Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Costruzione di Gruppi di Lie con tecniche di Equazioni Differenziali Ordinarie

Tesi di Laurea in Analisi Geometrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Stefania Perugini

Sessione Unica
Anno Accademico 2016 - 2017

Qualche volta si deve avere anche il coraggio di gettare il cuore oltre l'ostacolo.

Ermanno Lanconelli

Indice

Introduzione

Nel presente lavoro di tesi ci proponiamo di caratterizzare le algebre di Lie di campi vettoriali C^∞ su $\mathbb{R}^N$ che coincidono con le algebre di Lie di gruppi di Lie definiti su $\mathbb{R}^N$ (con l'usuale struttura differenziabile).

Per prima cosa si andranno ad individuare alcune condizioni necessarie affinché, data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^N$, sia possibile trovare un gruppo di Lie $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$ tale che $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$.

Più precisamente dedurremo che:

1. ogni campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ deve essere globale;
2. $\mathfrak{g}$ deve soddisfare la condizione del rango di Hörmander;
3. $\mathfrak{g}$ deve essere N-dimensionale (intesa come sottospazio lineare dello spazio dei campi vettoriali C^∞ su $\mathbb{R}^N$).

Dopo aver osservato l'indipendenza delle precedenti ipotesi, lo scopo principale della tesi consisterà nel mostrare che queste condizioni necessarie sono in realtà anche sufficienti e procederemo come segue:

- la definizione della mappa esponenziale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per ODE permetteranno di munire $\mathbb{R}^N$ di una struttura di gruppo di Lie locale;
- utilizzando tecniche di ODE estenderemo al globale la struttura di gruppo di Lie precedentemente costruita.

In particolare il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin renderà possibile la costruzione di un'operazione locale $m = m(x, y)$ la cui associatività locale seguirà dall'esistenza dell'operazione di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin $\diamond$ (e non dall'associatività locale di questa).

Vedremo inoltre come l'associatività locale di m permetterà di ottenere una notevole identità, simile a quella verificata in Teoria dei Gruppi di Lie dalla traslazione sinistra τ_x, avente quindi una profonda connessione con il Primo Teorema di Lie e che, grazie ad un argomento di prolungamento per ODE, porterà ad ottenere un gruppo globale a partire dal gruppo locale.

Una versione di questo problema, sotto l'ipotesi di regolarità analitica, è stata affrontata in un precedente lavoro di tesi[1] in cui la Unique Continuation ha reso possibile l'estensione di tutte le proprietà di gruppo locali a proprietà globali.

La novità della tesi sta quindi nell'estendere i risultati al caso C^∞. A tal fine l'unicità della soluzione di un opportuno Problema di Cauchy avrà un ruolo fondamentale come strumento globalizzante, al posto della Unique Continuation.

[1]Tesi di Laurea Magistrale in Matematica: Applicazione ai Gruppi di Lie della Prolungabilità per Equazioni Differenziali Ordinarie, Sara Chiappelli, 2015-2016

Capitolo 1

Ipotesi necessarie alla caratterizzazione

Vogliamo dare una caratterizzazione per le algebre di Lie di campi vettoriali C^∞ su $\mathbb{R}^N$ coincidenti con le algebre di Lie di gruppi di Lie definiti su $\mathbb{R}^N$, con l'usuale struttura differenziabile. A tal fine premettiamo alcune notazioni e definizioni:

- $\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ indicherà lo spazio vettoriale reale dei campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^N$ munito della struttura di algebra di Lie associata al commutatore $[X,Y] := X \circ Y - Y \circ X$;
- $t \mapsto \gamma(t,X,x) \equiv \Psi_t^X(x) \equiv \exp(tX)(x)$ sarà la curva integrale massimale del campo vettoriale X uscente da x;
- diremo che un campo vettoriale è globale (o completo) se tutte le sue curve integrali massimali sono definite su $\mathbb{R}$;
- $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ denoterà l'algebra di Lie del gruppo di Lie di $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$, ovvero l'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti a sinistra associati a $\mathbb{G}$.

  Ricordiamo che se X è un campo vettoriale C^∞ su $\mathbb{G}$, la condizione di invarianza a sinistra è espressa dall'identità

  $$X\big(\tau_x(y)\big) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y)X(y), \tag{1.1}$$

  dove τ_x rappresenta la traslazione a sinistra di ampiezza x su $\mathbb{G}$ e $\mathcal{J}_{\tau_x}$ la sua matrice Jacobiana;
- all'occorrenza useremo anche la notazione $\frac{\partial \cdot}{\partial x}(x)$ per riferirci alla matrice Jacobiana $\mathcal{J}_\cdot(x)$.

1.1 Conseguenze dell'invarianza a sinistra

L'obiettivo principale di questa sezione sarà l'individuare delle condizioni necessarie al seguente problema:

(P) Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$*, trovare (se esiste) un gruppo di Lie* $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$ *(con l'usuale struttura differenziabile) tale che* $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$.

Sottolineiamo che l'uguaglianza voluta $\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$ non è da intendersi in termini di isomorfismo ma come un'uguaglianza tra due insiemi di operatori differenziali del primo ordine lineari.

Osservazione 1.1.1. La completezza di un campo vettoriale X appartenente all'algebra di Lie di un gruppo di Lie $\mathbb{G}$ è una conseguenza della sua invarianza a sinistra, pertanto ogni elemento di $\mathfrak{g}$ deve essere un campo vettoriale globale.

Infatti, sia $t \mapsto \Psi_t^X(e) \equiv \gamma(t, X, e)$ la curva integrale massimale di $X \in \mathrm{Lie}\,(\mathbb{G})$ uscente dall'elemento neutro e di $\mathbb{G}$ e sia $\mathcal{D}(X, e)$ il suo dominio massimale. Da (1.1) è facile riconoscere che

$$\tau_\alpha\left(\Psi_t^X(x)\right) = \Psi_t^X(\alpha * x) \qquad \forall\, x, \alpha \in \mathbb{G}, \quad \forall\, t \in \mathcal{D}(X, x) = \mathcal{D}(X, \alpha * x). \tag{1.2}$$

Di conseguenza tutti i domini massimali $\mathcal{D}(X, x)$ sono uguali al variare di $x \in \mathbb{G}$, in particolare $\mathcal{D}(X, x) = \mathcal{D}(X, e)$ per ogni $x \in \mathbb{G}$.

Preso quindi $\epsilon > 0$ tale che $[-\epsilon, \epsilon] \subseteq \mathcal{D}(X, e)$ si ha $[-\epsilon, \epsilon] \subseteq \mathcal{D}(X, \Psi_{\pm\epsilon}^X(e))$. Pertanto è possibile attaccare le curve integrali

$$\begin{aligned} [-\epsilon, 0] &\ni t \mapsto \gamma(t, X, \Psi_{-\epsilon}^X(e)), \\ [-\epsilon, \epsilon] &\ni t \mapsto \gamma(t, X, e), \\ [0, \epsilon] &\ni t \mapsto \gamma(t, X, \Psi_{\epsilon}^X(e)), \end{aligned}$$

ottenendo una curva integrale di X uscente da e definita su $[-2\epsilon, 2\epsilon]$, in altri termini $[-2\epsilon, 2\epsilon] \subseteq \mathcal{D}(X, e)$. Iterando questo ragionamento si prova che $\mathcal{D}(X, e) = \mathbb{R}$. $\sharp$

Osservazione 1.1.2. Osserviamo che a priori non vi sono relazioni tra l'indipendenza lineare dei campi vettoriali $X_1, ..., X_m$ come operatori differenziali lineari e l'indipendenza lineare delle derivazioni in x date da $X_1(x), ..., X_m(x)$ come elementi dello spazio tangente in x ad una varietà. Basti considerare i campi vettoriali definiti da

$$X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 := x_1 \partial_{x_2}.$$

E' chiaro che X_1 e X_2 sono linearmente indipendenti in $\mathfrak{X}\,(\mathbb{R}^2)$ in quanto le uniche costanti c_1, c_2 che rendono

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \partial_{x_1} + c_2 x_1 \partial_{x2}$$

il campo vettoriale nullo sono $c_1 = c_2 = 0$. D'altra parte, identificando $T_0\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^2$ e pensando $X_1(0)$, $X_2(0)$ come vettori colonna dei coefficienti in 0, si ha che $X_1(0) = e_1$ e $X_2(0) = 0$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^2$.

D'altronde, nel caso in cui valga la proprietà di invarianza a sinistra, gli isomorfismi tra $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ e $T_e\mathbb{G}$ (dove e è l'elemento neutro di $\mathbb{G}$) e tra $T_e\mathbb{G}$ e $T_x\mathbb{G}$ per ogni $x \in \mathbb{G}$, fanno si che la dimensione di $\mathrm{Lie}\,\{X_1(x), ..., X_m(x)\}$ come sottospazio di $T_x\mathbb{G}$ sia indipendente dalla scelta di $x \in \mathbb{G}$ e sia uguale alla dimensione di $\mathrm{span}\,\{X_1, ..., X_m\}$ come sottospazio di $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$. $\sharp$

Dalle considerazioni precedentemente fatte possiamo dedurre il seguente risultato:

Proposizione 1.1.3. *Affinché un'algebra di Lie* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *possa essere un candidato per il problema* (P)*, deve soddisfare le seguenti condizioni necessarie:*

(G) *ogni* $X \in \mathfrak{g}$ *deve essere un campo vettoriale globale;*

(H) $\mathfrak{g}$ *deve soddisfare la condizione del rango di Hörmander, cioè*

$$\dim\{X(x) \in \mathbb{R}^N : X \in \mathfrak{g}\} = N \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N;$$

(ND) $\dim \mathfrak{g} = N$ *(come sottospazio lineare di* $\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$*).*

Per distinguere ulteriormente le dimensioni in (H) e (ND) si noti che per ogni sottospazio vettoriale $V \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ vale

$$\dim V \geq \dim\{X(x) \in \mathbb{R}^N : X \in V\},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Infatti la mappa

$$\Lambda : V \to \mathbb{R}^N, \qquad X \mapsto \Lambda(x) := X(x)$$

è lineare e $\mathrm{Im}(\Lambda) = \{X(x) \in \mathbb{R}^N : X \in V\}$, pertanto

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(\Lambda) + \dim \mathrm{Im}(\Lambda) \geq \dim \mathrm{Im}(\Lambda).$$

Proposizione 1.1.4. *Le condizioni (G), (H) e (ND) sono tra loro indipendenti.*

Mostriamone l'indipendenza fornendo alcuni esempi:

- $(H) + (ND) \nRightarrow (G)$:
  Se $X = (1 + x_1^2)\partial_{x_1}$ su $\mathbb{R}$ si ha che $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{X\}$ soddisfa (H) e (ND) ma viola (G). Infatti la curva integrale di X uscente da 0 è la funzione $t \mapsto \tan(t)$ che non è definita su tutto $\mathbb{R}$.

- $(G) + (ND) \nRightarrow (H)$:
  Se $X = x_1\partial_{x_1}$ su $\mathbb{R}$ si ha che $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{X\}$ verifica (G) e (ND) ma non (H), in particolare la condizione di Hörmander non è soddisfatta per $x_1 = 0$.

- $(G) + (H) \nRightarrow (ND)$:
  Se $X_1 = x_1\partial_{x_1}$ e $X_2 = \partial_{x_1}$ su $\mathbb{R}$ si ha che $\mathfrak{g} :=\mathrm{Lie}\{X_1, X_2\}$ soddisfa (G) e (H) ma viola (ND). Infatti, poiché $[X_1, X_2] = -X_2$, risulta $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{X_1, X_2\}$, pertanto $\dim \mathfrak{g} = 2 \neq 1$.

