Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LA TEORIA DELLE WAVELETS

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Annamaria Montanari

Presentata da:
Helena Policardi

Sessione Unica
Anno Accademico 2016-2017

Introduzione

La storia delle wavelets inizia più di un secolo fa con il lavoro del matematico tedesco Alfred Haar, che scopre l'ononimo *sistema di basi ortonormali.*
La "wavelet di Haar" ha alcune proprietà interessanti ma anche alcune caratteristiche negative, quali ad esempio, la mancanza di regolarità, e per molto tempo resta una costruzione isolata.
Verso la fine anni '70 il sismologo Jean Morlet sviluppa una nuova tecnica per analizzare i dati ottenuti da prospezioni geologiche per la ricerca del petrolio. La tecnica di prospezione è semplice: una vibrazione è inviata nel sottosuolo e l'eco viene registrato da un sismografo. Meno semplice è analizzare il segnale risultante, per cercare di dedurre la struttura del sottosuolo.
A questo scopo, Morlet introduce una scala di funzioni, a cui verrà dato il nome "ondelettes" (in inglese *"wavelets"*, in italiano "ondine") dato il loro carattere oscillante e ben localizzato.
Queste funzioni hanno la caratteristica peculiare di essere ottenute tutte da un'unica funzione tramite semplici operazioni di traslazione e di contrazione/dilatazione. Correlando un segnale (nella fattispecie il segnale rilevato dal sismografo) con queste funzioni, se ne ottiene una analisi che fornisce informazioni temporali molto più precise di quelle ottenute tramite la trasformata di Fourier (all' epoca uno dei principali strumenti di analisi dei segnali), la quale scompone il segnale utilizzando funzioni sinusoidali perfettamente localizzate nello spazio delle frequenze ma assolutamente non localizzate nel tempo.
L'analisi di Fourier è ben adatta per lo studio di segnali stazionari, le cui proprietà statistiche non cambiano nel tempo. Questo però succede di rado nella vita reale dove la maggior parte dei segnali ha caratteristiche più o meno localizzate nel tempo e dove proprio questa locaalizzazione dà informazioni importanti sui fenomeni che il segnale descrive. Su questi segnali, il nuovo approccio proposto da Morlet fornisce informazioni molto più significative.
Nascono poi i primi risultati e, in particolare, la costruzione di una "ondina madre" infinitamente regolare che, tramite opportune traslazioni e dilatazioni, viene a formare una base ortonormale.

A portare avanti il lavoro di Morlet sono Yves Meyer, fisico di Marsiglia e Stephane Mallat che sviluppano il concetto di *analisi multirisoluzione*, un approccio generale per la costruzione di basi di wavelets a partire da qualsiasi sequenza bi-infinita di spazi contenuti ciascuno nel successivo che soddisfino opportune proprietà di invarianza.
Questo prepara la strada ad Ingrid Daubechies, che in questo framework costruirà la sua classe di *basi di wavelets ortonormali a supporto compatto.*

L'algoritmo wavelet è considerato, ad oggi, di grande interesse.
Le sue molteplici caratteristiche lo rendono estremamente duttile e funzionale in diverse discipline: la sua capacità che ha, ad esempio, di ben approssimare segnali non lineari, lo rende uno strumento determinante negli studi sull'influenza che la corrente oceanica El Nino ha sulla velocità rotazionale terrestre.
La tolleranza che la trasformata wavelet dimostra nei confronti di eventuali errori nei suoi coefficienti, la rende strumento adatto per lo studio di risonanze magnetiche e per elettrocardiogrammi ad alta risoluzione.
In campo astronomico, la trasformata wavelet viene apprezzata per la sua capacità di identificare strutture a risoluzioni diverse: questo consente di studiare con profitto le distribuzioni a larga-scala nell'Universo.
Anche nelle tecniche di compressione e di riduzione del "rumore" in un segnale, le wavelets trovano largo impiego: infatti, la tolleranza a coefficienti errati, consente l'azzeramento di parte dei coefficienti wavelet (quelli minori, in modulo, di una certa soglia) consentendo così la rappresentazione dello stesso segnale con un numero inferiore di informazioni; allo stesso tempo, questo ne azzera la componente ad alta fequenza determinata dal"rumore".

In questa trattazione analizzeremo tre aspetti fondamentali nella teoria delle wavelets:

- SISTEMA DI HAAR (nel primo capitolo della tesi)
- ANALISI IN MULTIRISOLUZIONE (nel secondo capitolo)
- WAVELETS DI DAUBECHIES (nel terzo capitolo)

Per la costruzione di tale teoria sono indispensabili i formalismi dell'analisi armonica. A tal proposito precisiamo sin d'ora che adotteremo, tra le possibili definizioni equivalenti, la seguente definizione di *Trasformata di Fourier*

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt$$

dove $f \in L^1(\mathbb{R})$, con $x \in \mathbb{R}$

Indice

Capitolo 1

Il sistema di Haar

In questo capitolo presentiamo il sistema di Haar come prototipo di base di wavelets. Introdurremo concetti che riprenderemo nella costruzione di basi di wavelets in generale e nell' analisi in multirisoluzione.

1.1 Il sisteama di Haar su $\mathbb{R}$

Definizione 1.1. Si chiamano **intervalli diadici di** $\mathbb{R}$, gli intervalli del tipo

$$I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)$$

con $k, j \in \mathbb{Z}$

Osservazione 1. Sia $I_{j,k}$ un intervallo diadico allora $|I_{j,k}| = \frac{1}{2^j}$.
Siano $j_0, j_1, k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ dove o $j_0 \neq j_1$ oppure $k_0 \neq k_1$.
Si ha

- $I_{j_0,k_0} \cap I_{j_1,k_1} = 0$, oppure
- $I_{j_0,k_0} \subset I_{j_1,k_1}$, oppure
- $I_{j_1,k_1} \subset I_{j_0,k_0}$

Notazione. Dato un intervallo diadico indichiamo con $I^s_{j,k}$ la metà sinistra dell'intervallo, e con $I^d_{j,k}$ la metà destra dell'intervallo. Si noti che $I^s_{j,k} = I_{j+1,2k}$ mentre $I^d_{j,k} = I_{j+1,2k+1}$.

