda disuguaglianza distributiva si dimostra dualmente. □

Le disuguaglianze distributive prendono il nome dalla nota proprietà algebrica, di cui hanno la forma.

Semplificando, esse affermano che applicando prima l'estremo inferiore e poi l'estremo superiore, si ottiene qualcosa di minore od uguale che applicando tali operazioni secondo l'ordine inverso.

Le disuguaglianze distributive sono usate molto spesso nella teoria dei reticoli, poichè quando si vuole provare una uguaglianza tramite la proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine, forniscono una delle due disuguaglianze gratuitamente.

Le precedenti proposizioni, tramite dimostrazioni per induzione, si possono facilmente generalizzare ai seguenti teoremi di cui non si riporta la dimostrazione, esulando dagli scopi della tesi. Per una trattazione più completa di tali teoremi si rimanda al libro "Introduction to Lattice Theory" di D. E. Rutherford ([16]).

Teorema 3 (Monotonia delle funzioni polinomiali)**.** *Sia L un reticolo ed f una espressione polinomiale in $L[x_1, \ldots, x_n]$. Se $x_i \geq y_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(y_1, \ldots, y_n)$*

Teorema 4 (Teorema Min Max)**.** *Sia L un reticolo. Se $\forall i = 1, \ldots, n$, $\forall j = 1, \ldots, m$ $x_{i,j} \in L$, allora*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} x_{i,j} \geq \bigvee_{j=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} x_{i,j}$$

Limitatezza

Tutti i reticoli analizzati in questa tesi sono di lunghezza finita. Tale proprietà garantisce anche la limitatezza del reticolo.

Lemma 3. *Sia L un reticolo.*

- *Se L soddisfa la (DCC) allora ammette l'elemento minimo* 0.
- *Se L soddisfa la (ACC) allora ammette l'elemento massimo* 1.

Nei reticoli di lunghezza finita il concetto di massimo e massimale coincidono.

Atomi, $\vee-$irriducibili e Scomposizioni

Il prossimo concetto ha radici antiche, e sebbene nasca nell'ambito della filosofia della natura, anche nella teoria dei reticoli esso gioca un ruolo importante.

Democrito affermava che la materia non potesse essere divisa infinitamente, ma che esistessero elementi indivisibili che tramite le loro combinazioni generassero tutta materia: più piccolo di tali elementi, per Democrito, c'era solo il nulla e li chiamò atomi, ossia 'indivisibili'. Allo stesso modo ci si può chiede se in un reticolo ci siano degli elementi 'minimi' e 'indivisibili' che permettano di generare tutti gli altri. Si è visto che in un reticolo sono canonicamente definite due operazioni: $\vee$ e $\wedge$. Tali 'atomi' dovranno essere degli elementi che generano tutti gli altri tramite una di tali operazioni, ma che non possono essere generati tramite tale operazione fra elementi del reticolo diversi da loro. Il $\wedge$ da come risultato elementi più piccoli di quelli di partenza, e dunque gli 'atomi' potranno generare il reticolo soltanto tramite il $\vee$.

Definizione 30. *Sia L un reticolo dotato di elemento minimo 0. $x \in L$ si dice* atomo *se $x \succ 0$.*

Dualmente sia R un reticolo dotato di elemento massimo 1. $y \in R$ si dice coatomo *se $1 \succ y$.*

Nota 6. *La notazione $x \succ y$, introdotta nel paragrafo precedente indica la relazione di copertura, ovvero $x \succ y$ se $x > y$ e non esiste alcun z strettamente compreso fra i due.*

Come si è accennato il concetto di atomo è sorto per descrivere un elemento come combinazione di tali elementi, e ciò porta direttamente alla seguente definizione.

Definizione 31. *Sia L un reticolo ed $x \in L$. L'insieme $x_1, \ldots, x_n$ si dice*

- *una* $\vee-$scomposizione finita *di x se $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x$.*
- *una* $\wedge-$scomposizione finita *di x se $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x$.*

Una $\vee-$scomposizione si dice irridondante *se per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha $\bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i < x_j$, ed analogamente per una $\wedge-$scomposizione*

Esempio 24. *Sia $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ il reticolo dato dall'insieme delle parti dell'insieme A ordinato dall'inclusione.*

In tale reticolo gli atomi sono i singoletti $\{a\}$ con $a \in A$. Ovviamente per ogni $B \subseteq A$ si ha che $B = \bigcup_{b \in B}\{b\}$, da cui in tale reticolo ogni elemento ammette una scomposizione finita irridondante in atomi.

Esistono reticoli come quello dell'esempio 24 che seguono la visione democritea degli atomi, ma sono casi molto particolari. Nella maggior parte dei reticoli possono esistere elementi che non ammettono una scomposizione in atomi, i quali possono anche non esistere come nell'intervallo $[0, 1]$ di $\mathbb{R}$.

Il tipo di controesempio più semplice sono infatti le catene.

Esempio 25. *Si consideri la catena finita C avente $n \geq 3$ elementi $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1}$. L'unico atomo di C è x_1, e gli unici elementi che sono estremi superiori di un insieme finito di atomi sono x_1 stesso e lo 0.*

Le uniche catene in cui tutti gli elementi sono estremi superiori di atomi hanno infatti cardinalità minore od uguale a 2.

La naturale generalizzazione della definizione di atomo è quella di elemento sup-irriducibile. La generalizzazione della definizione di coatomo è quella di elemento inf-irriducibile.

Definizione 32. *Sia L un reticolo limitato, ed x un elemento di L.*

- *Si dice che $x \neq 0$ è* sup-irriducibile *se $\forall y, z \in L$ tali che $x = y \vee z$, allora o $x = y$ oppure $x = z$.*

- *Si dice che $x \neq 1$ è* inf-irriducibile *se $\forall y, z \in L$ tali che $y \wedge z = x$ allora o $x = y$ oppure $x = z$.*

Il seguente lemma fornisce un ulteriore caratterizzazione degli elementi sup-irriducibili.

Lemma 4. *Per ogni $x \in L$ diverso da 0, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *x è sup-irriducibile*
2. *per ogni $y, z \in L$ tali che $y < x$ e $z < x$ allora $y \vee z < x$.*

Dualmente per ogni $a \in L$ diverso da 1, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *a è un elemento inf-irriducibile*
2. *per ogni $b, c \in L$ tali che $a < b$ e $a < c$ allora $a < b \wedge c$.*

Esempio 26. *Nelle catene tutti gli elementi diversi dall'elemento minimo sono sup-irriducibili.*

Sia C una catena. Per ogni $x, y \in C$ vale o $x \vee y = x$ oppure $x \vee y = y$, da cui tutti gli elementi diversi da 0 sono sup-irriducibili.

Nei reticoli di lunghezza finita vale inoltre il seguente lemma.

Lemma 5. *Sia L un reticolo.*

1. *Se L soddisfa la (DCC) allora per ogni x esiste una $\vee-$scomposizione irridondante finita in sup-irriducibili.*
2. *Se L soddisfa la (ACC) allora per ogni x esiste una $\wedge-$scomposizione irridondante finita in inf-irriducibili.*

Dimostrazione. Si dimostra il punto 1., seguendo il secondo punto per dualità.

Sia x un elemento di L. Se x è sup-irriducibile il lemma è dimostrato, altrimenti può essere scomposto in due elementi strettamente minori. Se essi sono sup-irriducibili si termina, altrimenti si continua a scomporre fino ad arrivare ad una scomposizione in sup-irriducibili. Il processo descritto termina per la (DCC).

Poichè da una scomposizione finita è sempre possibile ricavare una scomposizione irridondante eliminando i termini non necessari, il lemma è dunque dimostrato. □

Per individuare gli elementi sup-irriducibili ed inf-irriducibili in un diagramma di Hasse sono utili i concetti di predecessore e successore.

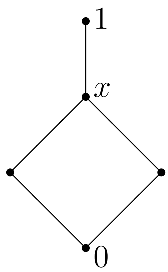
Definizione 33. *Sia $(L \leq)$ un reticolo, sia $x \in L$ un elemento sup-irriducibile. Si dice che $y \in L$ è un* predecessore *di x se $y \prec x$.*

Si definisce un successore *in maniera duale.*

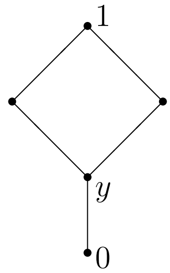
Un predecessore, se esiste, è unico. Si supponga x sup-irriducibile e siano y_1, y_2 due elementi del reticolo tali che $y_1 \prec x$ e $y_2 \prec x$.

Per $i = 1, 2$ si ha $y_i < x$, da cui $y_1 \vee y_2 < x$ per definizione di estremo superiore e perchè x è sup irriducibile. Ricordando che per $i = 1, 2 \quad y_i \prec x$ si ha che $y_1 = y_1 \vee y_2 = y_2$.

Esempio 27. *Come si vede nel diagramma di Hasse di sinistra, 1 è sup irriducibile e copre il solo elemento x. A destra si ha la situazione duale.*



x predecessore di 1



y successore di 0

Reticoli Complementati

Per introdurre il seguente importante concetto si consideri il seguente esempio.

Esempio 28. *Si consideri il reticolo dato dall'insieme delle parti di un insieme A ordinato dall'inclusione.*

Ogni sottoinsieme $B \subseteq A$ ammette il complemento insiemistico $A \setminus B$, caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$B \cup \big(A \setminus B\big) = A \text{ e } B \cap \big(A \setminus B\big) = \emptyset$$

Dall'osservazione che A ed $\emptyset$ sono rispettivamente l'elemento massimo e l'elemento minimo del reticolo dell'insieme delle parti dell'insieme A segue la definizione di complemento reticolare.

Definizione 34. *Sia L un reticolo limitato ed x un elemento di L. Diciamo che x ammette complemento in L se esiste un elemento $y \in L$ tale che*

$$x \vee y = 1, \quad x \wedge y = 0$$

Un reticolo nel quale ogni elemento ammette complemento si dice complementato.

Inoltre se per ogni $a, b \in L$ tali che $a \leq b$, l'intervallo $[a, b]$ è un reticolo complementato, allora L si dice relativamente complementato.

Osservazione 8. *Sia L un reticolo limitato, $x, y \in L$ con $x \leq y$. Se y è complemento di x allora $x = 0$ ed $y = 1$.*

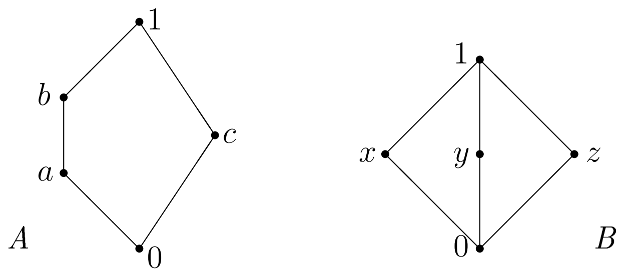
Si ha infatti che l'ipotesi $x \leq y$ implica $0 = x \wedge y = x, \quad 1 = x \vee y = y$.

Il concetto di complemento è tipico, oltre che della teoria degli insiemi, anche della geometria dei sottospazi vettoriali.

Esempio 29. *Supponiamo* V *uno spazio vettoriale e* $W \subseteq V$ *un suo sottospazio. È possibile dimostrareche esiste almeno un sottospazio* $S \subseteq V$ *tale che* $W \cap S = \{0\}$ *e* $W + S = V$*, ovvero il reticolo dei sottospazi di uno spazio vettoriale è complementato.*[16]

Si osserva che un elemento può ammettere due o più complementi distinti. Inoltre si osserva che se un reticolo limitato è relativamente complementato, allora è ovviamente complementato. L'implicazione inversa è falsa, come mostra il seguente esempio.

Esempio 30. *Il diagramma* A *e il diagramma* B *rappresentato due reticoli in cui esiste almeno un elemento che ammette due complementi distinti.*



Si noti infine che il reticolo rappresentato dal diagramma A *è complementato ma non relativamente complementato.*

Si osserva infine il seguente fatto.

Proposizione 12. *Se* $\{L_\alpha | \ \alpha \in A\}$ *è una famiglia di reticoli complementati, allora il reticolo prodotto diretto* $\prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ *è complementato.*

Precisamente per ogni $f \in \prod_{\alpha \in A} L_\alpha$*, un complemento di* f *è un elemento* $g \in \prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ *tale che* $\forall \alpha \in A, \quad g(\alpha)$ *è un complemento di* $f(\alpha)$*.*

1.1.3 Reticoli Distributivi

Come la teoria dei gruppi commutativi è la parte più semplice e con le proprietà più forti della teoria dei gruppi, così anche la teoria dei reticoli distributivi permette di vedere molte proprietà della teoria dei reticoli nell'ambiente più semplice e tranquillo possibile.

L'importanza teorica dei reticoli distributivi deriva anche dalla loro affinità al concetto di anello. Per comprendere meglio tale idea si osserva che esistono due modi molto naturali per dualizzare la definizione di anello:

[16] Assumendo eventualmente l'assioma della scelta se lo spazio vettoriale V ha dimensione infinita.

1. Si può richiedere sia alla somma sia al prodotto di soddisfare soltanto gli assiomi dei monoidi commutativi richiedendo *due* proprietà distributive: il prodotto rispetto alla somma e la somma rispetto al prodotto.

   Ovvero in notazione additiva e moltiplicativa si richiede che, dato un insieme di base A e due operazioni $+$ e $*$ definite su A, $(A,+)$ e $(A,*)$ siano monoidi commutativi e $\forall a,\, b,\, c \in A$

   $$a*(b+c) = a*b+a*c, \qquad a+(b*c) = (a+b)*(a+c)$$

   Tale assiomatizzazione, unita alle leggi di assorbimento, definisce i *reticoli distributivi limitati.*[17]

2. Gli assiomi di gruppo sulla somma e sul prodotto uniti ad una qualche proprietà distributiva implicano una struttura con un solo elemento, caso evidentemente degenere che soddisfa banalmente tutte le identità.

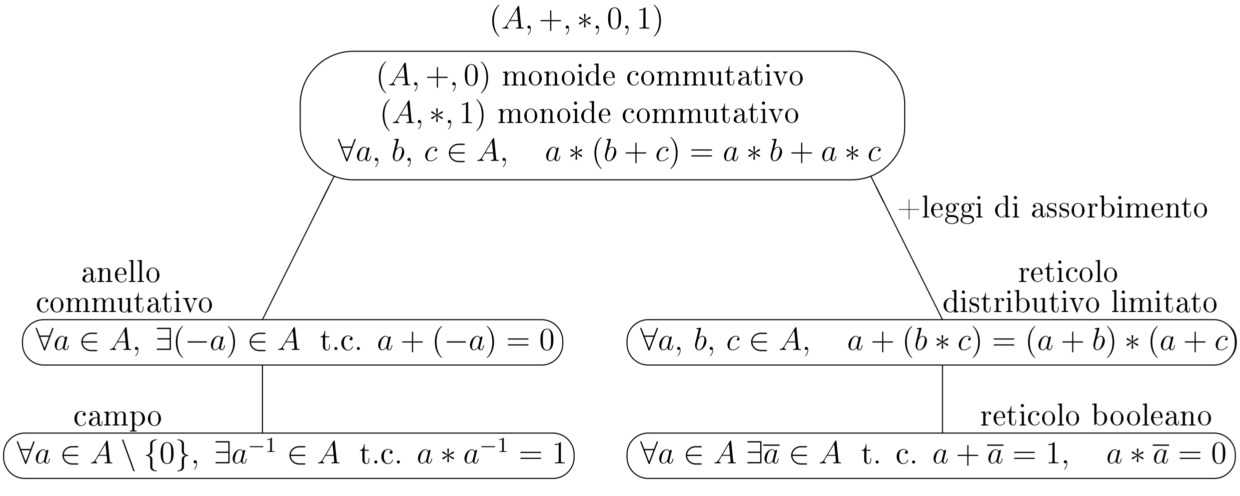
   Per richiedere una qualche generalizzazione non banale di elemento inverso nella definizione autoduale di reticolo distributivo limitato è necessario legare in un modo ancor più stretto le due operazioni: l'idea è quella di associare ad ogni elemento il suo *unico* 'inverso', detto complemento.

   Tale concetto sebbene sia stato già incontrato è utile tradurlo in notazione moltiplicativa e additiva per comprenderne appieno la forza: dato un reticolo distributivo limitato $(A,+,*)$, per ogni $a \in A$ esiste $b \in A$ tale che

   $$a+b=1 \qquad a*b=0$$

   ove lo 0 è l'elemento neutro della somma e l'1 del prodotto.

   Tali assiomi definiscono i *reticoli distributivi complementati,* ovvero le *algebre di Boole.*



[17]Le leggi di assorbimento unite ai precedenti assiomi implicano le leggi di idempotenza rispetto ad entrambe le operazioni, vedi pag. 21, [4]

Per completare il quadro di assonanze appena tracciato va infine osservato come ogni reticolo distributivo limitato possa essere rappresentato da un *ring of sets,*[18] e come ogni algebra booleana possa essere rappresentata da un *field of sets.*[19] Tali rappresentazioni possono essere inoltre sollevate ai morfismi, permettendo di esprimerle nel linguaggio della teoria delle categorie. Quanto detto è una prima descrizione del Teorema di Priestley e del Teorema di Stone. Nel seguente capitolo si illustreranno tali dualità nel caso finito; si rimanda al libro "Stone Spaces" di Peter T. Johnstone ([14]) per una trattazione del caso infinito.

Sebbene sia già stato delineato il quadro delle definizioni, è bene riordinarle poco alla volta per una comprensione più profonda.

Definizione 35. *Un reticolo L si dice* distributivo *se $\forall a, b, c \in L$ sono soddisfatte le seguenti identità:*

(D') $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(D") $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Si può facilmente dimostrare che gli assiomi (D') e (D") sono equivalenti per ogni reticolo.

Osservazione 9. *Una importante proprietà dei reticoli distributivi è che ogni elemento ammette al più un complemento. Si supponga infatti $x \in L$ reticolo distributivo, e $y, z \in L$ complementi di x. In tal caso si ha:*

$$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee z) = \underbrace{(y \wedge x)}_{=0} \vee (y \wedge z) = y \wedge z = (y \wedge z) \vee \underbrace{(x \wedge z)}_{=0} = (y \vee x) \wedge z = 1 \wedge z = z$$

Tale proprietà è caratterizzante: si può dimostrare che un reticolo L è distributivo se e solo se non contiene sottoreticoli rappresentabili dai diagrammi di Hasse A e B dell'esempio 30, nei quali come si è visto esistono elementi aventi due complementi distinti.[20]

Osservazione 10. *Ogni sottoreticolo L' di un reticolo distributivo L è un reticolo distributivo, poichè se le identità* (D') *e* (D") *valgono per tutti gli elementi del reticolo L, in particolare varranno ristrette agli elementi di L'.*

Inoltre se L è complementato, allora ogni suo intervallo è complementato: $\forall a, b \in L$, con $a \leq b$, $\forall x \in [a, b]$, detto x' il complemento di x in L, allora $(a \vee x') \vee b$ è il complemento di x in $[a, b]$.

Esempi Rilevanti

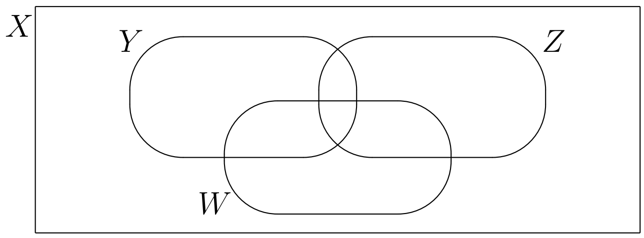
Un primo esempio di reticolo distributivo sono le catene. In esse come si è detto l'estremo superiore corrisponde al massimo e l'estremo inferiore al minimo. Si verifica quindi facilmente che in esse gli assiomi (D') e (D") sono soddisfatti.

[18] Classe di *insiemi* chiusa rispetto ad unioni ed intersezioni finite.

[19] Classe di *sottoinsiemi* di un insieme chiusa rispetto ad unioni ed intersezioni finite e rispetto all'operazione di complemento.

[20] pag. 59 [12]; pag.20 [6]; pag.11, [4].

Esempio 31. *Per ogni insieme X, il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ ordinato dall'inclusione è un reticolo distributivo. Tale reticolo è inoltre complementato*



In conseguenza dell'esempio 31, ogni sottoreticolo dell'insieme delle parti di un insieme è un reticolo distributivo. Di seguito si forniscono esempi rilevanti di tale tipologia di reticoli distributivi.

Esempio 32. *Sia X un insieme ed $f : X \to X$ una funzione. La classe $\mathcal{C}$ dei sottoinsiemi $A \subseteq X$ tali che $f[A] \subseteq A$ è un reticolo limitato distributivo qualora dotata della relazione di inclusione, avente come elemento massimo X stesso e come elemento minimo $\emptyset$.*

Si verifica infatti che l'unione e l'intersezione di due elementi di $\mathcal{C}$ è un elemento di $\mathcal{C}$, ovvero $(\mathcal{C}, \subseteq)$ è un sottoreticolo dell'insieme delle parti di X ed è quindi distributivo per l'esempio 31.

Esempio 33. *Sia X un insieme dotato di una topologia τ.*

Sia la classe dei sottoinsiemi aperti sia la classe dei sottoinsiemi chiusi rispetto alla topologia τ, ordinati dall'inclusione, formano rispettivamente due reticoli distributivi, essendo sottoreticoli dell'insieme delle parti di X.

Se inoltre si considera la classe dei sottoinsiemi aperti e *chiusi rispetto alla topologia τ si ottiene un reticolo booleano.*

Altro esempio rilevante è il reticolo distributivo dei sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue di ogni $n-$spazio cartesiano. Ciò è vero per motivazioni analoghe alle precedenti. Si nota inoltre che tale reticolo ha la proprietà aggiuntiva che l'unione e l'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi misurabili è misurabile.

Nel precedente paragrafo[21] si è visto come, data una famiglia di reticoli $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$, l'insieme delle funzioni $L_\alpha^A := \{f : \alpha \mapsto x \in L_\alpha\}$ ordinato dalla relazione $f \leq g$ se e solo se $f(\alpha) \leq g(\alpha) \quad \forall \alpha \in A$, è un reticolo.

Proposizione 13. *Data una famiglia $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$, se per ogni $\alpha \in A$ il reticolo L_α è distributivo, allora il reticolo L_α^A è distributivo.*

Esempio 34. $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ *è distributivo.*

Come si è visto nell'esempio 23, esso è isomorfo al reticolo prodotto diretto $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{P}}\right|_0$, il quale è sottoreticolo del prodotto diretto $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$.

[21] Proposizione 9

Poichè $\mathbb{N}$ con l'ordine naturale è una catena, esso è in particolare un reticolo distributivo. Per la proposizione13 si ha quindi che $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ è distributivo, da cui segue la distributività di $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$.

Si nota infine che, se ad un reticolo distributivo si aggiunge un elemento strettamente maggiore di ogni altro, si ottiene di nuovo un reticolo distributivo.

Poichè 0 è maggiore di ogni altro numero naturale rispetto alla relazione di divisibilità, si può quindi affermare per quanto detto che $(\mathbb{N}, |)$ è un reticolo distributivo.[22]

Proprietà dei Reticoli Distributivi

La distributività dei naturali ordinati dalla relazione di divisibilità può essere provata seguendo il suggerimento della seguente proposizione.

Proposizione 14. *Sia L un reticolo in cui tutte le catene discendenti $a_1 > a_2 > \dots$ sono finite.*

In tal caso L è distributivo se e solo se per ogni sup-irriducibile $p \in L$, se $p \leq (a \vee b)$ allora $p \leq a$ o $p \leq b$.

Dimostrazione. Siano p, a, $b \in L$ con p sup-irriducibile e $p \leq a \vee b$, ovvero $p = p \wedge (a \vee b)$

Se L è distributivo, allora $p = (p \wedge a) \vee (p \wedge b)$. Poichè p è sup-irriducibile allora $p = p \wedge a$ o $p = p \wedge b$, ovvero $p \leq a$ o $p \leq b$.

Si supponga che per ogni p sup-irriducibile, se $p \leq a \vee b$ allora $p \leq a$ o $p \leq b$.

$a \wedge (b \vee c) = \bigvee\{p \in L \text{ sup-irriducibile} |\ p \leq a \text{ e } p \leq (b \vee c)\} =$
$= \bigvee\{p \in L \text{ sup-irriducibile} |\ p \leq a \text{ e } (p \leq b \text{ oppure } p \leq c)\} =$
$\bigvee\{p \in L \text{ sup-irriducibile} |\ p \leq a \text{ e } p \leq b\} \vee \bigvee\{p \in L \text{ sup-irriducibile} |\ p \leq a \text{ e } p \leq b\} =$
$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

□

Come si è visto, per provare la distributività nell'esempio 34 è necessario il teorema fondamentale dell'aritmetica che fissa l'unicità della scomposizione di ogni elemento in sup-irriducibili. Tale proprietà si può dimostrare caratterizzante di tutti i reticoli distributivi che soddisfino l'ipotesi di finitezza delle catene discendenti $a_0 > a_1 > \dots$

Proposizione 15. *Sia D un reticolo distributivo. Se un elemento $x \in D$ ammette una scomposizione irridondante finita in elementi sup-irriducibili, essa è unica.*

Dimostrazione. Si supponga che $x = \bigvee_{i=1}^{n} p_i = \bigvee_{j=1}^{m} q_j$ siano due scomposizioni irridondanti finite in sup-irriducibili di x.
Per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha:

$p_i \leq \bigvee_{j=1}^{m} q_j$, da cui $p_i = p_i \wedge (\bigvee_{j=1}^{m} q_j) = \bigvee_{j=1}^{m}(p_i \wedge q_j)$

Poichè p_i è sup-irriducibile, deve esistere $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $p_i \leq q_j$. Operando lo stesso ragionamento con q_j si trova un p_k tale che $q_j \leq p_k$, ovvero $p_i \leq q_j \leq p_k$ e poichè $\bigvee_{i=1}^{n} p_i$ è una rappresentazione irridondante deve valere $p_i = q_k$.

Sviluppando tale ragionamento in una dimostrazione induttiva si dimostra la precedente proposizione. □

[22]Un altro modo per dimostrare il seguente esempio è suggerito a pag.131, [8].

Dopo quanto detto non stupisce che per i reticoli distributivi, nella loro semplicità, il concetto di reticolo finito e di lunghezza finita coincidono.

Teorema 5. *Sia D un reticolo distributivo. D è di lunghezza finita se e solo se D è finito.*

Dimostrazione. Ovviamente se D è finito è di lunghezza finita.

Supponendo D di lunghezza finita, sia n la lunghezza massima delle catene in D. Si procede quindi per induzione su n.

Se $n = 0$ allora D è composto da un unico elemento.

Si supponga dimostrato che tutti i reticoli distributivi di lunghezza al più n siano finiti, e che D abbia lunghezza $n + 1$.

Se 1 è un sup-irriducibile, esso ammette un unico predecessore p. In tal caso l'intervallo $[0, p]$ ammette catene di lunghezza al più n, ed è quindi finito per ipotesi induttiva. Da ciò segue direttamente la finitezza del reticolo iniziale.

Se 1 non è sup-irriducibile allora ammette la scomposizione finita irridondante in sup-irriducibili $1 = \bigvee_{i=1}^{m} p_i$.
Si nota che per ogni $i = 1, \ldots, m$, l'intervallo $[0, p_i]$ è finito per ipotesi induttiva.

Per ogni $x \in D$, si ha $x = x \wedge \bigvee_{i=1}^{m} p_i = \bigvee_{i=1}^{m} (x \wedge p_i)$, ove per ogni $i = 1, \ldots, m$ vale $(x \wedge p_i) \in [0, p_i]$. Ciò permette di definire una funzione iniettiva da D al prodotto diretto $[0, p_1] \times [0, p_2] \times \cdots \times [0, p_m]$. Poichè tale prodotto è finito, ciò implica la finitezza di D.

□

1.1.4 Reticoli modulari

Ragionando sui parallelismi fra la Teoria dei Reticoli e la Geometria Proiettiva ci si può domandare come 'proiettare' un elemento x di un reticolo L in un intervallo $[a, b] \subseteq L$. Dopo una veloce analisi si nota che esistono due modi canonici di fare ciò, ovvero

$$a \vee (x \wedge b) \qquad \text{e} \qquad (a \vee x) \wedge b$$

Se tali modalità di proiettare un elemento in un intervallo sono identicamente uguali il reticolo L si dice modulare.

Definizione 36. *Un reticolo L si dice modulare se:*

$$\text{(M)} \qquad \forall a, b, c \in L \text{ con } a \leq c, \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

Osservazione 11. *La legge modulare è una forma debole della legge distributiva: si supponga infatti che L sia un reticolo distributivo, e a, b, c siano elementi di L tali che $a \leq c$, allora applicando la distributività si ha $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$.*

Osservazione 12. *Ogni sottoreticolo N di un reticolo modulare L è un reticolo modulare, poichè se l'identità* (M) *vale per tutti gli elementi del reticolo L, in particolare varrà ristretta agli elementi di N.*

In particolare, ogni intervallo $[a, b]$ di L è un reticolo modulare.

È altrettanto vero che il prodotto cartesiano di un insieme qualsiasi di reticoli modulari è anch'esso modulare.

Lemma 6. *Se $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una famiglia di reticoli modulari, allora il reticolo prodotto L_α^A è modulare.*

Esempi Rilevanti

Un importante esempio di reticolo modulare è il seguente.

Esempio 35. *Sia L il reticolo dei sottomoduli di un modulo V su un anello A descritto nell'esempio 21: esso è modulare. In particolare il reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano è modulare.*

Dati S, T, U sottomoduli di V tali che $S \subseteq U$, poichè $S\vee(T\wedge U) \subseteq (S\vee T)\wedge(S\vee U) = (S \vee T) \wedge U$ vale per la disuguaglianza distributiva, è sufficiente dimostrare la validità dell'inclusione opposta.

Per ogni $x \in (S \vee T) \wedge U$, si ha $\underbrace{x}_{\in U} = \underbrace{s}_{\in S\subseteq U} + \underbrace{t}_{\in T}$, da cui $t = x - s \in U \wedge T$, da cui $x \in S \vee (T \wedge U)$

Perciò L è un reticolo modulare.

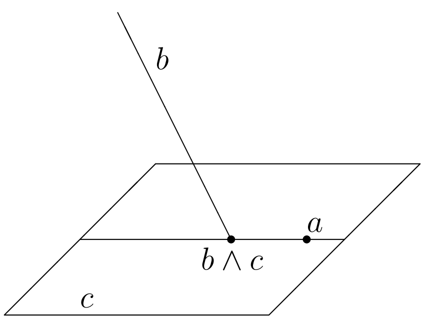
Caso particolare del precedente esempio è il seguente.

Esempio 36. *Si consideri il reticolo dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$: esso rappresenta la costruzione classica della geometria proiettiva reale a tre dimensioni, in cui si denotando 'punti' i sottospazi di dimensione 1, 'rette' i sottospazi di dimensione 2 e 'piani' i sottospazi di dimensione 3.*

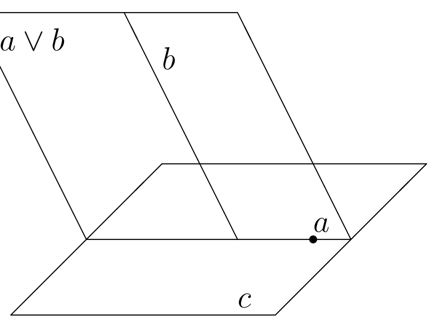
Nel paragrafo successivo si preciserà il concetto di geometria proiettiva, qui basti dire che la geometria proiettiva è quella che non ammette le rette parallele: se due rette sono complanari, allora sono incidenti.

Tale reticolo è modulare per quanto visto nell'esempio 35. Si può inoltre dimostrare che è complementato e di lunghezza finita.

Tale ambiente offre un'utile visualizzazione della legge modulare: nella figura sottostante a è un punto contenuto nel piano c, mentre b è una retta non passante per a e non contenuta in c.

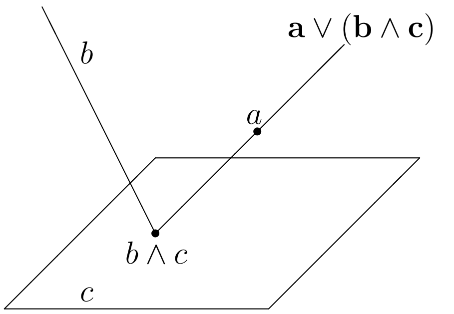


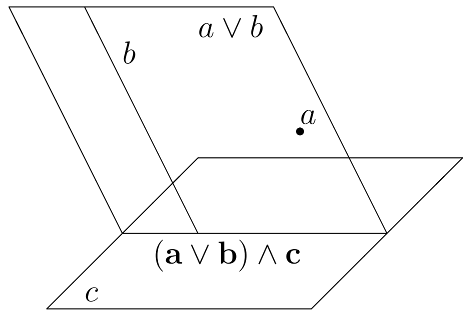
$\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$



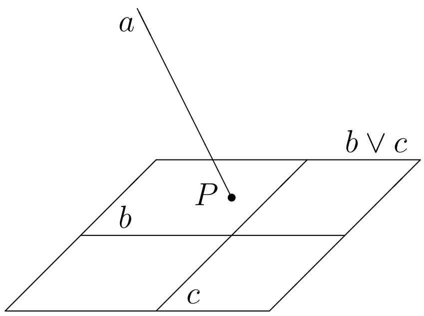
$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$

Si noti che la condizione $a \leq c$ è fondamentale affichè l'identità modulare valga. La seguente figura mostra l'esempio precedente ove si è preso un punto a non appartenente al piano c.

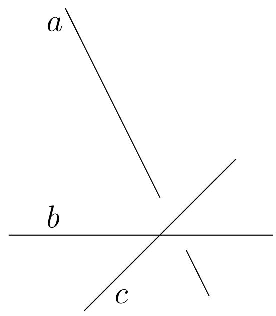




Naturalmente tale reticolo non è distributivo, come mostra il caso in cui a, b e c sono rette, di cui b e c complanari ed a sghemba rispetto alle altre.