  Inoltre $\mathfrak{g}$ può verificare (G) e (H) senza essere finito-dimensionale, come ad esempio $\mathfrak{g} = \{\partial_{x_1}, \frac{1}{1+x_1^2}\partial_{x_1}\}$.

Nel capitolo successivo ci dedicheremo alla costruzione di strumenti che permetteranno di rispondere esaustivamente al problema (P). Più precisamente otterremo dei risultati fondamentali alla dimostrazione del seguente

Teorema 1.1.5. *Sia* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *un'algebra di Lie verificante le condizioni (G),(H) e (ND). Allora esiste un gruppo di Lie* $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$ *(con l'usuale struttura differenziabile) con elemento neutro 0, tale che* $\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$.

Capitolo 2

La sufficienza delle condizioni necessarie

Abbiamo visto che le ipotesi tra loro indipendenti (G), (H) e (ND) sono condizioni necessarie affinché sia possibile caratterizzare le algebre di Lie di campi vettoriali C^∞ su $\mathbb{R}^N$ coincidenti con le algebre di Lie di gruppi di Lie definiti su $\mathbb{R}^N$, con l'usuale struttura differenziabile. Ci proponiamo ora di mostrarne la sufficienza e quindi di dimostrare il Teor.1.1.5.

Il primo ingrediente fondamentale sarà la definizione della mappa esponenziale $\mathrm{Exp}_\mathfrak{g}$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ che, sotto l'ipotesi (G) su $\mathfrak{g}$, ha una forte connessione con la definizione della Mappa Esponenziale su un gruppo di Lie.

Sfrutteremo le condizioni (ND) e (H) per ottenere un'ulteriore struttura topologico-differenziabile sullo spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ con il fine di studiare la regolarità di $\mathrm{Exp}_\mathfrak{g}$, che si rivelerà anche un diffeomorfismo in un intorno di $0 \in \mathfrak{g}$.

Useremo $\mathrm{Exp}_\mathfrak{g}$ per costruire una mappa locale $m = m(x, y)$ la quale, grazie al Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per ODE, permetterà di dotare $\mathbb{R}^N$ di una struttura di gruppo di Lie locale con elemento neutro 0. In seguito abbrevieremo i nomi Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin con l'acronimo CBHD.

L'associatività locale di m, ottenuta dall'esistenza dell'operazione di CBHD $\diamond$, si rivelerà a sua volta profondamente connessa alla proprietà di invarianza a sinistra.

A questo punto si tratterà di globalizzare la struttura di gruppo di Lie locale mostrando che m ammette un'estensione C^∞ su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. A tale scopo proveremo che, per ogni fissati $x, y \in \mathbb{R}^N$, la curva $\gamma_{x,y}(t) := m(x, ty)$ è ben definita in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$ e che soddisfa un Problema di tipo Cauchy avente una (unica) soluzione massimale $\varphi_{x,y}$ definita su tutto $\mathbb{R}$. Sarà quindi naturale estendere m come segue: $x * y := m(x, y) := \varphi_{x,y}(1)$.

2.1 Una struttura topologico-differenziabile su $\mathfrak{g}$

Innanzitutto abbiamo bisogno di una struttura aggiuntiva sull'algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ che permetta di parlare di insiemi aperti e funzioni lisce. A tale scopo osserviamo che l'ipotesi (ND) rende possibile munire lo spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ di una struttura topologico-differenziabile identificandolo con $\mathbb{R}^N$ mediante la scelta di una base.

Lemma 2.1.1. *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ un'algebra di Lie verificante le ipotesi (ND) e (H). Allora esiste una base $J := \{J_1, ..., J_N\}$ di $\mathfrak{g}$ (come sottospazio vettoriale di $\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$) tale che*

- *$J_1(x), ..., J_N(x)$ sono linearmente indipendenti per ogni $x \in \mathbb{R}^N$;*
- *$J_i(0) = e_i \quad$ per ogni $i \in \{1, ..., N\}$.*

Dimostrazione. Essendo $\mathfrak{g}$ N-dimensionale è possibile trovare $Z_1, ..., Z_N \in \mathfrak{g}$ tali che $Z := \{Z_1, ..., Z_N\}$ sia una base di $\mathfrak{g}$.

D'altra parte, fissato x, la condizione del rango di Hörmander su $\mathfrak{g}$ assicura l'esistenza di $W_1, ..., W_N$ in $\mathfrak{g}$ tali che $W_1(x), ..., W_N(x)$ siano linearmente indipendenti.

Dall'inclusione

$$Span\{W_1(x), ..., W_N(x)\} \subseteq Span\{Z_1(x), ..., Z_N(x)\}$$

segue che anche $Z_1(x), ..., Z_N(x)$ devono essere linearmente indipendenti per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Infine, ponendo $J_j := \sum_{i=1}^N a_{i,j} Z_i$ con $a_{i,j} = (Z(0))^{-1}$ per $j = 1, ..., N$, si ha che $J := \{J_1, ..., J_N\}$ è la base cercata. □

Osservazione 2.1.2. Assumendo come ipotesi la condizione (ND) e la tesi del Lem.2.1.1, è possibile ottenere la condizione di Hörmander su $\mathfrak{g}$. ♯

Osservazione 2.1.3. Nelle ipotesi del Lem.2.1.1, supponiamo che esista un gruppo di Lie $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$ con elemento neutro 0 tale che $\text{Lie}\,(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$, allora la base J è unica. Infatti, ogni campo vettoriale invariante a sinistra su $\mathbb{G}$ è completamente determinato dal suo valore in 0. ♯

Nel seguito denoteremo sempre con $J := \{J_1, ..., J_N\}$ la base di $\mathfrak{g}$ come nel Lem.2.1.1. Quando sarà necessario fissare una norma su $\mathfrak{g}$ considereremo, per semplicità, la norma Euclidea ottenuta dall'identificazione di $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^N$ mediante la base J, cioè

$$\| \sum_{k=1}^N \xi_k J_k \|_{\mathfrak{g}} := \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_N^2}.$$

Useremo anche le seguenti notazioni:

- $\mathfrak{B}$ sarà usato come prefisso per le palle aperte rispetto $\| \cdot \|_{\mathfrak{g}}$;
- B sarà usato come prefisso per le palle Euclidee in $\mathbb{R}^N$.

2.2 Mappa esponenziale di $\mathfrak{g}$

Iniziamo ora a costruire una struttura di gruppo di Lie locale su $\mathbb{R}^N$ rispetto alla quale ogni campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ risulti essere (localmente) invariante a sinistra.

Osserviamo che se $(\mathbb{G}, *)$ è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ con elemento neutro e ed algebra di Lie $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$, posta

$$\mathrm{Exp} : \mathrm{Lie}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}, \qquad \mathrm{Exp}(X) := \gamma(1, X, e) \equiv \Psi_1^X(e)$$

la Mappa Esponenziale di $\mathbb{G}$, si ha, per ogni $X \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ e $x \in \mathbb{G}$,

$$\gamma(1, X, x) = \Psi_1^X(x * e) \overset{(1.2)}{=} \tau_x\big(\Psi_1^X(e)\big) = x * \mathrm{Exp}(X).$$

Supponendo che Exp sia globalmente invertibile e denotando con $\mathrm{Log} : \mathbb{G} \to \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ la mappa inversa, una diretta applicazione della formula di cui sopra al campo vettoriale $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) \ni Y = \mathrm{Log}(y)$ dà

$$x * y = \gamma(1, \mathrm{Log}(y), x), \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{G}. \tag{2.1}$$

L'identità (2.1) mostra che, in teoria di Gruppi di Lie, la composizione di gruppo $(x, y) \mapsto x * y$ è in qualche modo anche un oggetto ODE. Questo fatto evocativo suggerisce che può essere possibile collegare una struttura di gruppo di Lie ad idonee classi di algebre di Lie di campi vettoriali lisci sfruttando la rappresentazione di $*$ in termini della Mappa Esponenziale di $\mathbb{G}$.

Al fine di concretizzare quanto auspicato andiamo a definire la mappa esponenziale di $\mathfrak{g}$, protagonista della sezione corrente.

Definizione 2.1. *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ un'algebra di Lie verificante la condizione (G). Definiamo la mappa esponenziale di $\mathfrak{g}$ ponendo*

$$\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \mapsto \mathbb{R}^N, \qquad \mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}(X) := \gamma(1, X, 0) \equiv \exp\left(X\right)(0).$$

Osserviamo che l'ipotesi (G) risulta fondamentale alla definizione, infatti, se un campo vettoriale $X \in \mathfrak{g}$ non fosse globale, la curva integrale massimale di X uscente da 0 potrebbe non essere definita per $t = 1$.

Osservazione 2.2.1. Sia $\mathfrak{g}$ N-dimensionale e come nella Def.2.1 e supponiamo che esista un gruppo di Lie $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$ con elemento neutro 0 tale che $\mathrm{Lie}\left(\mathbb{G}\right) = \mathfrak{g}$. Allora la mappa esponenziale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ precedentemente definita coincide con la Mappa Esponenziale sul gruppo di Lie $\mathbb{G}$. Pertanto, con abuso di notazione, nel seguito scriveremo Exp invece che $\mathrm{Exp}_{\mathfrak{g}}$. $\sharp$

Supponiamo ora che $\mathfrak{g}$ verifichi, oltre alla condizione (G), le condizioni (ND) e (H). Avendo a disposizione una struttura topologico-differenziabile su $\mathfrak{g}$ andiamo a studiare alcune proprietà di Exp:

- poiché $\mathfrak{g}$ è costituita da campi vettoriali C^∞, per il Teor.*A*.5.5 in appendice, Exp risulta essere di classe C^∞ su $\mathfrak{g}$;
- ponendo

$$\mathrm{E}\left(\xi\right) := \mathrm{Exp}\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k J_k\right), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N$$

  e considerandone lo sviluppo di Maclaurin

$$\mathrm{E}\,(\xi) = \xi + \mathcal{O}\big(\|\xi\|^2\big) \quad \text{per} \quad \xi \to 0,$$

possiamo facilmente constatare che Exp ha differenziale non singolare in 0, in quanto $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}(0) = I_N$ dove I_N è la matrice identità $N \times N$. Di conseguenza, per il Teorema della Funzione Inversa, Exp è un diffeomorfismo in un opportuno intorno aperto connesso di $0 \in \mathfrak{g}$.

Riassumiamo i risultati ottenuti:

Proposizione 2.2.2. *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ un'algebra di Lie verificante le ipotesi (G), (H) e (ND). Allora* Exp *è una mappa C^∞ su $\mathfrak{g}$ ed esiste un intorno aperto connesso $\mathfrak{U}$ di $0 \in \mathfrak{g}$ tale che* $\mathrm{Exp}_{|\mathfrak{U}}$ *è un diffeomorfismo sulla sua immagine.*

Definizione 2.2. *Nelle notazioni precedenti, definiamo la mappa logaritmica di $\mathfrak{g}$ (relativamente ad $\mathfrak{U}$)*

$$\mathrm{Log} : \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{U}$$

come l'inversa di $\mathrm{Exp}_{|\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \to \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U})$.