Definizione 1.2. Poniamo

$$\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.1}$$

e, per ogni $j, k \in \mathbb{Z}$
$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k),$$
(dilatazione seguita da traslazione).
La collezione $(\phi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ si chiama **sistema delle funzioni di scala di Haar** su $\mathbb{R}$

Si osservi che $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\chi_{I_{j,k}}(x)$ e $\phi_{j,k}(x) \neq 0$ su $I_{j,k}$. Inoltre
$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{j,k}(x)dx = 2^{j/2}\int_{I_{j,k}} dx = 2^{j/2}\left|I_{j,k}\right| = \frac{2^{j/2}}{2^j} = \frac{1}{2^{j/2}}.$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left|\phi_{j,k}(x)\right|^2 dx = 2^j \int_{I_{j,k}} dx = 2^j \left|I_{j,k}\right| = 1$$

Definizione 1.3.
$$\psi(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x), \tag{1.2}$$
e sia, per ogni $j, k \in \mathbb{Z}$
$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$
La collezione $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ si chiama **sistema di Haar su** $\mathbb{R}$

Si osservi che
$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\left[\chi_{I^s_{j,k}}(x) - \chi_{I^d_{j,k}}(x)\right] = 2^{j/2}\left[\chi_{I_{j+1,2k}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k+1}}(x)\right],$$
in particolare $\psi_{j,k}(x) \neq 0$ su $I_{j,k}$. Inoltre
$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x)dx = 2^{j/2}\left(\int_{I_{j+1,2k}} dx - \int_{I_{j+1,2k+1}} dx\right) = \frac{2^{j/2}}{2^{j+1}} - frac2^{j/2}2^{j+1} = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left|\psi_{j,k}(x)\right|^2 dx = 2^j\left(\int_{I_{j+1,2k}} dx + \int_{I_{j+1,2k+1}} dx\right) = 1$$

1.2 Ortogonalità del sistema di Haar

Prima di dimostrare che il sistema di Haar su $\mathbb{R}$ è un sistema ortogonale il $L^2(\mathbb{R})$, facciamo queste premesse: nel caso di funzioni di
$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\right|^2 dx < +\infty\right\},$$

si definisce il *prodotto scalare* come

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Si noti che, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$|\langle f, g\rangle| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < +\infty.$$

Una collezione di funzioni in $L^2(\mathbb{R})$, $(f_i)_{i\in I}$ si dice *sistema ortogonale* se

$$\langle f_i, f_j\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_i(x)\overline{f_j(x)}dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i, \\ \int_{\mathbb{R}} |f_i(x)|^2\, dx & \text{se } j = i. \end{cases}$$

Se poi $\int_{\mathbb{R}} |f_i(x)|^2\, dx = 1$, il *sistema* si dice *ortonormale*.
Si può introdurre un analoga definizione per funzioni definite in un intervallo.
Notiamo che $\psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 1.2.1. *Il sistema di Haar su* $\mathbb{R}$, $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *è un sistema ortonormale per* $L^2(\mathbb{R})$

Dimostrazione. Si deve provare che per ogni coppia $(j_0, k_0), (j_1, k_1)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x)\overline{\psi_{j_1,k_1}(x)}dx = \delta_{j_0,j_1}\delta_{k_0,k_1} = \begin{cases} 1 & \text{se } j_0 = j_1, k_0 = k_1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fissiamo una scala $j \in \mathbb{Z}$.
Siano $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$, allora

$$I_{j,k_0} \cap I_{j,k_1} = \begin{cases} I_{j,k_0} & \text{se } k_0 = k_1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nel caso in cui $k_0 = k_1$:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k_0}(x)\overline{\psi_{j,k_1}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k_0}(x)|^2\, dx = 1.$$

Nel caso in cui $k_0 \neq k_1$:
$\psi_{j,k_0}(x) = 2^{j/2}\left[\chi_{I_{j+1,2k_0}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k_0+1}}(x)\right]$ ha supporto compatto I_{j,k_0}, disgiunto dal supporto I_{j,k_1} di $\psi_{j,k_1}(x) = 2^{j/2}\left[\chi_{I_{j+1,2k_1}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k_1+1}}(x)\right]$.
Quindi si ha sempre $\psi_{j,k_0}(x)\overline{\psi_{j,k_1}(x)} = 0$, da cui la tesi.

Prendiamo scale diverse. Siano $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$, $j_0 > j_1$, $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$.
Ci sono tre possibilità:

1. $I_{j_0,k_0} \cap I_{j_1,k_1} = 0$. Come sopra $\psi_{j_0,k_0}(x)\overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} = 0$ in ogni punto e l'integrale si annulla.

2. $I_{j_0,k_0} \subset I^s_{j_1,k_1}$. Allora in ogni punto $\psi_{j_0,k_0}(x)\overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} = 2^{j_1/2}\psi_{j_0,k_0}(x)$, da cui
$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x)\overline{\psi_{j_1,k_1}(x)}dx = 2^{j_1/2}\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k_0}(x)dx = 0.$$

3. $I_{j_0,k_0} \subset I^d_{j_1,k_1}$. Allora come nel caso precedente, $\psi_{j_0,k_0}(x)\overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} = -2^{j_1/2}\psi_{j_0,k_0}(x)$, da cui
$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x)\overline{\psi_{j_1,k_1}(x)}dx = -2^{j_1/2}\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k_0}(x)dx = 0.$$

□

1.3 Il sistema di Haar su [0,1]

Consideriamo quelle funzioni del sistema di Haar su $\mathbb{R}$ il cui supporto è contenuto nell'intervallo [0,1].

Definizione 1.4. Sia $j \geq 0$ un intero, sia ϕ, ψ definite come in (1.1) e (1.2). Consideriamo
$$\left\{\phi_{J,k}; 0 \leq k \leq 2^J - 1\right\} \cup \left\{\psi_{j,k}; j \leq k \leq 2^j - 1\right\}.$$
Tale insieme si chiama **sistema di Haar su [0,1] a scala J**.

Per dimostrare che il sistema di Haar su [0,1] forma una base in $L^2(0,1)$ introduciamo la definizione di base di Shauder e alcune sue proprietà.
Notazione. Indichiamo con $\{h_j\}_{j=0}^{\infty}$ il sistema di Haar su [0,1]una volta posto, per $J \geq 0$
$$\{h_l\}_{l=0}^{\infty} = \left\{\phi_{J,k} \text{ con } 0 \leq k \leq 2^J - 1, \psi_{j,k} \text{ con } j \geq J, 0 \leq k \leq 2^j - 1\right\}.$$

Definizione 1.5. Sia X uno spazio di Banach. Una sequenza $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ in X è chiamata una **base di Schauder** di X se $\forall u \in X$ esiste un'unica sequenza di scalari $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tali che
$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n.$$
I numeri (univocamente determinanti) $a_n = a_n(u)$ sono chiamati *coefficienti di u rispetto alla base di Schauder* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$

Teorema 1.3.1. *Sia $p \in [1, \infty)$ e sia $f \in L^p(0,1)$. Posto*

$$c_j = \int_1^0 f(x) h_j(x) dx,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} c_j h_j \right|^p dx = 0.$$

Teorema 1.3.2. *Sia $p \in [1, \infty)$. Allora il sistema ortogonale di Haar forma una base di Schauder per lo spazio $L^p(0,1)$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 1.3.1 si ha che ogni $f \in L^p(0,1)$ può essere scritta nella forma

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j h_j.$$

Quindi è sufficiente dimostrare l'unicità dei coefficienti c_j. Sia $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sequenza di numeri reali tali che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} c_j h_j = 0 \text{ in } L^p(0,1).$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_i(x) \left(\sum_{j=0}^{n} c_j h_j(x) \right) dx = 0,$$

con $i = 1, 2, ...$ arbitrario. Ciò implica che

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_i(x) \left(\sum_{j=0}^{n} c_j h_j(x) \right) dx = c_i$$

e l'unicità è provata.