$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = P$



$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = \emptyset$

Teorema di Isomorfismo Canonico

Il seguente teorema risulta centrale nella teoria dei reticoli modulari, definendo un isomorfismo canonico fra determinati intervalli, facilmente riconoscibili.

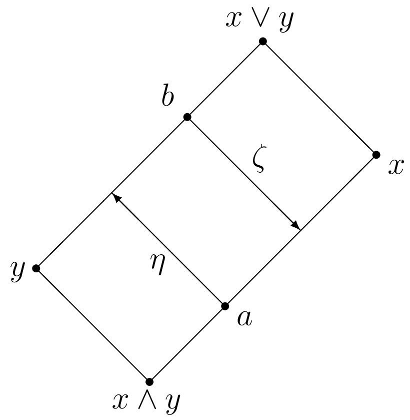
Teorema 6. *Per ogni $x, y \in M$ reticolo modulare, gli intervalli $[x \wedge y,\ x]$ e $[y,\ x \vee y]$ sono isomorfi tramite gli isomorfismi canonici*

$$\eta : \ [x \wedge y,\ x] \to [y,\ x \vee y]$$

$$a \mapsto a \vee y$$

$$\zeta : \ [y,\ x \vee y] \to [x \wedge y,\ x]$$

$$b \mapsto b \wedge x$$



Dimostrazione. Per la proposizione 10 le funzioni η e ζ sono morfismi di poset.

Inoltre per la legge modulare si ha:

$\forall a \in [x \wedge y, x], \quad \zeta \circ \eta(a) = (a \vee y) \wedge x = a \vee (y \wedge x) = a$

$\forall b \in [y,\ x \vee y], \quad \eta \circ \zeta(b) = (b \wedge x) \vee y = b \wedge (x \vee y) = b$

Essendo η e ζ morfismi di poset biiettivi, essi sono degli isomorfismi. □

Nella precedente dimostrazione è dimostrato il seguente corollario.

Corollario 1. *Dato un reticolo modulare* L*, per ogni* x, $y \in L$ *si ha che*

- $\forall a_1,\ a_2 \in [x \wedge y, x], \quad (a_1 \wedge a_2) \vee y = (a_1 \vee y) \wedge (a_2 \vee y)$
- $\forall b_1,\ b_2 \in [y,\ x \vee y], \quad (b_1 \vee b_2) \wedge x = (b_1 \wedge x) \vee (b_2 \wedge x)$

Da tale corollario si vede bene come la legge modulare sia una generalizzazione della legge distributiva.

Nota 7. *Si può dimostrare che la validità del teorema 6 è equivalente alla modularità del reticolo.*

Lunghezza di un Reticolo

Conseguenza del teorema 12 è il seguente il quale permette di introdurre la nozione di lunghezza di un elemento in un reticolo modulare, molto vicina alla nozione di dimensione.

Teorema 7. *Sia* M *un reticolo modulare di lunghezza finita. Per ogni* $x \in M$ *tutte le catene massimali da* 0 *a* 1 *hanno lunghezza uguale.*

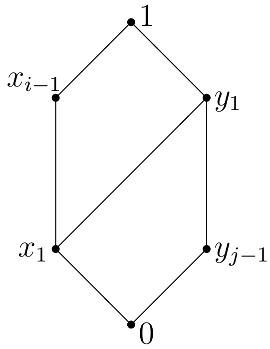
Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{N}$ la lunghezza massima ammissibile delle catene in M, la dimostrazione procede per induzione su n.

Se $n = 0$, il reticolo è schiacciato ad un punto e l'enunciato del teorema è banalmente vero.

Si supponga che per tutti i reticoli di lunghezza al più n, tutte le catene massimali abbiano lunghezza uguale.

Si considera un reticolo modulare M in cui tutte le catene hanno lunghezza al più $n+1$, e siano $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = 1$ e $1 = y_0 > y > 1 > \cdots > y_j = 0$ due catene massimali di M. Si ha dunque per ipotesi $i, j \leq n+1$.

Se gli elementi x_1 ed y_1 sono tali che $x_1 \leq y_1$, allora si considera l'intervallo $[x_1, y_1]$. Esso è modulare e tutte le sue catene massimali da x_1 ad y_1 sono lunghe al più $n-1$, poichè $[x_1, y_1]$ è un sottointervallo degli intervalli $[0, y_1]$ e $[x_1, 1]$ di lunghezza n. Per ipotesi induttiva tutte le catene dei tre intervalli considerati hanno lunghezza uguale, in particolare tutte quelle da x_1 ad y_1, e quindi si ha $i = j$.



Se $x_1 \not\leq y_1$, allora $x_1 \vee y_1 = 1$ e $x_1 \wedge y_1 = 0$, e per il teorema 6 gli intervalli $[0, y_1] = [x_1 \wedge y_1, y_1]$ e $[x_1, 1] = [x_1, x_1 \vee y_1]$ sono reticoli modulari isomorfi le cui catene massimali hanno lunghezza al più n, e nuovamente dall'ipotesi induttiva segue $i = j$. □

Lemma 7. *Per ogni x, $y \in M$ reticolo modulare tali che $x \leq y$, tutte le catene massimali da x ad y hanno lunghezza uguale.*

Dimostrazione. Per quanto l'osservazione 12, l'intervallo $[x, y]$ è modulare, ed il lemma è conseguenza diretta del teorema 7. □

Il teorema 7 giustifica la seguente definizione.

Definizione 37. *Sia M un reticolo modulare di lunghezza finita ed x un elemento di M. Si definisce* lunghezza *di x e la si indica con $l(x)$, la lunghezza di una qualsiasi catena massimale da 0 ad x.*

La lunghezza di M è per definizione $l(1)$.

Tale concetto si rispecchia anche nella nozione di indipendenza, la quale può essere definita come segue. [23]

[23] pag. 86, [4]

Definizione 38. *Una sequenza* $x_1, \dots, x_r$ *di elementi di un reticolo modulare di lunghezza finita è detta indipendente se e solo se soddisfa la seguente condizione simmetrica:*

$$l(x_1 \vee \dots \vee x_r) = l(x_1) + \dots + l(x_r)$$

Le due definizioni fornite possono essere provate equivalenti tramite la legge di Grassmann.

Teorema 8 (Legge di Grassmann)**.** *Sia* L *un reticolo modulare di lunghezza finita,* $\forall x,\, y \in L$ *si ha:*

$$l(x \vee y) + l(x \wedge y) = l(x) + l(y)$$

Dimostrazione. Poichè ogni intervallo di un reticolo modulare è un reticolo modulare, per il teorema 7 tutte le catene massimali degli intervalli $[x \wedge y,\, x]$ ed $[y,\, x \vee y]$ hanno uguale lunghezza. Essendo tali intervalli isomorfi per il teorema 6, si ha

$$l(x) - l(x \wedge y) = l(x \vee y) - l(y)$$

da cui si ricava facilmente l'enunciato. □

Come accennato la lunghezza di un elemento rappresenta il più semplice concetto di dimensione che viene presentato in questa tesi. In letteratura il termine "dimensione" assume diversi significati a seconda dell'autore. È quindi molto importante avere ben presente quello ad esso attribuito dall'autore.

Dimensione di Kurôs-Ore

Un altro punto di vista per definire la dimensione nei reticoli modulari è quello adottato da Kurôs e Ore, i quali considerarono tutte le possibili scomposizioni in elementi sup-irriducibili di un elemento.

Il lemma 5 garantisce che in un reticolo di lunghezza finita ogni elemento ammette almeno una scomposizione irridondante finita in elementi sup-irriducibili. Nei reticoli distributivi, come si è visto, tale scomposizione è unica. Indebolendo l'ipotesi distributiva si perde l'unicità della scomposizione, ma Kurôs ed Ore dimostrarono che per ogni elemento di una prima scomposizione irridondante possa essere sostituito da un elemento di una seconda scomposizione irridondante.

Teorema 9. *Kurôs-Ore*
Per ogni elemento $x \in M$ *reticolo modulare di lunghezza finita, siano*

$$x = p_1 \vee \dots p_n = q_1 \vee \dots \vee q_m$$

due scomposizioni irridondanti in elementi sup irriducibili di x*.*

Per ogni $i = 1, \dots, n$*, esiste* $j = 1, \dots, m$ *tale che*

$$x = p_1 \vee \dots \vee p_{i-1} \vee \underbrace{q_j}_{posto\ i-esimo} \vee p_{i+1} \vee \dots \vee p_n$$

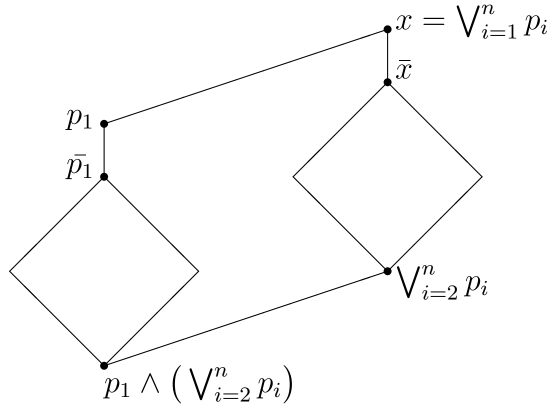
è una scomposizione irridondante in elementi sup-irriducibili di x*.*

Dimostrazione. Si dimostra il Teorema per p_1 : la dimostrazione per i restanti termini della prima $\vee-$scomposizione procede in maniera del tutto analoga.

Si osserva in primo luogo che per il teorema 6 gli intervalli $[\bigvee_{i=2}^{n} p_i,\ x]$ e $[p_1 \wedge \big(\bigvee_{i=2}^{n} p_i\big),\ p_1]$ sono isomorfi. Da ciò segue che, poichè p_1 è sup-irriducibile e $x = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ è una rappresentazione irridondante di x, si ha che x deve essere sup-irriducibile nell'intervallo $[\bigvee_{i=2}^{n} p_i,\ x]$.

Per ipotesi si ha:
$x = q_i \vee \dots q_m = \big(q_i \vee \dots \vee q_m\big) \vee \bigvee_{i=2}^{n} p_i = \big(q_1 \vee \bigvee_{i=2}^{n} p_i\big) \vee \dots \vee \big(q_m \vee \bigvee_{i=2}^{n} p_i\big)$

Essendo x sup-irriducibile in $[\bigvee_{i=2}^{n} p_i,\ x]$ e appartenendo $\big(q_j \vee \bigvee_{i=2}^{n} p_i\big)$ a tale intervallo per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, deve esistere almeno un j tale che $x = q_j \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$.



□

Lemma 8. *Tutte le scomposizione irridondanti in sup-irriducibili di un elemento in un reticolo modulare di lunghezza finita ammettono lo stesso numero di elementi.*

La seguente definizione è dunque ben posta.

Definizione 39. *Sia M un reticolo modulare di lunghezza finita. Per ogni $x \in M$ si definisce dimensione geometrica o di Kurôs-Ore di x, e si indica con il simbolo $d(x)$, il numero di elementi di una qualsiasi scomposizione irridondante di x in elementi sup-irriducibili.*

Proprietà dei Reticoli Modulari

Il seguente teorema risulterà centrale in molte delle dimostrazioni successive.

Teorema 10. *Sia M un reticolo modulare di lunghezza finita. $\forall a, b, c \in M$ tali che c sia sup-irriducibile, se $c \leq a \vee b$, $c \nleq b$, allora esiste un a' sup-irriducibile tale che $a' \leq a$ e $a' \vee b = c \vee b$.*

Dimostrazione. Si consideri l'intervallo $[b, c \vee b]$ canonicamente isomorfo all'intervallo $[c \wedge b, c]$.
Essendo $c \nleq b$, si ha $c \wedge b \lneq c$, e ricordando che c è sup-irriducibile in L, c deve essere sup-irriducibile in $[c \wedge b, c]$. Da cui $c \vee b$ è sup-irriducibile in $[b, c \vee b]$.

Si consideri l'elemento $(c \vee b) \wedge a$: poichè il reticolo M è di lunghezza finita, esso ammette una rappresentazione finita di elementi sup-irriducibili, ovvero $(c \vee b) \wedge a = \vee_{i=1}^{n} a_i$.

$$\vee_{i=1}^{n}(a_i \vee b) = (\vee_{i=1}^{n} a_i) \vee b = [(c \vee b) \wedge a] \vee b = (c \vee b) \wedge (a \vee b) = c \vee b$$

ovvero $\vee_{i=1}^{n}(a_i \vee b) = c \vee b$.

Essendo $c \vee b$ sup-irriducibile in $[b, b \vee c]$, esiste un a_h tale che $a_h \vee b = c \vee b$. □

Nell'esempio 35 si è mostrato come il poset dei sottospazi di uno spazio vettoriale sia un reticolo modulare. È interessante notare come uno dei concetti fondamentali della teoria degli spazi vettoriali, ovvero il concetto di indipendenza lineare di una sequenza finita di vettori non nulli, abbia una caratterizzazione puramente reticolare.

Definizione 40. *Sia L un reticolo dotato di elemento minimo* 0.

Una sequenza finita $(x_1, \dots, x_n)$ di elementi di L diversi da 0 si dice indipendente *se per ogni $i = 1, \dots, n$,* $\quad x_i \wedge \bigvee_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_j = 0$.[24]

Si invita il lettore a verificare che una sequenza di vettori è linearmente indipendente se e solo se la sequenza dei sottospazi da essi generati è indipendente secondo la definizione 40.

Ovviamente la definizione 40 si estende ponendo tutte le sequenze contenenti lo 0 del reticolo linearmente dipendenti.

Come nell'esempio del reticolo dei sottospazi, l'indipendenza fra elementi del reticolo gode di buone proprietà anche nel caso generale.

Proposizione 16. *Sia L un reticolo modulare limitato, $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq L$ un insieme di elementi indipendenti. Se $y \in L$ è tale che $y \wedge \bigvee_{i=1}^{n} x_i = 0$, allora $x_1, \dots, x_n$, y sono elementi indipendenti.*

Dimostrazione. Se si dimostra che $x_1 \wedge (\bigvee_{i=2}^{n} x_i \vee y) = 0$, la dimostrazione termina, poichè le altre verifiche sono analoghe.

Per la modularità si ha $\bigvee_{i=1}^{n} x_i \wedge (y \vee \bigvee_{i=2}^{n} x_i) = (\bigvee_{i=1}^{n} x_i \wedge y) \vee \bigvee_{i=2}^{n} x_i = \bigvee_{i=2}^{n} x_i$.

Poichè $x_1 \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i$, per l'isotonia del $\wedge$ di ha che

$$x_1 \wedge (y \vee \bigvee_{i=2}^{n} x_i) \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i \wedge (y \vee \bigvee_{i=2}^{n} x_i) = \bigvee_{i=2}^{n} x_i,$$

e per la monotonia del $\wedge$

$$x_1 \wedge (y \vee \bigvee_{i=2}^{n} x_i) \leq x_1 \wedge \bigvee_{i=2}^{n} x_i = 0$$

□

[24] Vedi pag. 46, [6]

Reticoli Modulari Complementati

È giusto chiedersi infine quali siano le proprietà dei reticoli modulari complementati e quali gli esempi notevoli. A tali quesiti si procede cercando di dare una risposta, seppur parziale.

Esempio 37. *Si consideri il reticolo dei sottospazi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale sinistro V. Tale reticolo è complementato: nel seguito si mostra la dimostrazione nel caso finito.*

Sia W un sottospazio di V. Se $W = V$ allora il suo complemento è il singoletto $\{0\}$.

In caso contrario, si costruisce una catena $W = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset ...$ di sottospazi dove per ogni $I_i \neq V$ si sceglie un $v_i \in V \setminus I_i$ e si pone $I_{i+1} = I_i + \{\lambda v_i | \lambda \in K\}$.

Essendo V di dimensione finita il processo termina dopo un numero finito m di passi.

Posto $S = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i | \ \forall i = 1, \dots, m, \ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$ si ha per costruzione $W + S = V$.

Inoltre per ogni $x \in W \cap S$, esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$, da cui si ha che $\lambda_m v_m = x - (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{m-1} v_{m-1})$.

Se $\lambda_m \neq 0$ si ha che $v_m = \underbrace{\lambda_m^{-1} x}_{\in W} - (\underbrace{\lambda_m^{-1} \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m^{-1} \lambda_{m-1} v_{m-1}}_{\in I_{m-1}})$ contro le ipotesi, da cui $\lambda_m = 0$.

In modo analogo si mostra che tutti i λ_i sono nulli e $x = 0$, dunque $W \cap S = \{0\}$.

Nota 8. *Si noti che nell'esempio 37 è fondamentale che V sia uno spazio vettoriale. Il reticolo dei sottomoduli di un modulo su un anello generico infatti non è complementato.*

Esempio 38. *Si consideri $\mathbb{Z}_4$ come modulo su se stesso. I suoi sottomoduli sono $\{[0]\}$, $\{[0], [2]\}$ e $\mathbb{Z}_4$.*

Ovvero il reticolo dei suoi sottomoduli è la catena di lunghezza due, la quale non è complementata.

Si nota che, mentre in generale un intervallo di un reticolo complementato può essere non complementato, un reticolo *modulare* è complementato se e solo se ogni suo intervallo è complementato.

Teorema 11. *Un reticolo modulare è complementato se e solo se è relativamente complementato.*

Inoltre supponendo L un reticolo modulare e complementato e $[a, b] \subseteq L$ un suo intervallo, $\forall x \in [a, b]$, detto y il complemento di x nel reticolo L, allora la proiezione di y nell'intervallo $[a, b]$, ovvero $a \vee (y \wedge b)$, è il complemento un x nell'intervallo $[a, b]$.

Dimostrazione. Se un reticolo L è relativamente complementato è banalmente complementato, poichè $L = [0, 1]$.

Sia L un reticolo modulare complementato, a, $b \in L$ tali che $a \leq b$ e $x \in [a, b]$. Si vuole dimostrare che esiste un $y \in [a, b]$ tale che $x \vee y = b$ e $x \wedge y = a$.

Denotato con $\bar{x}$ il complemento di x in L, si consideri $y = a \vee (\bar{x} \wedge b)$. Ovviamente $y \in [a, b]$, inoltre si ha:

$$x \vee y = x \vee a \vee (\bar{x} \wedge b) = x \vee (\bar{x} \wedge b) = (x \vee \bar{x}) \wedge b = b$$

$$x \wedge y = x \wedge a \vee (\bar{x} \wedge b) = x \wedge (a \vee \bar{x}) \wedge b = x \wedge (\bar{x} \vee a) = (x \wedge \bar{x}) \vee a = a$$

□

Il seguente corollario del teorema 11 è di grande utilità nel seguito, oltre a fornire una caratterizzazione degli elementi sup-irriducibili di tali reticoli.

Corollario 2. *Un reticolo modulare L di lunghezza finita è complementato se e solo se tutti i sup-irriducibili di L sono atomi*

Dimostrazione.

- L complementato $\Rightarrow \big(\vee$ −irriducibile $\Rightarrow$ atomo$\big)$
  Si supponga x un elemento sup-irriducibile, e sia $a \in [0, x]$. Per il teorema 11 a ammette un complemento b nell'intervallo $[0, x]$, da cui $a \vee b = x$. Poichè x è sup-irriducibile, allora $x = a$ o $x = b$. Se $x = b$ allora $a = a \wedge b = 0$, e analogamente se $a = x$ allora $b = 0$.

  Poichè l'unico elemento strettamente minore di x è l'elemento minimo, x è un atomo.

- $\big(\vee$ −irriducibile $\Rightarrow$ atomo$\big) \Rightarrow$ L complementato
  $\forall y \in L$ esiste una scomposizione irridondante finita in sup-irriducibili di y, ma poichè tutti i sup-irriducibili di L sono atomi si ha che esiste una scomposizione irridondante finita in atomi, in particolare 1 ammette la scomposizione irridondante finita $1 = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$, ove a_i è un atomo per $i = 1, \ldots, n$.

  Sia x un elemento di L. Se $x = 1$ allora ammette come complemento 0, in caso contrario $l(x) < n$ ed esiste $j(1) \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $a_i \wedge x = 0$, da cui $l(a_j \vee x) = l(x) + 1$. Se $x \vee a_{i(1)} = 1$ allora $a_{i(1)}$ è il complemento di x, in caso contrario esiste un $i(2)$ tale che $(x \vee a_{i(1)}) \wedge a_{i(2)} = 0$. Tale procedimento si ripete fino a che $a_{i(1)} \vee \cdots \vee a_{i(n-l(x))} \vee x = 1$.

  Per costruzione inoltre si ha

  $$l(1) = l(a_{i(1)} \vee \cdots \vee a_{i(n-l(x))} \vee x) = l\big(a_{i(1)}\big) + \cdots + l\big(a_{i(n-l(x)-1)}\big) + l(x) =$$

  $$= l(a_{i(1)} \vee \cdots \vee a_{i(n-l(x))}) + l(x)$$

  da cui $\big(a_{i(1)} \vee \cdots \vee a_{i(n-l(x))}\big) \wedge x = 0$, ovvero $a_{i(1)} \vee \cdots \vee a_{i(n-l(x))}$ è un complemento di x.

□

1.2 Geometrie Proiettive

1.2.1 Geometrie Proiettive Classiche

La geometria proiettiva nasce nella Firenze rinascimentale nella bottega di Piero della Francesca, meraviglioso strumento per dare ai dipinti l'illusione della profondità. Per molto tempo essa fu competenza più dei pittori che dei matematici. La piena consapevolezza fu raggiunta negli studi sui fondamenti della geometria.

La rappresentazione della geometria proiettiva di incidenza tramite una superficie sferica (opportunamente quozientata) la rende l'esempio di geometria che non soddisfa il quinto assioma più vicino al sentire degli studenti e dei non addetti ai lavori. Esiste inoltre un forte legame fra geometria proiettiva di incidenza e algebra lineare, descritto da Baer nel libro "Linear Algebra and Projective Geometry" ([1]): dato uno spazio vettoriale sinistro di dimensione finita definito su un corpo, l'insieme dei suoi sottospazi ordinati dalla relazione di inclusione forma un reticolo modulare complementato. Passando a considerare i soli sottospazi di dimensione uno e due si ottiene lo spazio proiettivo secondo la visione classica di Veblen e Young. Viene naturale domandarsi se nel passaggio dallo spazio vettoriale allo spazio proiettivo ad esso associato si perda qualcosa.

Può sorprendere che la risposta sia no: tutte le informazioni contenute nello spazio vettoriale sono contenute nello spazio proiettivo ad esso associato, ovvero dimensione e corpo di definizione. Tale risultato è il contenuto del Primo Teorema Fondamentale della Geometria Proiettiva[25] e dell'equivalenza che verrà descritta nel paragrafo 2.3[26]. Il Primo Teorema Fondamentale permette di affermare che il reticolo dei sottospazi determina completamente lo spazio vettoriale di partenza a meno di trasformazioni semilineari e nel paragrafo 2.3 si vedrà come tale reticolo dei sottospazi sia equivalente alla struttura di incidenza costituita dai soli sottospazi di dimensione 1, detti punti, e dai sottospazi di dimensione 2, detti rette.

Nota 9. *Nella presente tesi il termine* geometria proiettiva *indica la teoria generale riguardante le geometrie proiettive di incidenza, omettendo l'introduzione di una metrica.*

Una specifica geometria proiettiva sarà detta spazio proiettivo*: seguendo l'approccio classico di Veblen e Young uno spazio proiettivo è una struttura di incidenza fra due insiemi disgiunti di punti e di rette, la cui relazione di incidenza soddisfa determinati assiomi.*

Si presentano ora gli assiomi della geometria proiettiva secondo Veblen e Young, in due passaggi. In un primo tempo essi saranno esposti a parole, ed in seguito in forma simbolica.

Nella loro esposizione discorsiva, gli assiomi presentano una maggiore bellezza sintetica e una maggiore leggibilità, mentre la loro forma simbolica risulta essere tecnicamente più comoda durante le dimostrazioni. Si rimanda il lettore al libro *"Projective Geometry",* Veblen e Young [18], per una trattazione più completa della teoria.

[25] Confronta [1]
[26] Confronta [20]

Assiomi in Forma Discorsiva

Definizione 41. *Dati due insiemi disgiunti, detti l'insieme dei punti P e l'insieme delle rette R, e una relazione di incidenza fra punti e rette, tale struttura di incidenza si dice spazio proiettivo se valgono i seguenti assiomi:*

(P1) *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*

(P2) *Dato un triangolo non degenere, se una retta incide su due lati del triangolo in punti distinti, allora incide anche sul terzo lato.*

(P3) *Ogni retta contiene almeno due punti distinti.*

Il linguaggio utilizzato nei precedenti assiomi, segue la terminologia classica della geometria, e verrà formalizzato in seguito.

È interessante come Veblen e Young facciano notare che l'assiomatica della geometria proiettiva sia estremamente più semplice della corrispondente assiomatica di Hilbert per gli spazi euclidei.[27] Per tale motivo lo studio dei fondamenti della geometria, fondamentale per comprendere appieno la disciplina, potrebbe partire in modo naturale dai fondamenti della geometria proiettiva a motivo della sua semplicità. A supporto di ciò ricordano in secondo luogo come le geometrie euclidee e iperboliche possano essere derivate in maniera più naturale dalla geometria proiettiva di quanto la proiettiva possa essere derivata dalle sue sorelle, permettendo di prendere lo studio dei suoi fondamenti come studio dei fondamenti dell'intera geometria.

Assiomi in Forma Simbolica

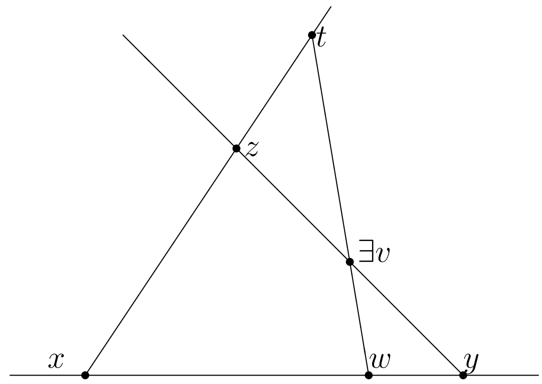
Nota 10. *Si utilizzerà da ora in avanti il simbolo $\in$, sia per indicare la relazione di incidenza punto retta di uno spazio proiettivo sia con il consueto significato di appartenenza. Il significato tuttavia risulterà chiaro dal contesto. La relazione di incidenza verrà anche indicata con espressioni del tipo "un punto appartiene ad una retta," o "la retta passante per due punti," ed altre espressioni idiomatiche tipiche del linguaggio geometrico.*

Definizione 42. *Dati P e R insiemi disgiunti, detti rispettivamente l'insieme dei punti e l'insieme delle rette, e data una relazione $\in \subset P \times R$, detta relazione di incidenza, la terna $(P, R, \in)$ si dice spazio proiettivo se soddisfa i seguenti assiomi:*

(P1) $\forall x, y \in P$ *con* $x \neq y$, *esiste una ed una sola retta passante per* x *e* y, *indicata dal simbolo* $x \vee y$.

(P2) $\forall x, y, z$ *punti distinti non collineari, se* $w \in x \vee y$, $\quad t \in x \vee z$ *con* $w \neq t$, *allora esiste un punto* v *tale che* $v \in t \vee w$ *e* $v \in y \vee z$.

[27] Vedi pag. iii, [18].



(P3) *Ogni retta ammette almeno due punti distinti incidenti in essa.*

Se lo spazio proiettivo soddisfa l'assioma (P3') *più forte di* (P3)*, allora si dice che* $(P, R, \in)$ *è uno spazio proiettivo* proprio.

(P3') *Ogni retta ammette almeno tre punti distinti incidenti in essa.*

L'assioma (P1) è composto dai due seguenti assiomi logicamente distinti ed indipendenti:

(P1') Per due punti distinti passa almeno una retta.

(P1") Per due punti distinti passa al più una retta.

È importante tenere bene a mente tale distinzione logica per comprendere lo sviluppo della teoria.

Nella generalizzazione operata da Faigle ed Herrmann l'assioma (P1') continuerà ad essere valido, mentre l'assioma (P1") in generale non lo sarà e per caratterizzare la retta individuata da due punti distinti dovrà essere posta una richiesta aggiuntiva.

Commenti

L'assiomatizzazione classica della geometria proiettiva impone l'assioma (P3'), troppo forte per garantire l'equivalenza che si descrive nel capitolo 2.

Il punto di vista prettamente geometrico ed il punto di vista della teoria dei reticoli sull'assiomatica della geometria proiettiva di incidenza dunque differiscono. Tuttavia Birkhoff mostrò come le geometrie ottenute dagli assiomi (P1), (P2) e (P3) siano isomorfe al prodotto diretto di geometrie proiettive proprie con un'algebra di Boole. È dunque la struttura delle singole geometrie proprie che determina la geometria più generale descritta dalla teoria dei reticoli: i due punti di vista convergono.

Continuando ad osservare l'assioma (P3) va notato come esso permetta di identificare ogni retta con l'insieme dei punti incidenti in essa, giustificando così quanto affermato nella nota 10.

A commento della definizione 42 va infine notato che l'insieme dei punti, delle rette e la relazione di incidenza fra essi non sono definiti esplicitamente: gli assiomi (P1), (P2) e (P3) caratterizzano le proprietà della relazione di incidenza, descrivendo gli oggetti della geometria soltanto implicitamente. "Punto" e "retta" sono in questo contesto soltanto nomi, svuotati di ogni significato concreto che non sia direttamente derivabile dagli assiomi dati.

Veblen e Young nell'articolo *A Set of Assumptions for Projective Geometry* ([27]), forniscono ulteriori assiomi di estensione e completezza che raggruppati insieme a quelli generali sopra riportati caratterizzano completamente le geometrie sintetiche derivanti da spazi vettoriali sul campo reale e complesso. Essi richiedono da un lato lo 'spazio' necessario alla validità dei teoremi di coordinatizzazione, dall'altro certe proprietà di completezza che le geometrie proiettive derivanti dai suddetti campi devono necessariamente avere.

Dimensione Finita

In questa tesi ci si limita a descrivere risultati concernenti geometrie di dimensione finita. Si esporrà ora la formalizzazione classica del concetto di spazio proiettivo di dimensione finita[28].

Per comprendere l'idea dietro alla formalizzazione degli spazi proiettivi di dimensione finita si immagini di prendere un punto p_1 e considerare il singoletto da esso formato. Esso avrà dimensione geometrica 0.
Preso un punto p_2 distinto da p_1, l'insieme dei punti incidenti sulla retta $p_1 \vee p_2$ avrà dimensione geometrica 1.
Nuovamente prendendo un punto p_3 non appartenente ad $p_1 \vee p_2$, i punti incidenti ad una retta passante per p_3 ed un punto di r formeranno il piano π di dimensione geometrica 2.
Iterando questo processo si ottengono elementi della geometria proiettiva di dimensione via via crescente, e se la dimensione della geometria è finita, tale processo dovrà terminare, avendo ottenuto come ultimo passo l'intero insieme dei punti.

Tale processo suggerisce la seguente definizione.

Definizione 43. *Lo spazio proiettivo* $(P, R, \in)$ *si dice di dimensione finita se soddisfa l'assioma* (P4)

(P4) $\exists p_1, \dots, p_n \in P$ *tali che, definendo per induzione gli insiemi*

$$I_1 := \{p_1\}$$

$$I_{i+1} := \{x \in p_{i+1} \vee y |\ y \in I_i\}$$

si ha $I_n = P$.

Gli assiomi (P1)-(P4) sono del primo ordine: la teoria della geometria proiettiva è infatti una teoria del primo ordine.

[28] Vedi [18].

Insiemi Lineari

La geometria descritta è formata solamente da punti e rette, insieme alla loro relazione di incidenza. Ci si può chiedere come introdurre l'idea di piani, spazi ed iperpiani, elementi canonici della geometria. Veblen e Young impostarono l'assiomatica della geometria proiettiva in questi termini, avendo visto nella relazione fra punti e rette la relazione più semplice da cui fosse possibile ricostruire l'intera geometria proiettiva. L'idea chiave nel processo di ricostruzione degli altri elementi citati è stata suggerita prima di introdurre la definizione 43 di spazio proiettivo di dimensione finita, concetto legato alla massima dimensione degli *oggetti* della geometria stessa. Tale processo dunque suggerisce anche la seguente definizione, centrale nella teoria della geometria proiettiva.

Definizione 44. *Sia $(P, R, \in)$ uno spazio proiettivo, e sia S un sottoinsieme di P. Diremo che S è un* insieme lineare *se per ogni a, b elementi distinti di S, se $c \in a \vee b$ allora $c \in S$.*

Per l'assioma (P1), i punti di una retta sono un insieme lineare. In generale un insieme lineare è un insieme che contiene tutti i punti incidenti su una retta fra due suoi punti qualsiasi.

Notazione 5. *Come nella teoria dei gruppi, sovente un gruppo $(G, *, 1)$ viene indicato con il solo insieme di base omettendo di indicare l'operazione di moltiplicazione e l'operazione zeroaria di elemento neutro, nel seguito della tesi si indicherà uno spazio proiettivo $(P, R, \in)$ omettendo di indicare la relazione di incidenza, considerata implicitamente definita, ovvero si adotterà ove ciò non induca ambiguità il simbolo (P, R).*

1.2.2 Geometrie Proiettive su Poset

Le geometrie proiettive su Poset sono una fra le possibili generalizzazioni della geometria proiettiva classica. Esse furono introdotte da Faigle ed Herrmann per generalizzare l'equivalenza fra la categoria dei reticoli modulari complementati di lunghezza finita e la categoria degli spazi proiettivi di dimensione finita.[29] Esse sono realizzate da spazi proiettivi di incidenza ove si considera un ordine sia sull'insieme dei punti che su quello delle rette. Tuttavia ciò rende l'assioma classico del triangolo di Veblen e Young troppo stringente, ponendo dunque la necessità di generalizzarlo.