Ricordando la formula (2.1) e tenendo presente l'Oss.2.2.1, sarà naturale definire l'operazione locale $m = m(x, y)$ come il punto di arrivo al tempo 1 della curva integrale di $\mathrm{Log}(y)$ uscente da x.

Di questo ci occuperemo nella sezione successiva.

2.3 Costruzione del gruppo di Lie locale

Richiamiamo brevemente la mappa esponenziale e la mappa logaritmica di $\mathfrak{g}$ relativamente all'aperto $\mathfrak{U}$ della Prop.2.2.2:

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{U} \to \mathrm{Exp}\big(\mathfrak{U}\big), \qquad \mathrm{Log} : \mathrm{Exp}\big(\mathfrak{U}\big) \to \mathfrak{U}.$$

Accostando a queste il Teor.*B*.3.7 di CBHD per ODE, siamo ora in grado di dotare $\mathbb{R}^N$ di una struttura di gruppo di Lie locale con elemento neutro 0.

Definizione 2.3. *Definiamo le seguenti mappe locali*

$$m : \mathbb{R}^N \times \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U}) \to \mathbb{R}^N \qquad m(x, y) := \exp\big(\mathrm{Log}(y)\big)(x),$$

$$i : \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U}) \to \mathbb{R}^N \qquad i(x) := \mathrm{Exp}\big(-\mathrm{Log}(x)\big).$$

Osserviamo che la definizione di m è ben posta grazie all'ipotesi (G) su $\mathfrak{g}$. E' chiaro inoltre che la regolarità dei campi vettoriali di $\mathfrak{g}$ rende m e i di classe C^∞ nei loro rispettivi domini (sempre per il Teor.*A*.5.5).

Osservazione 2.3.1. Supponiamo che esista un gruppo di Lie $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$ con elemento neutro 0 tale che $\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$, si ha:

$$m(x, y) = x * y \qquad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U})\,,$$

$$i(x) = x^{-1} \qquad \textit{per ogni} \quad x \in \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U})\,.$$

Infatti, sotto le ipotesi fatte, la mappa esponenziale di $\mathfrak{g}$ coincide con la Mappa Esponenziale su $\mathbb{G}$. Pertanto, presi $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \operatorname{Exp}(\mathfrak{U})$ e $Y = \operatorname{Log}(y) \in \mathfrak{g}$, possiamo scrivere:

$$m(x,y) = \exp\big(\operatorname{Log}(y)\big)(x) = \gamma(1, \operatorname{Log}(y), x) \stackrel{(2.1)}{=} x * y.$$

Analogamente, presi $x \in \operatorname{Exp}(\mathfrak{U})$ e $X = \operatorname{Log}(x) \in \mathfrak{g}$, dalle definizioni di i ed Exp segue:

$$x * i(x) = x * \operatorname{Exp}\big(-\operatorname{Log}(x)\big) = x * \exp(-X)(0) = \exp(-X)(x)$$
$$= \exp(-X)\big(\operatorname{Exp}(X)\big) = \exp(-X)\big(\exp(X)(0)\big) = 0.$$

$\sharp$

Ci proponiamo dunque di provare che:

- m è associativa vicino l'origine;
- $0 \in \mathbb{R}^N$ funge da elemento neutro per m;
- i provvede da inverso locale per m.

Forniamo innanzitutto una potente rappresentazione di m in termini delle mappe Exp, Log e dell'operazione di CBHD $\diamond$ definita in Def.B.1.

Teorema 2.3.2. *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ un'algebra di Lie verificante le condizioni (G), (H) e (ND). Allora esiste un intorno U dell'origine in $\mathbb{R}^N$, $U \subset \operatorname{Exp}(\mathfrak{U})$, ed esiste una funzione $\mathfrak{Z} : U \times U \to \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{g}$ tale che*

$$m(x,y) = \operatorname{Exp}\big(\mathfrak{Z}(x,y)\big), \qquad \forall\, x, y \in U.$$

Più precisamente, la mappa $\mathfrak{Z}$ può essere definita come

$$\mathfrak{Z}(x,y) := \operatorname{Log}(x) \diamond \operatorname{Log}(y) \qquad \forall\, x, y \in U,$$

dove $\diamond$ è l'operazione di CBHD sull'algebra di Lie finito-dimensionale $\mathfrak{g}$.

Dimostrazione. Sia $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}$ la norma fissata su $\mathfrak{g}$ identificando $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^N$ mediante la base J. Dal Teor.B.3.7 di CBHD per ODE sappiamo che è possibile trovare $\epsilon > 0$ tale che la serie di CBHD (si veda la Def.B.1)

$$X \diamond Y := \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X,Y)$$

converge totalmente su $\mathfrak{B}(0,\epsilon) \times \mathfrak{B}(0,\epsilon)$, dove

$$\mathfrak{B}(0,\epsilon) := \{W \in \mathfrak{g} : \|W\|_{\mathfrak{g}} < \epsilon\}.$$

Inoltre, presi arbitrariamente $X, Y \in \mathfrak{B}(0,\epsilon)$, si ha la seguente identità di tipo ODE:

$$\exp(Y)\big(\exp(X)(x)\big) = \exp(X \diamond Y)(x) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Supponiamo ora che ϵ sia sufficientemente piccolo affinché $\mathfrak{B}(0,\epsilon) \subset \mathfrak{U}$.
Per continuità possiamo anche supporre che $X \diamond Y \in \mathfrak{U}$, per $X, Y \in \mathfrak{B}(0,\epsilon)$ e possiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$\mathrm{Log}\,(U) \subset \mathfrak{B}(0,\epsilon), \qquad \text{dove} \qquad U := B(0,\delta), \tag{2.3}$$

essendo $\mathrm{Log}(0) = 0$.

Definiamo

$$\mathfrak{Z} : U \times U \to \mathfrak{U} \qquad \mathfrak{Z}(x,y) := \mathrm{Log}(x) \diamond \mathrm{Log}(y)$$

e mostriamo che $m(x,y) = \mathrm{Exp}\big(\mathfrak{Z}(x,y)\big)$ per ogni $x, y \in U$. Sfruttando la definizioni di m ed Exp e i risultati sopra ottenuti, presi $x, y \in U$, si ha:

$$\begin{aligned} m(x,y) &= \exp\big(\mathrm{Log}(y)\big)(x) = \exp\big(\mathrm{Log}(y)\big)\big(\mathrm{Exp}\big(\mathrm{Log}(x)\big)\big) \\ &= \exp\big(\mathrm{Log}(y)\big)\big(\exp\big(\mathrm{Log}(x)\big)(0)\big) = \exp\big(\mathrm{Log}(x) \diamond \mathrm{Log}(y)\big)(0) \\ &= \mathrm{Exp}\big(\mathfrak{Z}(x,y)\big), \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Muniti del Teor.2.3.2 è semplice provare l'associatività di m.

Teorema 2.3.3. *Nelle ipotesi e notazioni del Teor.2.3.2, si ha che m è associativa vicino l'origine, più precisamente*

$$m(x, m(y,z)) = m(m(x,y), z) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, y, z \in U. \tag{2.4}$$

Osserviamo che entrambi i membri in (2.4) sono ben definiti in quanto, per $x, y \in U$, $m(x,y) \in \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U})$. Infatti, sfruttando la rappresentazione di m fornita dal Teor.2.3.2 e il fatto che $\mathfrak{Z}$ prende valori in $\mathfrak{U}$, se $x, y \in U$ si ha:

$$m(x,y) = \mathrm{Exp}\big(\mathfrak{Z}(x,y)\big) \in \mathrm{Exp}\,(\mathfrak{U})\,.$$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^N$ e siano $y, z \in U$.

Usando la definizione di m, il Teor.2.3.2 e il fatto che $\mathfrak{Z}(y,z) \in \mathfrak{U}$, per il membro sinistro di (2.4) si ha:

$$\begin{aligned} m(x, m(y,z)) &= \exp\big(\mathrm{Log}\big(m(y,z)\big)\big)(x) = \exp\big(\mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}\big(\mathfrak{Z}(y,z)\big)\big)\big)(x) \\ &= \exp\big(\mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}_{|\mathfrak{U}}\big(\mathfrak{Z}(y,z)\big)\big)\big)(x) = \exp\big(\mathfrak{Z}(y,z)\big)(x). \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Ricordiamo inoltre che per $y, z \in U$, da (2.3) segue che $\mathrm{Log}(y), \mathrm{Log}(z) \in \mathfrak{B}(0,\epsilon)$, dalla notevole identità (2.2) è quindi possibile sviluppare il membro destro di (2.4) come

$$\begin{aligned} m(m(x,y), z) &= \exp\big(\mathrm{Log}(z)\big)\big(m(x,y)\big) = \exp\big(\mathrm{Log}(z)\big)\Big(\exp\big(\mathrm{Log}(y)\big)(x)\Big) \\ &= \exp\big(\mathrm{Log}(y) \diamond \mathrm{Log}(z)\big)(x) = \exp\big(\mathfrak{Z}(y,z)\big)(x). \end{aligned} \tag{$2\star$}$$

L'associatività locale di m segue confrontando ($\star$) e ($2\star$). □

Osservazione 2.3.4. Come già anticipato, è notevole il fatto che l'associatività di m non viene dall'associatività dell'operazione di CBHD $\diamond$, ma solo dalla sua esistenza. In particolare, nella dimostrazione, tutto ciò che si è usato è stata l'esistenza di una funzione F tale che

$$\exp(Y)\big(\exp(X)(x)\big) = \exp\big(F(X,Y)\big)(x), \tag{2.5}$$

per ogni x e per X, Y campi vettoriali di norma sufficientemente piccola. Di fatto, tale funzione F eredita una sorta di proprietà associativa dall'associatività della composizione di funzioni, più precisamente

$$F\big(F(X,Y), Z\big) = F\big(X, F(X,Y)\big). \tag{2.6}$$

Supponiamo infatti che sia legittima una ripetuta applicazione di (2.5), abbiamo

$$\begin{aligned}\exp(Z)\big(\exp(Y)\big(\exp(X)(0)\big)\big) &= \exp(Z)\big(\exp\big(F(X,Y)\big)(0)\big)\\ &= \exp\big(F\big(F(X,Y),Z\big)\big)(0),\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}\exp(Z)\big(\exp(Y)\big(\exp(X)(0)\big)\big) &= \exp\big(F(Y,Z)\big)\big(\exp(X)(0)\big)\\ &= \exp\big(F\big(X,F(Y,Z)\big)\big)(0).\end{aligned}$$

Infine, applicando Log ad entrambi i membri destri, si ha l'identità (2.6). $\sharp$

Concludiamo questa sezione con il seguente

Teorema 2.3.5. *Nelle ipotesi e notazioni del Teor.2.3.2, valgono i seguenti fatti:*

- $0 \in \mathbb{R}^N$ *funge da elemento neutro locale per m, ovvero*

$$m(x,0) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \qquad m(0,y) = y \qquad \forall\, y \in \operatorname{Exp}(\mathfrak{U}); \tag{2.7}$$

- i *provvede da inverso locale per m, cioè*

$$m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x) \qquad \forall\, x \in U. \tag{2.8}$$

Osserviamo che $m(x, i(x))$ è ben definito in quanto $i(x) \in \operatorname{Exp}(\mathfrak{U})$ per $x \in U$. Infatti, da (2.3) abbiamo che se $x \in U$, allora $\operatorname{Log}(x) \in \mathfrak{B}(0,\epsilon) \subset \mathfrak{U}$, ed essendo $\mathfrak{B}(0,\epsilon)$ simmetrica rispetto la moltiplicazione per -1, anche $-\operatorname{Log}(x) \in \mathfrak{B}(0,\epsilon) \subset \mathfrak{U}$. Dunque, applicando la definizione di i, si ha:

$$i(x) = \operatorname{Exp}(-\operatorname{Log}(x)) \in \operatorname{Exp}(\mathfrak{U}).$$