□

Quindi in particolare per $p = 2$ il sistema di Haar forma una base per $L^2(0,1)$.

Osservazione 2. Più la scala j è grande, più è piccolo il supporto della $\phi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$. Ciò si esprime dicendo che le $\phi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$ sono ben *localizzate nel tempo*. Come conseguenza, una funzione f, nulla al di fuori di un piccolo intervallo, avrà molti coefficienti di Haar $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$ e $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ uguali a zero.

1.4 Localizzazione delle discontinuità

La particolarità del sistema di Haar è quella di dare un'indicazione sulla posizione delle discontinuità (non eliminabili) di una funzione dall'esame dei suoi coefficienti di Haar.
Per semplicità assumiamo che f abbia un salto in x_0. Supponiamo che esistano i limiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$,
e che $f \in C^2[0, x_0] \cup C^2[x_0, 1]$ definita a destra e sinistra di x_0 come sopra.
Fissiamo una scala j e consideriamo i due casi $x_0 \in I_{j,k}$ e $x_0 \notin I_{j,k}$.
$1°$ caso) $x_0 \notin I_{j,k}$.
Scriviamo la formula di Taylor di f al primo ordine, nel punto medio $x_{j,k} = \frac{1}{2^j}\left(k + \frac{1}{2}\right)$ di $I_{j,k}$, con il resto in forma di Lagrange

$$f(x) = f(x_{j,k}) + f^{'}(x_{j,k})(x - x_{j,k}) + \frac{f^{''}(\xi_{j,k})}{2}(x - x_{j,k})^2,$$

dove $\xi_{j,k} \in I_{j,k}$. Si ha

$$\langle f, \psi_{j,k}\rangle = \int_{I_{j,k}} f(x)\psi_{j,k}(x)dx =$$

$$= f(x_{j,k})\int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(x)dx + f^{'}(x_{j,k})\int_{I_{j,k}} (x - x_{j,k})\psi_{j,k}(x)dx + \int_{I_{j,k}} \frac{f^{''}(\xi_{j,k})}{2}(x - x_{j,k})^2\psi_{j,k}(x)dx =$$

$$= f^{'}(x_{j,k})\int_{I_{j,k}} x\psi_{j,k}(x)dx + \int_{I_{j,k}} \frac{f^{''}(\xi_{j,k})}{2}(x - x_{j,k})^2\psi_{j,k}(x)dx,$$

dove si è utilizzata la proprietà $\int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(x)dx = 0$.
Il primo integrale vale

$$\int_{I_{j,k}} x\psi_{j,k}(x)dx = \int x2^{j/2}\left(\chi_{[0,\frac{1}{2})}(2^jx - k) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(2^jx - k)\right)dx =$$

$$= -\frac{2^{j/2}}{2^{2j+2}} = -\frac{2^{3/2j}}{4},$$

mentre

$$\left|\int_{I_{j,k}} \frac{f^{''}(\xi_{j,k})}{2}(x - x_{j,k})^2\psi_{j,k}(x)dx\right| \le \frac{1}{2}max_{x\in I_{j,k}}\left|f^{''}(x)\right| 2^{j/2}\int_{I_{j,k}} (x - x_{j,k})^2dx =$$

$$= \frac{1}{24}max_{x\in I_{j,k}}\left|f^{''}(x)\right| 2^{-5/2j}.$$

Se j è grande, il termine $2^{-5/2j}$ è trascurabile rispetto a $2^{-3/2j}$ e otteniamo l'approssimazione

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \approx \frac{1}{4} \left| f'(x_{j,k}) \right| 2^{-3/2j}.$$

2° caso) $x_0 \in I_{j,k}$.
Con un ragionamento simile al precedente, fatto sia dalla parte destra che dalla parte sinistra dell'intervallo, si ottiene

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \approx \left| x_0 - 2^{-j} k \right| \left| f(x_0^-) - f(x_0^+) \right| 2^{j/2}.$$

Se j è grande, possiamo assumere che x_0 sia all'incirca nel punto medio di $I_{j,k}$, ossia $|x_0 - 2^{-j}k| \approx \frac{2^{-j}}{4}$. In definitiva

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \approx \frac{\left| f(x_0^-) - f(x_0^+) \right|}{4} 2^{-j/2},$$

ed il decadimento dei coefficienti, per $j \to +\infty$, è più lento del 1° caso.

Capitolo 2

Analisi multirisoluzione di $L^2(\mathbb{R})$ e Wavelets

2.1 Analisi multirisoluzione (MRA)

Definizione 2.1. Sia H uno spazio di Hilbert. Una famiglia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ si chiama **base di Riesz** di H se

- la famiglia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una base per H, cioè $\forall g \in H$ esiste un'unica successione $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tale che

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \tag{2.1}$$

- esistono costanti positive A e B tali che $\forall g \in H$ della forma (2.1) si ha

$$A \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \|g\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 .$$

Chiaramente ogni base ortonormale di H è anche una base di Riesz di H (con costanti $A = B = 1$), ma il concetto di base di Riesz è molto più generale.
Nel seguito ci occuperemo esclusivamente di basi di Riesz della forma $f_k(x) = f(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, dove f è una funzione fissata di $L^2(\mathbb{R})$. $H \subseteq L^2$ sarà lo spazio da esse generato.

Definizione 2.2. Una **analisi multirisoluzione di** $L^2(\mathbb{R})$ (o **MRA**) è una successione crescente $\{V_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $V_j \subset V_{j+1}$, di sottospazi chiusi di $L^2(\mathbb{R})$ avente le seguenti proprietà

1. $$\cap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = 0, \quad \cup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \text{ è denso in } L^2(\mathbb{R})$$

2. $\forall f \in L^2$ e $\forall j \in \mathbb{Z}$ si ha
$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$$

3. esiste una funzione $g \in V_0$ tale che la successione $\{g(x-k)\}, k \in \mathbb{Z}$, sia una base di Riesz dello spazio V_0.

La g si chiama **funzione di scala** dell'analisi multirisoluzione.

Per il punto 2. si vede che la successione $\left\{2^{j/2}g(2^j x - k)\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, è una base di Riesz per V_j.
Inoltre $f \in V_j$ se e solo se è della forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k 2^{j/2} g(2^j x - k)$$

dove $\{c_k\}_k \in l^2$.
Inoltre, se $f \in V_j$, $f(x - m/2^j) \in V_j$ per ogni intero m. In sostanza, tutti gli spazi V_j sono la versione "in scala" dello spazio V_0.