Faigle ed Herrmann nell'individuare il sistema di assiomi che ci si accinge a presentare tennero conto di due esigenze distinte a cui esso doveva rispondere: da un lato imporre le restrizioni necessarie a coordinare opportunamente la relazione di incidenza punto retta con le relazioni d'ordine parziale sui Poset dei punti e delle rette, dall'altro di ricondursi agli assiomi della geometria proiettiva (P1), (P2), e (P3) nel caso l'ordine parziale sul Poset dei punti e su quello delle rette fosse quello discreto.

[29] *"Projective Geometry on Partially Ordered Set"*, 1981, [23]

Assiomatica

Definizione 45. *Dati P ed R Poset distinti di lunghezza finita, detti rispettivamente il Poset dei* punti *ed il Poset delle* rette, *e data una relazione di incidenza $\in \subset P \times R$, la terna ordinata $(P, R, \in)$ si dice spazio di incidenza se soddisfa i seguenti assiomi:*

(A1) *$\forall x, y \in P$, $\forall r \in R$, se $x \leq y$ e $y \in r$ allora $x \in r$.*
Inoltre $\forall x \in P$, $\forall r, s \in R$, se $x \in r$ e $r \leq s$ allora $x \in s$.

(A2) *$\forall x, y \in P$ con x ed y non confrontabili, esiste ed è unica una retta, indicata con $x \vee y$, tale che $x, y \in x \vee y$ e per ogni retta r, se $x, y \in r$ allora $x \vee y \leq r$.*

(A3) *Per ogni retta r esistono due punti non confrontabili x ed y tali che $r = x \vee y$.*

(A4) *Sia $x \vee y$ una retta, x' un punto tale che $x < x'$, allora $x' \notin x \vee y$.*

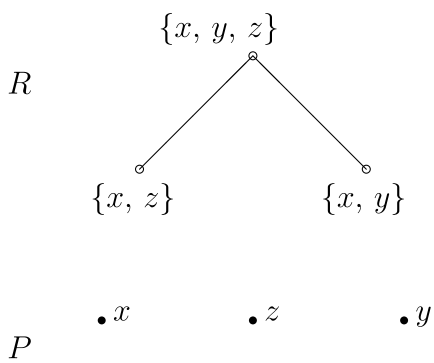
(A5) *Sia $x \vee y$ una retta e z un punto tale che $x, y \leq z$. Allora $\forall t \in x \vee y$, si ha $t \leq z$.*

Si nota che gli assiomi (A1), (A4) ed (A5) rispondono all'esigenza di coordinare la relazione di incidenza $\in$ agli ordinamenti sui due insiemi dei punti e delle rette. Gli assiomi (A2) ed (A3) generalizzano invece il primo assioma di Veblen e Young.

Si noti che una retta non è determinata da due punti distinti qualsiasi incidenti in essa: l'assioma (A3) garantisce infatti soltanto l'esistenza di due punti non confrontabili che la determinano. L'assioma (A6) che sta per essere enunciato garantisce una proprietà più debole di quella citata per la geometria proiettiva, e gli spazi di incidenza che lo soddisfano sono detti *linear-regolari.*

(A6) Siano x, y, z punti a due a due non confrontabili, se $z \in x \vee y$ e $z \nleq y$ allora esiste un punto $x' \leq x$ tale che $x' \vee y = z \vee y$.

Esempio 39. *Come esempio di spazio di incidenza non linear-regolare si dà il seguente diagramma, ove il poset dei punti è rappresentato da punti neri, il poset delle rette è rappresentato da pallini vuoti e la relazione di incidenza è determinata dalla relazione di appartenenza.*



Insiemi Lineari

In parallelo con la teoria classica della geometria proiettiva, anche nelle geometrie proiettive su Poset rivestono un ruolo centrale gli insiemi lineari opportunamente generalizzati.

Definizione 46. *Sia $(P, R, \in)$ uno spazio di incidenza, ed $A \subseteq P$. Si dice che A è un insieme lineare di $(P, R, \in)$ se e solo se per ogni x, y, $z \in P$, se $z \in x \vee y$ allora $z \in A$.*

Per l'assioma (A3) è possibile identificare ogni retta r con un insieme $\{z \in P | \, z \in x \vee y\}$ ove x ed y sono opportuni punti non comparabili incidenti in r. Tale insieme è lineare per gli assiomi (A1) ed (A2), infatti se p, $q \in x \vee y$ punti non comparabili, allora per (A2) si ha $p \vee q \leq x \vee y$ ed applicando (A1) si prova quanto asserito.

Se x ed y sono punti tali che $x \geq y$, allora si definisce *retta degenere,* e si indica con $x \vee y$ l'insieme

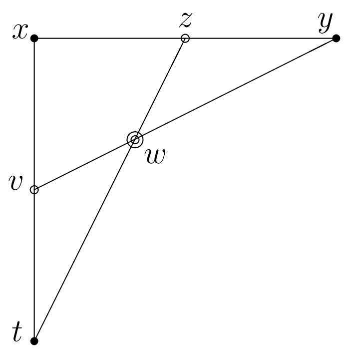
$$x \vee y := \{p \in P | \, p \leq x\}$$

Esso è lineare per l'assioma (A5). •

Linear-Regolarità

Definizione 47. *Uno spazio di incidenza linear-regolare $(P, R, \in)$ si dice uno* spazio proiettivo di incidenza *se*

(A7) *$\forall x$, y, z, t, $w \in P$, se $z \in x \vee y$ e $w \in z \vee t$, allora esiste $v \in x \vee t$ tale che $w \in v \vee y$.*



Nell'assioma (A7) non si richiede espressamente che $x \vee y$, $z \vee t$ ed $x \vee t$ siano rette non degeneri, poichè se almeno una di esse lo fosse, l'enunciato dell'assioma sarebbe vero in ogni spazio di incidenza.

Lemma 9. *Siano x, y, z, t, w punti dello spazio di incidenza $(P, R, \in)$ (anche non proiettivo) come nell'assioma (A7), se una fra le rette $x \vee y$, $z \vee t$ o $x \vee t$ è una retta degenere, allora vale la conclusione dell'assioma (A7).*

Dimostrazione. Si supponga per esempio $x \leq y$. Allora $z \leq y$ e perciò $w \in z \vee y$ implica $w \in y \vee t$.

Se $x \geq y$ allora similmente $w \in x \vee t$. Gli altri casi si dimostrano in modo analogo. □

Dimensione Finita

Possiamo ora dare la definizione finale del seguente paragrafo.

Definizione 48. *Lo spazio proiettivo di incidenza* $(P, R, \in)$ *si dice di dimensione finita se soddisfa l'assioma* (A8)

(A8) $\exists p_1, \dots, p_n \in P$ *tali che* p_1 *sia un elemento minimale e gli insiemi definiti per induzione*

$$I_1 := \{p_1\}$$
$$I_{i+1} := \{x \in p_{i+1} \vee y |\ y \in I_i\}$$

soddisfino le seguenti richieste:

- $I_n = P$.
- *Per ogni* $i = 1, \dots, n-1$ *si ha che* $\forall q \in I_{i+1} - I_i$

$$I_{i+1} = \{x \in q \vee y |\ y \in I_i\}$$

Notazione 6. *Nel seguito per indicare uno spazio proiettivo su poset* $(P, R, \in)$ *si ometterà la relazione di incidenza, supponendola implicitamente definita, ovvero dove ciò non induca ambiguità si adotterà il simbolo* (P, R).

1.3 Teoria delle Categorie

Le definizioni ed i risultati riportati in questo paragrafo sono stati ripresi dal libro “Basic Category Theory” di Jaap Van Oosten ([17]) e dal libro “Basic Category Theory” di Tom Leinster ([15]), a cui si rimanda il lettore per ulteriori approfondimenti. Si noti che il secondo libro adotta un approccio più didattico, mentre il libro di Oosten raccoglie risultati più avanzati.

Definizione di Categoria

Una categoria $\underline{C}$ è data una volta assegnate due classi:

1. la classe $\underline{C}_0$, detta la classe degli ‘oggetti’
2. la classe $\underline{C}_1$, detta la classe delle ‘frecce’

Sulle classi $\underline{C}_0$ e $\underline{C}_1$ risulta definita la seguente struttura:

- Ogni freccia $f \in \underline{C}_1$ ammette un *dominio* A e un *codominio* B, i quali sono oggetti. In tal caso si indica $A = Dom(f)$, $B = Imm(f)$, e $f: A \to B$.
- Per ogni A, $B \in \underline{C}_0$, la collezione $\mathbf{Hom}(A, B) := \{f \in \underline{C}_1 | \ Dom(f) = A \ e \ Imm(f) = B\}$ è un insieme.

  Qualora A e B appartengano a più di una categoria, per esplicitare che ci si riferisce alle frecce appartenenti a $\underline{C}$, si utilizza la notazione $\mathbf{Hom}_{\underline{C}}(A, B)$.
- $\forall A$, B, $C \in \underline{C}_0$ è definita una funzione binaria ‘$\circ$’, detta di *composizione*

$$\circ: \ \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \to \mathbf{Hom}(A, C)$$

$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

- È definita un operazione unaria

$$id: \ \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{C}_1$$

$$A \mapsto id_A$$

  ove per ogni $A \in \underline{C}_0$ si ha $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$. Essa viene detta l’identità di A.

Devono inoltre valere le seguenti proprietà:

1. La composizione è associativa, ovvero $\forall A,\ B,\ C,\ D \in \underline{C}_0$, $\forall f \in \mathbf{Hom}(A,B)$, $\forall g \in \mathbf{Hom}(B,C)$, $\forall h \in \mathbf{Hom}(C,D)$ vale

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   Ovvero il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h \circ g"] \arrow[dr, "g"] & D \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g \circ f"'] & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

2. Per ogni $A \in \underline{C}_0$, la freccia id_A gode delle seguenti proprietà:

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A,B),\ f \circ id_A = f, \qquad \forall g \in \mathbf{Hom}(C,A),\ id_A \circ g = g$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[rr, "f"'] & \equiv & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "id_A"] & \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "g"'] & \equiv & A
\end{tikzcd}$$

Notazione 7. *Nei diagrammi, caratteristici della teoria delle categorie, il simbolo '$\equiv$' indica che il diagramma commuta. Un diagramma commuta se componendo le frecce secondo l'ordine di qualunque percorso fra due punti del diagramma che rispetti il verso delle frecce, si ottiene lo stesso risultato.*

Tali diagrammi sono estremamente utili per visualizzare le relazioni fra le frecce, che risultano il cuore della teoria delle categorie.

Notazione 8. *La classe $\underline{C}_0$ in molti testi, come quello di Leister, viene indicata con il simbolo $\mathbf{Ob}(\underline{C})$ per sottolineare il fatto che è la classe degli oggetti di $\underline{C}$.*

Notazione 9. *Poichè si desidera studiare particolari categorie che rappresentano strutture algebriche e geometriche, si ritiene opportuno utilizzare, al posto del termine più generico freccia, il termine più specifico* morfismo. *Tale notazione è stata ripresa dal Leister ([15]). Ciò enfatizza infatti il concetto che le frecce considerate devono rispettano la struttura algebrica e geometrica degli oggetti della categoria.*

Il termine freccia viene utilizzato soltanto in alcune definizioni ed esempi classici in cui la generalità del termine mette in luce la generalitàdei concetti trattati.

La definizione che si è scelta per il concetto di categoria, è un compromesso fra l'esigenza didattica e di rigore matematico. In essa inoltre non si è voluta mettere in secondo piano la classe delle frecce, le quali sono centrali nella teoria. Alcuni autori, come Freyd e Scedrov, nel loro libro "Categories, Allegories" mostrano come dalla definizione possa essere omessa la classe degli oggetti, definendo le categorie attraverso la sola classe delle frecce. La seguente nota dà un vago indizio di come ciò sia possibile.

Nota 11. *La categoria $\underline{C}$ può essere definita completamente soltanto tramite la classe delle frecce: l'idea alla base è che la classe degli oggetti possa essere ricostruita come la classe delle frecce identiche.*

Primi Esempi

Fra gli esempi classici della teoria delle categorie si citano i seguenti.

Esempio 40. *A ogni insieme A, è associata la* categoria discreta *$\underline{A}$ in cui $\underline{A}_0 = A$ e le sole frecce della categoria sono le identità.*

$\underline{A}$ è la più piccola categoria contenente come oggetti gli elementi di A.

Esempio 41. *Si considera una categoria avente un solo oggetto, indicato con $\star$. Allora $(\mathbf{Hom}(\star, \star), \circ)$ forma un monoide.*

Viceversa, dato un monoide M, ad esso resta associata una categoria avente un solo oggetto, indicato con $\star$, nella quale ad ogni elemento distinto del monoide è associato ad una freccia distinta appartenente a $\mathbf{Hom}(\star, \star)$. La composizione resta definita imponendo che la funzione precedentemente descritta sia un isomorfismo di monoidi fra M ed $\mathbf{Hom}(\star, \star)$.

Esempio 42. *Sia P un Poset. Si definisce la categoria $\underline{Pos}$ tale che $\underline{P}_0 := \{p|\ p \in P\}$, e per ogni x, $y \in \underline{P}_0$, $\mathbf{Hom}(x, y)$ ha cardinalità 1 se $x \leq y$, ha cardinalità 0 altrimenti.*

Tali condizioni sono sufficienti a determinare la categoria, infatti come si mostra la composizione può essere definita in uno ed un solo modo.

Se esistono $f \in \mathbf{Hom}(x, y)$ e $g \in \mathbf{Hom}(y, z)$, allora $x \leq y$ e $y \leq z$, da cui per transitività $x \leq z$, e la composizione $g \circ f$ deve essere l'unica freccia con dominio x e codominio y.

Per la proprietà riflessiva della relazione d'ordine per ogni $p \in P$, si ha $|\mathbf{Hom}(x, x)| = 1$. L'unica freccia appartenente a tale sottoclasse è l'identità di x.

Si nota infine che poichè gli insiemi sono Poset su cui è definito l'ordine banale, l'esempio 40 è un caso particolare del presente esempio.

Si nota che in modo analogo si possono definire altre categorie concrete come la categoria degli anelli, degli spazi vettoriali, degli spazi topologici, degli spazi differenziali e di altre strutture matematiche.

Isorfismi

Come suggerito dall'esempio 42, le frecce di una categoria generale contengono delle informazioni sulle relazioni fra i vari oggetti, rappresentando il principale strumento di indagine utilizzato dai categoristi. Tali frecce possono essere molto lontane dalla nozione intuitiva di funzione o morfismo, come si è visto nell'esempio 41, tuttavia anche a questo livello di astrazione è possibile identificare attraverso esse gli oggetti aventi la stessa 'struttura'.

Si è mostrato come ogni ogni poset possa essere rappresentato da una categoria. Analogamente esiste la categoria di tutti i poset, in cui ogni oggetto rappresenta un poset come nell'esempio 42, e le frecce fra oggetti rappresentano i morfismi fra di essi. Tale categoria, appena accennata, suggerisce l'idea per il concetto di isomorfismo fra oggetti: la definizione 16 in cui si definisce l'isomorfismo fra poset corrisponde alla definizione di isomorfismo categoriale particolarizzata al caso della categoria dei Poset.

Definizione 49. *Sia $\underline{C}$ una categoria. Un morfismo $f \in \underline{C}_1$ si dice un* isomorfismo *se, posto $A = dom(f)$ e $B = Imm(f)$, esiste $g \in \mathbf{Hom}(B, A)$, tale che $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.*

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "id_A"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "id_B"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Se A, $B \in \underline{C}_0$ sono tali che esiste un isomorfismo in $\mathbf{Hom}(A, B)$, allora A e B si dicono isomorfi, e si scrive $A \cong B$.

Si noti che, se f è un isomorfismo allora il morfismo g che soddisfa le ipotesi della definizione 49 è unico. g viene detto morfismo inverso di f, e si denota con il simbolo f^{-1}.

Osservazione 13. *Per ogni categoria $\underline{C}$ una categoria, è canonicamente definita la relazione di congruenza '$\cong$' in $\underline{C}_0$ nel seguente modo: $\forall A, B \in \underline{C}_0$, $\quad A \cong B$ se e solo se esiste un isomorfismo $f: A \to B$.*

La relazione di congruenza è una relazione di equivalenza, infatti:

- *Per ogni $A \in \underline{C}_0$ esiste $id_A: A \to A$ la quale è banalmente un isomorfismo, da cui $A \cong A$.*
- *Se $A \cong B$ allora esiste un isomorfismo $f: A \to B$. Da cui si ha che $f^{-1}: B \to A$ è un isomorfismo, ovvero $B \cong A$.*
- *Se $A \cong B$ e $B \cong C$ allora esistono gli isomorfismi $f: A \to B$ e $g: B \to C$. La loro composizione $g \circ f: A \to C$ è un isomorfismo con inversa $f^{-1} \circ g^{-1}$, ovvero $A \cong C$.*

La relazione di congruenza induce quindi una partizione sulla classe $\underline{C}_0$.

Si nota che una categoria, come quella che rappresenta un gruppo, in cui tutti i morfismi sono isomorfismi prende il nome di *gruppoide.*

Esempio 43. *Se nell'esempio 41 si richiede che ogni $f \in \mathbf{Hom}(\star, \star)$ sia un isomorfismo, allora $(\mathbf{Hom}(\star, \star), \circ)$ è un gruppo.*

Nuovamente ogni gruppo è rappresentabile da una categoria avente questa struttura.

Esempio 44. *Si considera la classe $\underline{V}_0$ di tutti gli spazi vettoriali, e la classe $\underline{V}_1$ formata da tutte le trasformazioni semilineari fra spazi vettoriali. La metacoppia $(\underline{V}_0, \underline{V}_1)$ forma la categoria $\underline{V}$ degli spazi vettoriali.*

L'identità insiemistica di ogni spazio vettoriale è l'identità categoriale dello spazio vettoriale stesso, e chiaramente la composizione classica di due trasformazioni semilineari è anch'essa una trasformazione semilineare.

Sottocategorie

Le categorie sono strutture algebriche, ci si attende quindi l'esistenza di sottostrutture più piccole (sottocategorie) e di morfismi fra di esse (funtori). Ciò che potrebbe stupire è l'esistenza di morfismi di un livello ancora superiore, le trasformazioni naturali fra funtori. Eppure proprio per formalizzare l'idea di trasformazione naturale nacque la teoria delle categorie nell'ambito della topologia algebrica nel decennio 1940-1950.

Come accennato la teoria delle categorie nacque per formalizzare le trasformazioni naturali. Per tale scopo furono definiti i funtori fra categorie, e quindi fu necessario definire le categorie stesse: come spesso accade nella didattica matematica, l'ordine di presentazione degli argomenti inverte il processo storico di formazione degli stessi.

Seguendo l'impostazione didattica si procede quindi a definire il concetto di sottocategoria.

Definizione 50. *Sia $\underline{C}$ una categoria. Si dice che $\underline{D}$ è una* sottocategoria *di $\underline{C}$ se valgono le seguenti condizioni:*

- $\underline{D}_0 \subseteq \underline{C}_0$
- $\underline{D}_1 \subseteq \underline{C}_1$
- *$\underline{D}$ è una categoria rispetto alla composizione ereditata da $\underline{C}$.*

La sottocategoria $\underline{D}$ inoltre si dice piena *se* $\forall A,\ B \in \underline{D}, \quad \mathbf{Hom}_{\underline{D}}(A,B) = \mathbf{Hom}_{\underline{C}}(A,B)$.

Funtori

La teoria delle categorie, che come si è accennato pone in primo piano i morfismi fra gli oggetti, ammette come morfismi fra le categorie stesse i funtori, i quali hanno naturalmente un posto di rilievo nella teoria.

Definizione 51. *Siano $\underline{C}$, $\underline{D}$ due categorie.*

Un funtore covariante $\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$ *è costituito dalle operazioni unarie:*

1. $\mathfrak{F}_0 : \underline{C}_0 \to \underline{D}_0$
2. $\mathfrak{F}_1 : \underline{C}_1 \to \underline{D}_1$

tali che:

- $\forall A,\, B \in \underline{C}_0$, *se* $f \in \mathbf{Hom}(A,B)$ *allora* $\mathfrak{F}_1(f) \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{F}_0(A), \mathfrak{F}_0(B))$
- $\forall A,\, B,\, C \in \underline{C}_0, \quad \forall f \in \mathbf{Hom}(A,B),\ \forall g \in \mathbf{Hom}(B,C)$
$$\mathfrak{F}_1(g \circ f) = \mathfrak{F}_1(g) \circ \mathfrak{F}_1(f)$$
- $\forall A \in \underline{C}_0, \quad \mathfrak{F}(id_A) = id_{\mathfrak{F}(A)}$

Un funtore controvariante $\mathfrak{G} :\ \underline{C} \to \underline{D}$ *è costituito dalle operazioni unarie:*

1. $\mathfrak{G}_0 :\ \underline{C}_0 \to \underline{D}_0$
2. $\mathfrak{G}_1 :\ \underline{C}_1 \to \underline{D}_1$

tali che:

- $\forall A,\, B \in \underline{C}_0$, *se* $f \in \mathbf{Hom}(A,B)$ *allora* $\mathfrak{G}_1(f) \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{G}_0(B), \mathfrak{G}_0(A))$
- $\forall A,\, B,\, C \in \underline{C}_0, \quad \forall f \in \mathbf{Hom}(A,B),\ \forall g \in \mathbf{Hom}(B,C)$
$$\mathfrak{G}_1(g \circ f) = \mathfrak{G}_1(f) \circ \mathfrak{G}_1(g)$$
- $\forall A \in \underline{C}_0, \quad \mathfrak{G}(id_A) = id_{\mathfrak{G}(A)}$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{F}(B) \arrow[dr, "\mathfrak{F}(g)"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\ \mathfrak{F}(A) \arrow[ur, "\mathfrak{F}(f)"] \arrow[rr, "\mathfrak{F}(g \circ f)"'] & & \mathfrak{F}(C) \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{F}$ funtore *covariante*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{G}(B) \arrow[dl, "\mathfrak{G}(f)"'] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\ \mathfrak{G}(A) & & \mathfrak{G}(C) \arrow[ul, "\mathfrak{G}(g)"'] \arrow[ll, "\mathfrak{G}(g \circ f)"] \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{G}$ funtore *controvariante*

Solitamente si scrive semplicemente $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ al posto di $\mathfrak{F}_0$ o $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{G}_0$ o $\mathfrak{G}_1$.

Esempio 45. *Sia* $\underline{C}$ *una categoria. Si definisce il funtore covariante identità* $\mathfrak{id}_{\underline{C}} :\ \underline{C} \to \underline{C}$ *ponendo*
$$\forall A \in \mathbf{Ob}(\underline{C}), \quad \mathfrak{id}_{\underline{C}}(A) = A$$
$$\forall A,\, B \in \mathbf{Ob}(\underline{C}),\ \forall f \in \mathbf{Hom}(A,B) \quad \mathfrak{id}_{\underline{C}}(f) = f$$

Esempio 46. *Siano* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$ *due categorie. Dato* $d \in \underline{D}_0$, *il funtore costante* $\mathfrak{C}^d :\ \underline{C} \to \underline{D}$ *è definito come:*
$$\forall c \in \underline{C}, \quad \mathfrak{C}^d_0(c) := d$$
$$\forall f \in \underline{C}_1, \quad \mathfrak{C}^d_1(f) := id_d$$

Nota 12. *Ovviamente il funtore costante è sia covariante sia controvariante: condizione sufficiente (ma non necessaria) affinchè ciò accada è che tutti gli oggetti della categoria $\underline{C}$ vengano portati in un unico oggetto della categoria $\underline{D}$.*

Se il funtore è sia covariante sia controvariante perde di significato specificare a quale tipologia si considera appartenere.

Esempio 47. *L'esempio 41 mostra come ogni monoide corrisponda ad una categoria con un oggetto. Dati due monoidi M_1 e M_2, ogni morfismo $h: M_1 \to M_2$ induce un funtore fra le categorie ad essi corrispondenti.*

Tale funtore manda l'oggetto della prima nell'oggetto della seconda, ed associa le frecce della prima alle frecce della seconda in modo tale che, se una freccia rappresenta un elemento $a \in M_1$ nella prima categoria, allora il funtore la manderà nella freccia della seconda categoria che rappresenta l'elemento $h(a) \in M_2$.

È possibile mostrare che i funtori fra due categorie con un oggetto sono in corrispondenza biunivoca naturale con gli omomorfismi fra i monoidi ad esse associati. Tale corrispondenza si può inoltre restringere alla corrispondenza biunivoca naturale fra i morfismi di gruppo e i funtori fra le categorie corrispondenti.

Esempio 48. *L'esempio 42 mostra come ogni poset possa essere rappresentato da una categoria. Dati due poset P_1 e P_2, siano $\underline{P_1}$ e $\underline{P_2}$ le categorie associate a P_1 e P_2.*

Un funtore covariante $\mathfrak{F} : \underline{P_1} \to \underline{P_2}$ è una funzione crescente da P_1 a P_2, mentre un funtore controvariante $\mathfrak{G} : \underline{P_1} \to \underline{P_2}$ è una funzione decrescente da P_1 a P_2,

Si invita il lettore a formalizzare tale proposizione come semplice esercizio.

Funtori Essenziali e Costruttori

Si definiscono ora due tipologie di funtori che risulteranno centrali nei successivi sviluppi della tesi.

Definizione 52. *Siano $\underline{C}$ e $\underline{D}$ due sottocategorie della categoria $\underline{Pos}$.*

Un funtore (covariante) $\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$ si dice un funtore essenziale *di Poset se per ogni $A \in \mathbf{Ob}(\underline{C})$, esiste un morfismo di immersione $i : \mathfrak{F}(A) \to A$ visti come poset e per ogni $\sigma \in \mathbf{Hom}_{\underline{C}}(A, B)$, si ha che $\mathfrak{F}(\sigma)$ è la restrizione di σ a $\mathfrak{F}(A)$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\sigma"'] & \mathfrak{F}(A) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\mathfrak{F}(\sigma) = \sigma_{|\mathfrak{F}(A)}"] \\
B & \mathfrak{F}(B) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Osservazione 14. *Si supponga data una definizione di un funtore (covariante) essenziale di Poset*

$$\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$$

ben posta sugli oggetti.

Per essere ben posta deve banalmente valere la seguente condizione:
se $\sigma \in \mathbf{Hom}(A, B)$*, allora* $\sigma(\mathfrak{F}(A)) \subseteq \mathfrak{F}(B)$*.*

Sotto tali ipotesi tale definizione è ben posta anche sui morfismi.

Per ogni oggetto $A \in \mathbf{Ob}(\underline{C})$ *vale banalmente* $(id_A)_{|\mathfrak{F}(A)} = id_{|\mathfrak{F}(A)}$.

Inoltre per ogni

$$\sigma : A \to B \quad e \quad \tau : B \to C$$

morfismi di $\underline{C}$ *si ha:*
$\forall a \in A, \quad (\tau \circ \sigma)(a) = \tau(\sigma_{|\mathfrak{F}(A)}(a)) = \tau_{|\mathfrak{F}(B)}(\sigma_{|\mathfrak{F}(A)}(a))$

Ovvero $\mathfrak{F}(\tau \circ \sigma) = (\tau \circ \sigma)_{|\mathfrak{F}(A)} = \tau_{|\mathfrak{F}(B)} \circ \sigma_{|\mathfrak{F}(A)} = \mathfrak{F}(\tau) \circ \mathfrak{F}(\sigma)$

Dualmente si dà la definizione di *funtore costruttore* di poset.

Definizione 53. *Siano* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$ *due sottocategorie della categoria* $\underline{Pos}$*.*

Un funtore (covariante) $\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$ *si dice un* funtore costruttore *se per ogni* $A \in \mathbf{Ob}(\underline{C})$*, esiste un morfismo di immersione* $i : A \to \mathfrak{F}(A)$ *di poset e per ogni* $\sigma \in \mathbf{Hom}_{\underline{C}}(A, B)$*, si ha che* σ *è la restrizione di* $\mathfrak{F}(\sigma)$ *ad* A*.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma = \mathfrak{F}(\sigma)_{|A}"'] & \mathfrak{F}(A) \arrow[d, "\mathfrak{F}(\sigma)"] \\
B \arrow[r, hook] & \mathfrak{F}(B)
\end{tikzcd}$$

Proprietà Funtori

Si osservano ora alcune proprietà dei funtori.

Proposizione 17. *Un funtore covariante (risp. controvariante)* $\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$ *fra due categorie* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$*, manda gli isomorfismi di* $\underline{C}$ *in isomorfismi di* $\underline{D}$*, ovvero i funtori preservano gli isomorfismi e le loro inverse.*

Dimostrazione.
Si dimostra la proposizione supponendo $\mathfrak{F}$ sia un funtore covariante. Nel caso in cui è un funtore controvariante, la dimostrazione è del tutto analoga.

Sia infatti $f \in \mathbf{Hom}_{\underline{C}}(A, B)$ un isomorfismo, allora esiste $g \in \mathbf{Hom}_{\underline{C}}(B, A)$ tale che $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. Poichè $\mathfrak{F}$ è un funtore si ha che $\mathfrak{F}(g) \circ \mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(id_A) = id_{\mathfrak{F}(A)}$ ed analogamente si dimostra che $\mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g) = id_{\mathfrak{F}(B)}$, ovvero $\mathfrak{F}(f)$ è un isomorfismo di $\underline{D}$. $\square$

Funtori Pieni e Funtori Fedeli

È evidente che non tutti i funtori aggiungono informazioni sulle relazioni fra le categorie che collegano: per esempio il funtore costante dell'esempio 46 può essere definito fra due categorie qualsiasi.

Quando si indagano le relazioni fra insiemi, si cercano di individuare le funzioni iniettive e suriettive, così per studiare le relazioni fra categorie si cerca di individuare determinate tipologie di funtori.

Definizione 54. *Siano date due categorie* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$ *e un funtore covariante* $\mathfrak{F}: \underline{C} \to \underline{D}$. *Si dice che:*

- $\mathfrak{F}$ *è* pieno *se per ogni* A, $B \in \underline{C}$, *per ogni* $\tilde{f} \in \mathbf{Hom}(F(A), F(B))$ *esiste* $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$ *tale che* $F(f) = \tilde{f}$.
- $\mathfrak{F}$ *è* fedele *se per ogni* A, $B \in \underline{C}$, *per ogni* f, $g \in \mathbf{Hom}(A, B)$, *se* $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(g)$ *allora* $f = g$.
- $\mathfrak{F}$ *è* essenzialmete suriettivo *se per ogni* $D \in \mathbf{Ob}(\underline{D})$, *esiste* $A \in \mathbf{Ob}(\underline{C})$ *tale che* $\mathfrak{F}(A) \cong D$.
- $\mathfrak{F}$ *è una* immersione *se è pieno, fedele ed iniettivo sugli oggetti.*

Se $\mathfrak{F}$ *è un funtore controvariante, allora le definizioni di pieno, fedele ed essenzialmente suriettivo sono le analoghe delle precedenti con le dovute precauzioni.*

Esempio 49. *Sia* $\underline{C}$ *una categoria e* $\underline{D}$ *una sua sottocategoria. Il funtore covariante che immerge* $\underline{D}$ *canonicamente in* $\underline{C}$ *è fedele. Se* $\underline{D}$ *è una sottocategoria piena, tale funtore di immersione è una immersione.*

In generale un funtore di immersione non è essenzialmente suriettivo.

Si è visto nell'esempio 43, ogni gruppo può essere rappresentato da una categoria con un solo oggetto.

L'esempio 47 mostra inoltre come ogni morfismo fra monoidi abbia la sua rappresentazione categoriale come funtore fra le categorie associate. Tale esempio può essere ovviamente specificato al caso dei gruppi.

Ci si può quindi chiedere a cosa corrisponda un funtore pieno o fedele fra due gruppoidi. Si verifica facilmente che tale funtore è pieno se deriva da un morfismo suriettivo, ed è fedele se deriva da un morfismo iniettivo.

Tenuto conto di tale corrispondenza, attingendo ai concetti di base della teoria dei gruppi, si osserva che un morfismo fra gruppi è iniettivo se e solo se la preimmagine dell'elemento neutro è il solo elemento neutro. Ovvero, un funtore fra gruppoidi è fedele se e solo se la preimmagine dell'identità è la sola identità.

Tale risultato può essere generalizzato nella seguente proposizione.

Proposizione 18. *Siano* $\underline{C}$ *ed* $\underline{D}$ *due categorie i cui morfismi sono tutti isomorfismi.*

Per ogni funtore $\mathfrak{F}: \underline{C} \to \underline{D}$, $\mathfrak{F}$ *è fedele se e solo se per ogni* $C \in \mathbf{Ob}(\underline{C})$, *per ogni* $\sigma \in \mathbf{Hom}(C, C)$, *se* $\mathfrak{F}(\sigma) = id_{\mathfrak{F}(C)}$, *allora* $\sigma = id_C$.

Dimostrazione.

La dimostrazione procede supponendo $\mathfrak{F}$ covariante. Se fosse controvariante la dimostrazione seguirebbe nello stesso modo con le dovute precauzioni.

Siano A, $B \in \mathbf{Ob}(C)$, e siano σ, $\mu \in \mathbf{Hom}(A, B)$ tali che $\mathfrak{F}(\sigma) = \mathfrak{F}(\mu)$.

Per ipotesi, sia σ che μ ammettono inversa, inoltre si ha

$$\mathfrak{F}(\mu^{-1} \circ \sigma) = \mathfrak{F}(\mu^{-1}) \circ \mathfrak{F}(\sigma) = \mathfrak{F}(\mu)^{-1} \circ \mathfrak{F}(\sigma) = id_{\mathfrak{F}(A)}$$

da cui $\mu^{-1} \circ \sigma = id_A$. Analogamente si mostra che $\mathfrak{F}(\mu \circ \sigma^{-1}) = id_{\mathfrak{F}(B)}$, da cui $\mu \circ \sigma^{-1} = id_A$, e dunque $\mu^{-1} = \sigma^{-1}$, da cui segue $\mu = \sigma$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, shift right, "\sigma"'] \arrow[d, shift left, "\mu"] \\
B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(A) \arrow[d, "\mathfrak{F}(\sigma) = \mathfrak{F}(\mu)"] \\
\mathfrak{F}(B)
\end{tikzcd}$$

□

Proposizione 19. *Siano $\underline{C}$ e $\underline{D}$ due categorie e $\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$ un funtore pieno e fedele. Per ogni $f \in \underline{C}_1$, se $\mathfrak{F}(f)$ è un isomorfismo allora f è un isomorfismo.*

Dimostrazione.