Dimostrazione. Le due identità in (2.7) discendono immediatamente dalle definizioni di m ed Exp. Infatti, presi $x \in \mathbb{R}^N$ ed $y \in \operatorname{Exp}(\mathfrak{U})$, abbiamo:

$$m(x,0) = \exp(\operatorname{Log}(0))(x) = \exp(0)(x) = x$$

ed

$$m(0,y) = \exp(\operatorname{Log}(y))(0) = \operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(y)) = y.$$

Al fine di dimostrare (2.8) fissiamo $x \in U$ e sia $X = \mathrm{Log}(x)$. Per le considerazioni fatte a riguardo della buona definizione di $m(x, i(x))$ si ha che $i(x) \in \mathrm{Exp}(\mathfrak{U})$ e che $X, -X \in \mathfrak{B}(0, \epsilon) \subset \mathfrak{U}$. Osserviamo inoltre che

$$X \diamond (-X) = X + (-X) + \sum_{h=2}^{\infty} Z_h(X, -X) = 0.$$

Infine, sfruttando la definizione di i e l'identità (2.2), possiamo sviluppare come segue:

$$\begin{aligned} m(x, i(x)) &= \exp\big(\mathrm{Log}(i(x))\big)(x) = \exp\Big(\mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}\big(-\mathrm{Log}(x)\big)\big)\Big)(x) \\ &= \exp\big(\mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}(-X)\big)\big)(x) = \exp(-X)(x) \\ &= \exp(-X)\big(\mathrm{Exp}(X)\big) = \exp(-X)\big(\exp(X)(0)\big) \\ &= \exp\big(X \diamond (-X)\big)(0) = 0. \end{aligned}$$

In modo analogo si prova che

$$m(i(x), x) = \exp\big((-X) \diamond X\big)(0) = 0.$$

Ciò conclude la prova. □

2.4 Locale invarianza sinistra di $\mathfrak{g}$

Abbiamo visto che m definisce una struttura di gruppo di Lie locale su $\mathbb{R}^N$. Mostriamo ora come l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è in realtà profondamente connessa a tale struttura. In particolare, m risolverà un'identità simile a quella verificata, in Teoria dei Gruppi di Lie, dalla mappa $(x, y) \mapsto \tau_x(y)$, identità nota anche come Primo Teorema di Lie. Non a caso $m(x, y)$ è destinata ad essere una traslazione a sinistra su un gruppo di Lie.

Teorema 2.4.1. *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ un'algebra di Lie verificante le condizioni (G), (H) e (ND). Allora, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, vale la seguente identità:*

$$X(m(x, y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, y) X(y) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } y \in U. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Sia $X \in \mathfrak{g}$ fissato ad arbitrio.

Proviamo innanzitutto che X verifica (2.9) per $y = 0$, ovvero che

$$X(x) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, 0) X(0), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.10}$$

Sia quindi $x \in \mathbb{R}^N$ e sia $\epsilon > 0$ tale che, per $|t| < \epsilon$, $tX \in \mathfrak{U}$. Ne verrà che

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \{\exp(tX)(x)\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \{\exp\big(\mathrm{Log}\big(\mathrm{Exp}(tX)\big)\big)(x)\} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \{m(x, \mathrm{Exp}(tX))\} = \frac{\partial m}{\partial y}(x, 0) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \mathrm{Exp}(tX) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial m}{\partial y}(x,0)X(0).$$

Abbiamo dunque provato l'identità iniziale nel caso $y = 0$.

Al fine di dimostrare (2.9), richiamiamo l'associatività locale di m:

$$m(m(x,y),z) = m(x,m(y,z)) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^N,\ \forall\ y,z \in U.$$

Differenziando rispetto a z e valutando in $z = 0$ si ottiene:

$$\mathcal{J}_{m(m(x,y),\cdot)}(0) = \mathcal{J}_{m(x,\cdot)}(m(y,0))\mathcal{J}_{m(y,\cdot)}(0).$$

Usando la notazione della matrice Jacobiana mediante derivate parziali e moltiplicando per $X(0)$, si ha:

$$\frac{\partial m}{\partial \beta}(m(x,y),0)X(0) = \frac{\partial m}{\partial \beta}(x,m(y,0))\frac{\partial m}{\partial \beta}(y,0)X(0). \tag{2.11}$$

La tesi segue da (2.11) mediante applicazione di (2.10) e ricordando che $m(y,0) = y$. □

Dalla dimostrazione del Teor.2.4.1 si possono ottenere notevoli identità per m. A tal fine richiamiamo la base $J = \{J_1, ..., J_N\}$ di $\mathfrak{g}$ del Lem.2.1.1 per definire la seguente matrice $N \times N$

$$J(x) := \big(J_1(x), ..., J_N(x)\big), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Da (2.10), con $X = J_i$, si ha:

$$J(x) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Di conseguenza, l'identità (2.11) diventa (in notazione $m = m(x,y)$):

$$J(m(x,y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)J(y),$$

o equivalentemente, osservando che J è invertibile,

$$\frac{\partial m}{\partial y}(x,y) = J(m(x,y))J(y)^{-1}. \tag{2.12}$$

Uno degli obiettivi principali della prossima sezione sarà mostrare che è possibile prolungare m affinché (2.12) rimanga vera per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$.

In particolare vedremo che, così come l'associatività locale di m ha portato alla nascita di (2.12), quest'ultima permetterà di ottenere l'associatività di tale prolungamento di m.

2.5 Globalizzazione della struttura di gruppo di Lie locale

Possiamo già renderci conto di come le profonde connessioni tra

Teorema di CBHD
associatività locale di m
locale invarianza di $\mathfrak{g}$

vanno a formare le fondamenta della dimostrazione del Teor.1.1.5, grazie al quale potremo rispondere al nostro problema iniziale (P).

Questi strumenti hanno reso possibile la costruzione della struttura di gruppo di Lie locale, si tratta quindi di estendere tale struttura al globale. Questo sarà lo scopo principale della sezione corrente.

Grazie al Teor.2.4.1 siamo ora in grado di provare un importante risultato di prolungabilità. L'interazione tra questo e l'unicità della soluzione di un Problema di Cauchy renderà possibile estendere la mappa m definita in precedenza a tutto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Lemma 2.5.1 (**Di prolungabilità**). *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^N\right)$ un'algebra di Lie verificante le condizioni (G), (H) e (ND). Siano poi $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in C(\mathbb{R})$. Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, la soluzione massimale del Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) X_k(z(t)) \\ z(0) = \xi \end{cases} \tag{2.13}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ la soluzione massimale di (2.13). La tesi seguirà una volta provato che $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ragioniamo per assurdo assumendo $\mathcal{D} \neq \mathbb{R}$. Per fissare le idee possiamo supporre che $0 < T := \sup(\mathcal{D}) < \infty$. Siano poi $K := [0, T]$ e $h > 0$ tale che l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq h\} \subseteq U$ (U definito in Teor.2.3.2).

Consideriamo il Problema di Cauchy parametrico con parametro reale s:

$$(PC_s) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t+s) X_k(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Per il corollario Cor.*A*.4.2 in appendice, è possibile trovare $\epsilon > 0$ per il quale (PC_s) ammette un'unica soluzione massimale

$$t \mapsto u_s(t), \quad \text{definita su } [-\epsilon, \epsilon], \text{ uniformemente per } s \in K$$

e tale che

$$|u_s(t)| \leq h, \quad \text{per ogni } t \in [-\epsilon, \epsilon], \text{ uniformemente per } s \in K. \tag{2.14}$$

Fissiamo $\tau \in]0,T[$ tale che $T-\tau<\epsilon$ e sia $x=\varphi(\tau)$. Da (2.14) si ha che $u_\tau(t)\in U\subset \mathrm{Exp}(\mathfrak{U})$ per ogni $t\in[-\epsilon,\epsilon]$, pertanto risulta ben definita la funzione

$$\nu:[0,\epsilon]\to\mathbb{R}^N, \qquad \nu(t):=m(x,u_\tau(t)).$$

Inoltre, la regolarità di m rende ν di classe C^∞ nel suo dominio.

Mostriamo che ν risolve, su $[0,\epsilon]$, il seguente Problema di Cauchy:

$$(\bigstar)\qquad \begin{cases} \dot z(t)=\sum_{k=1}^n \alpha_k(t+\tau)X_k(z(t)) \\ z(0)=x. \end{cases}$$

Dalla definizione di ν e dal ruolo di 0 come elemento neutro per m abbiamo

$$\nu(0)=m(x,u_\tau(0))=m(x,0)=x.$$

Per il Teor.2.4.1 si ha invece

$$\begin{aligned}\dot\nu(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{m(x,u_\tau(t))\}=\frac{\partial m}{\partial y}(x,u_\tau(t))\dot{u_\tau}(t)\\ &=\sum_{k=1}^n\alpha_k(t+\tau)\frac{\partial m}{\partial y}(x,u_\tau(t))X_k(u_\tau(t))\\ &=\sum_{k=1}^n\alpha_k(t+\tau)X_k(m(x,u_\tau(t))\\ &=\sum_{k=1}^n\alpha_k(t+\tau)X_k(\nu(t)).\end{aligned}$$

Avendo provato che ν è soluzione di $(\bigstar)$, unendo opportunamente φ e ν si potrà estendere φ oltre l'estremo T del dominio massimale, giungendo così ad una contraddizione nel modo che ora mostriamo. Poniamo quindi

$$\gamma(t):=\begin{cases}\varphi(t) & se\ t\in[0,\tau]\\ \nu(t-\tau) & se\ t\in]\tau,\tau+\epsilon],\end{cases}$$

e osserviamo che

- $\tau+\epsilon>T$ poiché $T-\tau<\epsilon$;
- $\gamma(0)=\varphi(0)=\xi$;
- γ è continua dato che $\gamma(\tau)=\varphi(\tau)=x$ e

$$\lim_{t\to\tau^-}\varphi(t)=\varphi(\tau)=x=\nu(0)=\lim_{t\to\tau^+}\nu(t-\tau);$$

- γ è C^1 sull'intervallo $[0,\tau+\epsilon]$ essendo che

$$\dot\gamma(t):=\begin{cases}\dot\varphi(t)=\sum_{k=1}^n\alpha_k(t)X_k(\varphi(t)) & se\ t\in[0,\tau[\\ \dot\nu(t-\tau)=\sum_{k=1}^n\alpha_k(t-\tau+\tau)X_k(\nu(t-\tau)) & se\ t\in]\tau,\tau+\epsilon]\end{cases}$$

$$\begin{cases} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) X_k(\gamma(t)) & se \quad t \in [0, \tau[\\ = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) X_k(\gamma(t)) & se \quad t \in]\tau, \tau + \epsilon] \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{t \to \tau^-} \dot{\gamma}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\tau) X_k(\gamma(\tau)) = \lim_{t \to \tau^+} \dot{\gamma}(t).$$

Pertanto γ risulta essere un prolungamento di φ oltre $[0, T[$, contraddicendo l'ipotesi sulla massimalità di φ, da cui l'assurdo. □

Fissiamo ora $x, y \in \mathbb{R}^N$ e consideriamo la curva

$$t \mapsto \gamma_{x,y}(t) := m(x, ty),$$

ben definita per piccoli valori di t: precisamente per $ty \in U$ almeno fino a $t = 1$. Infatti, per definizione, $m(x, ty) = \exp\big(\mathrm{Log}(ty)\big)(x)$ e Log è definito su U che è un intorno dell'origine.