Osservazione 3. Le condizioni 1. e 3. non sono indipendenti, la 1. segue dalla 2. e 3.
D'ora in poi, per dimostrare che una famiglia di spazi chiusi costituisce una MRA, dovremmo unicamente controllare che sia crescente

Esempio 1. *Sia V_0 lo spazio delle funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ costanti su ogni intervallo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Sia V_j lo spazio delle funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ costanti su ogni intervallo $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$.*
Possiamo notare che $V_j \subset V_{j+1}$ per ogni j e l'unione di tali spazi è densa in L^2. Infatti, se $f \in L^2$ è ortogonale a tutti i V_j, allora

$$\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(x)dx = 0$$

per ogni k e j interi.
Per densità $\int_a^b f dx = 0$ per ogni $a < b$, da cui $f = 0$ q.o. La proprietà 2. è ovvia; la proprietà 3. vale con $g = \chi_{[0,1)}$.
L'analisi multirisoluzione appena descritta è definita ***MRA di Haar***.

2.2 Ortonormalizzazione e wavelets

Nell' Esempio 1 la base di Riesz era in effetti una base ortonormale; ma in generale le funzioni $\{g(x-k)\}$ non costituiscono una base ortonormale di V_0. Il seguente Teorema ci permette di ottenere una funzione $\phi \in V \subset L^2(\mathbb{R})$ sottospazio chiuso, tale che sia una base ortonormale di V stesso.

Teorema 2.2.1. *Sia $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un sottospazio chiuso ed esista $g \in V$ tale che $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sia una base di Riesz di V. Si definisca $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mediante la formula*

$$\hat{\phi}(x) = \hat{g}(x)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(x+2k\pi)|^2\right)^{-1/2}. \tag{2.2}$$

Allora $\phi \in V$ e la famiglia $\{\phi'(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, costituisce una base ortonormale di $V \iff \hat{\phi'}(x) = \hat{\phi}(x)\rho(x)$, dove ρ è periodica di periodo 2π e $|\rho(x)| = 1$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Per questo Teorema, data una analisi multirisoluzione $\{V_j\}$, esiste sempre una funzione scala ϕ che dà luogo a una base ortonormale di V_0, e tale funzione è unica a meno di fattori periodici aventi modulo 1.
D'ora in poi supporremo sempre di avere scelto una tale funzione di scala ϕ, ovvero supporremo sempre che $\left\{2^{j/2}\phi(2^j x - k)\right\}$ sia una base ortonormale di V_j, $j \in \mathbb{Z}$ e definiamo ϕ una funzione **scala ortonormale**.

Definizione 2.3. Sia $\{V_j\}$ una analisi multirisoluzione. Chiamiamo $\{W_j\}$ il **complemento ortogonale** di V_j in V_{j+1} e $\{D_j\}$ la **proiezione ortogonale** su W_j

Teorema 2.2.2. $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ *vale*

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} D_j f \tag{2.3}$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|D_j f\|_2^2$$

Notazione1. La proprietà (2.3) si esprime dicendo che $L^2(\mathbb{R})$ è la somma ortogonale degli spazi W_k. In simboli

$$L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{-\infty}^{+\infty} W_k.$$

Nel seguito indicheremo con $\mathscr{F}V_j$ lo spazio delle trasformate di Fourier delle funzioni di V_j. $\mathscr{F}V_j$ è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R}, dx/2\pi)$, isometrico a

V_j.
Il Teorema (2.2.2) mostra che una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$ può essere costruita nel modo seguente: per ogni fissato $j \in \mathbb{Z}$ sia $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una base ortonormale di W_j. L'insieme di tutte le funzioni $\{\psi_{j,k}\}$ al variare di k e j in $\mathbb{Z}$ sarà allora una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.
La costruzione delle basi delle wavelets avverà proprio in questo modo (come vedremo in seguito). Tuttavia la base in ogni W_j non sarà generica, ma della forma $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, dove ψ è una singola funzione in $L^2(\mathbb{R})$.
L'esistenza di tale ψ è la tesi del fondamentale Teorema 2.2.3. Prima ricordiamo alcuni fatti che saranno utilizzati nella dimostrazione.
Sia $\{V_j\}$ una analisi multirisoluzione e ϕ la funzione di scala ortonormale. Una tale funzione esiste sempre per il Teorema 2.2.1. Sappiamo allora che

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{\phi}(t + 2k\pi)\right|^2 = 1 \text{ per q.o. } t. \tag{2.4}$$

Inoltre, per ogni $f \in V_0$,

$$\hat{f} = m(t) = \hat{\phi}(t) \text{ dove } m \text{ è una opportuna funzione il } L^2(\mathbb{T}). \tag{2.5}$$

Quindi $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-1}\left\|\hat{f}\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m(t)|^2 s(t)dt = \frac{1}{2\pi}|m(t)|^2 dt$.
Per polarizzazione si ha poi, per ogni $f, g \in V_0$, con $\hat{f}(t) = m(t)\hat{\phi}(t)$ e $\hat{g}(t) = q(t)\hat{\phi}(t)$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\bar{g}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m\bar{q}dt. \tag{2.6}$$

Teorema 2.2.3. *Sia $\{V_j\}$ una analisi multirisoluzione di $L^2(\mathbb{R})$. Allora esiste una funzione $\psi \in W_0$ tale che la famiglia $\left\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nel costruire una funzione $2^{-1/2}\psi(x/2) \in W_{-1}$ tale che $\left\{2^{-1/2}\psi(x/2 - k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sia una base ortonormale di W_{-1}. Da ciò seguirà poi che la famiglia $\left\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.
Sia ϕ una funzione di scala ortonormale. Allora $2^{-1}\phi(x/2) \in V_{-1} \subset V_0$, per cui $2^{-1}\phi(x/2)$ si può esprimere mediante uno sviluppo nella base ortonormale $\{\phi(x - k)\}$. Si ha

$$2^{-1}\phi(x/2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi(x - k),$$

$$\text{dove } c_k = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \phi(x/2)\bar{\phi}(x - k)dx, \tag{2.7}$$

e chiaramente la successione $\{c_k\}_k \in l^2$. Applicando la formula (2.5), con la funzione $2^{-1}\phi(x/2)$ al posto di f si ottiene

$$\hat{\phi}(2t) = \hat{\phi}(t)m_0(t), \text{ dove } m_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikt} \tag{2.8}$$

e i coefficienti c_k sono dati da (2.7). Dimostriamo ora la fondamenatale formula (*che ci sarà utile anche nel prossimo capitolo*)

$$|m_0(t)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2 = 1 \text{ per quasi ogni } t. \tag{2.9}$$

Poichè per (2.4) $s(t) = 1$ quasi ovunque, si ha anche $s(2t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{\phi}(2t+2k\pi)\right|^2 =$ 1 q.o. Per (2.8) si ha $\hat{\phi}(2t+2k\pi) = m_0(t+k\pi)\hat{\phi}(t+k\pi)$ e quindi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(t+k\pi)|^2 \left|\hat{\phi}(t+k\pi)\right|^2 = 1 \text{ per quasi ogni } t. \tag{2.10}$$