La dimostrazione procede supponendo $\mathfrak{F}$ covariante. Se fosse controvariante la dimostrazione seguirebbe nello stesso modo con le dovute precauzioni.

Si supponga dunque $f \in \underline{C}_0$ tale che $\mathfrak{F}(f)$ sia un isomorfismo della categoria $\underline{D}$. Si ponga $A = dom(f)$ e $B = Imm(f)$, allora $\mathfrak{F}(f) \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{F}(A), \mathfrak{F}(B))$ e sia $\tilde{g} \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{F}(B), \mathfrak{F}(A))$ il suo morfismo inverso. Si ha che $\tilde{g} \circ \mathfrak{F}(f) = id_{\mathfrak{F}(A)}$ e $\mathfrak{F}(f) \circ \tilde{g} = id_{\mathfrak{F}(B)}$.

Poichè per ipotesi il funtore $\mathfrak{F}$ è pieno e fedele, esiste il morfismo $g \in \mathbf{Hom}(B, A)$ tale che $\mathfrak{F}(g) = \tilde{g}$.

Si ha dunque $\mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(g) \circ \mathfrak{F}(f) = id_{\mathfrak{F}(A)}$ e $\mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g) = id_{\mathfrak{F}(B)}$.

Per definizione di funtore devono valere: $\mathfrak{F}(id_A) = id_{\mathfrak{F}(A)}$ e $\mathfrak{F}(id_B) = id_{\mathfrak{F}(B)}$.

Poichè $\mathfrak{F}$ è fedele, deve valere: $g \circ f = id_A$ e $g \circ f = id_B$. Da cui f è invertibile con inversa g. □

Categorie Scheletriche

I concetti finora esposti sono indipendenti dall'Assioma della Scelta. Sebbene esso non sia strettamente necessario agli sviluppi della presente tesi, lo si espone per presentare alcuni esempi di categorie, ritenute troppo belle per essere taciute.

Assioma 1 (Assioma della Scelta). *Data una famiglia non vuota* $\mathfrak{A} := \{A_i\}_{i \in I}$ *di insiemi non vuoti, esiste una* funzione scelta *per* $\mathfrak{A}$, *ovvero una mappa* $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ *tale che per ogni* $i \in I$ *si ha* $f(i) \in I$.

Esempio 50. *Data una categoria* $\underline{C}$, *per l'osservazione 13 la relazione di congruenza in* $\underline{C}_0$ *è una relazione di equivalenza che induce una partizione sulla classe* $\underline{C}_0$.

Se $\underline{C}$ *è la categoria vuota si definisce la* categoria scheletrica $\underline{S}$ *associa a* $\underline{C}$ *come la categoria vuota stessa.*

Se $\underline{C}$ *è diversa dalla categoria vuota, allora si denota ogni classe di equivalenza con un indice i. La classe formata da tali indici viene indicata con* I. *Si considera dunque la famiglia* $\mathfrak{A} := \{A_i\}_{i \in I}$ *ove con* A_i *si intende la classe di equivalenza relativa all'indice i. Applicando l'assioma della scelta si ha l'esistenza di una funzione* $f : I \to \underline{C}_0$ *tale che ogni classe di equivalenza* i, *viene identificata con il suo componente* $f(i)$.

Una categoria scheletrica $\underline{S}$ *di* $\underline{C}$ *è una sottocategoria piena di* $\underline{C}$ *tale che* $\underline{S}_0 := \{f(i) |\, i \in I\}$.

Per costruzione l'immersione canonica della categoria scheletrica $\underline{S}$ *nella categoria* $\underline{C}$ *è una immersione essenzialmente suriettiva.*

Categorie Isomorfe

La nozione di isomorfismo è una nozione molto generale dell'algebra, e permette di identificare quelle strutture che, a meno della forma, sono la stessa struttura algebrica.

Come nel caso di isomorfismo fra oggetti, nuovamente l'isomorfismo fra categorie è l'analogo del concetto di isomorfismo fra poset della definizione 16.

Definizione 55. *Due categorie* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$ *sono isomorfe se e solo se esistono due funtori* $\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$ *e* $\mathfrak{G} : \underline{D} \to \underline{C}$ *tali che*

$$\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{id}_{\underline{C}} \quad e \quad \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} = \mathfrak{id}_{\underline{D}}$$

Trovare due categorie isomorfe è estremamente raro, e nella pratica la definizione precedente risulta troppo forte. Ciò che accade nella maggior parte dei casi è qualcosa di più debole, ovvero l'equivalenza fra categorie. L'idea alla base di tale nozione è che non siano le categorie stesse ad essere isomorfe, ma le loro categorie scheletriche.

Per formalizzare questa intuizione occorre un salto di astrazione: si generalizza il concetto di uguaglianza fra funtori nel concetto di *equivalenza* per modificare opportunamente la definizione 55.

Trasformazioni Naturali

Definizione 56. *Siano $\underline{C}$ e $\underline{D}$ due categorie, ed $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$: $\underline{C} \to \underline{D}$ funtori covarianti (risp. controvarianti).*

Una trasformazione naturale *dal funtore $\mathfrak{F}$ al funtore $\mathfrak{G}$, indicata dal simbolo $F \Rightarrow G$, è una famiglia di morfismi della categoria $\underline{D}$ indicizzata dagli oggetti della categoria $\underline{C}$, $(\mu_C : \mathfrak{F}(C) \to \mathfrak{G}(C))_{C \in \underline{C}_0}$, tale che per ogni morfismo $f \in \mathbf{Hom}(C_1, C_2)$ in $\underline{C}$, il seguente diagramma commuti (con le ovvie modifiche se $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ sono controvarianti).*

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, "f"'] \\ C_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{F}(C_1) \arrow[r, "\mu_{C_1}"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"'] & \mathfrak{G}(C_1) \arrow[d, "\mathfrak{G}(f)"] \\ \mathfrak{F}(C_2) \arrow[r, "\mu_{C_2}"] & \mathfrak{G}(C_2) \end{tikzcd}$$

Se inoltre per ogni $C \in \underline{C}_0$ il morfismo $\mu_C : \mathfrak{F}(C) \to \mathfrak{G}(C)$ è un isomorfismo, allora si dice che la trasformazione naturale $\mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{G}$ è un isomorfismo naturale.

Esempio 51. *Siano M ed N due monoidi e siano $\underline{M}$ e $\underline{N}$ le categorie associate ad essi come nell'esempio 41.*

Due funtori $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$: $\underline{M} \to \underline{N}$ sono la traduzione in linguaggio categoriale di due morfismi di monoidi f, $g : M \to N$ come mostrato nell'esempio 47.

Una trasformazione naturale $\mathfrak{f} \Rightarrow \mathfrak{g}$ è un elemento $n \in N$ tale per cui per ogni $m \in M$ si ha $n \circ F(m) = G(m) \circ n$.

Esempio 52. *Siano P_1 e P_2 Poset e $\underline{P_1}$ e $\underline{P_2}$ le categorie ad essi associate come nell'esempio 42.*

Due funtori $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$: $\underline{P_1} \to \underline{P_2}$ corrispondono a due funzioni monotone f, $g : P_1 \to P_2$.

Esiste una trasformazione naturale $\mathfrak{f} \Rightarrow \mathfrak{g}$ se e solo se per ogni $p \in P_1$, $F(p) \leq G(p)$ in P_2.

Se fra due categorie esistono un funtore essensiale e un funtore costruttore opportuni, ciò implica l'esistenza di un isomorfismo naturale canonicamente definito.

Osservazione 15. *Siano $\underline{C}$ e $\underline{D}$ due sottocategorie di $\underline{Pos}$ e siano $\mathfrak{C} : \underline{C} \to \underline{D}$ un funtore costruttore e $\mathfrak{Es} : \underline{D} \to \underline{C}$ un funtore essenziale.*

Sotto tali ipotesi $\forall A \in \mathbf{Ob}(\underline{C})$ esistono le immersioni

$$i_C : C \hookrightarrow \mathfrak{C}(C) \quad e \quad j_{\mathfrak{C}(A)} : (\mathfrak{Es} \circ \mathfrak{C})(A) \hookrightarrow \mathfrak{C}(A)$$

tali che $\forall A$, $B \in \mathbf{Ob}(\underline{C})$ il seguente diagramma commuti:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathfrak{C}(A) \arrow[d, "\mathfrak{C}(\sigma)"] & \mathfrak{Es} \circ \mathfrak{C}(A) \arrow[l, hook', "j_{\mathfrak{C}(A)}"'] \arrow[d, "\mathfrak{Es} \circ \mathfrak{C}(\sigma)"] \\
B \arrow[r, hook, "i_B"] & \mathfrak{C}(B) & \mathfrak{Es} \circ \mathfrak{C}(B) \arrow[l, hook', "j_{\mathfrak{C}(B)}"']
\end{tikzcd}
$$

Essendo $\forall A \in \mathbf{Ob}(\underline{C}), \quad i_A$ *e* $j_{\mathfrak{C}(A)}$ *delle immersioni, quanto detto implica che se*

$$\forall A \in \mathbf{Ob}(\underline{C}), \quad i_A(A) = j_{\mathfrak{C}(A)}\big(\mathfrak{Es} \circ \mathfrak{C}(A)\big)$$

allora resta canonicamente definito in modo canonico un isomorfismo naturale $\mathfrak{id} \Rightarrow \mathfrak{Es} \circ \mathfrak{C}$, *ponendo* $\forall A \in \mathbf{Ob}(\underline{C}), \quad h_A = j_{\mathfrak{C}(A)}^{-1} \circ i_A$.

Tale scrittura è ben posta, infatti, essendo $j_{\mathfrak{C}(A)}$ *un immersione, la sua corestrizione all'immagine è invertibile.*

Equivalenza Categoriale

È ora possibile dare la definizione di categorie equivalenti.

Definizione 57. *Due categorie* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$ *sono equivalenti se e solo se esistono due funtori covarianti* $\mathfrak{F} : \ \underline{C} \to \underline{D}$ *e* $\mathfrak{G} : \ \underline{D} \to \underline{C}$ *tali che esistano degli isomorfismi naturali*

$$\mathfrak{id}_{\underline{C}} \Rightarrow \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F} \qquad\qquad \mathfrak{id}_{\underline{D}} \Rightarrow \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$$

Esempio 53. *Sia* $\underline{C}$ *una categoria e* $\underline{S}$ *una sua categoria scheletrica, definita come nell'esempio 50.*

Si ha che $\underline{C}$ *e* $\underline{S}$ *sono categorie equivalenti.*

Se $\underline{C}$ *è la categoria vuota ciò è ovviamente vero essendo* $\underline{C}$ *e* $\underline{S}$ *la stessa categoria.*

Si supponga dunque che $\underline{C}$ *non sia la categoria vuota. In tal caso per definire la categoria scheletrica nel caso generale è necessario l'assioma della scelta.*

Un funtore equivalenza è l'immersione canonica $\mathfrak{I} : \ \underline{S} \to \underline{C}$

Per costruire il secondo funtore equivalenza si applica l'assioma della scelta, ove l'insieme degli indici sia $\underline{C}_0$, *e per ogni* $c \in \underline{C}_0$ *si denota con* $\tilde{c}$ *l'oggetto di* $\underline{S}$ *isomorfo a* C.

Si considera la famiglia non vuota $\mathfrak{A} := \{A_c\}_{c \in \underline{C}_0}$, *ove per ogni* $c \in \underline{C}_0$ *si ha che* A_c *è la classe degli isomorfismi da* c *a* $\tilde{c}$. *Per costruzione tali* A_c *sono non vuoti per ogni* $c \in \underline{C}_0$. *Per l'assioma della scelta si può dunque fissare per ogni* $c \in \underline{C}_0$ *un isomorfismo* $f_c : \ c \to \tilde{c}$.

Si può ora definire un secondo funtore equivalenza $\mathfrak{S} : \ \underline{C} \to \underline{S}$ *che dipende dalla scelta degli* f_c.

$$\forall c \in \underline{C}_0, \qquad \mathfrak{S}(c) := \tilde{c}$$

$$\forall g \in \mathbf{Hom}(c_1, c_2), \qquad \mathfrak{S}(g) := f_{c_2} \circ g \circ f_{c_1}^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{\quad g \quad} & c_2 \\ {\scriptstyle f_{c_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{c_2}} \\ \tilde{c_1} & \xrightarrow[\mathfrak{S}(g) := f_{c_2} \circ g \circ f_{c_1}^{-1}]{} & \tilde{c_2} \end{array}$$

$\mathfrak{S}$ è un funtore, infatti

- *per ogni $c \in \underline{C}_0$ si ha $\mathfrak{S}(id_c) = f_c \circ id_c \circ f_c^{-1} = id_{\tilde{c}}$*
- *per ogni $g \in \mathbf{Hom}(c_1, c_2)$ e per ogni $h \in \mathbf{Hom}(c_2, c_3)$ si ha $\mathfrak{S}(h \circ g) = f_{c_3} \circ (h \circ g) \circ f_{c_1}^{-1} = (f_{c_3} \circ h \circ f_{c_2}^{-1}) \circ (f_{c_2} \circ g \circ f_{c_1}^{-1}) = \mathfrak{S}(h) \circ \mathfrak{S}(g)$*

Ora si ha che $\mathfrak{S} \circ \mathfrak{I} = \mathfrak{id}_{\underline{S}}$, e l'isomorfismo naturale corrisponde alle identità degli oggetti di $\underline{S}$.

Al contrario, l'isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{C}} \Rightarrow \mathfrak{I} \circ \mathfrak{S}$ è dato dalla famiglia $(f_c : \ c \to \tilde{c})_{c \in \underline{C}_0}$.

I calcoli che confermano tale risultato sono analoghi ai precedenti e sono lasciati come esercizio al lettore.

Una categoria scheletrica in genere è più piccola della categoria originale, tuttavia contiene tutte le informazioni (categoriali). Nella costruzione della categoria scheletrica si è infatti conservata una copia per ogni classe di isomorfismo, e poichè in ognuna di tali classi tutti gli elementi hanno la stessa struttura, tale rappresentante conserva ogni informazione sulla struttura stessa.

Dualità Categoriale

Si richiama ora un utile e semplice principio, che permette di risparmiare molto tempo nell'enunciare definizioni, teoremi e dimostrazioni: il principio di dualità, generalizzato al caso della teoria delle categorie. Si è già incontrato il processo di dualizzazione nella categoria generata da un poset: esso consisteva nell'invertire il $\leq$ con il $\geq$. Analogamente nella teoria delle categorie si dovrà invertire il verso delle frecce presenti nell'affermazione.

Il principio di dualità si formulerà quindi nei seguenti termini: se un affermazione P formulata nei termini della teoria delle categorie è valida per ogni categoria, allora anche la sua proposizione duale P^{op} sarà valida per ogni categoria.

Analogamente se $\underline{C}$ è una categoria, la sua categoria duale, indicata con $\underline{C}^{op}$, è ottenuta da $\underline{\mathrm{C}}$ cambiando verso a tutte le frecce di $\underline{C}$.

Definizione 58. *Una* dualità *fra le categorie $\underline{C}$ e $\underline{D}$ è una equivalenza fra le categorie $\underline{C}$ e $\underline{D}^{op}$, ovvero se esistono i funtori controvarianti $\mathfrak{F} : \ \underline{C} \to \underline{D}$ e $\mathfrak{G} : \ \underline{D} \to \underline{C}$ tali che esistono due isomorfismi naturali $\mathfrak{id}_{\underline{C}} \Rightarrow \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ e $\mathfrak{id}_{\underline{D}} \Rightarrow \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$.*

Funtori Pieni e Fedeli ed Equivalenze

Nelle dimostrazioni dell'equivalenza fra categorie presenti nei capitoli successivi si è preferito non mostrare direttamente la validità della definizione 57, ma di utilizzare il seguente Teorema.

Teorema 12. *Si considerino due categorie* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$ *e siano* $\mathfrak{F} : \underline{C} \to \underline{D}$ *e* $\mathfrak{G} : \underline{D} \to \underline{C}$ *funtori. Se* $\mathfrak{F}$ *è pieno e fedele, ed esiste un isomorfismo naturale* $\eta : id_{\underline{D}} \Rightarrow \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$*, allora esiste un isomorfismo naturale* $\xi : id_{\underline{C}} \Rightarrow \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$*, ovvero le categorie* $\underline{C}$ *e* $\underline{D}$ *sono equivalenti tramite i funtori equivalenza* $\mathfrak{F}$ *e* $\mathfrak{G}$*.*

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, shift left, "\mathfrak{F}"] & \underline{D} \arrow[l, shift left, "\mathfrak{G}"] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

Si dimostra il teorema nel caso in cui $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ sono funtori covarianti, nel caso in cui siano controvarianti la dimostrazione è analoga.

Per ipotesi $\forall Y \in \mathbf{Ob}(\underline{D}), \quad \exists\, \eta_Y : Y \to (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G})(Y)$ isomorfismo naturale.

Si vuole mostrare che $\forall X \in \mathbf{Ob}(\underline{C}), \quad \exists\, \xi_X : X \to (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F})(X)$ isomorfismo naturale.

Si considerino X e $(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F})(X)$ oggetti di $\mathfrak{C}$. Le loro immagini tramite il funtore pieno e fedele $\mathfrak{F}$ sono $\mathfrak{F}(X)$ e $\mathfrak{F}((\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F})(X)) = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F})(X) = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G})(F(X))$.

Per ipotesi esiste l'isomorfismo canonico $\eta_{\mathfrak{F}(X)} : \mathfrak{F}(X) \to (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G})(\mathfrak{F}(X)) = \mathfrak{F}(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}(X))$.

Poichè $\mathfrak{F}$ è un funtore pieno e fedele, esiste uno ed un solo morfismo $\xi_X : X \to \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}(X)$ per cui valga $\mathfrak{F}(\xi_X) = \eta_{\mathfrak{F}(X)}$.

Tale ξ_X, essendo preimmagine di un isomorfismo tramite un funtore pieno e fedele, è un isomorfismo per la proposizione 19.

Tramite un processo analogo si dimostra la validità della condizione di naturalezza per la famiglia $(\xi_X : X \to \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}(X))_{X \in \underline{C}_0}$, che è quindi un isomorfismo naturale.

$\square$

Capitolo 2

Corrispondenze fra strutture reticolari e geometrie proiettive

2.1 Reticoli Booleani ed Insiemi

Nel tentativo di matematizzare la logica aristotelica Boole definì le algebre booleane, nel cui linguaggio è possibile calcolare la verità di ogni proposizione: ognuna di esse, tradotta nel linguaggio di tali algebre, assume infatti la forma di un polinomio di cui si può calcolare il valore nel caso richiesto.[1]

In seguito si notò che ogni algebra booleana finita poteva essere rappresentata da una struttura d'ordine, ovvero da un reticolo booleano finito, segnando uno dei primi passi della teoria dei reticoli.

Tutte le informazioni contenute in uno di tali reticoli sono racchiuse nel solo insieme dei suoi atomi: una struttura estremamente semplice.

Definizione 59. *Si definisce la categoria* <u>Boole</u> *i cui oggetti sono i reticoli booleani finiti e i cui morfismi sono tutti e soli i morfismi*$-\{0,1\}$.

Si definisce la categoria <u>Set</u> *i cui oggetti sono gli insiemi finiti e i cui morfismi sono tutte e sole le funzioni.*

Mentre per la categoria <u>Set</u> rientrano tutte le funzioni fra insiemi, il lettore si può domandare il perchè nella categoria <u>Boole</u> si comprendano soltanto i morfismi$-\{0,1\}$ e non tutti i morfismi.

Per rispondere a tale domanda si osserva che gli oggetti di tale categoria sono reticoli complementati finiti ed è quindi naturale considerare tutte e sole le funzioni che preservino le operazioni di estremo superiore, inferiore e di complemento. Si invita il lettore a verificare che i morfismi$-\{0,1\}$ sono tutti e soli i morfismi i quali conservano il complemento.

[1] 1 per indicare la verità e 0 per indicare la falsità della proposizione considerata.

Funtore $\mathfrak{A} : \underline{\mathit{Boole}} \to \underline{\mathit{Set}}$

Nel presente paragrafo si vuole presentare una dimostrazione per cui ogni reticolo booleano è determinato, a meno di isomorfismi, dal suo insieme degli atomi. Ciò vincola la definizione del funtore da Boole a Set sugli oggetti: ciò che non risulta evidente è come definire tale funtore sui morfismi.

Infatti non è detto che un atomo del dominio sia portato in un atomo del codominio da un morfismo$-\{0,1\}$ qualsiasi. Per superare tale difficoltà è necessario pensare a tale funtore come controvariante: per ogni morfismo ϕ della categoria, la funzione ad esso associata porta ogni atomo b appartenente al codominio di ϕ nell'unico atomo del dominio la cui immagine è maggiore od uguale a b.

Definizione 60. *Si definisce il funtore controvariante*

$$\mathfrak{A} : \underline{\mathit{Boole}} \to \underline{\mathit{Set}}$$

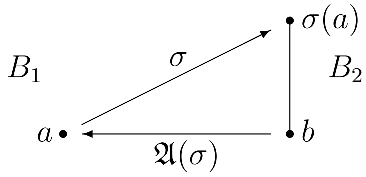
tale che, per ogni reticolo booleano B, $\mathfrak{A}(B)$ è l'insieme degli atomi di B.

Per ogni B_1, $B_2 \in \mathbf{Ob}(\underline{\mathit{Boole}})$, per ogni $\sigma \in \mathbf{Hom}(B_1, B_2)$

$$\mathfrak{A}(\sigma) : \mathfrak{A}(B_2) \to \mathfrak{A}(B_1)$$

$$b \mapsto a$$

ove a è l'atomo di B_1 tale che $b \leq \sigma(a)$.



Ovviamente la definizione 60 è ben posta sugli oggetti.

Prima di proseguire è bene sottolineare una proprietà caratterizzante della struttura interna dei reticoli booleani finiti.

Lemma 10. *Sia B un reticolo booleano finito ed $a \in B$.*

Se a è un sup-irriducibile, allora è un atomo.

Dimostrazione. Per l'osservazione 10, si ha che ogni intervallo $[0, a]$ è complementato, ovvero per ogni $x \in [0, a]$ esiste $x' \in [0, a]$ tale che $x \vee x' = a$.
Se a è un elemento sup-irriducibile, allora o $x = a$ o $x' = a$, quindi l'unico elemento strettamente minore di a è 0, ovvero a è un atomo. □

Per verificare che la definizione 60 sia ben posta sui morfismi, per prima cosa è necessario verificare che, dato un morfismo $\sigma : B_1 \to B_2$ della categoria Boole, per ogni atomo di B_2 esiste uno ed un solo atomo di B_1 la cui immagine sia maggiore od uguale ad esso.

Proposizione 20. *Siano B_1 e B_2 reticoli booleani finiti e sia $\sigma \in \mathbf{Hom}(B_1, B_2)$.*

Se $b \in B_2$ è un atomo, allora esiste uno ed un solo atomo $a \in B_1$ tale che $b \leq \sigma(a)$.

Dimostrazione. Denotati con $a_1, \ldots, a_n$ gli atomi di B_1, per il lemma 10 e per l'ipotesi di finitezza si ha

$$1_2 = \sigma(1_1) = \sigma(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \sigma(a_i)$$

In particolare per ogni atomo $b \in B_2$ si ha $b \leq 1_2 = \bigvee_{i=1}^{n} \sigma(a_i)$, da cui

$$b = b \wedge \bigvee_{i=1}^{n} \sigma(a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \big(b \wedge \sigma(a_i)\big)$$

Essendo b un sup-irriducibile esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $b = b \wedge \sigma(a_i)$, ovvero $b \leq \sigma(a_i)$.

Si suppongano ora a_1, a_2 atomi di B_1 tali che $b \leq \sigma(a_1)$ e $b \leq \sigma(a_2)$, allora $b \leq \sigma(a_1) \wedge \sigma(a_2) = \sigma(a_1 \wedge a_2)$, e poichè $\sigma(0_1) = 0_2$ ed essendo a_1 ed a_2 atomi deve essere $a_1 = a_2$.

□

Modificando leggermente la dimostrazione della precedente proposizione si dimostra il seguente lemma.

Lemma 11. *Se p è un elemento sup-irriducibile appartenente ad un reticolo distributivo L, allora, per ogni $x_1, \ldots, x_n \in L$, $p \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i$ implica $p \leq x_i$ per qualche i.*

È ora lecito verificare che la definizione 60 soddisfi gli assiomi di definizione dei funtori controvarianti.

Proposizione 21. *Per ogni B, B_1, B_2, B_3 reticoli booleani valgono le seguenti affermazioni:*

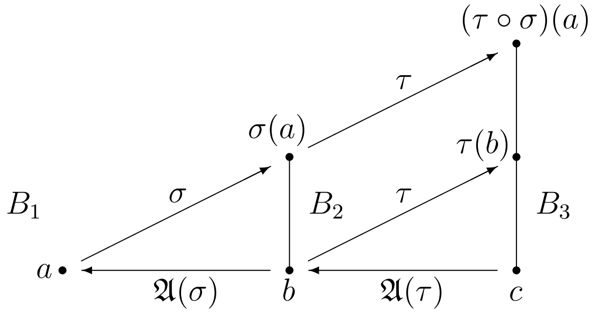
1. $\mathfrak{A}(id_B) = id_{\mathfrak{A}(B)}$
2. $\forall \sigma \in \mathbf{Hom}(B_1, B_2)$, $\forall \tau \in \mathbf{Hom}(B_2, B_3)$ *si ha* $\mathfrak{A}(\tau \circ \sigma) = \mathfrak{A}(\sigma) \circ \mathfrak{A}(\tau)$

$$\begin{tikzcd}
 & B_2 \arrow[dr, "\tau"] & \\
B_1 \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\tau \circ \sigma"'] & \equiv & B_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A}(B_2) \arrow[dl, "\mathfrak{A}(\sigma)"'] & \\
\mathfrak{A}(B_1) & \equiv & \mathfrak{A}(B_3) \arrow[ul, "\mathfrak{A}(\tau)"'] \arrow[ll, "\mathfrak{A}(\tau \circ \sigma)"]
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. 1. Segue direttamente dalla proprietà riflessiva della relazione d'ordine.

2. Per ogni atomo $c \in B_3$, si ponga $b = \mathfrak{A}(\tau)(c)$ e $a = \mathfrak{A}(\sigma)(b) = \mathfrak{A}(\sigma)\big(\mathfrak{A}(\tau)(c)\big)$. Per ipotesi si ha $b \leq \sigma(a)$ e $c \leq \tau(b)$.

   Essendo τ monotona, $c \leq \tau(b) \leq (\tau \circ \sigma)(a)$, da cui $a = \mathfrak{A}(\tau \circ \sigma)(c)$ terminando la dimostrazione.



$\square$

Funtore $\mathfrak{B}$: $\underline{Set} \to \underline{Boole}$

Definizione 61. *Si definisce il funtore controvariante*

$$\mathfrak{B} : \ \underline{Set} \to \underline{Boole}$$

tale che per ogni $A \in \mathbf{Ob}(\underline{Set})$

$$A \mapsto \big(\mathcal{P}(A), \subseteq\big)$$

ove $\mathcal{P}(A)$ *indica l'insieme delle parti di* A.[2]

Dati due insiemi A *e* C, *per ogni funzione* $f : \ A \to C$,

$$\mathfrak{B}(f) : \ \mathfrak{B}(C) \to \mathfrak{B}(A)$$

$$\forall \overline{C} \subseteq C, \qquad \mathfrak{B}(f)\big(\overline{C}\big) = f^{-1}\big[\,\overline{C}\,\big]$$

ove $f^{-1}\big[\,\overline{C}\,\big]$ *è la controimmagine di* $\overline{C}$ *tramite* f.[3]

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{B}(A) \\
C & \mathfrak{B}(C) \arrow[u, "\mathfrak{B}(f)"']
\end{tikzcd}$$

Si osserva che la definizione 61 è ben posta sugli oggetti per quanto visto negli esempi del paragrafo 2.1: si ricorda infatti che l'insieme delle parti di un insieme finito forma un reticolo booleano finito in cui l'estremo superiore corrisponde all'unione, l'estremo inferiore all'intersezione ed il complemento al complemento insiemistico.

La seguente proposizione garantisce che la definizione 61 è ben posta sui morfismi.

[2] Ovvero l'insieme dei sottoinsiemi di A.

[3] $f^{-1}\big[\,\overline{C}\,\big] := \{a \in A |\ f(a) \in \overline{C}\}$

Proposizione 22. *Siano A, C, D insiemi. Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Per ogni funzione $f: A \to C$, $\mathfrak{B}(f): \mathfrak{B}(C) \to \mathfrak{B}(A)$ è un morfismo$-\{0,1\}$ di reticoli booleani.*

2. *$\mathfrak{B}(id_A) = id_{\mathfrak{B}(A)}$*

3. *Per ogni $f: A \to C$ e per ogni $g: C \to D$ funzioni, si ha $\mathfrak{B}(g \circ f) = \mathfrak{B}(f) \circ \mathfrak{B}(g)$*

Dimostrazione.

1. Per ogni C_1, $C_2 \subseteq C$ valgono le seguenti affermazioni.
   $\mathfrak{B}(f)\big(C_1 \vee C_2\big) = f^{-1}\big(C_1 \cup C_2\big) = \{a \in A|\ f(a) \in C_1 \cup C_2\} =$
   $= \{a \in A|\ f(a) \in C_1\} \cup \{a \in A|\ f(a) \in C_2\} = f^{-1}\big[C_1\big] \cup f^{-1}\big[C_2\big] =$
   $= \mathfrak{B}(f)\big(C_1\big) \vee \mathfrak{B}(f)\big(C_2\big)$

   Dualmente si prova che $\mathfrak{B}(f)$ preserva l'estremo inferiore.

   Si mostra ora che $\mathfrak{B}(f)$ preserva il massimo ed il minimo.

   Ovviamente $\mathfrak{B}(f)\big(\emptyset\big) = f^{-1}\big(\emptyset\big) = \emptyset$, inoltre essendo f una funzione si ha $\mathfrak{B}(f)\big(C\big) = f^{-1}\big[C\big] = A$.

2. È ovvio che la controimmagine di un insieme tramite l'identità sia l'insieme stesso.

3. Siano $A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D$ come nell'enunciato. Per ogni $D_1 \subseteq D$ si ha
   $\mathfrak{B}(g \circ f)\big(D_1\big) = (g \circ f)^{-1}\big[D_1\big] = f^{-1}\Big[g^{-1}\big[D_1\big]\Big] = \mathfrak{B}(f) \circ \mathfrak{B}(g)\big(D_1\big)$

□

Isomorfismo Naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Set}} \Rightarrow \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$

Si vuole infine descrivere l'isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Set}} \Rightarrow \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$. Per farlo, dato un insieme finito A, si descrive per prima cosa l'insieme $(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(A)$.

Per far ciò si devono individuare gli atomi dell'algebra booleana $\mathfrak{B}(A)$, data dall'insieme delle parti di A.

È banale osservare che per ogni sottoinsieme $A_1 \subseteq A$, si ha $A_1 = \bigcup_{a \in A_1} \{a\}$, da cui ogni atomo di $\mathfrak{B}(A)$ deve essere un singoletto.

Per ogni singoletto $\{a\}$, con $a \in A$, è banalmente vero che l'unico insieme strettamente contenuto in esso è l'insieme vuoto.

Si è quindi dimostrato che gli atomi di $\mathfrak{B}(A)$ sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $\{a\}$, ove $a \in A$.

Tenuto conto di tali osservazioni è naturale porre la seguente definizione.

Definizione 62. *Si definisce l'isomorfismo naturale* $\mathfrak{id}_{\underline{Set}} \Rightarrow \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ *come la famiglia di isomorfismi*

$$(\phi_A : \ A \to \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}(A))_{A \in \underline{Set}}$$
$$\phi_A : \ a \mapsto \{a\}$$

Dato l'insieme finito A, ϕ_A è suriettiva per quanto detto in precedenza. Poichè essa è inoltre banalmente iniettiva, ϕ_A è una biiezione, ovvero un isomorfismo della categoria $\underline{Set}$.

La seguente proposizione garantisce infine che la definizione 62 è ben posta.

Proposizione 23. *Dati due insiemi finiti* A *e* C *e una funzione* $f : A \to C$, *il seguente diagramma commuta.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "f"] & (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(A) \arrow[d, "(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(f)"] \\
C \arrow[r, "\phi_C"] & (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(C)
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per ogni $a \in A$ si ha:

- $(\phi_C \circ f)(a) = \phi_C\big(f(a)\big) = \{f(a)\}$
- $\big((\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(f) \circ \phi_A\big)(a) = (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(f)\big(\{a\}\big)$

  Per concludere la dimostrazione è necessario mostrare $(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})(f)\big(\{a\}\big) = \{f(a)\}$.

  Per definizione del funtore $\mathfrak{A}$ tale uguaglianza vale se e solo se vale l'inclusione

  $$\{a\} \subseteq \mathfrak{B}(f)\big(\{f(a)\}\big) = f^{-1}\big[\{f(a)\}\big]$$

  la quale è banalmente vera.

□

L'idea alla base del secondo isomorfismo naturale è esprimibile tramite la seguente proposizione.

Proposizione 24. *Dato un reticolo booleano finito* B, *per ogni* $x \in B$ *esiste una ed una sola rappresentazione irridondante in atomi, ovvero se* $x = \bigvee_{i=1}^{n} a_i = \bigvee_{j=1}^{m} b_j$, *con* a_i, b_j *atomi per ogni* i *e* j *senza ripetizioni, allora* $n = m$ *ed esiste una permutazione* $\alpha \in S_n$ *tale che per ogni* $i = 1, \ldots, n$ *si abbia* $a_i = b_{\alpha(i)}$.