L'idea consiste nel provare che $\gamma_{x,y}$ risolve un Problema di Cauchy del tipo (2.13). Osserviamo innanzitutto che vale

$$\gamma_{x,y}(0) = m(x, 0) = x$$

e che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{x,y}(t) = \left(\frac{\partial m}{\partial y}(x, ty)\right) y.$$

Inoltre, ricordando (2.12), possiamo scrivere:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{x,y}(t) = J(m(x, ty))J(ty)^{-1}y = J(\gamma_{x,y}(t))J(ty)^{-1}y.$$

Pertanto $\gamma_{x,y}$ risolve (2.13) rispetto la base $J = \{J_1, ..., J_N\}$ di $\mathfrak{g}$ con dato iniziale $\xi = x$ e con

$$\alpha(t) := a(t, y) = (a_1(t, y), ..., a_N(t, y))^T := J(ty)^{-1}y.$$

Formalizziamo i risultati ottenuti con il seguente

Teorema 2.5.2. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$ fissati e sia I_y un intervallo di $\mathbb{R}$ contenente l'origine tale che $ty \in U$ per ogni $t \in I_y$. Allora il Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = J(z(t))J(ty)^{-1}y \\ z(0) = x \end{cases} \tag{2.15}$$

ha un'unica soluzione massimale $t \mapsto \varphi_{x,y}(t)$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

Inoltre, la curva $t \mapsto \gamma_{x,y}(t) := m(x, ty)$ risolve (2.15) su I_y.

Di conseguenza, $\varphi_{x,y}(t) = \gamma_{x,y}(t)$ per ogni $t \in I_y$.

Dimostrazione. Segue dal Lem.2.5.1 e dalle argomentazioni precedenti. □

Grazie al Teor.2.5.2 è naturale il seguente prolungamento di m:

Definizione 2.4. *Nelle notazioni del Teor.2.5.2, definiamo*

$$M : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad M(x,y) = \varphi_{x,y}(1).$$

Teorema 2.5.3. *M estende m in modo C^∞ su tutto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, precisamente:*

$$M \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right) \qquad e \qquad M(x,y) = m(x,y) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, y \in U.$$

Dimostrazione. La regolarità di M segue dal Teor.*A*.5.5 di dipendenza C^∞ per ODE. Inoltre, fissati $x \in \mathbb{R}^N, y \in U$ e ricordando da (2.3) che U è stato definito come una palla centrata nell'origine, dal Teor.2.5.2 si ha:

$$\varphi_{x,y}(t) = \gamma_{x,y}(t) := m(x,ty) \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

In particolare, per $t = 1$ abbiamo:

$$M(x,y) := \varphi_{x,y}(1) = \gamma_{x,y}(1) = m(x,y).$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue che M coincide con m su $\mathbb{R}^N \times U$. $\square$

Ottenuta l'estensione M di m, ciò che richiederà un notevole sforzo sarà proprio il provare che l'associatività è mantenuta globalmente.

Lemma 2.5.4. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$ fissati, nelle notazioni precedenti, si ha*

$$\varphi_{x,y}(t) = M(x,ty), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, $t \mapsto M(x,ty)$ risolve (2.15) su $\mathbb{R}$, esplicitamente:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{M(x,ty)\} = J(M(x,ty))J(ty)^{-1}y \\ M(x,0) = x. \end{cases} \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Fissato $t \in \mathbb{R}$, proviamo che la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \qquad \gamma(s) := \varphi_{x,y}(ts)$$

risolve il Problema di Cauchy parametrico

$$\begin{cases} \dot{z}(s) = J(z(s))J(sty)^{-1}ty \\ z(0) = x, \end{cases} \tag{2.17}$$

avente soluzione massimale $\varphi_{x,ty}$, da cui seguirà la tesi in quanto, per l'unicità della soluzione, si ha:

$$M(x,ty) = \varphi_{x,ty}(1) = \gamma(1) = \varphi_{x,y}(t).$$

Ora, essendo $\varphi_{x,y}$ soluzione di (2.15), è chiaro che

$$\gamma(0) = \varphi_{x,y}(0) = x.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\varphi_{x,y}(ts)\} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}_{|u=ts}\{\varphi_{x,y}(u)\} = tJ(\varphi_{x,y}(u))J(uy)^{-1}y_{|u=ts} \\ &= J(\varphi_{x,y}(ts))J(tsy)^{-1}ty = J(\gamma(s))J(tsy)^{-1}ty. \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Corollario 2.5.5. *Nelle notazioni precedenti, si ha:*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)y = J(M(x,y))J(y)^{-1}y \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.18}$$

Dimostrazione. Segue dal Lem.2.5.4 con $t = 1$, essendo che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{M(x,ty)\} = \frac{\partial M}{\partial y}(x,ty)y.$$

Ci proponiamo ora di provare che la moltiplicazione a destra per y può essere trascurata, risultato per niente ovvio osservando ad esempio che le matrici

$$A(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B(y) = \begin{bmatrix} y_2 & -y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfano $A(y)y = B(y)y$ per ogni y ma $A(y) = B(y)$ solo per $y = 0$.

La verifica di questo fatto risulterà essere molto elaborata e richiederà l'uso di un lemma tecnico sulle costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ rispetto alla base J.

Lemma 2.5.6. *Sia $J = \{J_1, ..., J_N\}$ e consideriamo le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ rispetto a J, cioè le costanti $\{C_{i,j}^k\}_{i,j,k\le N}$ tali che*

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{N} C_{i,j}^k J_k, \qquad \forall\, i, j \in \{1, ..., N\}. \tag{2.19}$$

Fissato $j \in \{1, ..., N\}$ e posto $C(j) := (C_{i,j}^k)_{k,i\le N}$ si ha, per ogni $z \in \mathbb{R}^N$,

$$C(j)J(z)^{-1}z =$$

$$J(z)^{-1}\frac{\partial J_j}{\partial z}(z)z - J(z)^{-1}\left(\frac{\partial J_1}{\partial z}(z)J_j(z) \dots \frac{\partial J_N}{\partial z}(z)J_j(z)\right)J(z)^{-1}z. \tag{2.20}$$

Dimostrazione. Prendendo i vettori colonna dei coefficienti dei campi vettoriali in (2.19) abbiamo

$$J_i(J_j(z)) - J_j(J_i(z)) = \sum_{k=1}^{N} C_{i,j}^k J_k(z), \qquad z \in \mathbb{R}^N$$

che, in termini del vettore $C_{i,j} := (C_{i,j}^1, \dots, C_{i,j}^N)^T$, diventa

$$\frac{\partial J_j}{\partial z}(z)J_i(z) - \frac{\partial J_i}{\partial z}(z)J_j(z) = J(z)C_{i,j}.$$

Fissando j e facendo variare $i = 1, ..., N$ possiamo pensare ogni membro dell'identità di cui sopra come all'i-esimo vettore colonna di una matrice $N \times N$, ottenendo la seguente identità matriciale:

$$\frac{\partial J_j}{\partial z}(z)J(z) - \left(\frac{\partial J_1}{\partial z}(z)J_j(z) \dots \frac{\partial J_N}{\partial z}(z)J_j(z)\right) = J(z)C(j).$$

Essendo J invertibile, (2.20) segue moltiplicando a destra e a sinistra per $J(z)^{-1}z$ e $J(z)^{-1}$ rispettivamente. $\square$

Osserviamo inoltre che vale il seguente fatto:

Lemma 2.5.7. *Per $z \in \mathbb{R}^N$ denotiamo sempre con $\frac{\partial}{\partial z}$ l'operatore Jacobiano. Se $H(z)$ è una funzione differenziabile a valori nelle matrici invertibili $N \times N$, è vera la seguente formula:*

$$I_N - \frac{\partial}{\partial z}\{H(z)^{-1}z\}H(z) = H(z)^{-1}\sum_{k=1}^{N}(H(z)^{-1}z)_k \frac{\partial H_k}{\partial z}(z)H(z), \tag{2.21}$$

dove $H_k(z)$ è il k-esimo vettore colonna di $H(z)$, $(H(z)^{-1}z)_k$ è la k-esima entrata del vettore $H(z)^{-1}z$ e I_N è la matrice identità $N \times N$.

Dimostrazione. Moltiplicando a destra per $z \in \mathbb{R}^N$ entrambi i membri dell'identità $H(z)H(z)^{-1} = I_N$, si ha:

$$H(z)H(z)^{-1}z = z.$$

Applicando alla formula sopra l'operatore $\frac{\partial}{\partial z}$, otteniamo:

$$H(z)\frac{\partial}{\partial z}\{H(z)^{-1}z\} + \sum_{k=1}^{N}(H(z)^{-1}z)_k \frac{\partial H_k}{\partial z}(z) = I_N.$$

Quindi, moltiplicando a sinistra per $H(z)^{-1}$ e a destra per $H(z)$, segue che

$$\frac{\partial}{\partial z}\{H(z)^{-1}z\}H(z) + H(z)^{-1}\sum_{k=1}^{N}(H(z)^{-1}z)_k \frac{\partial H_k}{\partial z}(z)H(z) = I_N,$$

e ciò prova (2.21). □

Teorema 2.5.8. *Nelle notazioni precedenti, vale la seguente identità:*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = J(M(x,y))J(y)^{-1} \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.22}$$

Osserviamo che (2.22) è esattamente la versione globale di (2.12). In particolare, una volta provato che $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, sarà facile verificare che $\mathfrak{g}$ è costituita da campi vettoriali invarianti a sinistra.

Dimostrazione. Fissiamo $x, y \in \mathbb{R}^N$ e consideriamo le seguenti funzioni della variabile $t \in \mathbb{R}$ a valori nelle matrici reali $N \times N$:

$$t \mapsto A(t) := tJ(M(x,ty))^{-1}\frac{\partial M}{\partial y}(x,ty)J(ty),$$

$$t \mapsto B(t) := tI_N.$$

Proviamo che $A(t)$ e $B(t)$ risolvono uno stesso Problema di Cauchy con dato iniziale $A(0) = 0 = B(0)$. Di conseguenza, per $t = 1$ avremo

$$J(M(x,y))^{-1}\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)J(y) = I_N,$$

da cui seguirà la tesi per l'invertibilità di J.

Poiché a seguire x non verrà mai coinvolto, per semplicità di notazione scriveremo $M(ty)$ anziché $M(x,ty)$.