Poichè m_0 ha periodo 2π, possiamo separare i k pari da quelli dispari in (2.10). Otteniamo così

$$1 = |m_0(t)|^2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left|\hat{\phi}(t+2k\pi)\right|^2 + |m_0(t+k\pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left|\hat{\phi}(t+\pi+2k\pi)\right|^2 =$$

$$= |m_0(t)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2.$$

cioè (2.9).
Ora caratterizziamo W_{-1}. Tale caratterizzazione sarà ottenuta in termini della trasformata di Fourier delle funzioni $g \in W_{-1}$; ricordiamo che $g \in W_{-1}$ se e solo se $g \in V_0$ ed è ortogonale a ogni funzione $f \in V_{-1}$.
Poichè $\hat{f}(t) \in \mathscr{F}(V_1)$ se e solo se $\hat{f}(t/2) \in \mathscr{F}V_0$, da (2.5) abbiamo che lo spazio $\mathscr{F}V_{-1}$ è costituito da tutte le funzioni della forma $\hat{\phi}(2t)m(2t)$, dove $m(t) \in L^2(\mathbb{T})$ ha periodo 2π (e $m(2t)$ ha periodo π).
Sia

$$S = \left\{m(2t)m_0(t) \text{ con } m \in L^2(\mathbb{T})\right\}. \tag{2.11}$$

Ovviamente $S \subseteq L^2(\mathbb{T})$, poichè $|m_0(t)| \leq 1$ per (2.9). Per (2.8) si ha, per ogni $f \in V_{-1}$,

$$\hat{f}(t) = \hat{\phi}(2t)m(2t) = \hat{\phi}(t)m(2t)m_0(t).$$

Se dunque $g \in V_0$ è tale che $\hat{g}(t) = \phi(t)q(t)$, per (2.6) $g \in W_{-1}$ se e solo se $q \in S^\perp$, ovvero se e solo se per ogni funzione $m \in L^2(\mathbb{T})$ si ha

$$0 = \int_{\mathbb{T}} m(2t)m_0(t)\bar{q}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} m(2t)m_0(t)\bar{q}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} m(2t)m_0(t+\pi)\bar{q}(t+\pi)dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} m(2t)\left(m_0(t)\bar{q}(t) + m_0(t+\pi)\bar{q}(t+\pi)\right)dt.$$

Poichè $m(2t)$ rappresenta la generica funzione di $L^2(0,\pi)$, si ha che $g \in W_{-1}$ se e solo se

$$m_0(t)\bar{q}(t) + m_0(t+\pi)\bar{q}(t+\pi) = 0, \text{ per quasi ogni } t. \tag{2.12}$$

Per (2.9) $m_0(t)$ e $m_0(t+\pi)$ non possono annullarsi contemporaneamente su un insieme di misura positiva. Per tale motivo $m_0(t) = 0$ implica $q(t+\pi) = 0$, mentre $m_0(t+\pi) = 0$ implica $q(t) = 0$. Poniamo

$$\lambda(t) = \begin{cases} q(t)/\overline{m}_0(t+\pi) & \text{se } m_0(t+\pi) \neq 0 \\ -q(t+\pi)/\overline{m}_0(t) & \text{se } m_0(t+\pi) = 0. \end{cases}$$

Da queste espressioni e dalla (2.12) si ottiene immediatamente

$$\lambda(t) = -\lambda(t+\pi) \tag{2.13}$$

e anche

$$q(t) = \lambda(t)\overline{m}_0(t+\pi). \tag{2.14}$$

Viceversa, una funzione q della forma (2.14), con λ soddisfacente (2.13), verifica la relazione (2.12).

Osserviamo ora che una funzione ha periodo π se e solo se essa è della forma $e^{it}\lambda(t)$, con λ soddisfacente (2.13). Poniamo quindi per ogni funzione di periodo π

$$q(t) = T(e^{i}\lambda)(t) = \lambda(t)\overline{m}_0(t+\pi)$$

si noti che

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(t)|^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\lambda(t)|^2\,|m_0(t+\pi)|^2\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |\lambda(t)|^2\,|m_0(t+)|^2\,dt = \tag{2.15}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |\lambda(t)|^2\,dt$$

e quindi, per le costruzioni precedenti, T è un'isometria lineare dello spazio $L^2([0,\pi), dt/2\pi)$ su $S^{\perp}$.

Riassumendo, $g \in W_{-1}$, se e solo se $\hat{g}$ è della forma

$$\hat{g}(t) = \lambda(t)\bar{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}(t),$$

dove λ soddisfa la (2.13) ed è il quadrato integrabile su $[0,\pi)$. Inoltre la norma di $e^{it}\lambda(t)$ in $L^2([0,\pi), dt/2\pi)$ è uguale alla norma di q in $L^2(\mathbb{T})$.
La famiglia di esponenziali $\{\sqrt{2}e^{-2int}\}$ con $n \in \mathbb{Z}$, costituisce una base ortonormale di $L^2([0,\pi), dt/2\pi)$.
Dato che una isometria lineare conserva il prodotto interno, le funzioni $q_n(t) = \sqrt{2}e^{-it}e^{-i2nt}m_0(t+\pi)$ formano una base ortonormale di $S^\perp$ e quindi, le funzioni la cui trasformata di Fourier vale $\sqrt{2}e^{-i2nt}e^{-it}\overline{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}(t)$ con $n \in \mathbb{Z}$, costituiscono una base ortonormale di W_{-1}.

A questo punto è facile trovare la ψ desiderata.
Si definisca $\psi \in W_0$ mediante la formula

$$\hat{\psi}(2t) = e^{-it}\overline{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}(t). \tag{2.16}$$

(ovviamente $\hat{\psi}(2t)$ è la trasformata di una funzione in W_{-1} se e solo se $\hat{\phi}(t)$ è la trasformata di una funzione in W_0). Si ha da (2.8), con i coefficienti c_k forniti da (2.7), $\overline{m}_0(t+\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\overline{c}_k e^{ikt}$. Passando alle antitrasformate di Fourier in (2.16) otteniamo quindi

$$2^{-1}\psi(x/2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\overline{c}_k\phi(x+k-1), \text{ ovvero}$$

$$\psi(x) = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\overline{c}_k\phi(2x+k-1). \tag{2.17}$$

La trasformata di $2^{-1/2}\psi(x/2-n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\overline{c}_k\phi(x+k-2n-1)$ vale esattamente

$$\sqrt{2}e^{-i2nt}e^{-it}\overline{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}$$

e quindi la famiglia $\{2^{-1/2}\psi(x/2-n)\}$ è una base ortonormale di W_{-1}.
Dato che tutti gli spazi W_j si ottengono da W_0 (0 da W_{-1}) per dilatazione, per ogni j fissato la famiglia $\{2^{j/2}\psi(2^jx-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, è una base ortonormale di W_j.
Infine, per la **Notazione1**, al variare di j e n in $\mathbb{Z}$ le funzioni $2^{j/2}\psi(2^jx-n)$ formano una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.