Dimostrazione.
Essendo B finito, ogni suo elemento x ammette una scomposizione irridondate finita in sup-irriducibili. Essendo per il lemma 10 gli atomi i soli sup-irriducibili di B, allora ogni suo elemento ammetterà una scomposizione finita irridondante in atomi..

Siano $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \bigvee_{j=1}^{m} b_j$ due rappresentazioni irridondanti di x in atomi, allora per il lemma 11 per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, esiste $j \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $a_i \leq b_j$, ovvero $a_i = b_j$ essendo entrambi atomi. Tali rappresentazioni, non ammettendo ripetizioni, devono quindi essere uguali a meno dell'ordine. $\square$

Isomorfismo Naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Boole}} \Rightarrow \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$

È ora naturale l'idea di definire l'isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Boole}} \Rightarrow \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$ associando ad ogni elemento di un reticolo booleano l'insieme degli atomi della sua rappresentazione irridondante.

Definizione 63. *Si definisce l'isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Boole}} \Rightarrow \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$ come la famiglia di isomorfismi*

$$(\varphi_B : \ B \to \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}(B))_{B \in \underline{Boole}}$$
$$\varphi_B : \ x \mapsto \big\{a \in \mathfrak{A}(B) \big| \ a \leq x\big\}$$

La seguente proposizione garantisce che la definizione 63 è ben posta.

Proposizione 25. *Per ogni reticolo booleano B, $\varphi_B : \ B \to \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}(B)$ è un isomorfismo di reticoli.*

Inoltre il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "\varphi_{B_1}"] \arrow[d, "\sigma"] & (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})(B_1) \arrow[d, "(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})(\sigma)"] \\
B_2 \arrow[r, "\varphi_{B_2}"] & (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})(B_2)
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione 24 che φ_B è una funzione biiettiva.

Per ogni x, $y \in B$ e per ogni $a \in \mathfrak{A}(B)$ vale inoltre $a \leq x \wedge y$ se e solo se $a \leq x$ e $a \leq y$, ovvero

$$\varphi_B(x \wedge y) = \varphi_B(y) \wedge \varphi_B(y)$$

Inoltre $a \leq x \vee y$ se e solo se $a \leq x$ o $a \leq y$ per il lemma 11, ovvero

$$\varphi_B(x \vee y) = \varphi_B(y) \vee \varphi_B(y)$$

Si mostra ora che il precedente diagramma commuta.

Siano dunque B_1 e B_2 reticoli booleani finiti, e $\sigma : \ B_1 \to B_2$ un morfismo$-\{0, 1\}$. Per ogni $x \in B_1$ si ha

- $\big(\varphi_{B_2} \circ \sigma\big)(x) = \varphi_{B_2}\big(\sigma(x)\big) = \{b \in \mathfrak{A}(B_2) |\ b \leq \sigma(x)\}$
- $\big((\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})(\sigma) \circ \varphi_{B_1}\big)(x) = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})(\sigma)\big(\{a \in \mathfrak{A}(B_1) |\ a \leq x\}\big) =$
  $= \big(\mathfrak{A}(\sigma)\big)^{-1}\big[\{a \in \mathfrak{A}(B_1) |\ a \leq x\}\big] =$
  $= \{b \in \mathfrak{A}(B_2) |\ \exists a \in \mathfrak{A}(B_1) \text{ con } a \leq x \text{ t.c. } b \leq \sigma(a)\} =$
  $\underbrace{=}_{\sigma \text{ crescente}} \{b \in \mathfrak{A}(B_2) |\ b \leq \sigma(x)\}$

$\square$

Conclusioni

Quanto detto in precedenza permette di affermare che i funtori controvarianti $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ formano una dualità fra le categorie <u>Boole</u> e <u>Set</u> tramite gli isomorfismi naturali dati dalle definizioni 62 e 63.

$$\begin{tikzcd} \underline{Set} \arrow[r, bend left, "\mathfrak{id}_{\underline{Set}}"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{Set} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{Boole} \arrow[r, bend left, "\mathfrak{id}_{\underline{Boole}}"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{Boole} \end{tikzcd}$$

2.2 Reticoli Distributivi e Poset

Un altro nome dei reticoli boolenani presente in letteratura è "campi di insiemi per la dualità precedentemente descritta (più in generale per il Teorema di Stone) e per la loro affinità con le algebre booleane, le quali soddisfano assiomi simili a quelli di campo. Viene quindi naturale chiedersi quali strutture possano prendere il nome di "anelli di insiemi" in parallelo con il percorso seguito nei corsi universitari del primo anno.

Seguendo tale linea di pensiero si osserva che, come per passare dalla teoria dei campi alla teoria degli anelli non si richiede più l'esistenza dell'inverso moltiplicativo, nella teoria dei reticoli finiti, per ragioni di dualità, non si richiede più l'esistenza dell'inverso rispetto all'operazione di estremo superiore ed inferiore, ovvero il complemento.

Tale strada porta dunque alla definizione dei *reticoli distributivi linitati,* in cui come mostra l'esempio 34 rientra il reticolo dei numeri naturali ordinati dalla divisibilità.

Parallelamente, sul versante 'geometrico', un modo assolutamente naturale di generalizzare la categoria degli insiemi finiti è quella di considerare la categoria dei poset finiti, dotati delle funzioni che ne rispettano la strutture, ovvero le funzioni crescenti.

Nel presente paragrafo si ripercorreranno i passaggi che portano a sollevare la dualità fra reticoli booleani finiti e insiemi finiti alla dualità fra reticoli distributivi finiti e poset finiti.

Tale dualità comparve per la prima volta in letteratura nell'articolo "Rings of Sets" di Garret Birkhoff del 1937[4].

[4] Vedi [21]

Definizione 64. *Si definisce la categoria* $\underline{DLat}$ *i cui oggetti sono tutti e soli i reticoli distributivi di lunghezza finita ed i cui morfismi sono i morfismi-*$\{0, 1\}$.

Si definisce la categoria $\underline{Pos}$ *i cui oggetti sono tutti e soli i poset finiti ed i cui morfismi sono le funzioni crescenti.*[5]

Funtore $\mathfrak{S}\mathfrak{I} : \underline{DLat} \to \underline{Pos}$, Corrispondenza di Galois

Dato un reticolo distributivo, ci si può chiedere quale sia la sua sottostruttura più piccola e più semplice la quale permetta di ricostruire l'intera struttura del reticolo iniziale. Essendo i reticoli distributivi una generalizzazione dei reticoli booleani, è lecito verificare se la dualità fra Boole e Set possa essere estesa ai reticoli distributivi associando ad ognuno di essi il *sottoposet* formato dagli elementi sup-irriducibili, i quali rappresentano come già detto la naturale generalizzazione degli atomi.

Definizione 65. *Si definisce il funtore controvariante*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{I} : \underline{DLat} \to \underline{Pos}$$

tale che, per ogni reticolo distributivo D, $\mathfrak{S}\mathfrak{I}(D)$ *è il sottoposet formato dagli elementi sup-irriducibili di* D.

Per ogni D_1, $D_2 \in \mathbf{Ob}(\underline{DLat})$, *per ogni* $\sigma \in \mathbf{Hom}(D_1, D_2)$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\sigma) : \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_2) \to \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_1)$$

$$q \mapsto \bigwedge \{x \in D_1 |\ q \leq \sigma(x)\}$$

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d, "\sigma"'] & & \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_1) \\
D_2 & & \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_2) \arrow[u, "\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\sigma)"']
\end{tikzcd}$$

Ovviamente $\mathfrak{S}\mathfrak{I}(D)$ è un poset per ogni reticolo distributivo D. Se inoltre D è di lunghezza finita, per il teorema 5 D è finito. È quindi banale osservare che il sottoposet degli elementi sup-irriducibili è finito.

A fronte della semplicità della definizione del funtore $\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ sugli oggetti, il lettore si potrebbe domandare da dove derivi la sua definizione sui morfismi.

Si è infatti deciso di presentarla nella sua forma esplicita, la quale permette di tracciare velocemente il passaggio dal morfismo reticolare alla funzione monotona ad esso associata, sollevando tuttavia tali dubbi.

Ora è quindi necessario fornire una risposta a tali quesiti, necessaria ad una comprensione profonda della dualità fra DLat e Pos.

[5] morfismi fra poset

La parte della definizione 65 relativa ai morfismi si basa fortemente sul concetto di *corrispondenza di Galois:* tale concetto sorge in svariati ambiti della matematica e trova applicazioni anche fuori da essa, come per esempio negli algoritmi di data mining.

In estrema sintesi, dati due poset P e Q, due funzioni crescenti $\sigma: P \to Q$ ed $\eta: Q \to P$ formano una *corrispondenza di Galois*[6] se

$$\forall p \in P,\ q \in Q, \qquad \eta(q) \leq p \Leftrightarrow q \leq \sigma(p)$$

e in tal caso σ si dice *aggiunto superiore* (o *destro*) di η, ed η si dice *aggiunto inferiore* (o *sinistro*) di σ.[7]

È importante notare che una importante generalizzazione della teoria delle corrispondenze di Galois nell'ambito della teoria delle categorie sono i funtori aggiunti, i quali possono essere pensati come il metodo più efficace per ottimizzare un problema.

Alla luce di tali osservazioni si nota che per ogni σ, morfismo-$\{0,1\}$ fra reticoli distributivi, la definizione 65 pone $\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\sigma)$ come restrizione e corestrizione di η, aggiunto inferiore di σ, ai sottoposet formati dai rispettivi elementi sup-irriducibili.

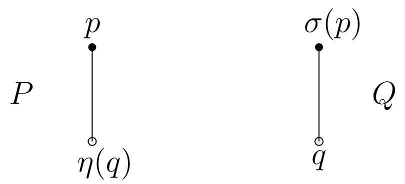
Il seguente teorema giustifica quanto detto.

Teorema 13 (Teorema di Caratterizzazione per Funzioni Aggiunte)**.** [8]
Siano P e Q due poset finiti.

$$\forall \sigma: P \to Q, \qquad \forall \eta: Q \to P$$

le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. σ *è un* $\wedge$*-morfismo e* $\quad \forall q \in Q, \quad \eta(q) = \bigwedge\{x \in P \mid q \leq \sigma(x)\}$
2. $\forall q \in Q,\ \forall p \in P, \qquad \eta(q) \leq p$ *in* $P \Leftrightarrow q \leq \sigma(p)$ *in* Q
3. η *è un* $\vee$*-morfismo e* $\quad \forall p \in P, \quad \sigma(p) = \bigvee\{y \in Q \mid \eta(y) \leq p\}$



Dimostrazione.
Dimostrata l'equivalenza *1.* $\Leftrightarrow$ *2.*, l'equivalenza *2.* $\Leftrightarrow$ *3.* si ottiene per dualità.

1. $\Rightarrow$ *2.*
Si supponga che σ sia un $\wedge$-morfismo e $\eta(q) = \bigwedge\{x \in P \mid q \leq \sigma(p)\}$.
Per ogni $p \in P$ e per ogni $q \in Q$ vale quanto segue.

[6]monotona
[7]Per definire una corrispondenza di Galois è sufficiente che su P e Q sia definito un ordine parziale, permettendo di comprendere in tale teoria diversi casi significativi.
[8]Vedi "Bemerkungen über Galois-Verbindungen" (1952) G. Pickert; "Beiträge zur Filtertheorie" (1953) J. Schmidt;

- $q \leq \sigma(p) \Rightarrow \eta(q) \leq p$
  Se $q \leq \sigma(p)$, ovvero $p \in \{x \in P|\ q \leq \sigma(p)\}$, allora per definizione di estremo inferiore
  $$p \geq \bigwedge\{x \in P|\ q \leq \sigma(x)\} = \eta(q)$$
- $\eta(q) \leq p \Rightarrow q \leq \sigma(p)$
  Se $\eta(q) \leq p$, ovvero $\bigwedge\{x \in D_1|\ q \leq \sigma(x)\} \leq p$, allora
  $$\sigma\Big(\bigwedge\{x \in D_1|\ q \leq \sigma(x)\}\Big) \leq \sigma(p)$$
  Essendo σ un $\wedge$-morfismo si ha
  $$\bigwedge\{\sigma(x)|\ x \in D_1,\ q \leq \sigma(x)\} \leq \sigma(p)$$
  Valendo per definizione di estremo inferiore
  $$q \leq \bigwedge\{\sigma(x)|\ x \in D_1,\ q \leq \sigma(x)\}$$
  si ha per transitività $q \leq \sigma(p)$.

2. $\Rightarrow$ *1.*
Si supponga $\forall p \in P,\ \forall q \in Q$
$$\eta(q) \leq p \text{ in } P \Leftrightarrow q \leq \sigma(p) \text{ in } Q$$

- Come primo passo si prova che σ è una funzione monotona.
  Per ogni $p \in P$ poichè $\sigma(p) \leq \sigma(p)$, allora $(\eta \circ \sigma)(p) \leq p$.
  Per ogni $p_1,\ p_2 \in P$ con $p_1 \leq p_2$ da $(\eta\circ\sigma)(p_1) \leq p_1 \leq p_2$, segue $\sigma(p_1) \leq \sigma(p_2)$.
  Per dualità anche η è quindi una funzione monotona.

- Per ogni $q \in Q$, si ha per ipotesi
  $$\eta(q) = \bigwedge\{x \in P|\ \eta(q) \leq x\} = \bigwedge\{x \in P|\ q \leq \sigma(x)\}$$
  ed analogamente per ogni $p \in P$
  $$\sigma(p) = \bigvee\{y \in Q|\ y \leq \sigma(p)\} = \bigvee\{y \in Q|\ \eta(y) \leq p\}$$

- Si mostra ora che σ è un $\wedge$-morfismo, ovvero $\forall p_1,\ p_2 \in P$
  $$\sigma(p_1 \wedge p_2) = \sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2)$$
  $\sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2) \geq \sigma(p_1 \wedge p_2)$
  È conseguenza diretta della monotonia di σ.
  Per $i = 1, 2$, poichè $p_1 \wedge p_2 \leq p_i$, si ha $\sigma(p_1 \wedge p_2) \leq \sigma(p_i)$, e per definizione

di estremo inferiore $\sigma(p_1 \wedge p_2) \leq \sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2)$.

$\sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2) \leq \sigma(p_1 \wedge p_2)$
Per ipotesi si ha:
$\sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2) \leq \sigma(p_1 \wedge p_2) \;\Leftrightarrow\; \eta\big(\sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2)\big) \leq p_1 \wedge p_2 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \forall i = 1, 2 \qquad \eta\big(\sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2)\big) \leq p_i \;\Leftrightarrow\; \forall i = 1, 2 \qquad \sigma(p_1) \wedge \sigma(p_2) \leq \sigma(p_i)$
Poichè le ultime due disuguaglianze sono banalmente vere (i=1,2), lo sarà anche quella iniziale, terminando la dimostrazione.

□

Si noti che, se σ è un morfismo di reticoli$-\{0, 1\}$, in particolare è sia un $\wedge$-morfismo, sia un $\vee$-morfismo e per il teorema 13 ammette sia un aggiunto inferiore sia un aggiunto superiore.

Avendo considerato nella definizione 65 il sottoposet dei sup-irriduccibili si è portati a considerare la restrizione e corestrizione dell'aggiunto inferiore ai sup-irriducibili.

Dualmente se si considerasse il sottoposet degli elementi inf-irriducibili allora si considererebbe la restrizione e corestrizione dell'aggiunto superiore agli elementi inf-irriducibili.

Tali fatti mettono così in evidenza la perfetta dualità presente nel caso finito.

Altra importante osservazione riguardo al teorema 13, è che esso afferma implicitamente che una funzione ammette aggiunta superiore se e solo se la preimmagine di ogni filtro principale del codominio è un filtro principale del dominio, e tale proprietà permette di definire l'aggiunta, e dualmente per le funzioni che ammettono aggiunta inferiore. Si nota che le funzioni che godono di tale proprietà sono dette *mappe residuali.*

Nella dimostrazione del teorema 13 è stato provato in maniera collaterale il seguente lemma.

Lemma 12. *Siano σ ed η funzioni fra poset come nel teorema 13, allora esse sono entrambe funzioni crescenti.*

Inoltre $\forall p \in P$, $\forall q \in Q$

$$(\eta \circ \sigma)(p) \leq p, \qquad q \leq (\sigma \circ \eta)(q)$$

Conseguenza diretta del lemma 12 è l'unicità dell'aggiunta inferiore (risp. superiore).

Lemma 13. *Siano P e Q poset, e $\sigma :\ P \to Q$ una funzione monotona.*

Se σ ammette aggiunta inferiore (risp. superiore), essa è unica.

Dimostrazione. Si supponga η, $\theta : Q \to P$ aggiunte inferiori di σ.

Per il lemma 12 si ha $\forall q \in Q, \quad q \leq (\sigma \circ \eta)(q)$ da cui, essendo θ un aggiunta inferiore di σ si ha $\theta(q) \leq \eta(q)$.

Analogamente si mostra $\eta(q) \leq \theta(q)$, e per l'antitransitività della relazione d'ordine la dimostrazione si conclude. $\square$

Esplicitato il legame fra il funtore $\mathfrak{SI}$ e la teoria delle corrispondenze di Galois si può procedere alla verifica della sua buona definizione, che risulta molto semplificata adottando tale punto di vista.

Proposizione 26. *Dati due reticoli distributivi D_1 e D_2, per ogni morfismo-$\{0,1\}$ $\sigma : D_1 \to D_2$ si ha che $\mathfrak{SI}(\sigma) : \mathfrak{SI}(D_2) \to \mathfrak{SI}(D_1)$ è un morfismo di poset.*

Dimostrazione.
Denotando con η l'aggiunta inferiore di σ, per il teorema 13 si ha che $\mathfrak{SI}(\sigma)$ è la restrizione e corestrizione di η rispettivamente ai sup-irriducibili di D_2 e di D_1. Essa è inoltre una funzione monotona per il lemma 12

L'unica cosa da dimostrare è che l'immagine attraverso η di ogni elemento sup-irriducibile di D_2 è un elemento sup-irriducibile di D_1.

Sia dunque q un elemento sup-irriducibile appartenente a D_2.

Si supponga $\eta(q) = p_1 \vee p_2$. Per il lemma 12 si ha $q \leq (\sigma \circ \eta)(q)$, da cui

$$q = q \wedge \sigma(\eta(q)) = q \wedge \sigma(p_1 \vee p_2) = q \wedge (\sigma(p_1) \vee \sigma(p_2)) = (q \wedge \sigma(p_1)) \vee (q \wedge \sigma(p_2))$$

Poichè q è sup-irriducibile, si ha o $q \leq \sigma(p_1)$ o $q \leq \sigma(p_2)$, da cui per definizione $p_1 \in \{x \in D_1 | \, q \leq \sigma(x)\}$ o $p_2 \in \{x \in D_1 | \, q \leq \sigma(x)\}$, ed essendo $\eta(q)$ estremo inferiore di tale insieme si ha o $\eta(q) \leq p_1$ o $\eta(q) \leq p_2$.

Ricordando che $\eta(q) = p_1 \vee p_2$, si ha $p_1 \leq \eta(q)$ e $p_2 \leq \eta(q)$. Segue quindi per antitranzsitività o $\eta(q) = p_1$ o $\eta(q) = p_2$, cioè $\eta(q)$ è un elemento sup-irriducibile di D_1 e $\mathfrak{SI}(\sigma)$ è ben definita.

$\square$

Un importante proprietà delle corrispondenze di Galois è il loro buon comportamento rispetto all'operazione di composizione, che le rende compatibili con la teoria delle categorie, la quale permette di sollevare tale teoria alla teoria dei funtori aggiunti.

Proposizione 27. *Siano P, Q, R poset. Per ogni $\psi : P \to Q$ e $\theta : Q \to R$ funzioni crescenti tali che*

$$\forall p \in P, \ q \in Q, \qquad \theta(q) \leq p \Leftrightarrow q \leq \psi(p)$$

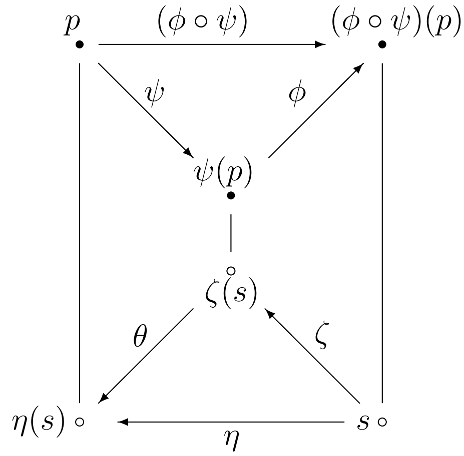
e per ogni $\phi : Q \to R$ e $\zeta : R \to Q$ funzioni crescenti tali che

$$\forall q \in Q, \ r \in R, \qquad \zeta(r) \leq q \Leftrightarrow r \leq \phi(q)$$

allora

$$\forall p \in P, \ \forall r \in R, \qquad (\theta \circ \zeta)(s) \leq p \Leftrightarrow s \leq (\phi \circ \psi)(p)$$

Ovvero $\phi \circ \psi$ e $\theta \circ \zeta$ formano una corrispondenza di Galois.



Dimostrazione. La dimostrazione della precedente proposizione consiste nella seguente semplice verifica.

$$\forall p \in P,\ \forall r \in R, \qquad (\theta \circ \zeta)(r) \leq p \Leftrightarrow \zeta(r) \leq \psi(p) \Leftrightarrow r \leq (\phi \circ \psi)(p)$$

□

La seguente proposizione risulta poco più che una conseguenza diretta della proposizione 27.

Proposizione 28. *Per ogni* D, D_1, D_2, D_3 *reticoli distributivi valgono le seguenti identità:*

1. $\mathfrak{S}\mathfrak{I}(id_D) = id_{\mathfrak{S}\mathfrak{I}(D)}$
2. *Per ogni* $\psi:\ D_1 \to D_2, \quad \varphi : D_2 \to D_3$ *morfismi*$-\{0,1\}$ *si ha*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\varphi \circ \psi) = \mathfrak{S}\mathfrak{I}(\psi) \circ \mathfrak{S}\mathfrak{I}(\varphi)$$

$$\begin{tikzcd}
 & D_2 \arrow[dr, "\phi"] & \\
D_1 \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\phi \circ \psi"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\equiv"] & & D_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_2) \arrow[dl, "\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\psi)"'] & \\
\mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_1) \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\equiv"] & & \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_3) \arrow[ul, "\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\phi)"'] \arrow[ll, "\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\phi \circ \psi)"]
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

1. Per dimostrare il punto 1. è sufficiente osservare che in un qualunque poset P, per ogni $x \in P$ si ha
$$x = \bigwedge\{p \in P |\, x \leq p\}$$

2. Poichè per la proposizione 27, si ha che l'aggiunta inferiore di $\phi \circ \psi$ è la composizione dell'aggiunta inferiore di ϕ con l'aggiunta inferiore di ψ, tenuto conto che per la proposizione 26 l'immagine attraverso tali aggiunte inferiori di un sup-irriducibile è un sup-irriducibile, si ha che tale uguaglianza passa alle restrizioni e corestrizioni ai sup-irriducibili, provando così la proposizione.

$\square$

$\mathfrak{SI}$ pieno e fedele

Si notano esplicitamente due proprietà del funtore $\mathfrak{SI}$, implicite nel precedente discorso.

Proposizione 29. *Il funtore $\mathfrak{SI}$ è pieno e fedele.*

Dimostrazione.

Dati due reticoli distributivi D_1 e D_2, per ogni funzione monotona $f: \mathfrak{SI}(D_2) \to \mathfrak{SI}(D_1)$, è necessario mostrare che esiste ed è unico il morfismo$-\{0,1\}$ $\sigma: D_1 \to D_2$ tale che $\mathfrak{SI}(\sigma) = f$.

$$D_1 \xrightarrow{\quad\sigma\quad} D_2$$

$$D_1 \xleftarrow{\quad\eta\quad} D_2$$

$$\mathfrak{SI}(D_1) \xleftarrow[\quad f\quad]{} \mathfrak{SI}(D_2)$$

Si osserva che, data una funzione monotona $f: \mathfrak{SI}(D_2) \to \mathfrak{SI}(D_1)$, è sempre possibile estenderla in uno ed un solo modo ad un $\vee$-morfismo $\eta: D_2 \to D_1$ ponendo per ogni $y \in D_2$,

$$\eta(y) = \bigvee \{q \in \mathfrak{SI}(D_2) |\ q \leq y\}$$

Per il teorema 13 esiste dunque un unico $\wedge-$morfismo σ aggiunto superiore di η, la cui immagine tramite il funtore $\mathfrak{SI}$ è proprio f, la cui unicità è garantita dal lemma 13.

Si vuole quindi dimostrare che tale σ preserva gli estremi superiori.

Per ogni x_1, $x_2 \in D_1$, per il teorema 13 e per come è definita η si ha per $i = 1,2$

$$\sigma(x_i) = \bigvee \underbrace{\{b \in \mathfrak{SI}(D_2) |\ f(b) \leq x_i\}}_{X_i}$$

$$\sigma(x_1 \vee x_2) = \bigvee \underbrace{\{b \in \mathfrak{SI}(D_2) |\ f(b) \leq x_1 \vee x_2\}}_{X_{1,2}}$$

Poichè per ipotesi per ogni $b \in \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_2)$, $f(b)$ è un sup-irriducibile di D_1, per il lemma 11 si ha che per ogni $b \in \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_2)$, $\quad f(b) \leq x_1 \vee x_2 \Leftrightarrow f(b) \leq x_1$oppure $f(b) \leq x_2$ ovvero $X_{1,2} = X_1 \cup X_2$, da cui $\sigma(x_1 \vee x_2) = \sigma(x_1) \vee \sigma(x_2)$.

Si ha inoltre $\forall q \in \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_2)$

- $f(q) \leq 1_1$, da cui $\sigma(1_1) = \bigvee \mathfrak{S}\mathfrak{I}(D_2) = 1_2$
- $f(q) > 0_1$, da cui $\sigma(0_1) = \bigvee \emptyset = 0_2$

Ovvero σ è un morfismo$-\{0,1\}$.

$\square$

Nota 13. *Come si è visto la definizione del funtore $\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ sui morfismi e le sue proprietà si basano fortemente su risultati appartenenti alla teoria delle corrispondenze di Galois, di cui si spera il lettore abbia colto almeno in parte l'eleganza e la leggerezza.*

Si invita a questo punto il lettore a dimostrare che, dati i poset P e Q, se $\sigma : P \to Q$ è l'aggiunto superiore di $\eta : Q \to P$, allora $\sigma \circ \eta \circ \sigma = \sigma$ e dualmente $\eta \circ \sigma \circ \eta = \eta$.

Da ciò si verificano facilmente i seguenti fatti

1. *σ ed η formano un isomorfismo fra i sottoposet $\{\eta(q) | \, q \in Q\}$ e $\{\sigma(p) | \, p \in P\}$.*
2. *$\eta \circ \sigma : P \to P$ è un operatore di chiusura e dualmente $\sigma \circ \eta : Q \to Q$ è un operatore di kernel.*

È rilevante notare che la condizione affinchè esista una corrispondenza di Galois è molto più debole rispetto all'esistenza di un isomorfismo, eppure permette di affermarne l'esistenza di un isomorfismo non banale fra due sottoposet.

Rilevante è anche il nesso esistente fra corrispondenze di Galois e la topologia. Attraverso gli operatori di chiusura sopra citati è infatti definibile canonicamente una topologia.

Per chi volesse approfondire la teoria delle corrispondenze di Galois si rimanda all'articolo "Adjunction and Galois Connection: Origin, History and Development" di M. Ernè per una esposizione generale della stessa. Esso è contenuto nel libro "Galois Connection and Application", con i contributi di K. Denecke, M. Ernè, S. L. Wismath ed altri, nel quale sono raccolte sue applicazioni in diversi ambiti della matematica e del data mining.

Funtore $\mathfrak{D}$: $\underline{Pos} \to \underline{DLat}$

Si introduce ora il secondo funtore dell'equivalenza, il quale necessita di un bagaglio teorico minore, avendo alla base una prospettiva molto diversa. Esso deve costruire da ogni poset finito un reticolo distributivo di lunghezza finita nel modo più 'naturale' possibile.

Si ricorda che nell'equivalenza fra Boole e Set il relativo funtore associa ad ogni insieme il suo insieme delle parti ordinato dall'inclusione. Nel caso si consideri un insieme su cui sia definito un ordine parziale, si nota che non tutti i sottoinsiemi 'rispettano' tale ordine, e quindi non sono compatibili con la struttura del poset.

Nello studio di un poset infatti, come si è visto nel capitolo 1.1, è naturale porre l'attenzione su due classi di suoi sottoinsiemi: gli ideali ed i loro duali, i filtri.

Nella presente esposizione è stata data rilevanza ai sup-irriducibili del reticolo, e quindi è naturale considerare gli ideali. Tuttavia si ribadisce che in lunghezza finita vale il principio di dualità, e se il precedente funtore fosse stato definito associando ad ogni reticolo distributivo di lunghezza finita il suo sottoposet degli elementi inf-irriducibili, il funtore che ci si accinge a descrivere assocerebbe ad ogni poset il reticolo dei suoi filtri, ordinati in modo naturale dall'inclusione.

Definizione 66. *Si definisce il funtore controvariante*

$$\mathfrak{D} : \ \underline{Pos} \to \underline{DLat}$$

tale che per ogni poset P, $\quad \mathfrak{D}(P)$ è il reticolo degli ideali di P ordinati dall'inclusione.

Dati due poset P_1 e P_2, per ogni morfismo $\mu : \ P_1 \to P_2$,

$$\mathfrak{D}(\mu) : \ \mathfrak{D}(P_2) \to \mathfrak{D}(P_1)$$

$$\forall J \in \mathfrak{D}(P_2), \quad \mathfrak{D}(\mu)(J) := \{x \in D_1 | \ \mu(x) \in J\}$$

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[d, "\mu"'] & & \mathfrak{D}(P_1) \\
P_2 & & \mathfrak{D}(P_2) \arrow[u, "\mathfrak{D}(\mu)"']
\end{tikzcd}$$

Per prima cosa si verifica che la definizione 66 è ben posta sugli oggetti.

Proposizione 30. *Per ogni poset P di lunghezza finita, $\mathfrak{D}(P)$ è un reticolo distributivo di lunghezza finita, il cui elemento minimo è $\emptyset$ ed il cui elemento massimo è P stesso.*

Inoltre per ogni I_1, $I_2 \in \mathfrak{D}(P)$ si ha

$$I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$$

$$I_1 \vee I_2 = I_1 \cup I_2$$

Dimostrazione. Per quanto dimostrato nella proposizione 7, è sufficiente osservare che P stesso è un ideale (ovvio) e che l'intersezione di una famiglia arbitraria di ideali è un ideale.

Sia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia di ideali di P.
Per ogni x, $y \in P$ con $y \leq x$, se $x \in \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ allora per ogni $\alpha \in A$, $x \in I_\alpha$, da cui $y \in I_\alpha$. Per l'arbitrarietà di α si ha quindi $y \in \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$, ovvero $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ è quindi un ideale di P.

Poichè il poset degli ideali di P ammette massimo ed è chiuso rispetto ad intersezioni arbitrarie, esso è un reticolo.

Per mostrare che $\forall I_1$, $I_2 \subseteq P$ ideali, si ha $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$ e $I_1 \vee I_2 = I_1 \cup I_2$, è sufficiente notare che $I_1 \cap I_2$ e $I_1 \cup I_2$ sono ideali di P. Il primo fatto è diretta conseguenza di quanto appena dimostrato, il secondo si dimostra altrettanto facilmente.

Si nota che la legge distributiva è una identità soddisfatta da tutti gli elementi dell'insieme delle parti di P, in particolare dagli elementi appartenenti al sottoreticolo $\mathfrak{D}(P)$.

Poichè P è finito, anche il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(P)$ lo è. Poichè $\mathfrak{D}(P) \subseteq \mathcal{P}(P)$, è anch'esso finito, e da ciò segue direttamente la lunghezza finita.

$\square$

Si prova ora che la definizione 66 è ben posta sui morfismi.

Proposizione 31. *Siano P_1 e P_2 due poset.*

Se $\mu : P_1 \to P_2$ è una funzione monotona, allora

$$\mathfrak{D}(\mu) : \mathfrak{D}(P_2) \to \mathfrak{D}(P_1)$$

è un morfismo$-\{0,1\}$ di reticoli.

Dimostrazione. Si prova come primo passo che per ogni ideale J di P_2, $\mathfrak{D}(\mu)(J)$ è un ideale di P_1.

Per ogni x, $y \in P$, con $x \leq y$ per la monotonia di μ si ha $\mu(x) \leq \mu(y)$.
Da ciò segue che se $y \in \mathfrak{D}(\mu)\big(J\big)$, cioè $\mu(y) \in J$, allora ricordando che J è un ideale segue $\mu(x) \in J$, cioè $x \in \mathfrak{D}(\mu)\big(J\big)$.

Si mostra ora che $\mathfrak{D}(\mu)$ è un morfismo di reticoli.

Siano J_1 e J_2 ideali di P_2.
Per ogni $x \in P_1$, $x \in \mathfrak{D}(\mu)\big(J_1\big) \wedge \mathfrak{D}(\mu)\big(J_2\big)$ se e solo se $\mu(x) \in J_1$ e $\mu(x) \in J_2$ se e solo se $x \in \mathfrak{D}(\mu)\big(J_1 \wedge J_2\big)$

In maniera analoga si dimostra che $\mathfrak{D}(\mu)\big(J_1\big) \vee \mathfrak{D}(\mu)\big(J_2\big) = \mathfrak{D}(\mu)\big(J_1 \vee J_2\big)$

Si osserva infine che per ogni $x \in P_1$ si ha:

- $\mu(x) \in P_2$, da cui $\mathfrak{D}(\mu)(P_2) = P_1$

- $\mu(x) \notin \emptyset$, da cui $\mathfrak{D}(\mu)(\emptyset) = \emptyset$

e ciò conclude la dimostrazione. □

Si può ora procedere alla verifica che la definizione del funtore $\mathfrak{D}$ sia ben posta sui morfismi. Tale fatto come si vedrà è conseguenza diretta di semplici risultati afferenti alla teoria degli insiemi.