Per prima cosa determiniamo una EDO per $A(t)$:

$$\begin{aligned}
A'(t) &= J(M(ty))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{t\frac{\partial M}{\partial y}(ty)J(ty)\right\} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))^{-1}\right\}t\frac{\partial M}{\partial y}(ty)J(ty)\\
&= J(M(ty))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{t\frac{\partial M}{\partial y}(ty)\right\}J(ty) + J(M(ty))^{-1}t\frac{\partial M}{\partial y}(ty)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\}\\
&\qquad +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))^{-1}\right\}J(M(ty))A(t) =: (\star).
\end{aligned}$$

Osservando che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{t\frac{\partial M}{\partial y}(ty)\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(ty)\right\},$$

grazie a (2.16) possiamo ulteriormente sviluppare come segue:

$$\begin{aligned}
(\star) &= J(M(ty))^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left\{J(M(ty))J(ty)^{-1}y\right\}J(ty) + J(M(ty))^{-1}t\frac{\partial M}{\partial y}(ty)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\}\\
&\qquad +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))^{-1}\right\}J(M(ty))A(t)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{J(ty)^{-1}y\right\}J(ty) + J(M(ty))^{-1}\sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}y)_k\frac{\partial}{\partial y}\left\{J_k(M(ty))\right\}J(ty)\\
&\qquad +A(t)J(ty)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\} - J(M(ty))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))\right\}A(t)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{J(ty)^{-1}y\right\}J(ty) + J(M(ty))^{-1}\sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}y)_k\frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty))J(M(ty))A(t)\\
&\qquad +A(t)J(ty)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\} - J(M(ty))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))\right\}A(t).
\end{aligned}$$

$A(t)$ soddisfa quindi la seguente ODE lineare:

$$\begin{aligned}
A'(t) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{J(ty)^{-1}y\right\}J(ty) + J(M(ty))^{-1}\sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}y)_k\frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty))J(M(ty))A(t)\\
&\qquad +A(t)J(ty)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\} - J(M(ty))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))\right\}A(t).
\end{aligned}$$

Mostriamo che $B(t)$ è soluzione della stessa equazione, ovvero che vale

$$\begin{aligned}
I_N &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{J(ty)^{-1}y\right\}J(ty) + J(M(ty))^{-1}\sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k\frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty))J(M(ty))\\
&\qquad +tJ(ty)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\} - J(M(ty))^{-1}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))\right\}.
\end{aligned}$$

Applicando la formula (2.21), l'identità sopra può essere riscritta come:

$$tJ(ty)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\} - J(ty)^{-1}\sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k\frac{\partial J_k}{\partial y}(ty)J(ty) = \tag{2.23}$$

$$J(M(ty))^{-1}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))\right\} - \sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k\frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty))J(M(ty))\right).$$

Usando le notazioni $\left(\,\cdot\,\right)_{i,j}$, $\left(\,\cdot\,\right)_i$ e $\left(\,\cdot\,\right)_j$ per scrivere una matrice in termini dei suoi elementi, vettori riga e vettori colonna rispettivamente, andiamo ad analizzare il membro sinistro di (2.23). Per quanto riguarda il primo addendo, è chiaro che

$$\begin{aligned}
tJ(ty)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(ty)\right\} &= tJ(ty)^{-1}\Big(\langle\nabla(J^i_j)(ty), y\rangle\Big)_{i,j}\\
&= J(ty)^{-1}\Big(\langle\nabla(J^i_j)(ty), ty\rangle\Big)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Per il secondo addendo, osserviamo innanzitutto che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k\frac{\partial J_k}{\partial y}(ty) &= \sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k\Big((\partial_j J^i_k)(ty)\Big)_{i,j}\\
&= \sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k\Big((\partial_j J_k)(ty)\Big)_{j}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k(\partial_j J_k)(ty)\right)_{j}\\
&= \Big((\partial_j J)(ty)J(ty)^{-1}ty\Big)_{j}.
\end{aligned}$$

Inoltre, se $A = \left(A_{i,j}\right)_{i,j\le N}$ e $B = \left(B_{i,j}\right)_{i,j\le N} \equiv \left(B_j\right)_{j\le N}$ sono due matrici $N\times N$, posta $C := AB$, $C = \left(C_{i,j}\right)_{i,j\le N}$, è possibile ottenere l'elemento di indici i e j di C come $C_{i,j} = e_i^T A B_j$. Detto questo, possiamo esprimere il membro sinistro di (2.23) nella seguente forma:

$$J(ty)^{-1}\Big(\langle\nabla(J^i_j)(ty), ty\rangle\Big)_{i,j} - \Big(e_i^T J(ty)^{-1}(\partial_j J)(ty)J(ty)^{-1}ty\Big)_{i,j}J(ty).$$

Ora, con l'intenzione di usare il Lem.2.5.6, rappresentiamo il membro destro di (2.23) in termini delle costanti di struttura $\left\{C^i_{k,j}\right\}_{i,j,k\le N}$ di $\mathfrak{g}$ rispetto J. Poiché

$$\begin{aligned}
t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{J(M(ty))\right\} &= t\left(\langle\nabla(J^i_j)(M(ty)), \frac{\partial M}{\partial y}(ty)y\rangle\right)_{i,j}\\
&\overset{(2.18)}{=} \sum_{k=1}^{N}(J(ty)^{-1}ty)_k\Big(\langle\nabla(J^i_j)(M(ty)), J_k(M(ty))\rangle\Big)_{i,j}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k \left(\frac{\partial J_j}{\partial y}(M(ty)) J_k(M(ty)) \right)_j$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k \Big(J_k(J_j)(M(ty)) \Big)_j$$

e

$$\sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k \frac{\partial J_k}{\partial y}(M(ty)) J(M(ty))$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k \left(\frac{\partial J_k^i}{\partial y}(M(ty)) \right)_i \big(J_j(M(ty))\big)_j$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k \left(\frac{\partial J_k^i}{\partial y}(M(ty)) J_j(M(ty)) \right)_{i,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k \Big(J_j(J_k)(M(ty)) \Big)_j ,$$

otteniamo la seguente scrittura per il membro destro di (2.23):

$$J(M(ty))^{-1} \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k \Big(J_k(J_j)(M(ty)) - J_j(J_k)(M(ty)) \Big)_j$$

$$= J(M(ty))^{-1} \sum_{k=1}^{N} (J(ty)^{-1}ty)_k J(M(ty)) \big(C_{k,j}^i\big)_{i,j}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N} C_{k,j}^i (J(ty)^{-1}ty)_k \right)_{i,j} ,$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è usata l'invertibilità di J.

Mettendo insieme i risultati ottenuti, si ha

$$J(ty)^{-1} \Big(\langle \nabla(J_j^i)(ty), ty \rangle \Big)_{i,j} - \Big(e_i^T J(ty)^{-1} (\partial_j J)(ty) J(ty)^{-1} ty \Big)_{i,j} J(ty)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N} C_{k,j}^i (J(ty)^{-1}ty)_k \right)_{i,j}$$

che, come identità tra vettori colonna, risulta essere (con $z = ty$)

$$J(z)^{-1} \frac{\partial J_j}{\partial z}(z) z - \sum_{i=1}^{N} J_j^i(z) J(z)^{-1} (\partial_j J)(z) J(z)^{-1} z = C(j) J(z)^{-1} z,$$

dove abbiamo posto $C(j) := \big(C_{k,j}^i\big)_{i,k}$ e per $j = 1, ..., N$. Il Lem.2.5.6 permette di concludere la prova. $\square$

Introduciamo ora le seguenti notazioni:

Definizione 2.5. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$, denotiamo*

$$x * y := M(x, y) = \varphi_{x,y}(1).$$

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ fissato, definiamo le mappe

$$\tau_x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad \tau_x(y) = x * y,$$

$$\rho_x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad \rho_x(y) = y * x.$$

L'identità (2.22) può essere quindi scritta nella seguente forma:

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(y) = J(x * y)J(y)^{-1} \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.24}$$

Osserviamo che, essendo J non singolare, da (2.24) e dal Teorema della Funzione Inversa segue che τ_x è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ in $\mathbb{R}^N$, in particolare è una mappa aperta.

A questo punto resta da provare che $*$ globalizza tutte le proprietà di gruppo locale di m così che, ottenuto che $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, *\right)$ è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, le notazioni della Def.2.5 non saranno più in ambiguità con quelle usate in Teoria dei Gruppi di Lie.

Teorema 2.5.9. $0 \in \mathbb{R}^N$ *funge da elemento neutro globale per $*$, precisamente:*

$$x * 0 = x = 0 * x \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^N$ fissato. Ricordando le notazioni precedenti, abbiamo

$$x * 0 = \varphi_{x,0}(1) \quad \text{ e } \quad 0 * x = \varphi_{0,x}(1).$$

Poiché $\varphi_{x,0}$ è soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = 0 \\ z(0) = x, \end{cases}$$

è chiaro che $\varphi_{x,0}$ risulta identicamente costante e uguale al dato iniziale x, da cui

$$x * 0 = \varphi_{x,0}(1) = x.$$

Analogamente, $\varphi_{0,x}$ risolve

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = J(z(t))J(tx))^{-1}x \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

ma essendo soluzione anche la funzione $z(t) = tx$, per l'unicità si ha

$$0 * x = \varphi_{0,x}(1) = x,$$

da cui la tesi. □

Teorema 2.5.10. *$*$ è globalmente associativa in $\mathbb{R}^N$, esplicitamente:*

$$x * (y * z) = (x * y) * z \qquad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione. Proviamo che la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \qquad \gamma(t) := x * (y * (tz)) = \tau_x(y * (tz))$$

risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = J(v(t))J(tz)^{-1}z \\ v(0) = x * y, \end{cases}$$

avente soluzione massimale $\varphi_{x*y,z}$ da cui, per l'unicità, segue la tesi dato che

$$x * (y * z) = \gamma(1) = \varphi_{x*y,z}(1) = (x * y) * z.$$

Ora, poiché 0 è elemento neutro per $*$, si ha:

$$\gamma(0) = x * (y * 0) = x * y.$$

Inoltre, richiamando (2.16) e (2.24), abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\tau_x(y * (tz))\} = \mathcal{J}_{\tau_x}(y * (tz))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{y * (tz)\} \\
&= \mathcal{J}_{\tau_x}(y * (tz))J(y * (tz))J(tz)^{-1}z \\
&= J(x * (y * (tz)))J(y * (tz))^{-1}J(y * (tz))J(tz)^{-1}z \\
&= J(x * (y * (tz)))J(tz)^{-1}z \\
&= J(\gamma(t))J(tz)^{-1}z.
\end{aligned}$$

Con questo la prova è conclusa. □

Vogliamo ora trovare un inverso locale per $*$ che estenda la mappa

$$i : \mathrm{Exp}(\mathfrak{U}) \to \mathbb{R}^N$$

definita precedentemente.

Osserviamo innanzitutto che per la continuità di i è possibile trovare un intorno aperto connesso $W \subset U$ di 0 tale che $i(W) \subset U \subseteq \mathrm{Exp}(\mathfrak{U})$. Pertanto, dal fatto che $*$ coincide con m su $\mathbb{R}^N \times U$ e che i provvede da inverso per m su U, si ha:

$$x * i(x) = 0 = i(x) * x \qquad \forall\ x \in W. \tag{2.25}$$

Nel seguito ci riferiremo sempre a questo W quando verrà usata tale notazione.

Lemma 2.5.11. *Vale il seguente risultato:*

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{w_1 * ... * w_n : w_1, ..., w_n \in W\}.$$

Dimostrazione. Per semplicità di notazione poniamo:

$$A_n := \{w_1 * ... * w_n : w_1, ..., w_n \in W\},$$

$$A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Osserviamo che $A \neq \varnothing$ in quanto $0 \in A$. Proviamo che $A = \mathbb{R}^N$ mostrando che A è aperto e chiuso.