□

Definizione 2.4. Sia $\{V_j\}$ una MRA, ψ definita come in (2.17). La base ortonormale $\{2^{j/2}\psi(2^jx-k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ è chiamata **base di wavelets di $L^2(\mathbb{R})$ associata alla MRA**.
La funzione ψ è chiamata **wavelet** (o anche madre delle wavelets).

Per $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ vale quindi la formula

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k})\, \psi_{j,k},$$

dove $(\cdot, \cdot)$ denota il prodotto interno in $L^2(\mathbb{R})$ e $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$.

Esempio 2. *Ricaviamo la wavelets nell'esempio di MRA nella sezione precedente.*
Sia $\{V_j\}$ l'analisi multirisoluzione di Haar; assumiamo come funzione di scala $-\chi_{[0,1)}$. Da (2.17) possiamo ricavare la wavelet ψ; a tal fine calcoliamo prima i coefficienti c_k forniti da (2.7). Si ha

$$c_k = -\int_0^1 \chi_{[0,1)}(2x - k)dx, \text{ da cui}$$

$$c_0 = -1/2,\ c_1 = -1/2 \text{ e } c_k = 0 \text{ per gli altri } k.$$

Ne segue $\psi(x) = \chi_{[0,1)}(2x) - \chi_{[0,1)}(2x - 1)$ ovvero

$$\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1,1/2)}$$

La base di wavelets generata da ψ è dunque

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{j/2} & \text{per } x \in [n2^{-j}, n2^{-j} + 2^{-j-1}) \\ -2^{j/2} & \text{per } x \in [n2^{-j} + 2^{-j-1}, (n+1)2^{-j}) \\ 0 & \text{per gli altri valori di } x. \end{cases}$$

Calcoliamo le altre quantità che sono intervenute nella dimostrazione del Teorema 2.2.3.
Poichè $\phi(x) = -\chi_{[0,1)}(x)$, si ha $\hat{\phi}(t) = (it)^{-1}\,(e^{-it} - 1)$ da cui

$$m_0 = \frac{\hat{\phi}(2t)}{\hat{\phi}(t)} = \frac{e^{-it} + 11}{2}.$$

Capitolo 3

Wavelets a supporto compatto

Un esempio di base di wavelets reali a supporto compatto è costituito dal sistema ortonormale di Haar. Benchè queste wavelets siano ampiamente usate, specie in dimensione 2, esse non soddisfano i criteri di regolarità (almeno la continuità) desiderati. Il punto centrale di questo capitolo è esporre un metodo, dovuto a Ingrid Daubechies, per costruire wavelets del tipo desiderato.
Prima diamo delle nozioni necessarie.

3.1 Filtri

Abbiamo visto nel Teorema 2.2.3 che ogni funzione di scala ortonormale determina una funzione $m_0 \in L^2(\mathbb{T})$. Essa verifica $|m_0(t)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2 = 1$ per q.o. t (la (2.9)) e si ha anche che $\lim_{k\to+\infty} m_0(t/2^k) = 1$.

Definizione 3.1. Se $m_0 \in L^2(\mathbb{T})$ è continua vale

$$|m_0(t)|^2 + |m_0(t+\pi)|^2 = 1 \text{ per ogni } t \tag{3.1}$$

e

$$m_0(0) = 1 \tag{3.2}$$

La $m_0(t)$ è chiamata **filtro** associato a ϕ.

Definizione 3.2. Un insieme compatto $K \subset \mathbb{R}$ si dice **congruente a** $[-\pi, \pi]$ **modulo** 2π se esistono q intervalli chiusi $I_j \subseteq [-\pi, \pi]$, con interni a due a due disgiunti, e q interi $k_1 ... k_q$ tali che

$$[-\pi, \pi] = \cup_{j=1}^q I_j \text{ e } K = \cup_{j=1}^q (I_j + 2\pi k_j)$$

Definizione 3.3. Diciamo che m_0 soddisfa la **condizione di Cohen** se esiste un compatto k, congruente a $[-\pi, \pi]$ modulo 2π, tale che

1. il valore 0 è interno a K
2. $\inf_{t\in K} \inf_{k\geq 1} \left|m_0\left(t/2^k\right)\right| > 0$

Il compatto K è chiamato **compatto di Cohen** associato a m_0

Teorema 3.1.1. *Sia $m_0 \in C^1(\mathbb{T})$ una funzione soddisfacente la condizione (3.1) e (3.2). Sia*

$$\hat{\phi}(t) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(t/2^k\right). \tag{3.3}$$

Allora ϕ è una funzione di scala ortonormale se e solo se m_0 soddisfa la condizione di Cohen.

Questo teorema caratterizza tutti i possibili filtri di classe C^1 di una MRA, e quindi tutte le possibili funzioni di scala associate a tali filtri.
Se $m_0 \in C^1(\mathbb{T})$ soddisfa le (3.1), (3.2) e la condizione di Cohen diremo anche che m_0 genera una analisi multirisoluzione.

Lemma 3.1.2. *Sia m_0 un polinomio trigonometrico soddisfacente le (3.1),(3.2) e la condizione di Cohen. Allora la funzione ϕ la cui trasformata di Fourier è data da (3.3) è una funzione di scala ortonormale a supporto compatto. Se i c_k sono reali, allora ϕ è reale.*

Osservazione 4. Come si evince dal lemma, il supporto di ϕ è strettamente correlato al grado del polinomio m_0. Più basso è il grado, più piccolo sarà il supporto. I filtri migliori, dal punto di vista applicativo, sono quelli che generano funzioni ϕ con supporti piccoli.
Il problema, posto all'inizio del capitolo, si può riformulare nel modo seguente: determinare un polinomio trigonometrico m_0 in modo che valgano le (3.1), (3.2) e la condizione di Cohen. Se troviamo un tale m_0, il lemma ci garantisce che ϕ, la cui trasformata è data da (3.3), ha supporto compatto.

Terminiamo questo paragrafo richiamando un classico Teorema di Bézout che sarà utilizzato in seguito.