Proposizione 32. *Per ogni P, Q, S poset valgono le seguenti affermazioni.*

1. $\mathfrak{D}(id_P) = id_{\mathfrak{D}(P)}$
2. $\forall \sigma : P \to Q, \quad \forall \tau : Q \to S$ *si ha* $\mathfrak{D}(\tau \circ \sigma) = \mathfrak{D}(\sigma) \circ \mathfrak{D}(\tau)$

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dr, "\tau"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\ P \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\tau\circ\sigma"'] & {} & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathfrak{D}(Q) \arrow[dl, "\mathfrak{D}(\sigma)"'] \arrow[d, phantom, "\equiv"] & \\ \mathfrak{D}(P) & {} & \mathfrak{D}(S) \arrow[ul, "\mathfrak{D}(\tau)"'] \arrow[ll, "\mathfrak{D}(\tau\circ\sigma)"] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Il punto 1. è diretta conseguenza dell'osservazione per cui, per ogni insieme A e per ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, vale la seguente doppia implicazione banalmente vera

$$\forall x \in A, \qquad id_A(x) \in B \Leftrightarrow x \in B$$

Per provare il punto 2. è sufficiente notare che per ogni $p \in P$ e per ogni ideale $K \subset S$ si ha

$$p \in \mathfrak{D}(\tau \circ \sigma)(K) = (\tau \circ \sigma)^{-1}(K) \Leftrightarrow (\tau \circ \sigma)(p) = \tau\big(\sigma(p)\big) \in K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma(p) \in \tau^{-1}(K) = \mathfrak{D}(\tau)(K) \Leftrightarrow p \in \sigma^{-1}\big(\mathfrak{D}(\tau)(K)\big) = \big(\mathfrak{D}(\sigma) \circ \mathfrak{D}(\tau)\big)(K)$$

Si è quindi provato $(\tau \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\big(\tau^{-1}(K)\big)$, ovvero

$$\mathfrak{D}(\tau \circ \sigma)(K) = \big(\mathfrak{D}(\sigma) \circ \mathfrak{D}(\tau)\big)(K)$$

□

Isomorfismo Naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Pos}} \Rightarrow \mathfrak{GI} \circ \mathfrak{D}$

Prima di introdurre uno dei due isomorfismi naturali che compongono l'equivalenza cercata, ovvero l'isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Pos}} \Rightarrow \mathfrak{GI} \circ \mathfrak{D}$, è bene descrivere come sono fatti i poset $\mathfrak{GI} \circ \mathfrak{D}(P)$, ove P è un poset finito.

Dato un poset finito P, si considera il reticolo distributivo $\mathfrak{D}(P)$ ad esso associato. Esso è composto dall'insieme degli ideali di P, ove l'estremo superiore corrisponde all'unione e l'estremo inferiore corrisponde all'intersezione.

Ci si domanda chi siano gli elementi sup-irriducibili del reticolo $\mathfrak{D}(P)$.

Si nota che per ogni ideale $I \subseteq P$, $\quad I = \bigcup_{d \in I}\{c \in P|\ c \leq d\} = \bigvee_{d \in I} \downarrow d$.
Quindi tutti gli elementi sup-irriducibili del reticolo $\mathfrak{D}(P)$ devono essere ideali principali. Vale inoltre la seguente implicazione.

Per ogni $d \in P$ e per ogni I_1 ed I_2, ideali di P, se $\{c \in P|\ c \leq d\} = I_1 \vee I_2$, allora o $d \in I_1$ o $d \in I_2$, ovvero o $\downarrow d = I_1$ o $\downarrow d = I_2$.

Gli elementi sup-irriducibili di $\mathfrak{D}(P)$ che formano il sottoposet $\mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D}(P)$, sono quindi tutti e soli gli ideali principali di P.

Viene ora naturale porre la seguente definizione.

Definizione 67. *L'isomorfismo naturale* $\mathfrak{id}_{\underline{Pos}} \Rightarrow \mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D}$ *è la famiglia di isomorfismi*

$$\big(\lambda_P :\ P \to (\mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D})(P)\big)_{P \in \mathbf{Ob}(\underline{Pos})}$$

ove per ogni $P \in \mathbf{Ob}(\underline{Pos})$

$$\lambda_P :\ d \mapsto \{c \in P|\ c \leq d\}$$

La seguente proposizione assicura che la definizione 67 è ben posta.

Proposizione 33. *Per ogni* $P \in \mathbf{Ob}(\underline{Pos})$, *si ha che* $\lambda_P :\ P \to (\mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D})(P)$ *è un isomorfismo di poset.*

Inoltre dati i poset P *e* Q, *per ogni morfismo di poset* $\sigma :\ P \to Q$, *il seguente diagramma commuta*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\lambda_P"] \arrow[d, "\sigma"] & (\mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D})(P) \arrow[d, "(\mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D})(\sigma)"] \\
Q \arrow[r, "\lambda_Q"] & (\mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D})(Q)
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per ogni poset P, per quanto sopra dimostrato si ha che la funzione λ_P è suriettiva, quindi per la proposizione 2, per dimostrare che λ_P è un isomorfismo di poset, è sufficiente mostrare che per ogni p_1, $p_2 \in P$ si ha che $p_1 \leq p_2$ in P se e solo se $\lambda_P(p_1) \leq \lambda_P(p_2)$ in $(\mathfrak{S}\mathfrak{I} \circ \mathfrak{D})(P)$.

Ciò segue banalmente dalla seguente catena di implicazioni.

$$p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow \{x \in P|\ x \leq p_1\} \subseteq \{x \in P|\ x \leq p_2\} \Leftrightarrow \lambda_P(p_1) \leq \lambda_P(p_2)$$

Si procede quindi a dimostrare che il diagramma in figura commuta.

$\forall p \in P$ si ha

- $(\lambda_Q \circ \sigma)(p) = \lambda_Q(\sigma(p)) = \{q \in Q|\ q \leq \sigma(p)\}$
- $\Big(\big(\mathfrak{SI} \circ \mathfrak{D}(\sigma)\big) \circ \lambda_P\Big)(p) = \big(\mathfrak{SI} \circ \mathfrak{D}(\sigma)\big)(\lambda_P(p)) = \big(\mathfrak{SI} \circ \mathfrak{D}(\sigma)\big)(\{s \in P|\ s \leq p\})$

  Per il teorema 13, vale $(\mathfrak{SI} \circ \mathfrak{D}(\sigma))(\{s \in P|\ s \leq p\}) = \{q \in Q|\ q \leq \sigma(p)\}$ se e solo se per ogni ideale $J \subseteq Q$

  $$\{q \in Q|\ q \leq \sigma(p)\} \subseteq J \Leftrightarrow \{s \in P|\ s \leq p\} \subseteq \mathfrak{D}(\sigma)(J)$$

  Tale doppia implicazione è ovviamente equivalente alla seguente

  $$\sigma(p) \in J \Leftrightarrow p \in \mathfrak{D}(\sigma)(J)$$

  ma ciò è vero per definizione di $\mathfrak{D}(\sigma)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(\sigma)(J) \arrow[d, dash] & & J \arrow[d, dash] \\
\{s \in P|\ s \leq p\} & & \{q \in Q|\ q \leq \sigma(p)\}
\end{tikzcd}$$

□

Conclusioni

È ora possibile enunciare il teorema centrale del presente paragrafo.

Teorema 14. *I funtori controvarianti $\mathfrak{SI}$ e $\mathfrak{D}$ formano una dualità fra le categorie $\underline{DLat}$ e $\underline{Pos}$.*

$$\begin{tikzcd}
\underline{Pos} \arrow[r, bend left, "\mathfrak{id}_{\underline{Pos}}"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{SI} \circ \mathfrak{D}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{Pos}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{DLat} \arrow[r, bend left, "\mathfrak{id}_{\underline{DLat}}"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{D} \circ \mathfrak{SI}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{DLat}
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Tale teorema è conseguenza diretta del teorema **??**, tanuto conto della definizione 67 che garanisce l'esistenza dell'isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Pos}} \Rightarrow \mathfrak{SI} \circ \mathfrak{D}$ e della proposizione 29 che garantisce che il funtore $\mathfrak{SI}$ è pieno e fedele.

□

Il teorema 14 garantisce l'esistenza della trasformazione naturale $\mathfrak{id}_{\underline{DLat}} \Rightarrow \mathfrak{D} \circ \mathfrak{SI}$. Essa è definita come segue.

Definizione 68. *Si definisce la trasformazione naturale $\mathfrak{id}_{\underline{DLat}} \Rightarrow \mathfrak{D} \circ \mathfrak{SI}$*

$$(\mu_D :\ D \to (\mathfrak{D} \circ \mathfrak{SI})(D))_{D \in \mathbf{Ob}(\underline{DLat})}$$

ove per ogni $D \in \mathbf{Ob}(\underline{DLat})$

$$\mu_D :\ d \mapsto \{p \in \mathfrak{SI}(D)|\ p \leq d\}$$

2.3 Reticoli Modulari Complementati e Geometrie Proiettive

I risultati esposti in questo paragrafo furono presentati per la prima volta nell'articolo di Birkhoff *"Combinatorial Relations in Projective Geometry,"* del 1935,[9] in cui comparve la prima equivalenza fra strutture reticolari e strutture geometriche dopo la corrispondenza fra <u>Boole</u> e <u>Set</u>, inserendosi in quella serie di articoli che portarono la teoria dei reticoli ad essere riconosciuta come filone autonomo della matematica. Il linguaggio e le convenzioni presenti nell'articolo, risentendo della lontananza temporale, sono stati riportati nei termini moderni, adottando il linguaggio categoriale. Tuttavia, si è cercato di conservare un modus operandi il più vicino possibile a quello dell'autore.

Punto focale del presente capitolo è l'equivalenza fra i reticoli modulari complementati di lunghezza finita e gli spazi proiettivi di incidenza di dimensione finita. Affinchè tale equivalenza sussista, è fondamentale considerare anche rette degeneri, ovvero rette incidenti in soli due punti, mentre nella geometria proiettiva classica si richiedono almeno tre punti distinti per retta.[10] Tale assioma è una delle tre condizioni che garantisce lo "spazio" necessario alla dimostrazione dei teoremi di coordinatizzazione. [11]

I casi di rette con soli due punti possono essere visti come casi degeneri della teoria classica, tuttavia Birkhoff nell'articolo citato mostrò come ogni spazio proiettivo (eventualmente degenere) possa essere scomposto in componenti irriducibili in modo unico, in cui ogni componente irriducibile è uno spazio proiettivo proprio, ove cioè ogni retta contiene almeno tre punti.[12]

In maniera analoga Birkhoff mostrò che i reticoli modulari complementati si scompongono canonicamente in modo unico in un prodotto diretto le cui componenti irriducibili sono o catene di lunghezza 1, o reticoli complementati in cui in cui ogni elemento di lunghezza due veda sotto di se almeno tre atomi.

L'equivalenza descritta nel seguente paragrafo inoltre rispetta tali scomposizioni: la sua restrizione e corestrizione ad una componente irriducibile dello spazio proiettivo e al rispettivo reticolo modulare complementato, risulta essere la loro equivalenza canonica.

Un altro modo naturale di generalizzare i risultati presenti in questo paragrafo è togliere l'ipotesi di dimensione finita sulla geometria proiettiva e indebolire l'ipotesi di lunghezza finita sul reticolo. [13]

Come primo passo nella descrizione della presente equivalenza si definiscono le categorie coinvolte.

---

[9] Vedi [20]

[10] pag.18, "Projective Geometry", Veblen e Young

[11] La seconda condizione è la validità del teorema di Desargues e la terza è che il reticolo considerato abbia lunghezza ≥ 3.
Il Teorema di Desargues è banalmente verificato se la lunghezza del reticolo è ≥ 4, ovvero se la geometria ad esso associata contiene uno "spazio".
(cit. Baer)

[12] Compreso il caso banale dello spazio proiettivo in cui si ha un solo punto, e sia l'insieme delle rette che la relazione di incidenza sono l'insieme vuoto.

[13] Si richiede che il reticolo modulare complementato sia completo, atomico, ogni 'retta' contenga almeno tre punti e i cui atomi siano compatti.
pag. ... Baer

Definizione 69. *Si definisce la categoria* $\underline{ModC}$ *i cui oggetti sono tutti e soli i reticoli modulari complementati di lunghezza finita e i cui morfismi sono tutti e soli gli isomorfismi.*

Si definisce la categoria $\underline{GP}$ *i cui oggetti sono tutti e soli gli spazi proiettivi di incidenza di dimensione finita e i cui morfismi sono tutti e soli gli isomorfismi.*

Lo scopo della geometria secondo Veblen e Young è dedurre logicamente le relazioni che intercorrono fra punti, rette, piani e iperpiani a partire dalla relazione più semplice, che è certamente l'appartenenza dei punti alle rette[14]. L'equivalenza descritta nel presente capitolo permette infatti di dedurre tutte le altre relazioni a partire da questa prima grazie all'identificazione di ciascun oggetto con la classe di punti ad esso incidenti.

Funtore $\mathfrak{P} : \underline{ModC} \to \underline{GP}$

Il funtore che associa ad ogni reticolo modulare complementato il rispettivo spazio proiettivo è un funtore essenziale: dato un reticolo modulare complementato, lo spazio proiettivo ad esso associato è il sottoposet dei suoi elementi di lunghezza 1 e 2, ove gli elementi di lunghezza 1 sono detti 'punti', gli elementi di lunghezza 2 sono detti 'rette' e la relazione d'ordine è detta relazione 'di incidenza'.

Formalmente tale funtore viene definito come segue.

Definizione 70. *Si definisce il funtore covariante essenziale* $\mathfrak{P} : \underline{ModC} \to \underline{GP}$ *tale che:*

$$\forall M \in \mathbf{Ob}(\underline{ModC}), \quad \mathfrak{P}(M) := (P, R, \in)$$

ove

$$P := \{p \in M|\ l(p) = 1\}$$
$$R := \{r \in M|\ l(r) = 2\}$$

$\in \subset P \text{x} R$ *tale che* $\forall x \in P, \forall y \in R, \qquad x \in y$ *in* $\mathfrak{P}(M)$ *se e solo se* $x \leq y$ *in* M.

P *viene detto insieme dei* punti *ed* R *insieme delle* rette.

$$\forall M_1,\, M_2 \in \mathbf{Ob}(\underline{ModC}), \quad \forall \nu \in \mathbf{Hom}(M_1, M_2),$$
$$\mathfrak{P}(\nu) := (\nu_P, \nu_R)$$

ove ν_P *è la restrizione e corestrizione di* ν *rispettivamente agli insiemi* P_1 *e* P_2*, mentre* ν_R *è la restrizione e corestrizione di* ν *rispettivamente agli insiemi* R_1 *e* R_2*.*

Se tale definizione è ben posta, $\mathfrak{P}$ è un funtore essenziale di Poset ove i morfismi di immersione sono suggeriti dalla definizione stessa del funtore.

Per prima cosa si dimostra che la definizione 70 è ben posta sugli oggetti.

Proposizione 34. *Per ogni* $M \in \mathbf{Ob}(\underline{ModC})$, $\quad \mathfrak{P}(M) \in \mathbf{Ob}(\underline{GP})$.

[14] Introduzione del libro "Projective Geometry", Veblen e Young

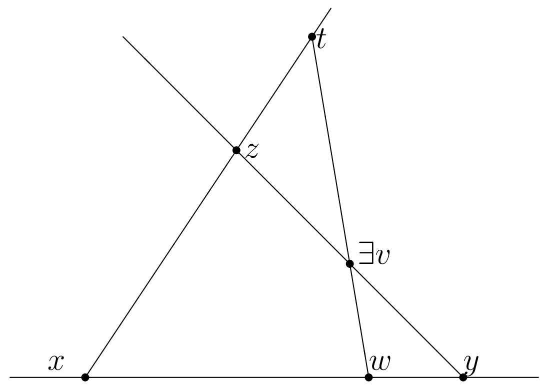
Dimostrazione. Per ogni $M \in \mathbf{Ob}(\underline{ModC})$, si ponga $\mathfrak{P}(M) = (P, R)$. Per lo spazio proiettivo di incidenza associato ad ogni reticolo modulare complementato valgono i seguenti assiomi.

(P1) Siano x, y punti distinti di $\mathfrak{P}(M)$. Si ha $l(x \vee y) = l(x) + l(y) - l(x \wedge y) = 1 + 1 - 0 = 2$, ovvero $x \vee y \in R$ e banalmente $x, y \in x \vee y$.

Essa è inoltre l'unica retta passante per x ed y.

Per ogni retta $r \in R$ tale che $x \in r$ e $y \in r$ si ha $x \vee y \leq r$, inoltre $l(x \vee y) = 2 = l(r)$.
Si ha quindi $x \vee y = r$.

(P2) Siano x, y, z, t, $w \in P$ tali che soddisfino le ipotesi dell'assioma (P2), e si consideri $v \in M$ definito come $v := (y \vee z) \wedge (t \vee w)$.
Si ha $l(v) = l(y \vee z) + l(t \vee w) - l(y \vee z \vee t \vee w) = 2 + 2 - 3 = 1$ da cui $v \in P$.
Inoltre poichè $v \leq y \vee z$ e $v \leq t \vee w$, si ha $v \in y \vee z$ e $v \in t \vee w$.



(P3') Sia $r \in R$, cioè $l(r) = 2$. Si consideri l'intervallo $[0, r]$. Esso è un reticolo modulare complementato essendo intervallo di un reticolo modulare complementato.

Poichè r ha lunghezza 2, esiste un atomo $x \leq r$. Per quanto detto x ammette complemento y in $[0, r]$. Vale inoltre

$$l(y) = l(x \vee y) + l(x \wedge y) - l(x) = l(r) + l(0) - l(x) = 2 + 0 - 1 = 1$$

e dunque $y \in r$ e $y \neq x$.

(P4) Poichè M è un reticolo modulare complementato di lunghezza finita, esistono $p_1, \ldots, p_n \in M$ tali che $\forall i = 1, \ldots, n,\ l(p_i) = 1$ e $0 < p_i < p_i \vee p_2 < \cdots < \bigvee_{i=1}^{n} p_i = 1$ è una catena massimale.

Posto P l'insieme degli atomi di M, si mostra che, definendo come nell'assioma (P4) per induzione $I_1 = \{p_1\}$, e supposto definito $I_i,\ I_{i+1} := \{x \in p_{i+1} \vee y |\ y \in I_i\}$, allora $I_n = P$.

Se si dimostra che per ogni $i = 1, \ldots, n,\ I_i = \{x \in P |\ x \leq \bigvee_{j=1}^{i+1} p_j\}$, allora l'assioma è banalmente verificato.

Per I_1 è ovvio.

Ovviamente per ogni i si ha $I_{i+1} \subseteq \{x \in P|\ x \leq \bigvee_{j=1}^{i+1} p_j\}$. Si supponga che l'inclusione inversa valga fino all'insieme I_i.

Sia $x \in P$ tale che $x \leq \bigvee_{j=1}^{i+1} p_j$.
Se $x = p_{i+1}$ allora banalmente $x \in I_{i+1}$. Se $x \neq p_{i+1}$, si consideri $y = (x \vee p_{i+1}) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} p_j$.
Si ha $l(y) = l((x \vee p_{i+1}) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} p_j) = l(x \vee p_{i+1}) + l(\bigvee_{j=1}^{i} p_j) - l((x \vee p_{i+1}) \vee \bigvee_{j=1}^{i} p_j) = 2 + i - (i+1) = 1$.
Poichè $y \leq \bigvee_{j=1}^{i} p_j$, per ipotesi induttiva $y \in I_i$.
Inoltre $p_{i+1} \vee y = p_{i+1} \vee ((x \vee p_{i+1}) \wedge \bigvee_{j=1}^{i} p_j) = (p_{i+1} \vee \bigvee_{j=1}^{i} p_j) \wedge (x \vee p_{i+1}) = x \vee p_{i+1}$, da cui $x \in p_{i+1} \vee y$, e dunque $x \in I_{i+1}$.

□

Si nota infine che, poichè ogni morfismo σ della categoria <u>ModC</u> è un isomorfismo, anche la sua restrizione e corestrizione ai sottoposet formati da tutti e soli gli elementi di lunghezza 1 e 2 è un isomorfismo di poset, e dunque un isomorfismo fra spazi proiettivi.

Per l'osservazione 14 si ha quindi che la definizione del funtore essenziale $\mathfrak{P}$ è ben posta.

$\mathfrak{P}$ Pieno e Fedele

Prima di passare alla definizione del secondo funtore che compone l'equivalenza è bene soffermarsi ad osservare due importanti proprietà del funtore $\mathfrak{P}$.

Proposizione 35. *Il funtore $\mathfrak{P}$ è pieno e fedele.*

Dimostrazione. Per ogni M_1, $M_2 \in \mathbf{Ob}(\underline{ModC})$, dato

$$\overline{\sigma} \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{P}(M_1), \mathfrak{P}(M_2))$$

si prova l'esistenza di un isomorfismo $\sigma \in \mathbf{Hom}(M_1, M_2)$ tale che $\mathfrak{P}(\sigma) = \overline{\sigma}$.

Ogni elemento $x \in M_1$ ammette una scomposizione irridondante in atomi $x = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$, poichè M_1 è un reticolo modulare complementato di lunghezza finita.

Posto per $i = 1, 2$, $(P_i, R_i) = \mathfrak{P}(M_i)$, per ogni isomorfismo di spazi proiettivi $\overline{\tau} :\ (P_1, R_1) \to (P_2, R_2)$, se esiste un isomorfismo $\tau :\ M_1 \to M_2$ tale che $\mathfrak{P}(\tau) = \overline{\tau}$, allora deve valere

$$(\spadesuit) \qquad \tau(x) = \tau(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \tau(a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \overline{\tau}(a_i)$$

Poichè ($\spadesuit$) definisce τ completamente, si ha che $\mathfrak{P}$ è fedele.

Si mostra ora che per ogni isomorfismo $\overline{\tau}$ fra spazi proiettivi, τ definito come in ($\spadesuit$) è effettivamente un isomorfismo.

Se si mostra che, dati due sottoinsiemi finiti $\{a_1, \dots, a_n\}$, $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq P_1$, vale

$$(\clubsuit) \qquad \bigvee_{i=1}^{n} a_i \leq \bigvee_{j=1}^{m} b_j \text{ in } M_1 \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \overline{\tau}(a_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\tau}(b_j) \text{ in } M_2$$

Si ha anche che τ è ben definita.

Infatti se $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \bigvee_{j=1}^{m} b_j$, allora $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \leq \bigvee_{j=1}^{m} b_j$ da cui $\bigvee_{i=1}^{n} \overline{\tau}(a_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\tau}(b_j)$, e similmente $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \geq \bigvee_{j=1}^{m} b_j$ da cui $\bigvee_{i=1}^{n} \overline{\tau}(a_i) \geq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\tau}(b_j)$, ovvero $\bigvee_{i=1}^{n} \overline{\tau}(a_i) = \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\tau}(b_j)$.

Essendo anche $(\overline{\tau})^{-1} : (P_2, R_2) \to (P_1, R_1)$ un isomorfismo di spazi proiettivi, per provare la $(\clubsuit)$ è sufficiente dimostrare

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i \leq \bigvee_{j=1}^{m} b_j \text{ in } M_1 \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \overline{\tau}(a_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\tau}(b_j) \text{ in } M_2$$

Per definizione di estremo superiore tuttavia tale implicazione è equivalente a mostrare che per ogni atomo $a \in M_1$,

$$a \leq \bigvee_{j=1}^{m} b_j \text{ in } M_1 \Rightarrow \overline{\tau}(a_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\tau}(b_j) \text{ in } M_2$$

Se $m \leq 2$, ciò è vero per definizione.

Supposto vero fino ad m, si supponga $a \leq \bigvee_{j=1}^{m+1} b_j$.

Se $a = b_{m+1}$ ovviamente $\overline{\tau}(a) \leq \bigvee_{j=1}^{m+1} \overline{\tau}(b_j)$.

Se $a \neq b_{m+1}$, si consideri l'elemento $c = (a \vee b_{m+1}) \wedge \bigvee_{j=1}^{m} b_j$. La dimostrazione della proposizione 34 relativa all'assioma (P4) garantisce che c è un atomo e che $a \in c \vee b_{m+1}$. Quindi essendo $\overline{\tau}$ un isomorfismo di spazi proiettivi si ha

$$\overline{\tau}(a) \leq \overline{\tau}(c) \vee \overline{\tau}(b_{m+1}) \leq \bigvee_{j=1}^{m} b_j \vee \overline{\tau}(b_{m+1})$$

È così provata la $(\clubsuit)$.

Si ha inoltre che τ è suriettiva: essendo M_2 un reticolo modulare complementato di lunghezza finita, ogni elemento $y \in M_2$ ammette una scomposizione irridondnate finita in atomi $y = \bigvee_{i=1}^{m} b_i$. Ricordando che $\overline{\tau}_P$ è una biiezione fra gli insiemi degli atomi di M_1 ed M_2, esistono $a_1 \dots, a_m$ atomi di M_1 tali che per ogni $i = 1, \dots, m$ si abbia $\overline{\sigma}(a_i) = b_i$.

Si ha quindi $y = \bigvee_{i=1}^{m} b_i = \bigvee_{i=1}^{m} \overline{\sigma}(a_i) = \tau(\bigvee_{i=1}^{m} a_i)$.

Per la proposizione 2, τ è quindi un isomorfismo di poset, e dunque di reticoli, terminando così la dimostrazione. $\square$

Funtore $\mathfrak{L} : \underline{GP} \to \underline{ModC}$

L'idea alla base del secondo funtore è molto antica: si supponga di considerare la geometria euclidea, e di prendere due punti appartenenti ad un piano. È banale osservare che ogni punto incidente a tale retta apparterrà al piano preso in considerazione.

Ciò suggerisce la definizione di insieme lineare, enunciata nel capitolo 1, e qui ricordata.

Definizione 71. *Sia (P, R) uno spazio proiettivo. Si dice che un sottoinsieme $A \subseteq P$ è un* insieme lineare *se*

$$\forall a, b \in A \text{ con } a \neq b,\ \forall c \in P, \quad \text{se } c \in a \vee b \text{ allora } c \in A.$$

Nota 14. *Si noti che ogni singoletto $\{p\}$, con $p \in P$, e $\emptyset$ sono insiemi lineari.*

Definizione 72. *Si definisce il funtore covariante costruttore di Poset*

$$\mathfrak{L} : \underline{GP} \to \underline{ModC}$$

tale che:

$$\forall (P, R) \in \mathbf{Ob}(\underline{GP}), \qquad (P, R) \mapsto (\mathfrak{L}(P, R), \subseteq)$$

ove $\mathfrak{L}(P, R)$ è la classe degli insiemi lineari di (P, R).

$$\forall (P_1, R_1), (P_2, R_2) \in \mathbf{Ob}(\underline{ModC}), \quad \forall \tau = (\tau_P, \tau_R) \in \mathbf{Hom}((P_1, R_1), (P_2, R_2)),$$

$$\forall A \in \mathfrak{L}(P_1, R_1, \in) \quad \mathfrak{L}(\tau)\big(A\big) := \tau_P[A]$$

Nel seguito si dimostrerà in maniera collaterale che la funzione che associa ad ogni punto il singoletto che lo contiene ed ad ogni retta l'insieme lineare dei punti incidenti ad essa, corrisponde all'immersione dello spazio proiettivo nel suo poset degli ideali lineari, giustificando la dicitura di funtore costruttore.

Per prima cosa si dimostra che la definizione 72 è ben posta sugli oggetti.

Proposizione 36. *Se (P, R) è uno spazio proiettivo di dimensione finita, allora $(\mathfrak{L}(P, R), \subseteq)$ è un reticolo modulare complementato di lunghezza finita.*

Inoltre per ogni coppia di insiemi lineari $S, T \in \mathfrak{L}(P, R)$ si ha che

$$S \wedge T = S \cap T$$

$$S \vee T = \{a \in s \vee t |\ s, t \in S \cup T\}$$

Dimostrazione. Per dimostrare che $(\mathfrak{L}(P, R), \subseteq)$ è un reticolo si prova la seguente implicazione: se $\{A_\alpha |\ \alpha \in I\}$ è una famiglia di insiemi lineari di (P, R), allora $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ è un insieme lineare.

Se $|\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha| \leq 1$ la condizione di linearità è banalmente verificata.

Si supponga $|\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha| \geq 2$.
Per ogni a, $b \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ con $a \neq b$, per ogni $c \in P$ con $c \in a \vee b$ valgono le seguenti implicazioni:

$\forall \alpha \in I, \quad a, b \in A_\alpha$ per linearità si ha $c \in A_\alpha$. Per l'arbitrarietà di α si ha quindi $c \in \bigcap_{\alpha \in I} A$.

Tenuto conto che l'intero insieme dei punti P è ovviamente lineare, il Poset $(\mathfrak{L}(P, R), \subseteq)$ è una classe di insiemi chiusa rispetto ad intersezioni arbitrarie e dotata di elemento massimo. Essa è quindi un reticolo ponendo come di consueto:

$S, T \in \mathfrak{L}(P, R)$

$$S \wedge T = S \cap T$$

$$S \vee T = \bigcap_{\substack{L \supseteq (S \cup T), \\ L \text{ lineare}}} L$$

Per finire di descrive le operazioni di reticolo resta da provare che

$$S \vee T = \{a \in s \vee t | s,\, t \in S \cup T\}$$

Per provare che $S \vee T \subseteq \{a \in s \vee t | s,\, t \in S \cup T\}$, è sufficiente mostrare che, dati $p \in s_1 \vee t_1$, $q \in s_2 \vee t_2$ ove s_1, $s_2 \in S$ e t_1, $t_2 \in T$, per ogni $v \in p \vee q$, esistono $s_3 \in S$ e $t_3 \in T$ tali che $v \in s_3 \vee t_3$. La dimostrazione di tale fatto comprende infatti come sottocasi tutte le altre possibilità non banali.

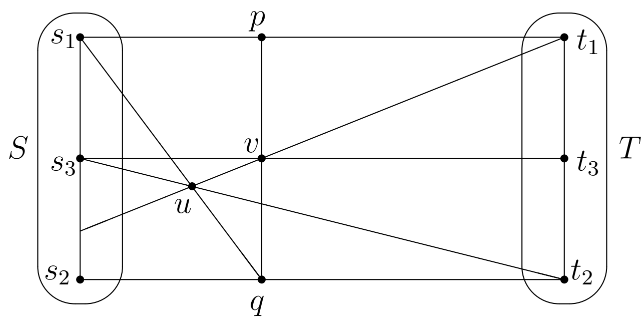
Poichè la seconda inclusione è banalmente verificata per definizione di insieme lineare, se si dimostra tale fatto la dimostrazione termina.

Ovviamente tutti i punti appartenenti ad S e T sono contenuti in $S \vee T$. Si supponga dunque $v \notin S \cup T$.

Applicando (P2) ai punti s_1, p, t_1, v, q si ottiene il punto u tale che $u \in s_1 \vee q$ ed $u \in v \vee t_1$.

Riapplicando (P2) ai punti s_2, q, t_2, u, s_1 si ottiene il punto s_3 tale che $s_3 \in s_1 \vee s_2$ e $s_3 \in u \vee t_2$.

Si riapplichi infine (P2) ai punti s_3, u, t_2, v, t_1 ottenendo il punto t_3 tale che $t_3 \in t_1 \vee t_2$ e $t_3 \in s_3 \vee v$ provando così l'affermazione.



Per mostrare la validità della legge modulare è sufficiente dimostrare che $\forall A,\ B,\ C \in \mathfrak{L}(P,R)$ tali che $A \subseteq C$ si ha $(A \vee B) \wedge C \subseteq A \vee (B \wedge C)$ poichè la disuguaglianza opposta è valida per ogni reticolo (disuguaglianza modulare).

Per ogni $x \in (A \vee B) \wedge C$, ovviamente $x \in C$, inoltre esistono $a \in A$, $b \in B$ tali che $x \in a \vee b$. Si osserva che per l'assioma (P1) [15], se $x \neq a$ e $x \in a \vee b$, allora $a \vee b = a \vee x$.

Se $x \in A$ allora banalmente $x \in A \vee (B \wedge C)$.

Se $x \notin A$, ovviamente $x \neq a$, e quindi $a \vee b = a \vee x$. Dunque vale $b \in a \vee x$, e poichè $a \in A \subseteq C$, per la linearità di C si ha che $b \in C$. Nuovamente vale $x \in A \vee (B \wedge C)$, e la precedente uguaglianza è provata.

Poichè si è dimostrato che $(\mathfrak{L}(P,R), \subseteq)$ è un reticolo modulare, per provare che è di lunghezza finita è sufficiente provare l'esistenza di una catena massimale di lunghezza finita, ma ciò è garantito dall'assioma (A4).

Per dimostrare che ogni elemento del reticolo ammette complemento si utilizza il seguente algoritmo.

Dato $A \in \mathfrak{L}(P,R)$ si pone $B = \emptyset$ e si iterano i seguenti passi:

1. Se $A \vee B = P$ l'algoritmo termina, altrimenti si procede al passo 2.
2. Si sceglie $p \in P$ tale che $p \notin A \vee B$
3. Si ridefinisce B come $B \vee \{p\}$

Tale algoritmo termina dopo un numero finito di passi per l'assioma (A4), osservando che genera una catena strettamente crescente di insiemi lineari di $\mathfrak{L}(P,R)$.

Si ha per costruzione che $A \vee B = P$. Se si dimostra che per ogni $B \in \mathfrak{L}(P,R)$ tale che $A \wedge B = 0$, per ogni $p \notin (A \vee B)$ vale $A \cap (B \vee \{p\}) = \emptyset$, allora B è un complemento di A.

Si nota in primo luogo che per l'isotonia del $\wedge$ si ha $\emptyset = (A \vee B) \wedge \{p\} \geq B \wedge \{p\}$, da cui $B \wedge \{p\} = \emptyset$.