- A è aperto: infatti $A_1 = W$ che è aperto. Inoltre, l'associatività locale di $*$ permette di scrivere per $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} A_n &= \{w_1 * ... * w_n : w_1, ..., w_n \in W\} \\ &= \{(w_1 * ... * w_{n-1}) * w_n : w_1, ..., w_{n-1}, w_n \in W\} \\ &= \{x * w_n : x, w_n \in W\} \\ &= \cup_{x \in A_{n-1}} \tau_x(W). \end{aligned}$$

  Ricordando che τ_x è una mappa aperta e che l'unione di aperti è aperta si ha che A è un aperto.

- A è chiuso: sia $x_0 \in \bar{A}$, proviamo che $x_0 \in A$.
  Per la continuità di i esiste un intorno aperto $V \subset W$ di 0 tale che $i(V) \subset W$. Osserviamo che $x_0 = \tau_{x_0}(0) \in \tau_{x_0}(V)$, in particolare, per quanto detto su τ_{x_0}, $\tau_{x_0}(V)$ è un intorno aperto di x_0, dunque è possibile trovare $\sigma > 0$ tale che $B(x_0, \sigma) \subset \tau_{x_0}(V)$. D'altra parte, essendo $x_0 \in \bar{A}$, si ha che $B(x_0, \sigma) \cap A \neq \varnothing$.

  Abbiamo quindi ottenuto che $\tau_{x_0}(V) \cap A \neq \varnothing$, di conseguenza esistono $w_1, ..., w_n \in W$, $v \in V$ tali che $w_1 * ... * w_n = \tau_{x_0}(v) = x_0 * v$.
  Sempre per l'associatività locale di $*$ si ha:

$$(w_1 * ... * w_n) * i(v) = (x_0 * v) * i(v) = x_0 * (v * i(v)) = x_0 * 0 = x_0.$$

  Pertanto $x_0 \in A$, essendo $w_1, ..., w_n, i(v) \in W$.

  Abbiamo quindi provato che $A = \mathbb{R}^N$, da cui la tesi.

□

Il Lem.2.5.11 permette di dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 2.5.12. *Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ esiste un unico $y_x \in \mathbb{R}^N$ per cui*

$$x * y_x = 0 = y_x * x. \tag{2.26}$$

Dimostrazione. Il Lem.2.5.11 permette di scrivere $x \in \mathbb{R}^N$ come

$$x = w_1 * ... * w_n, \quad \text{con} \quad w_1, ..., w_n \in W.$$

Inoltre, essendo $W \subset U$, è ben definito

$$y_x := i(w_n) * ... * i(w_1).$$

Dall'associatività di $*$ e da (2.25) si ha:

$$x * y_x = (w_1 * ... * w_n) * (i(w_n) * ... * i(w_1)) = (w_1 * (... * (w_n * i(w_n)) * ...) * i(w_1)) = 0.$$

In modo analogo si prova che $y_x * x = 0$.

Supponiamo infine che esista un altro $y \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$x * y = 0 = y * x.$$

Sempre per l'associatività di $*$ abbiamo

$$y = y * 0 = y * (x * y_x) = (y * x) * y_x = 0 * y_x = y_x,$$

da cui l'unicità. $\square$

Risulta ora naturale estendere i come segue:

Definizione 2.6. *Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, sia $y_x \in \mathbb{R}^N$ l'unico punto verificante* (2.26), *definiamo la mappa*

$$I : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad I(x) := y_x.$$

Teorema 2.5.13. *Nelle notazioni precedenti, I estende i in modo C^∞ su tutto $\mathbb{R}^N$, precisamente:*

$$I \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \qquad e \qquad I(x) = i(x) \quad \forall\, x \in W.$$

Dimostrazione. Al fine di provare la regolarità prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e definiamo

$$y_0 := I(x_0),$$

in tal modo $x_0 * y_0 = 0$. Consideriamo ora la matrice Jacobiana di $M(x, y) := x * y$ valutando in $x = x_0$ e $y = y_0$ che, in termini delle mappe τ_x e ρ_y, risulta essere:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial M}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \left(\frac{\partial \rho_{y_0}}{\partial x}(x_0), \frac{\partial \tau_{x_0}}{\partial y}(y_0)\right) = \left(\mathcal{J}_{\rho_{y_0}}(x_0), \mathcal{J}_{\tau_{x_0}}(y_0)\right).$$

Poiché τ_{x_0} è un diffeomorfismo locale di $\mathbb{R}^N$ si ha che $\mathcal{J}_{\tau_{x_0}}(y_0)$ è non singolare. Per il Teorema della Funzione Implicita possiamo quindi trovare due intorni U_{x_0}, U_{y_0} di x_0 e y_0 rispettivamente, ed una funzione $f : U_{x_0} \to U_{y_0}$ di classe C^∞, con $f(x_0) = y_0 = I(x_0)$, tali che

$$\{(x, y) \in U_{x_0} \times U_{y_0} : M(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in U_{x_0}\}.$$

Pertanto, per ogni $x \in U_{x_0}$, si ha che

$$x * f(x) = 0,$$

e dall'unicità provata nella Prop.2.5.12 segue che

$$f(x) = I(x), \qquad \forall\, x \in U_{x_0}.$$

Dall'arbitrarietà di x_0 viene che I è C^∞ su $\mathbb{R}^N$. Infine, sempre grazie alla Prop.2.5.12, è facile provare che $i(x) = I(x)$ per $x \in W$, ricordando che, con tale scelta di x, si ha

$$x * i(x) = 0 = i(x) * x.$$

Questo conclude la prova. □

Facciamo un riepilogo dei risultati ottenuti.

L'unicità della soluzione del Problema di Cauchy (2.15) ha permesso, tramite il Lem.2.5.1 di prolungabilità, di costruire un'estensione C^∞ $*$ di m definita su tutto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

D'altra parte, un argomento di unicità è stato usato più volte anche per ottenere sia una versione globale (2.22) della proprietà di invarianza a sinistra (2.12), sia per dimostrare il ruolo di 0 come elemento neutro per $*$, ma anche, servendoci di quest'ultimo risultato, per provare l'associatività di $*$.

Quest'ultima si è poi rivelata uno strumento potente per estendere i in modo C^∞ su $\mathbb{R}^N$ ad una mappa I, che ha provveduto da inverso globale per $*$.

Possiamo quindi definire

$$G := \left(\mathbb{R}^N, *\right)$$

ed affermare che G è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ con elemento neutro 0.

Ora, ricordando che (2.22) è stata scritta in termini della base J di $\mathfrak{g}$, sviluppiamo (2.22) nell'identità

$$X(x * y) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y) X(y),$$

vera per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $X \in \mathfrak{g}$. In altre parole ogni campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ è invariante a sinistra rispetto G, il che significa $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Lie}(G)$. Infine, grazie all'ipotesi (ND) su $\mathfrak{g}$, per motivi dimensionali deve necessariamente essere che $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

Questo prova definitivamente il Teor.1.1.5.

Appendice

Appendice A

Teoria di Dipendenza per ODE

Con la presente appendice ci proponiamo di esporre in modo dettagliato i risultati relativi alla Teoria delle Equazioni Differenziali Ordinarie ai quali abbiamo fatto ricorso in questo lavoro di tesi. Più precisamente, dopo aver richiamato i ben noti teoremi di esistenza e unicità, verrà affrontato il problema dell'esistenza di soluzioni massimali, investigandone anche la regolarità in riferimento ai parametri e condizioni iniziali.

A.1 Esistenza e Unicità

Nel seguito sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua. Indichiamo con (t, x) il generico punto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{A.1}$$

è, per definizione, una funzione $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$, dove I indica un intervallo di $\mathbb{R}$, tale che

$$(t, \gamma(t)) \in \Omega \quad \text{ e } \quad \dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t)) \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Fissato un punto $(t_0, x_0) \in \Omega$, si chiama soluzione del Problema di Cauchy

$$(PC) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

una funzione $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ soluzione dell'equazione differenziale in (PC) tale che

$$t_0 \in I \quad \text{ e } \quad \gamma(t_0) = x_0.$$

E' ben noto il seguente risultato:

Proposizione A.1.1. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ contenente t_0 e sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ una funzione tale che $(t, \gamma(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$. Allora γ è soluzione di (PC) se e solo se $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^N)$ e verifica l'equazione integrale di Volterra*

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds \qquad \forall\ t \in I.$$

Dati $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $h, r > 0$, useremo la seguente notazione per indicare il cilindro chiuso in $\mathbb{R}^{1+N}$

$$C_{h,r}(t_0, x_0) := [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B(x_0, r)},$$

dove $\overline{B(x_0, r)}$ denota la palla euclidea chiusa di centro x_0 e raggio r.

Chiameremo cilindro di sicurezza per $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ogni cilindro chiuso $C_{h,r} \subset \Omega$ tale che

$$\max_{(t,x) \in C_{h,r}} \|f(t, x)\| \cdot h \leq r.$$

Osservazione A.1.2. E' semplice dimostrare che, per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$, per ogni funzione $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$, esiste sempre almeno un cilindro di sicurezza $C_{h,r}(t_0, x_0)$ per f. Infatti, se $C_{H,R}(t_0, x_0)$ è un cilindro chiuso contenuto in Ω (che esiste poiché Ω è aperto), è sufficiente scegliere $r = R$ e $h > 0$ abbastanza piccolo in modo che

$$h \leq \min \left\{ H, \frac{R}{\max_{C_{H,R}} \|f\|} \right\}.$$

Osserviamo che se $f \equiv 0$ su $C_{H,R}(t_0, x_0)$, quest'ultimo è banalmente di sicurezza per f. ♯

Definizione A.1. *Una funzione $f = f(t, x) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ si dice localmente lipschitziana in Ω rispetto ad x se per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $L = L(K) > 0$ tale che*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \textit{per ogni } (t, x_1), (t, x_2) \in K.$$

Si ha il noto risultato:

Teorema A.1.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{1+N}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e localmente lipschitziana in Ω rispetto ad x. Se $(t_0, x_0) \in \Omega$ e se $C_{h,r}(t_0, x_0)$ è un qualche cilindro di sicurezza per f, allora posto $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ proiezione di $C_{h,r}$ sull'asse t, esiste un'unica soluzione $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ di (PC) tale che, inoltre,*

$$(t, \gamma(t)) \in C_{h,r}(t_0, x_0) \quad \textit{per ogni } t \in I.$$

L'unicità è intesa nel senso seguente: se $\psi \in C^1(J, \mathbb{R}^N)$ è un'altra soluzione di (PC), allora $\psi \equiv \gamma$ su $J \cap I$.

Ripercorriamo brevemente una dimostrazione del teorema sopra, basata sul Teorema di Punto Fisso di Banach-Caccioppoli.

Una ripetuta applicazione della proprietà di lipschitzianità locale permette di provare che la mappa

$$u \mapsto F(u)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds, \qquad t \in I$$

è tale che F^n è una contrazione (per un adeguato n) sullo spazio metrico completo

$$X := \{u \in C(I, \mathbb{R}^N) : ||u(t) - x_0|| \leq r \, se \, |t - t_0| \leq h\}$$

equipaggiato con la norma uniforme, in quanto, per ogni $u, v \in X$, risulta

$$\max_{t\in I} ||F^n(u)(t) - F^n(v)(t)|| \leq \frac{(L(C_{h,r})h)^n}{n!} \cdot \max_{t\in I} ||u(t) - v(t)||.$$

Osserviamo che il ruolo di $C_{h,r}$ come cilindro di sicurezza assicura che F mappi X dentro X, infatti:

$$||F(u)(t) - x_0|| \leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, u(s))||\, ds \leq \max_{(t,x)\in C_{h,r}} ||f(t, x)|| \cdot h \leq r.$$

Esiste quindi un elemento $u \in X$ tale che $F(u) = u$, di conseguenza u risolve (PC) nell'equivalente forma di Volterra.