Teorema 3.1.3. *Siano p_1 e p_2 (sul campo complesso) di grado rispettivamente n_1 e n_2, senza radici comuni.*
Allora si possono determinare in maniera unica polinomi q_1 e q_2 di grado al più $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ rispettivamente, tali che si abbia

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1$$

3.2 La costruzione di Daubechies

Supponiamo che sia assegnato un polinomio trigonometrico $m_0(t) = \sum_k c_k e^{ikt}$ tale che tutti i coefficienti c_k siano reali e che soddisfi le due condizioni (3.1) e (3.2). Poichè π è una radice di m_0, tale polinomio deve essere necessariamente della forma

$$m_0(t) = \frac{(1+e^{it})^N}{2^N} L(t) \tag{3.4}$$

dove $N \geq 1$ e L è a sua volta un polinomio trigonometrico tale che $L(\pi) \neq 0$. Poniamo

$$M_0(t) = |m_0(t)|^2 \ \text{ e } \mathscr{L}(t) = |L(t)|^2 .$$

Allora si ha

$$M_0(t) + M_0(t+\pi) = 1, \qquad M_0(0) = 1, \qquad M(t) = \left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)^N \mathscr{L}(t). \tag{3.5}$$

Dato che $\mathscr{L}(t) = \mathscr{L}(-t)$ e $\mathscr{L}(t)$ è reale, $\mathscr{L}(t)$ è necessariamente un polinomio in $\cos t$. Con la sostituzione $\cos t \mapsto (1 - \cos t)/2$, vediamo che $\mathscr{L}(t)$ diviene un polinomio in $\sin^2 \frac{t}{2}$, sia esso $P\left(\sin^2 \frac{t}{2}\right)$. Quindi

$$M_0(t) = \left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)^N P\left(\sin^2 \frac{t}{2}\right). \tag{3.6}$$

Si tratta di determinare quali sono i P ammissibili per cui un polinomio M_0 della forma (3.6) soddisfa le prime due equazioni in (3.5). Una volta determinato M_0, ritroveremo m_0 con una "estrazione della radice quadrata". In termini di P, la prima delle (3.5) diventa, posto $y = \sin^2 t/2$,

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1. \tag{3.7}$$

Per il teorema di Bézout, con $p_1 = (1-y)^N$ e $p_2 = y^N$, si trovano in maniera unica polinomi q_1 e q_2, di grado al più $N-1$, tali che

$$(1-y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1. \tag{3.8}$$

Cambiando y in $1-y$ in (3.8), per l'unicità di q_1 e q_2, si $q_2(y) = q_1(1-y)$. Quindi
$P(y) = q_1(1-y)$ è una soluzione di (3.7). Non è l'unica soluzione, ma solo quella di grado minimo.

Prima di tutto determiniamo tale soluzione di grado minimo P. Poi ricercheremo le altre soluzioni.
Da (3.8) ricaviamo

$$q_1(y) = (1-y)^{-N}[1 - y^N q_2(1-y)]. \tag{3.9}$$

Si ha, scrivendo lo sviluppo di Mc Laurin di $(1-y)^{-N}$ arrestato all'ordine $N-1$,

$$(1-y)^{-N} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{-N}{k} (-y)^k + O\left(y^N\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + O\left(y^N\right).$$

Quindi, per (3.9), $q_1(y)$ deve avere una analoga espressione

$$q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + O\left(y^N\right). \tag{3.10}$$

Ora, il grado di q_1 non supera $N-1$, e quindi q_1 coincide col suo sviluppo di Mc Laurin arrestato all'ordine $N-1$. Ne segue che $O(y)$ in (3.10) è uguale a zero e quindi

$$P(y) = q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k. \tag{3.11}$$

Si noti che l'espressione di P in (3.11) è positiva per $y \in [0,1]$ e che $P(0) = 1$. Abbiamo quindi trovato l'unica (per il Teorema di Bézout) soluzione di grado $N-1$. Denoteremo tale soluzione con P_N.

Supponiamo ora che $P(y)$ abbia grado maggiore di $N-1$ e fornisca un'altra soluzione di (3.7). Sottraendo si deve avere

$$(1-y)^N[P(y) - P_N(y)] + y^N[P(1-y) - P_N(1-y)] = 0. \tag{3.12}$$

Dunque $P(y) - P_N(y)$ è divisibile per y^N e quindi esiste un polinomio $\tilde{P}(y)$ tale che

$$P(y) - P_N(y) = y^N \tilde{P}(y).$$

Infine, esprimendo in (3.12) $P(y) - P_N(y)$ come $y^N \tilde{P}(y)$, si ricava che $\tilde{P}$ è dispari rispetto al punto 1/2, cioè

$$\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1-y) = 0.$$

Si noti anche che $P(0) = P_N(0) = 1$.
Riassumiamo ciò che abbiamo dimostrato nel seguente Lemma

Lemma 3.2.1. *Sia m_0 un polinomio trigonometrico della forma (3.4) a coefficienti reali.*
Allora m_0 soddisfa le (3.5) se e solo se $\mathscr{L}(t) = |L(t)|^2$ si può scrivere come

$$\mathscr{L}(t) = P(\sin^2 t/2),$$

dove

$$P(y) = P_N(y) + y^N R\left(\frac{1}{2} - y\right) \qquad P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \qquad (3.13)$$

e R è un qualsiasi polinomio dispari in modo che $P(y) \geq 0$ per $y \in [0,1]$.

Teorema 3.2.2 (Lemma di Riesz)**.** *Sia $A(t)$ un polinomio trigonometrico non negativo di grado M della forma*

$$A(t) = \sum_{m=0}^{M} a_m \cos mt.$$

Allora esiste un polinomio trigonometrico $B(t)$ a coefficienti reali della forma

$$B(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{ikt} \quad \text{dove } b_k \text{ è reale per ogni } k,$$

tale che $|B(t)|^2 = A(t)$.

Questo teorema ci permette, assegnato $\mathscr{L}(t) \geq 0$ della forma (3.13), di ricavare $L(t)$;
dalla dimostrazione (che sarà oggetto del prossimo paragrafo), $L(t)$ è ottenuto mediante fattorizzazione spettrale di $\mathscr{L}(t)$. Vedremo inoltre che, assegnato $\mathscr{L}(t)$, il polinomio $L(t)$ non è unico.

Si ha infine il risulato fondamentale di I. Daubechies sulle wavelets a supporto compatto. Esso è conseguenza dei Teoremi 3.1.1 e 3.2.2 e del Lemma 3.2.1.

Teorema 3.2.3. *Un polinomio trigonometrico a coefficienti reali m_0 soddisfa le (3.1) e (3.2) $\Longleftrightarrow$ esso ha la forma*

$$m_0(t) = \left[\frac{(1+e^{it})}{2}\right]^N L(t), \quad N \geq 1$$

Se ciò vale, posto

$$\hat{\phi}(t) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0(t/2^k)$$

$$\hat{\psi}(2t) = e^{-it}\overline{m}_0(t+\pi)\hat{\phi}(t),$$

ϕ e ψ hanno supporto compatto. La funzione ϕ è una funzione di scala ortonormale e ψ è la relativva madre delle wavelets $\Longleftrightarrow$ m_0 verifica la condizione di Cohen.

Osservazione 5. Se $|L(t)|^2 > 0$, allora la condizione di Cohen vale con $K = [-\pi, \pi]$. Infatti $(1 + e^{i2^{-k}t}) \neq 0$ per $k \geq 1$ e $t \in [-\pi, \pi]$.
Un esempio notevole è dato da $L_N(t)$ dove

$$|L_N(t)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \sin^{2k} \frac{t}{2}. \tag{3.14}$$

Le wavelets che corrispondono ai filtri aventi supporto minimale sono definite **wavelets di Daubechies**.