Applicando la regola di Grassmann si ha:

$$l(A \cap (B \vee \{p\})) = l(A) + l(B \vee \{p\}) - l(A \vee B \vee \{p\}) =$$

$$= l(A) + l(B) + l(\{p\}) - l(A \vee B \vee \{p\}) = l(A \vee B) + l(\{p\}) - l(A \vee B \vee \{p\}) = 0.$$

□

Si mostra ora che la definizione 72 è ben posta sui morfismi.

Proposizione 37. *$\mathfrak{L}$ gode delle seguenti proprietà:*

1. $\forall (P_1, R_1), (P_2, R_2) \in \mathbf{Ob}(\underline{GP}), \quad \forall \tau = (\tau_P, \tau_R) \in \mathbf{Hom}((P_1, R_1), (P_2, R_2))$ *si ha che* $\mathfrak{L}(\tau) \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{L}(P_1, R_1), \mathfrak{L}(P_2, R_2))$, *in particolare* $\mathfrak{L}(\tau)$ *è un isomorfismo reticolare.*

[15]Per due punti passa una ed una sola retta

2. $\forall (P,R) \in \mathbf{Ob}(\underline{GP}), \quad \mathfrak{L}(id_{(P,R)}) = id_{\mathfrak{L}(P,R)}$

3. $\forall (P_1,R_1),(P_2,R_2),(P_3,R_3) \in \mathbf{Ob}(\underline{GP}),\ \forall \tau \in \mathbf{Hom}((P_1,R_1),(P_2,R_2)),\ \forall \sigma \in \mathbf{Hom}((P_2,R_2),(P_3,R_3))$ *si ha* $\mathfrak{L}(\sigma \circ \tau) = \mathfrak{L}(\sigma) \circ \mathfrak{L}(\tau)$

Dimostrazione.

1. Si verifica che $\mathfrak{L}(\tau)$ è un isomorfismo reticolare.

   Dato un insieme lineare $A \in \mathfrak{L}(P_1,R_1)$, per ogni $\tilde{a}$, $\tilde{b} \in \mathfrak{L}(\tau)(A) = \tau[A]$ con $\tilde{a} \neq \tilde{b}$, si considera un elemento $\tilde{c} \in \tilde{a} \vee \tilde{b}$. Poichè τ è suriettivo esistono a, b, $c \in P_1$ tali che $\tau(a) = \tilde{a}$, $\tau(b) = \tilde{b}$, $\tau(c) = \tilde{c}$. Essendo τ iniettivo ed appartenendo $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ all'immagine dell'insieme A, allora a, $b \in A$.

   Poichè anche $\tau^{-1} = (\tau_P^{-1}, \tau_R^{-1})$ è un isomorfismo, si ha $c \in a \vee b$, da cui $c \in A$ per la linearità di A, ovvero $\tilde{c} \in \mathfrak{L}(\tau)[A]$.

   $\mathfrak{L}(\tau)[A]$ è quindi un insieme lineare.

   $\mathfrak{L}(\tau)$ conserva l'ordine, infatti $\forall A$, $B \in \mathfrak{L}(P_1,R_1)$, $A \subseteq B$ implica banalmente $\tau_P[A] \subseteq \tau_P[B]$ ovvero $\mathfrak{L}(\tau)[A] \subseteq \mathfrak{L}(\tau)[B]$

   Per ogni $\tau \in \mathbf{Hom}((P_1,R_1),(P_2,R_2))$, $\mathfrak{L}(\tau)$ ammette come inversa $\mathfrak{L}(\tau^{-1})$. Valgono infatti:

   - Per ogni $C \in \mathfrak{L}(P_1,R_1)$, $\mathfrak{L}(\tau^{-1})\mathfrak{L}(\tau)(C) = (\tau^{-1}\tau)[C] = C$
   - Per ogni $\tilde{C} \in \mathfrak{L}(P_2,R_2)$, $\mathfrak{L}(\tau)\mathfrak{L}(\tau^{-1})(\tilde{C}) = (\tau\tau^{-1})[\tilde{C}] = \tilde{C}$

2. Ovviamente l'identità di ogni insieme induce l'identità sul suo insieme delle parti, da cui segue per restrizione il punto 2.

3. $\forall (P_1,R_1),(P_2,R_2),(P_3,R_3) \in \mathbf{Ob}(\underline{GP}),\ \forall \tau \in \mathbf{Hom}((P_1,R_1),(P_2,R_2)),\ \forall \sigma \in \mathbf{Hom}((P_2,R_2),(P_3,R_3))$ si ha $\forall A \in \mathfrak{L}(P_1,R_1)$

$$\mathfrak{L}(\sigma \circ \tau)[A] = (\sigma \circ \tau)_P[A] = \sigma_P[\tau_P[A]] = \mathfrak{L}(\sigma)[\mathfrak{L}(\tau)[A]] = \mathfrak{L}(\sigma) \circ \mathfrak{L}(\tau)[A]$$

□

$id_{\underline{GP}} \Rightarrow \mathfrak{P} \circ \mathfrak{L}$

Prima di definire uno dei due isomorfismi naturali che formano l'equivalenza fra reticoli modulari complementati e spazi proiettivi, ovvero $id_{\underline{GP}} \Rightarrow \mathfrak{P} \circ \mathfrak{L}$, è bene descrivere la famiglia $\{\mathfrak{P} \circ \mathfrak{L}(P,R)\}_{(P,R) \in \mathbf{Ob}(\underline{GP})}$.

Per ogni spazio proiettivo (P,R), si ha che $\mathfrak{L}(P,R)$ è il reticolo degli insiemi lineari di (P,R).

Per descrivere la struttura dello spazio proiettivo $(\mathfrak{P} \circ \mathfrak{L})(P,R)$ è quindi necessario individuare gli insiemi lineari di (P,R) aventi lunghezza 1 e 2 nel reticolo associato.

Per prima cosa si nota che $\forall p \in P$, il singoletto $\{p\}$ è un insieme lineare. Inoltre ogni insieme lineare $I \subseteq P$ diverso dal vuoto può essere scritto banalmente come $I = \bigcup_{p \in I} \{p\}$. Essendo I lineare segue per definizione di estremo superiore $I = \bigvee_{p \in I} \{p\}$.

Se ne deduce che gli elementi sup-irriducibili di $(\mathfrak{P} \circ \mathfrak{L})(P, R)$ sono tutti e soli i singoletti $\{p\}$ con $p \in P$.

Gli elementi di lunghezza 2 sono quindi tutti e soli gli elementi descrivibili come $(\{p\} \vee \{q\})$ con $p,\, q \in P,\ p \neq q$, cioè le 'rette' di $(\mathfrak{P} \circ \mathfrak{L})(P, R)$ sono per la proposizione 36 tutti e soli gli insiemi lineari descrivibili nella forma $\{p\} \vee \{q\} = \{x \in P |\ x \in p \vee q\}$.

Ricordando che per l'assioma (A3) ogni retta contiene almeno due punti che la individuano univocamente per l'assioma (A1), si ha che gli elementi di lunghezza 2 del reticolo $(\mathfrak{P} \circ \mathfrak{L})(P, R)$ sono i sottoinsiemi di P nella forma $\{x \in P |\ x \in r\}$, con $r \in R$.

Per quanto detto, dall'osservazione 15 segue che la seguente definizione è ben posta.

Definizione 73. *Si definisce un isomorfismo naturale $id_{\underline{GP}} \Rightarrow \mathfrak{P} \circ \mathfrak{L}$ come la famiglia di isomorfismi della categoria $\underline{GP}$:*

$$\Big(\eta_{(P,R)} :\ (P, R) \to (\mathfrak{P} \circ \mathfrak{L})(P, R)\Big)_{(P,R)\in \mathbf{Ob}(\underline{GP})}$$

tale che per ogni spazio proiettivo (P, R) si ha:

$$\forall p \in P, \quad \eta_{(P,R)}(p) := \{p\}$$

$$\forall r \in R, \quad \eta_{(P,R)}(r) := \{p \in P |\ p \in r\}$$

Conclusioni

Teorema 15. *Le categorie $\underline{ModC}$ e $\underline{GP}$ sono equivalenti tramite i funtori equivalenza $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{L}$*

$$\begin{tikzcd} \underline{GP} \arrow[r, shift left=2, "\mathfrak{id}_{\underline{GP}}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathfrak{P} \circ \mathfrak{L}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{GP} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{ModC} \arrow[r, shift left=2, "\mathfrak{id}_{\underline{ModC}}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathfrak{L} \circ \mathfrak{P}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{ModC} \end{tikzcd}$$

Dimostrazione Teorema 15.

Poichè esiste l'isomorfismo naturale $id_{\underline{GP}} \Rightarrow \mathfrak{L} \circ \mathfrak{P}$ dato dalla definizione 73, essendo $\mathfrak{P}$ pieno e fedele per la proposizione 35, il Teorema 12 garantisce la validità dell'enunciato del presente teorema. □

Il teorema 15 garantisce l'esistenza di una trasformazione naturale $id_{\underline{ModC}} \Rightarrow \mathfrak{L} \circ \mathfrak{P}$, la quale è suggerita dalla dimostrazione dello stesso.

Definizione 74. *Si definisce l'isomorfismo naturale $id_{\underline{ModC}} \Rightarrow \mathfrak{L} \circ \mathfrak{P}$ come la famiglia di isomorfismi della categoria $\underline{ModC}$:*

$$\Big(\xi_M :\ M \to (\mathfrak{L} \circ \mathfrak{P})(M)\Big)_{M\in \mathbf{Ob}(\underline{ModC})}$$

tale che per ogni $M \in \mathbf{Ob}(\underline{ModC})$

$$\xi_M :\ x \mapsto \{a \in M |\ l(a) = 1,\ a \leq x\}$$

2.4 Reticoli Modulari e Geometrie Proiettive su Poset

Il presente capitolo, nel tentativo di restituire un quadro delle corrispondenze fra strutture reticolari e strutture geometriche, è partito descrivendo la corrispondenza più antica fra quelle descritte, la dualità fra <u>Boole</u> e <u>Set</u>. I paragrafi successivi hanno presentato le due vie scoperte da Birkhoff per estendere tale dualità: nel paragrafo 3.2 la dualità fra <u>DLat</u> e <u>Pos</u> del 1937,[16] ottenuta analizzando cosa accade lasciando cadere l'ipotesi di reticolo complementato, e nel paragrafo 3.3 l'equivalenza fra <u>ModC</u> e <u>PG</u> del 1935,[17] tenendo l'ipotesi di reticolo complementato ma indebolendo la distributività nella legge modulare. Una domanda che a questo punto è naturale porsi è se esista una geometria che permetta di unificare le precedenti corrispondenze ponendosi in corrispondenza ai reticoli modulari, ma per farlo conviene ricordare a grandi linee le idee principali dei paragrafi precedenti.

La dualità fra reticoli distributivi e Poset si costruisce osservando che in un reticolo distributivo ogni elemento non è più estremo superiore di atomi come nel caso dei reticoli di Boole, ma di elementi sup-irriducibili. Tali elementi vanno dunque a costituire la naturale generalizzazione degli atomi. L'insieme dei sup-irriducibili eredita dalla struttura di reticolo un ordine parziale formando un Poset. Da tale fatto si costruisce la dualità, associando ad ogni Poset il suo reticolo degli ideali.

L'equivalenza fra i reticoli modulari complementati e le geometrie proiettive (non necessariamente proprie), parte osservando che, venendo a mancare la proprietà distributiva, un elemento perde la sua scomposizione unica in atomi, ed è dunque necessario, ad esempio, sapere quali atomi hanno a due a due lo stesso estremo superiore, ovvero è necessario sapere la relazione di incidenza fra punti (gli atomi del reticolo) e le rette (elementi del reticolo di lunghezza 2). Ora da tale conoscenza, si dimostra che è possibile ricostruire il reticolo iniziale, associando ad ogni spazio proiettivo il rispettivo reticolo degli insiemi lineari.

Una via per realizzare tale sintesi fu intuita da Faigle ed Herrmann in un articolo di G. C. Kurinnoi (Condition for isomorphism of finite modular lattices, 1975). Kurinnoi dimostrò che condizione necessaria e sufficiente affinchè due reticoli modulari di lunghezza finita A e B siano reticolarmente isomorfi, è l'isomorfismo fra i Poset degli elementi di A e di B di dimensione geometrica minore od uguale a 2. Ora, particolarizzando il risultato nel caso di reticoli modulari complementati, gli elementi di dimensione geometrica 1 sono gli atomi, mentre gli elementi di dimensione geometrica 2 sono le rette. Se si particolarizza tale risultato al caso distributivo gli elementi di lunghezza 1 sono i sup-irriducibili, ed il loro poset determina anche gli elementi di lunghezza 2, avendo ognuno scomposizione irridondante unica in sup-irriducibili. In tal caso, anche gli elementi di lunghezza 2 formano un Poset. Partendo da tali considerazioni Faigle ed Herrmann si posero quindi la seguente domanda: esiste una geometria proiettiva che permetta di vedere gli elementi sup-irriducibili di un reticolo modulare di lunghezza finita come punti di un qualche spazio proiettivo? Tale geometria, come suggerito dal caso dei reticoli distributivi, deve ammettere ordine parziale sia sull'insieme dei punti

[16] Vedi [21]
[17] Vedi [20]

sia sull'insieme delle rette. Il lavoro di Faigle ed Herrmann fu dunque quello di trovare assiomi che considerassero tali ordini parziali.

Va notato che diverse generalizzazioni sono presenti in letteratura, fra cui vanno citati gli spazi di Hjelmslev (vedi Artmann, *"Geometric aspects of primary lattices"*, 1972). Negli spazi di Hjelmslev i punti sono soltanto gli elementi sup-irriducibili di lunghezza massima, i quali sono complementati nel reticolo degli insiemi lineari. Tale buona proprietà tuttavia complica e rende meno confrontabile il sistema degli assiomi rispetto al punto di vista più 'inclusivo' di Faigle ed Herrmann, nel quale tuttavia non è garantita l'esistenza del complemento. Si è dunque scelto di presentare l'opera di questi ultimi poichè più adatta al disegno di un quadro complessivo delle corrispondenze fra strutture reticolari e geometrie.

Nota 15. *Nel presente discorso è centrale la dimensione di Kuroš-Ore, o dimensione geometrica.*

La dimensione di Kuroš-Ore di un elemento x appartenente ad un reticolo modulare di lunghezza finita viene indicata con il simbolo $d(x)$, e rappresenta il numero di elementi di una qualsiasi scomposizione irridondnate in sup-irriducibili di x.

Definizione 75. *Indicheremo con $\underline{Mod}$ la categoria i cui oggetti sono i reticoli modulari di lunghezza finita ed i cui morfismi sono tutti e soli gli isomorfismi reticolari.*

Indicheremo con $\underline{GPPos}$ la categoria i cui oggetti sono gli spazi proiettivi di incidenza su Poset di dimensione finita e i cui morfismi sono tutti e soli gli isomorfismi.

Funtore $\mathfrak{GP}$: $\underline{Mod} \to \underline{GPPos}$

Il primo funtore dell'equivalenza che ci si accinge a descrivere è come sempre il più semplice dei due, ovvero il funtore essenziale di Poset che associa ad ogni reticolo modulare il suo sottoposet formato dagli elementi di dimensione geometrica 1 e 2, ove gli elementi di dimensione geometrica 1 sono detti 'punti', gli elementi di dimensione geometrica 2 sono detti 'rette' e la relazione d'ordine viene detta 'relazione di incidenza'.

Definizione 76. *Il funtore covariante essenziale di poset $\mathfrak{GP}$: $\underline{Mod} \to \underline{GPPos}$ è definito come segue:*

$$\forall M \in \mathbf{Ob}(\underline{Mod}), \quad \mathfrak{GP}(M) := (P, R, \in)$$

ove

$$P := \{x \in M |\, d(x) = 1\}$$
$$R := \{y \in M |\, d(y) = 2\}$$

con P e R sottopose di M e $\in \subset P \times R$ definita dalla proprietà

$$x \in y \text{ in } \mathfrak{GP}(M) \;\Leftrightarrow x \leq y \text{ in } M$$

Per ogni $M_1, M_2 \in \mathbf{Ob}(\underline{Mod})$,

$$\forall \nu \in \mathbf{Hom}(M_1, M_2), \quad \mathfrak{GP}(\nu) := (\nu_P, \nu_R)$$

ove ν_P è la restrizione e corestrizione di ν rispettivamente agli insiemi P_1 e P_2, e ν_R è la restrizione e corestrizione di ν rispettivamente agli insiemi R_1 e R_2.

Dimostrato che la definizione precedente è ben posta, le immersioni dello spazio proiettivo associato nel suo reticolo modulare sono suggerite dalla definizione stessa, e quindi è possibile dire che $\mathfrak{GP}$ è un funtore essenziale.

Prima di dimostrare che la precedente definizione è ben posta, si ricorda il seguente Teorema dal paragrafo 2.1.

Teorema 16. *Sia M un reticolo modulare di lunghezza finita. $\forall a, b, c \in M$ con c sup-irriducibile, se $c \leq a \vee b$, $c \not\leq b$, allora esiste un a' sup-irriducibile tale che $a' \leq a$ e $a' \vee b = c \vee b$.*

Si noti che esso tale teorema nel caso distributivo afferma che se un sup-irriducibile è minore od uguale dell'estremo superiore di due elementi, esso deve essere minore od uguale ad uno dei due.

Si inizia mostrando che $\mathfrak{GP}$ è ben definito sugli oggetti.

Proposizione 38. *Per ogni reticolo modulare M di lunghezza finita, $\mathfrak{GP}(M) = (P, R, \in)$ è uno spazio proiettivo di incidenza su Poset di dimensione finita.*

Dimostrazione. La dimostrazione è stata divisa secondo i diversi assiomi.

(A1) Dati $x, y \in P$, $\quad x \leq y$, $r \in R$ tale che $y \in r$, per definizione si ha in M $x \leq y \leq r$, ovvero $x \in r$ in $\mathfrak{GP}(M)$. Inoltre se $x \in P$, $r, s \in R$ tali che $x \in r$, $r \leq s$ per definizione si ha $x \leq r \leq s$, da cui $x \in s$ in $\mathfrak{GP}(M)$.

(A2) $\forall x, y \in P$ non confrontabili, si ha per definizione di dimensione geometrica $d(x \vee y) = 2$, ovvero $x \vee y \in R$. Inoltre poichè vale banalmente x, $y \leq x \vee y$, si ha che x, $y \in x \vee y$.

Per ogni $r \in M$, tale che x, $y \leq r$, vale per definizione $x \vee y \leq r$, in particolare se $r \in R$ si ha $x \vee y \leq r$.

(A3) È la definizione di retta in $\mathfrak{GP}(M)$.

(A4) Dati gli elementi sup-irriducibili x_1, x_2, y con $x_1 > x_2$ e x_2, y non confrontabili, si vuole provare che $x_1 \not\leq (x_2 \vee y)$.

Per verificare ciò si ricorda che, dati due elementi a e b di un reticolo, $a \leq b$ se e solo se $a \wedge b = a$.

Per la legge modulare si ha $x_1 \wedge (y \vee x_2) = (x_1 \wedge y) \vee x_2$. Ricordando che x_1 è sup-irriducibile, poichè $x_1 \neq (x_1 \wedge y)$ e $x_1 \neq x_2$, si ha che $x_1 \not\leq (x_2 \vee y)$.

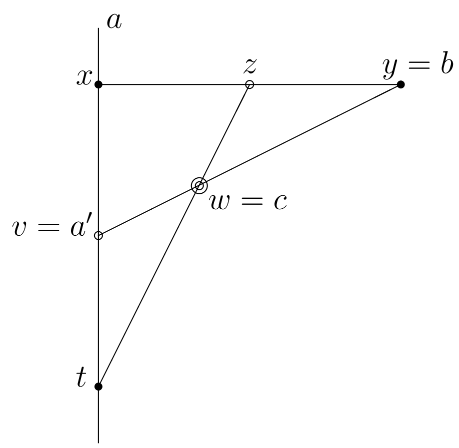
(A5) $\forall x, y, z \in P$ se x, y sono non sono confrontabili e $x, y \leq z$, allora $x \vee y \leq z$. Quindi $\forall p \in x \vee y$ si ha $p \leq (x \vee y) \leq z$.

(A6) È una traduzione geometrica del teorema 16.

(A7) Occorre dimostrare che $\forall x, y, z, t, w \in M$, elementi sup-irriducibili di M, se $z \in (x \vee y)$, $w \in (z \vee t)$, allora esiste v sup-irriducibile di M tale che $v \in (x \vee t)$, $w \in (y \vee v)$.

Si pone $a = x \vee t,\ b = y,\ c = w$.

Se $w \leq y$, allora $w \leq x \vee y$, per l'assioma (A1) e banalmente $x \in x \vee t$.
Se $w \not\leq y$, applicando il teorema 16 si ottiene un sup-irriducibile $v \leq (x \vee t)$ tale che $v \vee y = w \vee y$, dunque $v \in x \vee t$ e $w \in v \vee y$.



(A8) Poichè M è un reticolo modulare di lunghezza finita, esiste una catena massimale $0 = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = 1$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste l'elemento sup-irriducibile p_i tale che $x_i = x_{i-1} \vee p_i$.

Si consideri dunque l'insieme $\{p_1, \ldots, p_n\}$ e si mostra che esso soddisfa le richieste dell'assioma (A8). Si ricorda che tale assioma definisce i sottoinsiemi $I_1, \ldots, I_n$ per induzione, ponendo $I_1 = \{p_1\}$, e supponendo definito l'insieme I_i, l'insieme $I_{i+1} := \{x \in y \vee p_{i+1} |\ y \in I_i\}$.

Se si dimostra che $I_i = \{x \in P |\ x \leq x_i\}$ si ha automaticamente che $I_n = P$, poichè $x_n = 1$ per costruzione.

La dimostrazione procede per induzione.

Per $i = 1$ l'enunciato è vero per costruzione.

Se l'enunciato vero per tutti gli insiemi lineari I_j, ove $j = 1, \ldots, i$, allora è vero per I_{i+1}.

$\forall x \in I_{i+1}$, esiste $y \in I_i$ tale che $x \leq y \vee p_{i+1} \leq x_i \vee p_{i+1} = x_{i+1}$.
La precedente catena di disuguaglianze prova $I_{i+1} \subseteq \{x \in P |\ x \leq x_{i+1}\}$

$\forall x \in \{x \in P |\ x \leq x_{i+1}\}, \quad x \leq x_i \vee p_{i+1}$. Se $x \leq p_{i+1}$ allora $x \in I_{i+1}$ per l'assioma (A1).
Se $x \not\leq p_{i+1}$ per il teorema 16 esiste un elemento sup-irriducibile $y \leq x_i$, tale che $x \leq y \vee x_{i+1}$, per ipotesi induttiva $y \in I_i$ e dunque per definizione $x \in I_{i+1}$, ovvero $\{x \in P |\ x \leq x_{i+1}\} \subseteq I_{i+1}$ e ciò prova quanto asserito.

Si dimostra ora la seconda richiesta dell'assioma (A8), ovvero che per ogni $i = 1, \ldots, n, \quad \forall q \in I_i - I_{i-1}$ allora $I_i = \{x \in y \vee q |\ y \in I_{i-1}\}$. Per quanto dimostrato precedentemente $q \leq x_i$ e $q \nleq x_{i-1}$. Si ha quindi: $x_{i-1} < x_{i-1} \vee q \leq x_{i+1}$ e poichè $x_{i-1} \prec x_i$, si ha $x_{i-1} \vee q = x_i$, ovvero $I_i = \{x \in y \vee q | \ y \in I_{i-1}\}$.

□

Essendo $\mathfrak{GP}$ è ben definito sui morfismi ed un funtore essenziale, per l'osservazione 14 per verificare che sia ben definito sui morfismi è sufficiente notare che ogni isomorfismo fra reticoli modulari conserva la dimensione geometrica degli elementi, e quindi porta punti in punti e rette in rette, preservando ovviamente la relazione d'incidenza fra tali elementi, cioè la relazione d'ordine dei reticoli iniziali ristretta ai sottoposet associati.

Prima di passare alla dimostrazione del secondo funtore si vuole mostrare due importanti proprietà del funtore $\mathfrak{GP}$, ovvero che è pieno e fedele. Per farlo tuttavia è utile avere a disposizione la seguente proposizione.

Notazione 10. *Come al solito, si pone per ogni* $M \in \mathbf{Ob}(\underline{Mod})$, $\quad \mathfrak{GP}(M) = (P, R)$.

Proposizione 39. *Siano* M_1 *ed* M_2 *due reticoli modulari di lunghezza finita. Denotando per* $i = 1, 2 \quad \mathfrak{GP}(M_i) := (P_i, R_i)$, *si vuole dimostrare che per ogni isomorfismo di spazi proiettivi di incidenza* $\overline{\sigma} : \ (P_1, R_1) \rightarrow (P_2, R_2)$, *dati due sottoinsiemi* $\{p_1, \ldots, p_n\}$ *e* $\{q_1, \ldots, q_n\}$ *di* P_1, *si ha*

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \leq \bigvee_{j=1}^{m} q_j \ \textit{in} \ M_1 \Leftrightarrow \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\sigma}(p_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\sigma}(q_j) \ \textit{in} \ M_2$$

Dimostrazione. Essendo $(\overline{\sigma})^{-1} : \ (P_2, R_2) \rightarrow (P_1, R_1)$ anch'esso un isomorfismo di spazi proiettivi è sufficiente provare

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \leq \bigvee_{j=1}^{m} q_j \ \text{in} \ M_1 \Rightarrow \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\sigma}(p_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\sigma}(q_j) \ \text{in} \ M_2$$

Si verifica facilmente che tale implicazione è equivalente ad affermare che per ogni $p \in P_1$, se $p \leq \bigvee_{j=1}^{m} q_j$ in M_1 allora $\overline{\sigma}(p) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\sigma}(q_j)$ in M_2.

La dimostrazione procede per induzione su m.

Se $m \leq 2$ l'implicazione è vera per definizione.

Si supponga l'implicazione vera fino ad m, e si supponga

$$p \leq \bigvee_{j=1}^{m+1} q_j = (\bigvee_{j=1}^{m} q_j) \vee q_{m+1}$$

Se $p \leq q_{j+1}$, allora $\overline{\sigma}(p) \leq \overline{\sigma}(q_{m+1})$, e quindi per l'isotonia del $\vee$ si ha

$$\overline{\sigma}(p) \leq \bigvee_{j=1}^{m+1} \overline{\sigma}(q_j)$$

Se $p \nleq q_{j+1}$, per il teorema 16 esiste un sup-irriducibile $s \leq \bigvee_{j=1}^{m} q_j$ tale che $p \leq s \vee q_{j+1}$, da cui per ipotesi induttiva si ha $\overline{\sigma}(p) \leq \overline{\sigma}(s) \vee \overline{\sigma}(q_{m+1}) \leq \bigvee_{j=1}^{m+1} \overline{\sigma}(q_j)$

□

$\mathfrak{GP}$ Pieno e Fedele

Proposizione 40. *Il funtore $\mathfrak{GP}$ è pieno e fedele.*

Dimostrazione. Essendo GPPos e Mod categorie i cui morfismi sono tutti isomorfismi, per la proposizione 18 si ha che il funtore $\mathfrak{GP}$ è fedele se e solo se per ogni reticolo modulare M, se $\sigma \in \mathbf{Hom}(M, M)$ è tale che $\mathfrak{GP}(\sigma) = id_{\mathfrak{GP}(M)}$, allora $\sigma = id_M$.

Dato un reticolo modulare M di lunghezza finita, si supponga $\sigma \in \mathbf{Hom}(M, M)$ tale che $\mathfrak{GP}(\sigma) = id_{\mathfrak{GP}(M)}$.

Poichè M è di lunghezza finita, si ha che per ogni $x \in M$, esiste una rappresentazione finita in sup-irriducibili di $x = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$. Si ha quindi

$$\sigma(x) = \sigma(\bigvee_{i=1}^{n} p_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \sigma(p_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{GP}(\sigma)(p_i) = \bigvee_{i=1}^{n} p_i = x$$

Ovvero $\sigma = id_M$.

Si mostra ora che $\mathfrak{GP}$ è pieno.

Dati due reticoli modulari di lunghezza finita M_1 ed M_2, si consideri $\overline{\sigma} : \mathfrak{GP}(M_1) \to \mathfrak{GP}(M_2)$, isomorfismo di spazi proiettivi.

Dato un elemento $x \in M_1$, sia $x = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ una sua scomposizione irridondnate in sup-irriducibili, la quale esiste poichè M_1 è di lunghezza finita. è naturale definire:

$$\sigma(x) = \sigma(\bigvee_{i=1}^{n} p_i) := \bigvee_{i=1}^{n} \overline{\sigma}(p_i)$$

Per la proposizione 39 si ha che σ è ben definita e suriettiva, infatti per ogni $y \in M_2$, essendo anche M_2 di lunghezza finita esiste una sua scomposizione in sup-irriducibili $y = \bigvee_{j=1}^{m} q_j$. Essendo $\overline{\sigma}$ un isomorfismo di spazi proiettivi esistono $p_1, \ldots, p_m \in P_1$ tali che per ogni $j = 1, \ldots, m$ si ha $q_j = \overline{\sigma}(p_j)$, da cui

$$y = \bigvee_{j=1}^{m} q_j = \bigvee_{j=1}^{m} \overline{\sigma}(p_j) = \sigma(\bigvee_{j=1}^{m} p_j)$$

Si ha dunque che σ è un isomorfismo di poset, e quindi di reticoli. Inoltre vale banalmente $\mathfrak{GP}(\sigma) = \overline{\sigma}$. □

Funtore $\mathfrak{M}$: $\underline{GPPos} \rightarrow \underline{Mod}$

Il secondo funtore dell'equivalenza parte da $\underline{GPPos}$ ed arriva a $\underline{Mod}$. In tale passaggio, come nella teoria classica da spazio proiettivo a reticolo modulare complementato, risulta centrale il concetto di insieme lineare, la cui definizione viene ricordata di seguito.

Definizione 77. *Dato uno spazio proiettivo su Poset (P, R), un sottoinsieme A di P è detto* lineare *se e solo se $\forall x_1, x_2 \in A$, se il punto $z \in x_1 \vee x_2$,*[18] *allora $z \in A$.*

La definizione 77 è formalmente uguale al caso classico, tuttavia quando viene applicata agli spazi proiettivi di incidenza acquista un significato più generale.

Nel caso classico gli insiemi lineari sono una famiglia di sottoinsiemi (chiusa rispetto ad intersezioni arbitrarie) dell'insieme dei punti.

Negli spazi proiettivi di incidenza gli insiemi lineari formano una famiglia di *ideali* (chiusa rispetto ad intersezioni arbitrarie) del poset dei punti. Supposti infatti due punti x e y, con $x \leq y$, si ha che x appartiene alla retta degenere $y \vee y$, da cui se y appartiene all'insieme lineare A, per definizione di insieme lineare si ha $x \in A$.

Se la famiglia degli insiemi lineari coincide con la famiglia di tutti gli ideali del poset dei punti, per l'equivalenza descritta fra poset e reticoli distributivi si può affermare che il reticolo iniziale è distributivo, e le costruzioni date in questo paragrafo si particolarizzano facilmente in tale caso.

Inoltre, si nota che ponendo la relazione d'ordine discreta sia sul poset dei punti sia su quello delle rette si riottengono gli spazi proiettivi alla Veblen e Young, e si ritrova la definizione classica di insieme lineare.

Definizione 78. *Si definisce il funtore covariante costruttore di Poset $\mathfrak{M} : \underline{GPPos} \rightarrow \underline{Mod}$ nel seguente modo.*

$$\forall (P, R) \in \mathbf{Ob}(\underline{GPPos}), \quad (P, R) \mapsto \mathfrak{M}(P, R)$$

ove $\mathfrak{M}(P, R)$ è il reticolo degli insiemi lineari dello spazio proiettivo (P, R) ordinato dalla relazione di inclusione.

$$\forall \sigma = (\sigma_P, \sigma_L) \in \mathbf{Hom}((P_1, L_1, \in_1), (P_2, L_2, \in_2)), \quad \sigma \mapsto \mathfrak{M}(\sigma)$$

ove $\forall A \in \mathfrak{M}(P_1, L_1, \in_1)$

$$\mathfrak{M}(\sigma) : \; A \mapsto \sigma_P[A]$$

Nel seguito, dimostrando che la definizione del funtore $\mathfrak{M}$ è ben posta si dimostrerà collateralmente che la funzione che associa ad ogni punto il suo ideale discendente e ad ogni retta l'ideale dei punti incidenti ad essa è un immersione di poset, giustificando la dicitura di funtore costruttore di Poset.

[18]Con $x_1 \vee x_2$ si intende la retta (eventualmente degenere) individuata da x_1 ed x_2.

Per mostrare che la definizione 78 è ben posta si verifica che $\mathfrak{M}(P, R)$ è un reticolo per ogni spazio proiettivo di dimensione finita (P, R), esplicitando come agiscono al suo interno le operazioni di $\vee$ e $\wedge$.

Proposizione 41. *Per ogni spazio proiettivo di incidenza su Poset (P, R), $\mathfrak{M}(P, R)$ è un reticolo.*
Si ha inoltre $\forall S, T \in \mathfrak{M}(P, R)$:

$$S \wedge T = S \cap T$$

$$S \vee T = \{p \in P |\, \exists s,\, t \in S \cup T \; t.c. \; p \in s \vee t\}$$

Dimostrazione. Si prova innanzitutto che se $\{A_i |\, i \in I\}$ è una famiglia di insiemi lineari di (P, R), allora $\bigcap_{i \in I} A_i$ è un insieme lineare.

$\forall x,\, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$, $\forall z \in x \vee y$ si ha che $\forall i \in I,\; x,\, y \in A_i$ e per linearità si ha $z \in A_i$. Per l'arbitrarietà di i si ha quindi $z \in \bigcap_{i \in I} A_i$, e l'affermazione è provata.