3.3 Dimostrazione del Lemma di Riesz

Poniamo

$$A(t) = p(\cos t) = p\left(\left(e^{it} + e^{-it}\right)/2\right),$$

dove p è un polinomio algebrico in $\cos t$ di grado M a coefficienti reali. Esso ammette quindi una fattorizzazione

$$p\left(\left(e^{it} + e^{-it}\right)/2\right) = a \prod_{j=0}^{M} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - c_j\right), \tag{3.15}$$

dove c_j sono le radici. Raccogliendo e^{-iMt} da A otteniamo

$$A(t) = e^{-iMt} e^{iMt} p\left(\left(e^{it} + e^{-it}\right)/2\right) = e^{-iMt} P\left(e^{it}\right)$$

dove P è un polinomio trigonometrico di grado $2M$. Se $|z| = 1$ si deve avere da (3.15)

$$P(z) = az^M \prod_{j=0}^{M} \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - c_j\right) =$$

$$= a \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{1}{2} - c_j z + \frac{z^2}{2}\right),$$

e quest'ultima espressione di $P(z)$ deve valere per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Supponiamo c_j reale.
Allora il fattore $\left(\frac{1}{2} - c_j z + \frac{z^2}{2}\right)$ si annulla in

$$c_j \pm \sqrt{c_j^2 - 1}$$

Se $|c_j| \geq 1$ si hanno due zeri reali (coincidenti se $|c_j| = 1$) della forma r_j e r_j^{-1}.
Se invece $|c_j| < 1$, i due zeri sono complessi coniugati di modulo 1. Siano essi $e^{\pm i\alpha_j}$. Poichè siamo nel caso $|c_j| < 1$, esiste t_j tale che $\cos t_j = c_j$. Quindi $p(\cos t_j) = A(t_j) = 0$. Dato che $A(t) \geq 0$ questi c_j devono apparire con molteplicità pari.

Supponiamo ora c_j non reale.
Allora consideriamo assieme le due radici c_j e $\overline{c}_j$. Esse danno luogo al polinomio

$$\left(\frac{1}{2} - c_j z + \frac{z^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \overline{c}_j z + \frac{z^2}{2}\right)$$

che ha quattro zeri

$$c_j \pm \sqrt{c_j^2 - 1} \quad \text{e} \quad \overline{c}_j \pm \sqrt{\overline{c}_j^2 - 1}$$

Se $|c_j| = 1$ allora i quattro zeri si riducono a una coppia complessa coniugata di modulo 1 e ciascun elemento della coppia ha molteplicità 2.
Se invece $|c_j| \neq 1$, allora i quattro zeri sono distinti e formano un quartetto

$$z_j, z_j^{-1}, \overline{z}_j, \overline{z}_j^{-1}.$$

Da questa discussione possiamo quindi scrivere il polinomio $P(z)$ nella forma

$$P(z) = 2^{-M} a \prod_{j=1}^{J} (z - z_j)\left(z - z_j^{-1}\right)(z - \overline{z}_j)\left(z - \overline{z}_j^{-1}\right) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{K} \left(z - e^{i\alpha_j}\right)^2 \left(z - e^{-i\alpha_j}\right)^2 \prod_{j=1}^{L} (z - r_j)\left(z - r_j^{-1}\right),$$

dove abbiamo raggruppato i differenti tipi di zero.
Posto $z = e^{it}$, si ha per ogni $z_0 \neq 0$,

$$\left|\left(e^{it} - z_0\right)\left(e^{it} - \overline{z}_0^{-1}\right)\right| = |z_0|^{-1} \left|e^{it} - z_0\right|^2.$$

Poichè $A(t) = |A(t)| = |P(e^{it})|$, otteniamo

$$A(t) = 2^{-M} |a| \prod_{j=1}^{J} |z_j|^{-2} \prod_{j=1}^{L} |r_j|^{-1} \prod_{j=1}^{J} \left|\left(e^{it} - z_j\right)\left(e^{it} - z_j^{-1}\right)\right|^2 \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{K} \left|\left(e^{it} - e^{i\alpha_j}\right)\left(e^{it} - e^{-i\alpha_j}\right)\right|^2 \prod_{j=1}^{L} \left|e^{it} - r_j\right|^2 = |B(t)|^2$$

dove

$$B(t) = 2^{-M/2} |a|^{1/2} \prod_{j=1}^{J} |z_j|^{-1} \prod_{j=1}^{K} |r_j|^{-1/2} \prod_{j=1}^{K} \left(e^{2it} - 2e^{it} \cos \alpha_j + 1\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{J} \left(e^{2it} - 2e^{it} \Re z_j + |z_j|^2\right) \prod_{j=1}^{L} \left(e^{it} - r_j\right)$$

che è un polinomio trigonometrico a coefficienti reali.

Osservazione 6. La dimostrazione del Lemma di Riesz è costruttiva, possiamo cioè ricavare concretamente B da A.
Ad esempio, se $|m_0(t)|^2 = \cos^4 t/2(1 + 2\sin^2 t/2)$ (che corrisponde al filtro di Daubechies con $N = 2$ in (3.14)), otteniamo la radice

$$m_0(t) = \left(\frac{1 + e^{it}}{2}\right)^2 \frac{\left(1 + \sqrt{3}\right) e^{it} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

Inoltre notiamo, come accennavamo nel paragrafo precedente, che il polinomio B non è unico. Ad esempio, se ci sono due radici reali di modulo maggiore di 1, possiamo tenere in B il fattore $(e^{it} - r_j)$ (come abbiamo fatto nella dimostrazione) oppure il fattore $\left(e^{it} - r_j^{-1}\right)$. Analoga osservazione per le radici z_j : in B possiamo tenere la coppia $z_j, \overline{z}_j$ oppure la coppia $z_j^{-1}, \overline{z}_j^{-1}$.

Bibliografia

[1] Soardi P.M., *Appunti sulle ondine* Pitagora, 1998.

[2] Picardello M.A., *Analisi Armonica:aspetti classici e numerici* Università di Roma,"Tor Vergata", 2.2.2017.

[3] Angiolini S., *Trasformata di Fourier e trasformata wavelet* Tesi di laurea in Analisi Matematica, III sessione a.a 2014/2015, Università di Bologna.

[4] Yves Meyer e come nacquero le wavelets.
URL:http://maddmaths.simai.eu/news-2/yves-meyer/

Ringraziamenti

Un grande ringraziamento va a mia mamma Linda e mio fratello Tommaso che mi hanno supportato in questo mio percorso, mi hanno sempre motivato, e continuano a farlo, ad andare avanti nonostante i vari ostacoli incontrati e a dare il meglio di me.

Ringrazio anche i miei nonni, Fortunato e Nunzia, le miei zie, Francesca e Ivana, che mi sono sempre stati vicini e Ludovica che oltre a essere cugina, è un'amica speciale.
Un sincero grazie va anche a tutti i miei colleghi di studi e gli amici per l'appoggio e l'affetto mostrato.

Ringrazio la professoressa Annamaria Montanari per la sua competenza, disponibilità e per l'aiuto ricevuto durante la realizzazione di questa tesi.