Banalmente P è un insieme lineare, e quindi $\mathfrak{M}(P, R)$ essendo una classe di sottoinsiemi di P chiusa rispetto ad intersezioni arbitrarie e dotata di elemento massimo è un reticolo.[19]

Per quanto già dimostrato l'affermazione $S \wedge T := S \cap T$ è banalmente vera.

Si vuole ora dimostrare $S \vee T = \{p \in P |\, \exists s,\, t \in S \cup T \; t.c. \; p \in s \vee t\}$.

Se almeno uno fra S e T è l'insieme vuoto, ciò è banalmente vero. Si supponga quindi $S,\, T \neq \emptyset$.

Se il secondo addendo dell'equazione è lineare, allora l'uguaglianza è provata poichè $\{p \in P |\, \exists s,\, t \in S \cup T \; t.c. \; p \in s \vee t\}$ deve essere contenuto in ogni insieme lineare che contenga sia S sia T.

Siano $a,\, b,\, c,\, d \in S \cup T$ e si considerino i punti $e,\, f,\, g$ tali che $e \in a \vee c,\;\; f \in b \vee d$ e $g \in e \vee f$. Se si dimostra che per esistono $s \in S$ e $t \in T$ tali che $gins \vee t$ la dimostrazione termina.

Se $a,\, b,\, c,\, d \in S$ (risp. T) allora per linearità anche i punti $e,\, f,\, g \in S$ (risp. T) e la conclusione segue banalmente.

Se $a,\, b,\, c \in S$ e $d \in T$, allora $e \in S$. Applicando (A7) ai punti $e,\, g,\, f,\, b,\, d$ si ottiene un punto $s \in e \vee b$ tale che $g \in s \vee d$. Notando che per linearità $s \in S$ la dimostrazione termina.

Se $a,\, b,\, c \in T$ e $d \in S$ la dimostrazione è analoga.

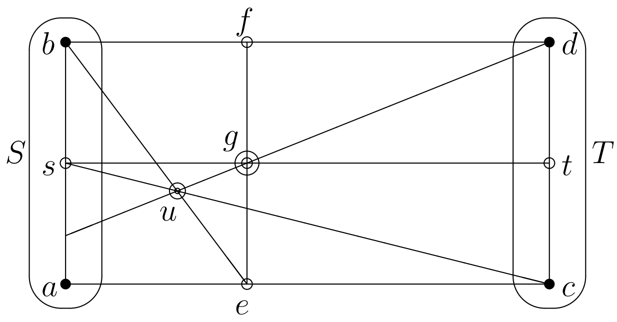
Nel caso più generale si ha infine che $a, b \in S$, e $c, d \in T$, se allora esistono $s \in S, t \in T$ tali che $g \in s \vee t$. Se $g \in S \cup T$ allora g appartiene banalmente al nostro insieme. Supponiamo quindi $g \notin S \cup T$

Applicando (A7) ai punti a, e, c, g, f si ottiene il punto $u \in a \vee f$ tale che $g \in c \vee u$.

[19] Tali condizioni garantiscono la completezza anche nel caso di lunghezza infinita, la quale nel caso di lunghezza finita finita è verificata per ogni reticolo.

Si riapplichi (A7) ai punti a, b, f, d, u e si ottiene il punto $s \in a \vee b$ tale che $u \in s \vee d$.

Si riapplichi (A7) ai punti s, u, d, g, c e si ottiene il punto $t \in c \vee d$ tale che $g \in s \vee t$, e la dimostrazione è conclusa.



□

Proposizione 42. *Per ogni spazio proiettivo su Poset (P, R) di dimensione finita, si ha che $\mathfrak{M}(P, R)$ è un reticolo modulare di lunghezza finita.*

Dimostrazione. Per mostrare che $\mathfrak{M}(P, R)$ è un reticolo modulare è sufficiente verificare, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{M}(P, R)$ tali che $X \subseteq Z$, la validità della relazione $(X \vee Y) \wedge Z \subseteq X \vee (Y \wedge Z)$, poichè l'inclusione opposta vale per qualsiasi reticolo.

Per ogni punto $p \in (X \vee Y) \wedge Z$, esistono $x \in X$, $y \in Y$ tali che $p \in x \vee y$.

Se $p \leq x$ allora per ogni $q \in Y \wedge Z$ si ha $p \in x \vee q$ per l'assioma (A1).

Se $p \not\leq x$ allora per il teorema 16 esiste $y' \leq y$ tale che $\underbrace{p}_{\in Z} \vee \underbrace{x}_{\in X} = y' \vee x$, da cui $y' \in (Y \wedge Z)$. Poichè $p \in x \vee y'$, si è dimostrato $(X \vee Y) \wedge Z \subseteq X \vee (Y \wedge Z)$.

Provata la modularità, si mostra la lunghezza finita per la quale nel caso modulare è sufficiente mostrare l'esistenza di una catena massimale di lunghezza finita.

Per ipotesi esistono $p_1, \ldots, p_n \in P$ tali che p_1 sia un elemento minimale e gli insiemi definiti per induzione

$$I_1 := \{p_1\}$$

$$I_{i+1} := \{x \in p_{i+1} \vee y | \; y \in I_i\}$$

soddisfino le seguenti richieste:

- $I_n = P$.
- Per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ si ha che $\forall q \in I_{i+1} - I_i$

$$I_{i+1} = \{x \in q \vee y | \; y \in I_i\}$$

Se si dimostra che per ogni $i = 1, \dots, n$ l'insieme I_i è lineare, allora per la modularità di $\mathfrak{M}(P, R)$, esso è un reticolo di lunghezza al più n, ammettendo la catena debolmente massimale $\emptyset \preceq I_1 \preceq I_2 \preceq \cdots \preceq I_n$. La dimostrazione procede per induzione.

I_1 è banalmente lineare.

Si vuole dimostrare che se I_i è lineare, allora I_{i+1} è lineare.
Si consideri $I_i \vee \downarrow \{p_{i+1}\}$. Esso è costitutuito per la proposizione 41 dai punti incidenti alle rette determinate da un punto di I_i e da un punto dell'ideale $\{p_{i+1}\}$. Poichè per l'assioma (A1) I_{i+1} comprende tutti i punti minori od uguali di P_{i+1}, si ha che $I_{i+1} = I_i \vee \downarrow \{p_{i+1}\}$ e la dimostrazione è terminata.

□

Resta ora da mostrare che la definizione 78 è ben posta sui morfismi.

Proposizione 43. *Dati due spazi proiettivi su poset (P_1, R_1) e (P_2, R_2), se σ è un isomorfismo fra (P_1, R_1) e (P_2, R_2), allora $\mathfrak{M}(\sigma) : \mathfrak{M}(P_1, R_1) \to \mathfrak{M}(P_2, R_2)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Per prima cosa si mostra che $\mathfrak{M}(\sigma)$ è ben definito, ovvero per ogni insieme lineare A di (P_1, R_1), $\mathfrak{M}(\sigma)[A]$ è un insieme lineare di (P_2, R_2).

$\forall \tilde{a}, \tilde{b} \in \sigma[A] = \mathfrak{M}(\sigma)[A]$, $\forall \tilde{c} \in \tilde{a} \vee \tilde{b}$, poichè σ è un isomorfismo fra spazi proiettivi, esistono a, b, $c \in P_1$ tali che $\tilde{a} = \sigma(a)$, $\tilde{b} = \sigma(b)$ e $\tilde{c} = \sigma(c)$. Poichè anche σ^{-1} è un isomorfismo di spazi proiettivi su Poset, vale $c \in a \vee b$, e per la linearità di A, $c \in A$ da cui $\tilde{c} \in \sigma[A]$.

$\mathfrak{M}(\sigma)$ conserva banalmente la relazione di inclusione, ovvero per ogni A, $B \in \mathfrak{M}(P_1, R_1)$, se $A \subseteq B$ allora $\sigma[A] \subseteq \sigma[B]$, ovvero $\mathfrak{M}(\sigma)[A] \subseteq \mathfrak{M}(\sigma)[B]$.

Inoltre se A e B sono insiemi lineari di (P_1, R_1) tali che $\mathfrak{M}(\sigma)[A] \subseteq \mathfrak{M}(\sigma)[B]$, cioè $\sigma[A] \subseteq \sigma[B]$, applicando ad entrambi i membri σ^{-1} si ottiene facilmente $A \subseteq B$.

Per ogni $A \in \mathfrak{M}(P_1, R_1)$, si ha $\mathfrak{M}(\sigma^{-1})\mathfrak{M}(\sigma)[A] = (\sigma^{-1} \circ \sigma)[A] = id_{(P_1,R_1)}[A] = A$.

Per ogni $B \in \mathfrak{M}(P_2, R_2)$, si ha $\mathfrak{M}(\sigma)\mathfrak{M}(\sigma^{-1})[A] = (\sigma \circ \sigma^{-1})[A] = id_{(P_2,R_2)}[B] = B$.

Ovvero $\mathfrak{M}(\sigma)$ è un isomorfismo fra $\mathfrak{M}(P_1, R_1)$ e $\mathfrak{M}(P_2, R_2)$ □

Proposizione 44. *$\mathfrak{M}$ gode delle seguenti proprietà.*

1. *Per ogni $(P, R) \in \mathbf{Ob}(\underline{GPPos})$, $\quad \mathfrak{M}(id_{(P,R)}) = id_{\mathfrak{M}(P,R)}$*
2. *Dati gli spazi proiettivi di incidenza $(P_1, R_1), (P_2, R_2), (P_3, R_3)$, se $\sigma \in \mathbf{Hom}\big((P_1, R_1), (P_2, R_2)\big)$ e $\tau \in \mathbf{Hom}\big((P_2, R_2), (P_3, R_3)\big)$, allora $\mathfrak{M}(\tau \circ \sigma) = \mathfrak{M}(\tau) \circ \mathfrak{M}(\sigma)$.*

Dimostrazione. 1. Per ogni $A \in \mathfrak{M}(P, R)$, si ha $\mathfrak{M}(id_{(P,R)})[A] = id_{(P,R)}[A] = A$.

2. Dati σ, τ come nell'enunciato allora si ha:

$\forall A \in \mathfrak{M}(P_1, R_1), \quad \mathfrak{M}(\tau \circ \sigma)[A] = (\tau \circ \sigma)_{P_1}[A] = (\tau_{P_2} \circ \sigma_{P_1})[A] = (\mathfrak{M}(\tau) \circ \mathfrak{M}(\sigma))[A]$

□

$$\begin{tikzcd} (P_1,R_1) \arrow[d, "\sigma"'] & \mathfrak{M}(P_1,R_1) \arrow[d, "\mathfrak{M}(\sigma)"'] \\ (P_2,R_2) \arrow[d, "\tau"'] & \mathfrak{M}(P_2,R_2) \arrow[d, "\mathfrak{M}(\tau)"'] \\ (P_3,R_3) & \mathfrak{M}(P_3,R_3) \end{tikzcd}$$

Isomorfismo Naturale $\mathfrak{id}_{\underline{GPPos}} \Rightarrow \mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M}$

Ora che si è verificato che le definizioni dei funtori coinvolti nell'equivalenza sono ben poste, si vuole definire uno dei due isomorfismi naturali che costituiscono l'equivalenza fra Mod e GPPos, ma per farlo è bene fermarsi ad osservare la struttura dello spazio di incidenza $\mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M}(P, R)$, ove (P, R) è un generico spazio di incidenza. Tali strutture formano infatti la classe degli spazi di incidenza a cui appartengono i codomini degli isomorfismi che formano l'isomorfismo naturale cercato.

Si ricorda in primo luogo che $\mathfrak{M}(P, R)$ è una famiglia di ideali del poset P. Per prima cosa si cercano gli ideali di P che sono elementi sup-irriducibili del reticolo $\mathfrak{M}(P, R)$.

Dato uno spazio proiettivo di incidenza (P, R), si ha che ogni suo insieme lineare $I \neq \emptyset$ è un ideale di P e può essere scritto come $I = \bigcup_{p \in I} \downarrow p$.
Si ricorda infatti che gli ideali principali di P sono insiemi lineari (degeneri). Poichè I è lineare per ipotesi e vale banalmente $\downarrow p \subseteq I$ per ogni $p \in I$, segue per definizione di estremo superiore $I = \bigvee_{p \in I} \downarrow p$.

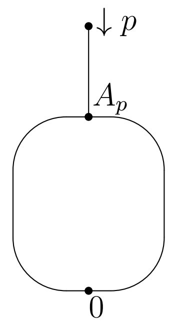
Ogni elemento sup-irriducibile in $\mathfrak{M}(P, R)$ deve essere quindi un ideale principale. Se si mostra che ogni ideale principale è anche un sup-irriducibile si ha la caratterizzazione cercata.

Per ogni $p \in P$, si ponga $A_p = \{x \in P | \, x < p\}$.
Per gli assiomi (A4) e (A5), A_p è un insieme lineare, e ovviamente $p \notin A_p$, da cui $A_p \neq \downarrow p$.
Se inoltre un insieme lineare $\alpha \subsetneq \downarrow p$, allora $\alpha \subseteq A_p$ poichè tutti i suoi elementi devono essere strettamente minori di p.

Quindi A_p è il predecessore di $\downarrow p$, che risulta essere sup-irriducibile,[20]

Per quanto detto i punti dello spazio proiettivo $(\mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M})(P, R)$ sono tutti e soli gli ideali principali di P.

[20] Tale condizione garantisce nel caso infinito che un elemento sia completamente sup-irriducibile. In lunghezza finita il concetto di sup-irriducibile e completamente sup-irriducibile coincidono.



Le rette dello spazio proiettivo $(\mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M})(P, R)$ sono tutti e soli gli elementi del reticolo $\mathfrak{M}(P, R)$ estremi superiori di due elementi sup-irriducibili non confrontabili.

La determinazione delle rette appartenenti allo spazio proiettivo $(\mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M})(P, R)$, si riduce quindi a determinare per ogni p, $q \in P$ non confrontabili, l'estremo superiore degli ideali principali $\downarrow p$ e $\downarrow q$. Per quanto dimostrato nella proposizione 41 si ha $(\downarrow p) \vee (\downarrow q) = \{x \in P |\, x \in p \vee q\}$.

Per l'assioma (A3) si ha quindi che le rette di $(\mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M})(P, R)$ sono tutti e soli gli insiemi $\{x \in P |\, x \in r\}$ con $r \in R$.

Per quanto detto, per l'osservazione 15 la seguente proposizione è ben posta.

Definizione 79. *Si definisce l'isomorfismo naturale* $\mathfrak{id}_{\underline{GPPos}} \Rightarrow \mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M}$

$$(\zeta_{(P,R)} :\ (P, R) \to (\mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M})(P, R))_{(P,R) \in \mathbf{Ob}(\underline{GPPos})}$$

ove, dato uno spazio proiettivo (P, R), per ogni p, $q \in P$ punti non confrontabili

$$\forall p \in P, \quad \zeta_P(p) := \{x \in P |\, x \leq p\}$$

$$\forall r \in R, \quad \zeta_R(r) := \{x \in P |\, x \in r\}$$

Si ricorda che la relazione di incidenza in $(\mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M})(P, R)$ è data dall'inclusione insiemistica.

Si può dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 45. *Per ogni $(P, R) \in \mathbf{Ob}(\underline{GPPos})$, si ha*

$$(\zeta_{(P,R)})_P^{-1} : (\overline{P}, \overline{R}, \subseteq) \to P$$

$$(\zeta_{(P,R)})_P^{-1}(\tilde{p}) = \mathbf{max}(\tilde{p})$$

Nota 16. *Per (A8), $\forall A \in \mathfrak{M}(P_1, R_1)$, esistono $p_1, \ldots, p_n$ tali che $A = \bigvee_{i=1}^{n} \downarrow \{p_i\}$. Si può estendere la dimostrazione precedente mostrando che $\mathfrak{M}(\sigma)[A] = \bigvee_{i=1}^{n} (\zeta_2 \circ \sigma)(p_i)$.*

Conclusioni

Si enuncia infine il teorema centrale del seguente paragrafo.

Teorema 17. *Equivalenza fra* $\underline{Mod}$ *e* $\underline{GPPos}$
Le categorie $\underline{Mod}$ *e* $\underline{GPPos}$ *sono equivalenti tramite i funtori equivalenza* $\mathfrak{GP}$ *ed* $\mathfrak{M}$*.*

$$\begin{tikzcd} \underline{GPPos} \arrow[r, shift left=3, "\mathfrak{id}_{\underline{GPPos}}"] \arrow[r, shift right=3, "\mathfrak{GP}\circ\mathfrak{M}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{GPPos} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{Mod} \arrow[r, shift left=3, "\mathfrak{id}_{\underline{Mod}}"] \arrow[r, shift right=3, "\mathfrak{M}\circ\mathfrak{GP}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \underline{Mod} \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. La definizione 79 presenta l'isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{GPPos}} \to \mathfrak{GP} \circ \mathfrak{M}$, inoltre la proposizione 40 assicura che il funtore $\mathfrak{GP}$ è pieno e fedele, dunque per il teorema 12 le categorie in esame sono equivalenti, dimostrando così il presente teorema.

□

Il teorema 17 garantisce l'esistenza di un isomorfismo naturale $\mathfrak{id}_{\underline{Mod}} \Rightarrow (\mathfrak{M} \circ \mathfrak{GP})$, il quale è definito come segue.

Definizione 80. *Si definisce un isomorfismo naturale* $\mathfrak{id}_{\underline{Mod}} \Rightarrow \mathfrak{M} \circ \mathfrak{GP}$

$$\big(\omega_M :\ M \to (\mathfrak{M} \circ \mathfrak{GP})(M)\big)_{M \in \underline{Mod}}$$

ove per ogni $M \in \mathbf{Ob}(\underline{Mod})$

$$\omega :\ x \mapsto \{a \in M |\ a \leq x,\ d(a) = 1\}$$

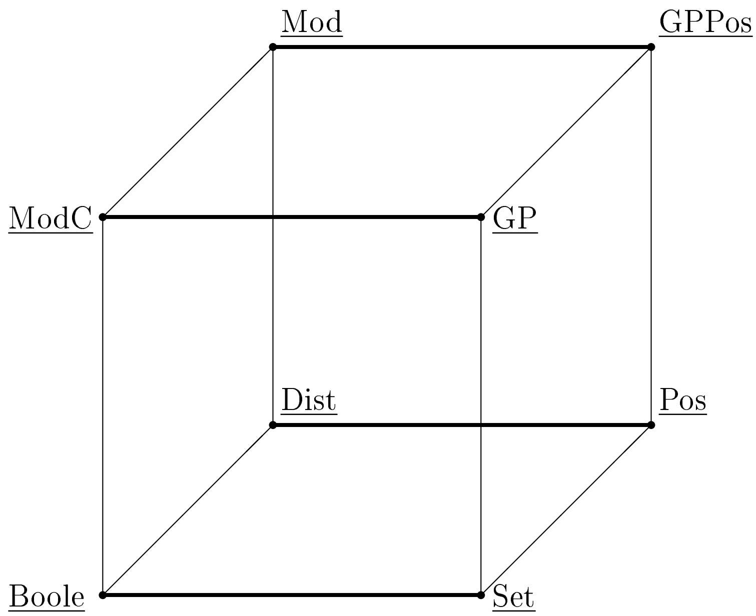
Il teorema 17 permette di estendere ad un alto livello di generalità l'idea classica di Veblen e Young, di definire un sistema complesso, come poteva essere la geometria proiettiva vista come l'insieme di tutti i sottospazi lineari ordinati dall'inclusione, attraverso la relazione più semplice in tale struttura, ovvero fra gli elementi detti 'punti' e fra gli elementi detti 'rette'.

Anche Faigle ed Herrmann, per descrivere una struttura complessa come può essere un reticolo modulare generico, sono riusciti ad individuare dei 'punti e delle 'rette' dalla cui relazione fosse possibile ricostruire l'intero reticolo, costituendo la più semplice sottostruttura che contenesse tutte le informazioni iniziali.

2.5 Commenti

Dopo aver analizzato con dovizia di particolari le varie corrispondenze è bene osservare da lontano quanto descritto. È infatti indispensabile avere una visione globale delle cose per poterne apprezzare i particolari, inquadrandoli nel loro contesto generale.

Di seguito si riporta un diagramma raffigurante le corrispondenze esposte, indicate dai segmenti in grassetto. Sono inoltre rappresentate le linee di generalizzazione sia rispetto alle strutture reticolari sia rispetto alle strutture geometriche per sottolinearne il parallelismo.



Per prima cosa è bene notare che tutte le strutture reticolari prese in considerazione soddisfano la legge modulare, dunque la classe degli oggetti della categoria Mod contiene (strettamente) le classi degli oggetti afferenti alle restanti categorie di reticoli.

Affinchè un reticolo modulare appartenga alla classe degli oggetti delle categorie ModC e Dist si richiede rispettivamente per la prima categoria l'esistenza del complemento per ogni elemento del reticolo e per la seconda che il reticolo soddisfi la legge distributiva.

La classe degli oggetti della categoria Boole è infine l'intersezione delle due classi di oggetti delle categorie sopra citate poichè i suoi oggetti devono soddisfare entrambe le richieste.

La faccia opposta del cubo è interpretabile come quella afferente alle geometrie proiettive in senso lato: è possibile vedere sia gli insiemi sia i poset come le geometrie proiettive su poset le cui rette siano identificabili con tutti e soli i sottoinsiemi dell'insieme dei punti formati dall'unione di due ideali principali fra loro non confrontabili.

Detto ciò tutte le strutture geometriche soddisfano gli assiomi delle geometrie proiettive su Poset (GPPos), ovvero tutte le strutture geometriche considerate appartengono alla classe degli oggetti della categoria GPPos.

Richiedendo che il poset dei punti sia una anticatena si ottengono le geometrie proiettive (GP), mentre se si richiede che il poset delle rette sia identificabile con tutti e soli i sottoinsiemi del poset dei punti formati dall'unione di due ideali principali non confrontabili fra loro si ottengono i poset (Pos).

La classe degli oggetti della categoria Set è l'intersezione delle classi degli oggetti delle due categorie precedenti, dovendo soddisfare ad entrambe le proprietà che le caratterizzano.

A questo punto è possibile osservare che le due facce del cubo si corrispondono esattamente tramite le corrispondenze descritte: esse associano alla categoria più generale di reticoli la categoria più generale di geometrie proiettive, mentre alla categoria dei reticoli più ricchi di proprietà corrisponde la categoria delle geometrie proiettive più ricche di proprietà.

Si invita il lettore a individuare in che cosa si rispecchino le proprietà reticolari sul versante geometrico e viceversa.

Accanto alle simmetrie fra le varie direzioni di generalizzazione sugli oggetti, si nota una dissimmetria quando si analizzino i morfismi. Essa è ben evidente quando si concentra l'attenzione sulle categorie delle strutture geometriche: mentre nella categoria degli insiemi tutte le funzioni sono morfismi e nella categoria dei poset tutte le funzioni crescenti sono morfismi, quando si considera la categoria delle geometrie proiettive i morfismi sono tutti e soli gli isomorfismi; di conseguenza, salendo di generalità, nella categoria delle geometrie proiettive su poset i morfismi dovranno essere tutti e soli gli isomorfismi.

La definizione della categoria delle geometrie proiettive segue la trattazione classica di tali strutture, più concentrata sulla loro descrizione interna che sulle relazioni fra di esse, accontentandosi quindi di identificare quelle geometrie proiettive aventi la stessa struttura, ovvero sullo studio degli isomorfismi.

Questo modo di vedere i morfismi fra le geometrie proiettive è giustificato dal fatto che le uniche funzioni che rispettino la struttura interna delle stesse sono le immersioni e le funzioni costanti. Solo nel 1993 Claude-Alain Faure e Alfred Frölicher pubblicarono l'articolo "Morphisms of Projective Geometries and of Corresponding Lattices",[21] ove estesero l'equivalenza fra reticoli modulari complementati e geometrie proiettive considerando come morfismi una più ampia classe di funzioni parziali.[22] L'idea alla base dell'articolo citato parte dalla seguente osservazione.

Una costruzione canonica di uno spazio proiettivo è costituita dai sottospazi di dimensione 1 e 2 di uno spazio vettoriale: considerando una funzione lineare qualsiasi fra due spazi vettoriali, essa potrebbe non essere iniettiva e di conseguenza avere un kernel non nullo. I sottospazi di dimensione 1 ivi contenuti verranno mandati nel vettore nullo: a tali 'punti' non corrisponderà quindi alcun 'punto' del secondo spazio proiettivo.

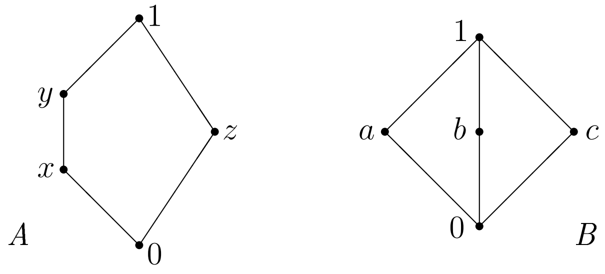
Il seguente Teorema, di cui non si riporta per brevità la dimostrazione, [23] permette di chiarire e dimostrare alcune delle affermazioni precedenti, fornendo inoltre un'ultima caratterizzazione dei reticoli modulari e distributivi dal forte carattere pittorico.

Teorema 18. *Sia L un reticolo.*

1. *L è modulare se e solo se non contiene sottoreticoli rappresentabili dal diagramma di Hasse A*

2. *L è distributivo se e solo se non contiene sottoreticoli rappresentabili ne dal diagramma di Hasse A ne dal diagramma di Hasse B.*

[21] Vedi [24].
[22] funzioni non definite dappertutto
[23] Vedi pag. 59, [12]; pag.20, [6]; pag.11, [4].



Il punto 1. è la radice della fondatezza della definizione di lunghezza di un elemento in un reticolo modulare e quindi del concetto di 'dimensione' proprio della geometria proiettiva classica.

Il punto 2. afferma che una geometria proiettiva in cui esiste una retta con almeno tre punti non può essere associata ad un reticolo distributivo.

Per comprendere perchè i morfismi delle categorie ModC e GP e fra Mod e GPPos sono tutti e soli gli isomorfismi, è utile concentrare l'attenzione su quei particolari reticoli modulari complementati che corrispondono a geometrie proiettive proprie, ovvero in cui ogni retta ammette almeno tre punti distinti ad essa incidenti.

Definizione 81. *Sia M un reticolo modulare complementato di lunghezza finita. Si dice che M è* irriducibile *se per ogni $r \in M$ con $l(r) = 2$ esistono almeno tre atomi distinti a_1, a_2, $a_3 \in M$ tali che $a_i \leq b \quad \forall i = 1, 2, 3$.*

Prima di enunciare la proposizione caratterizzante i morfismi fra reticoli modulari complementati irriducibili è utile enunciare il seguente lemma.

Lemma 14. *Sia M un reticolo modulare complementato irriducibile e si considerino due elementi x, $y \in M$.*

Se $0 < x < y$, allora esiste un atomo $a \in M$ tale che $a \leq y$ e $a \nleq x$

Dimostrazione. Si indichi con $\overline{x}$ un complemento di x in L, si ha

$$y = y \wedge \underbrace{(\overline{x} \vee x)}_{1} = (y \wedge \overline{x}) \vee x$$

Essendo $x < y$, deve essere $y \wedge \overline{x} \neq 0$, perciò esiste un atomo a tale che $a \leq y \wedge \overline{x}$, ovvero $a \leq y$ e $a \nleq x$.

□

È ora possibile dare la seguente proposizione.

Proposizione 46. *Siano M_1 e M_2 due reticoli e $\phi: \ M_1 \to M_2$ un morfismo reticolare.*

Se M_1 è un reticolo modulare complementato irriducibile, allora ϕ è o una immersione oppure un morfismo costante.

Dimostrazione. Si suppongano M_1 e M_2 due reticoli, con M_1 reticolo modulare complementato irriducibile di lunghezza finita.

Per costruire un morfismo fra M_1 ed M_2, per il Teorema Fondamentale di Scomposizione[24] per prima cosa è necessario:

1. individuare una relazione di congruenza $\equiv$ in M_1;
2. individuare un sottoreticolo N_2 di M_2 isomorfo a $M_1/\equiv$;
3. scegliere un isomorfismo $\overline{\phi}: \big(M_1/\equiv\big) \to N_2$.

Quindi se si mostra che le uniche relazioni di congruenza che tali reticoli ammettono sono quelle banali, allora gli unici morfismi ammessi sono le immersioni e i morfismi costanti.

Si consideri inizialmente un reticolo rappresentato dal diagramma B. Se $0 \equiv x$, allora $(0 \vee y) \equiv (x \vee y)$, ovvero $y \equiv 1$, ed analogamente si mostra che $z \equiv 1$.

Da $z \equiv 1$ segue $z \wedge y \equiv 1 \wedge y$, ovvero $0 \equiv 1$ e per transitività $0 \equiv 1$, ovvero tutti gli elementi di tale reticolo sono fra loro congruenti.

Si consideri quindi un reticolo modulare complementato irriducibile M di lunghezza finita. Se esiste un atomo $a \in M$ tale che $a \equiv 0$, allora tutti gli atomi del reticolo sono congruenti a 0, di conseguenza tutti gli elementi del reticolo, essendo estremi superiori di atomi, devono essere congruenti a 0.

Per provare ciò sia $b \in M$ un atomo, con $a \neq b$. Per ipotesi esiste un atomo $c \in M$ distinto da a e b tale che $a \vee b = b \vee c = c \vee a$, ovvero si forma un sottoreticolo rappresentabile dal diagramma B e dalla dimostrazione precedente segue $b \equiv 0$.

Si suppongano ora x, $y \in M$ con $x \neq y$.

Supponendo senza perdita di generalità $y \nleq x$,[25] si ha $x \wedge y < y$. Per il lemma 14 esiste un atomo a tale che $a \leq y$ e $a \nleq x \wedge y$.

Poichè da $x \equiv y$ segue $y \equiv x \wedge y$, si ha per quanto detto $a \wedge y \equiv a \wedge (x \wedge y)$, ovvero $a \equiv 0$.

Per la dimostrazione precedente ciò implica che tutti gli elementi del reticolo sono fra loro congruenti terminando la dimostrazione.

□

A conclusione della tesi si nota che il metodo deduttivo, affermatosi alla fine del diciannovesimo secolo, permise la formazione di teorie generali come quelle qui esposte la cui portata, essendo così generale, permise di 'guadagnare una vivida concezione dell'unità della matematica.'

[24] Teorema 2

[25] in caso contrario x e y si scambiano di ruolo.

"Un siffatto ideale supera le differenze di vedute per cui si accende la lotta feconda delle scuole e può unire tutti gli spiriti di progresso che amano la Scienza e credono alla solidarietà dei rami che la compongono."[26]

[26] *Rivista di Scienza* (1907)[27] di Federigo Enriques, Giuseppe Bruni, Antonio Dionisi, Andrea Giardina ed Eugenio Rignano

Bibliografia

[1] R. Baer; *Linear algebra and projective geometry,* Academic Press Inc., New York, N. Y., 1952

[2] G. Birkhoff; *Lattice Theory,* American Mathematical Society, New York, 1940

[3] G. Birkhoff; *Lattice Theory,* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, revised edition. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1948

[4] G. Birkhoff; *Lattice Theory,* Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967

[5] G. Birkhoff, S. Mac Lane; *Algebra,* The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London 1967

[6] P. Crawley, R. P. Dilworth; *Algebraic Theory of Lattices,* Prentice-Hall, 1973

[7] B. A. Davey, H. A. Priestley; *Introduction to lattices and order,* Second edition. Cambridge University Press, New York, 2002

[8] B. A. Davey, H. A. Priestley; *Introduction to lattices and order,* Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[9] F. Enriques; *Problemi della Scienza,* Zannichelli, Bologna, 1906

[10] C.A. Faure, A. Frölicher; *Modern Projective Geometry,* Mathematics and its Applications, 521. Kluwer Accademic Pubblishers, Dordrecht, 2000

[11] G. Grätzer; *Lattice theory. First concepts and distributive lattices,* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1971.

[12] G. Grätzer; *General lattice theory,* Pure and Applied Mathematics, 75. Academic Press, Inc. New York-London, 1978

[13] G. Grätzer; *General lattice theory,* Second edition. New appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung and R. Wille. BirkhÃďuser Verlag, Basel, 1998

[14] P. T. Johnstone; *Stone spaces,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 3. Cambridge University Press, Cambridge, 1982

[15] T. Leinster; *Basic category theory,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 143. Cambridge University Press, Cambridge, 2014

[16] D. E. Rutherford; *Introduction to lattice theory,* Hafner Publishing Co., New York 1965

[17] J. Van Oosten; *Basic category theory,* BRICS, Computer Science Department, University of Aarhus, 1995

[18] O. Veblen, J. W. Young; *Projective Geometry,* Vol. 1, Ginn and Co., Boston, 1916

[19] D. J. Benson, J. H. Conway; Diagrams for modular lattices, *J. Pure Appl. Algebra,* **37** (1985), no. 2, 111âĂŞ-116

[20] G. Birkhoff; Combinatorial relations in projective geometries, *Ann. of Math.* (2) **36** (1935), no. 3, 743âĂŞ-748.

[21] G. Birkhoff; Rings of sets, *Duke Math. J.* **3** (1937), no. 3, 443âĂŞ-454.

[22] U. Faigle; Frink's Theorem for Modular Lattices, *Arch. Math.* , **36** (1981), 179–182

[23] U. Faigle, C. Herrmann; Projective geometry on partially ordered sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **266** (1981), no. 1, 319âĂŞ-332.

[24] C.A. Faure, A. Frölicher; Morphism of Projective Geometries and of Corresponding Lattices, *Geom. Dedicata,* **47** (1993), no. 1, 25–40

[25] O. Frink Jr.; Complemented Modular Lattices and Projective Spaces of Infinite Dimension, *Transactions of the American Mathematicaln Society,* **60** (1946), no. 3, 452–467

[26] P.J. Morandi; Dualities in Lattices Theory, http://sierra.nmsu.edu/morandi/ (2005)

[27] O. Veblen, J.W. Joung; A Set of Assumption for Projective Geometry, *American Journal of Mathematics,* **30** (1908), no. 4, 347–380