Per l'unicità si può ragionare con un argomento di connessione: se $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ e $\psi \in C^1(J, \mathbb{R}^N)$ sono soluzioni di (PC), sfruttando ancora la lipschitzianità locale di f si può mostrare che il sottoinsieme chiuso non vuoto $\{t \in I \cap J : \gamma(t) = \psi(t)\}$ del connesso $I \cap J$ è anche relativamente aperto in tale intervallo.

Lemma A.1.4 (Ricoprimento con cilindri di sicurezza). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua. Sia poi K un sottoinsieme compatto di Ω. Allora esistono $h, r > 0$ ed esiste un compatto K' tali che $K \subset K' \subset \Omega$ e $C_{h,r}(t, x)$ è un cilindro di sicurezza per f, contenuto in K', uniformemente per $(t, x) \in K$.*

Dimostrazione. Segue da un semplice argomento di compattezza. □

I risultati precedenti permettono di dimostrare il seguente fondamentale

Teorema A.1.5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{1+N}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e localmente lipschitziana in Ω rispetto ad x. Sia poi K un sottoinsieme compatto di Ω. Allora esistono $h, r > 0$ (dipendenti da Ω, K e $||f||$) tali che per ogni $(t_0, x_0) \in K$, posto $I := [t_0 - h, t_0 + h]$, esiste un'unica soluzione $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ di (PC) tale che, inoltre,*

$$||\gamma(t) - x_0|| \leq r \qquad \text{per ogni } t \in I.$$

L'unicità è intesa nel senso del Teor.A.1.3.

Dimostrazione. Segue dal Lem.A.1.4 e dal Teor.A.1.3. □

Il precedente risultato assicura la risolubilità di un Problema di Cauchy al variare del dato iniziale (t_0, x_0) in un compatto K. Mostra inoltre che il dominio della soluzione ha lunghezza dipendente solo da K e che il suo grafico vive interamente in un compatto fissato.

Queste ultime proprietà verranno riprese in modo più dettagliato nella sezione successiva.

A.2 Soluzioni massimali

A seguire denoteremo sempre con $f = f(t, x)$ una funzione continua dall'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ ad $\mathbb{R}^N$, localmente lipschitziana in Ω rispetto ad x.

Sia $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ una soluzione dell'ODE (A.1), chiameremo prolungamento proprio di γ ogni altra soluzione $\psi \in C^1(J, \mathbb{R}^N)$ della stessa ODE tale che

$$I \subsetneqq J \quad \text{e} \quad \psi \equiv \gamma \text{ su } I.$$

Se non esiste alcun prolungamento proprio di γ diremo che γ è una soluzione massimale di (A.1). In tal caso ci riferiremo ad I con il termine di dominio massimale.

In modo analogo si parlerà di soluzione massimale del Problema di Cauchy (PC).

Osservazione A.2.1. Siano $\gamma_i \in C^1(I_i, \mathbb{R}^N)$, per $i = 1, 2$, soluzioni di (A.1). Se $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$ e se $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ su $I_1 \cap I_2$, allora l'unione di γ_1 e γ_2

$$(\gamma_1 \curlyvee \gamma_2) : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^N \qquad (\gamma_1 \curlyvee \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & se\, t \in I_1 \\ \gamma_2(t) & se\, t \in I_2 \end{cases}$$

è una soluzione di (A.1) su $I_1 \cup I_2$. ♯

La precedente osservazione è la chiave dell'esistenza di una soluzione massimale, vale infatti il seguente risultato:

Teorema A.2.2. *Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$. Allora in Problema di Cauchy (PC) ha almeno una soluzione massimale γ, definita su un intervallo aperto contenente t_0.*

Dimostrazione. Sia $\{K_n\}_n$ una famiglia di compatti in Ω tali che

$$K_n \subset \mathrm{Int}(K_{n+1}) \text{ per ogni } n \quad \text{e} \quad \Omega = \cup_n K_n.$$

Un argomento iterativo basato sul Teor.*A.1.5* e sulla tecnica di unione in Oss.*A.2.1* permette di costruire, oltre ad una soluzione su $[t_0, \infty[$, delle successioni crescenti $\{n_k\}_k$ di naturali, $\{t_k\}_k$ in $]t_0, \infty[$ e una successione di funzioni $\{\gamma_k\}_k$ verificanti:

- γ_k è definita ed è C^1 su $[t_0, t_k]$, e risolve (PC) su tale intervallo;
- γ_{k+1} è un prolungamento di γ_k, cioè $\gamma_{k+1} \equiv \gamma_k$ su $[t_0, t_k]$;
- $(t_k, \gamma_k(t_k)) \notin K_{n_k}$.

Ponendo $\beta := \lim_{k\to\infty} t_k$, otteniamo una soluzione $\psi_+ \in C^1([t_0, \beta[, \mathbb{R}^N)$ di (PC) prolungante ogni γ_k e che non può essere ulteriormente prolungata oltre l'estremo destro β, in quanto la successione $\{(t_k, \psi_+(t_k))\}_k$ non è limitata o possiede un punto di accumulazione su $\partial\Omega$. La stessa procedura può essere eseguita a sinistra di t_0, da cui la tesi. □

Ora che abbiamo l'esistenza di una soluzione massimale andiamo a vedere l'unicità.

Proposizione A.2.3 (Fuga dai compatti). *Sia ψ una soluzione massimale dell'ODE* (A.1) *con dominio massimale $]\alpha, \beta[$. Allora per ogni compatto K di Ω esistono $\alpha(K), \beta(K) \in]\alpha, \beta[$ tali che*

$$(t,\psi(t)) \notin K, \quad \textit{per ogni } t \in]\alpha, \alpha(K)[\cup]\beta(K), \beta[.$$

Dimostrazione. Fissato un compatto $K \subset \Omega$ proviamo solo l'esistenza di $\beta(K)$ come sopra, giacché per il caso di $\alpha(K)$ si ragiona in modo analogo. Distinguiamo due casi.

Sia $\beta = +\infty$. Essendo K compatto, anche la sua proiezione sull'asse t è compatta, esiste dunque $T > 0$ tale che $K \subset [-T, T] \times \mathbb{R}^N$. Scegliamo allora $\beta(K) := T$, è banale che

$$\beta(K) < \beta = +\infty \quad \text{e} \quad (t,\psi(t)) \notin K \text{ per ogni } t > \beta(K).$$

Assumiamo ora che $\beta < +\infty$. Siano $h, r > 0$ come nel Lem.*A.1.4* relativamente al compatto K e all'aperto Ω. Poniamo $\beta(K) := \beta - h$ e dimostriamo che $\beta(K)$ soddisfa l'asserto ragionando per assurdo. Supponiamo quindi che si abbia $(\bar{t}, \psi(\bar{t})) \in K$ per almeno un $\bar{t} \in]\beta(K), \beta[$. Si noti che $\bar{t} + h > \beta$.

Sia $\bar{\psi}$ una soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = f(t,z) \\ z(\bar{t}) = \psi(\bar{t}). \end{cases} \tag{A.2}$$

Grazie al Lem.*A.1.4*, essendo $C_{h,r}(\bar{t}, \psi(\bar{t}))$ un cilindro di sicurezza per f (dato che $(\bar{t}, \psi(\bar{t})) \in K$), la soluzione di (A.2) esiste almeno sull'intervallo $[\bar{t} - h, \bar{t} + h]$.

D'altra parte, anche la funzione

$$\hat{\psi}(t) := \begin{cases} \psi(t) & se\, t \in]\alpha, \bar{t}[\\ \bar{\psi}(t) & se\, t \in [\bar{t}, \bar{t} + h[\end{cases}$$

risolve (A.2), ed essendo $\bar{t} + h > \beta$ risulterebbe un prolungamento proprio a destra della soluzione massimale ψ. Dall'assurdo segue la tesi. □

Dai Teor.*A.1.5*, Teor.*A.2.2* e dalla Prop.*A.2.3* otteniamo il seguente risultato:

Teorema A.2.4. *Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$. Allora il Problema di Cauchy (PC) ammette un'unica soluzione massimale $\psi \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^N)$ il cui dominio massimale $\mathcal{D}$ è un intervallo aperto $]\alpha, \beta[$ contenente t_0.*

Inoltre $\psi(t)$ tende a $\partial\Omega$ per $t \to \alpha$ e per $t \to \beta$, nel senso della Prop.A.2.3.

A.3 Dipendenza continua dai dati iniziali

Denotando con $\gamma_0(t)$ la soluzione del Problema di Cauchy $\dot{x} = f(t,x)$ con dato iniziale (t_0, x_0), se interpretiamo la traiettoria delle soluzioni come l'evoluzione nel tempo del sistema fisico associato, ci aspettiamo che, variando di poco la posizione iniziale e/o il tempo iniziale, la traiettoria corrispondente sia vicina a quella di γ_0.

Più precisamente, faremo vedere come le soluzioni dipendono da t_0 e x_0 e osserveremo che, sotto le usuali ipotesi su f, la funzione che associa ai dati (t_0, x_0) la soluzione, è una funzione "continua" (in un senso che specificheremo).

Premettiamo un noto lemma.

Lemma A.3.1 (Lemma di Gronwall). *Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e siano $u, v \in C([a,b],\mathbb{R})$, con u non negativa, e sia $C \geq 0$ una costante. Supponiamo che si abbia*

$$v(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)\,ds, \quad \textit{per ogni}\, t \in [a,b]. \tag{A.3}$$

Allora vale

$$v(t) \leq C\,exp\left(\int_a^t u(s)\,ds\right), \quad \textit{per ogni}\, t \in [a,b]. \tag{A.4}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $t \mapsto F(t)$ membro destro di (A.3).

Poiché u e v sono continue, $F \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Inoltre, essendo $v \leq F$ (moltiplicando per $u \geq 0$) si ha:

$$F'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)F(t), \quad \text{per ogni } t \in [a,b].$$

Dalla disuguaglianza $F' \leq uF$ segue immediatamente che, per $t \in [a,b]$,

$$w'(t) \leq 0, \quad \text{dove} \quad w(t) := F(t)\,\exp\Big(-\textstyle\int_a^t u(s)\,ds\Big),$$

e ciò implica che w è non crescente su $[a,b]$, dunque

$$\exp\left(-\int_a^t u(s)\,ds\right)v(t) \leq \exp\left(-\int_a^t u(s)\,ds\right)F(t) = w(t) \leq w(a) = C,$$

per ogni $t \in [a,b]$, e ciò è equivalente a (A.4). $\square$

Prima di proseguire, forniamo una definizione.

Definizione A.2. *Una funzione $\beta : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice inferiormente semicontinua (i.s.c.) in un punto z_0 (del derivato di A) se*

$$\liminf_{z \to z_0} \beta(z) \geq \beta(z_0).$$

Equivalentemente, β è i.s.c. in z_0 se per ogni $L < \beta(z_0)$ esiste un intorno V di z_0 tale che $L < \beta(z)$ per ogni $z \in V \cap A$.

In modo analogo si definiscono le funzioni superiormente semicontinue (s.s.c.).

Teorema A.3.2 (Dipendenza continua dal dato di Cauchy). *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{1+N}$ e sia $f = f(t,x) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e localmente lipschitziana in Ω rispetto ad x. Dato $(t_0, x_0) \in \Omega$ denotiamo con $t \to \gamma(t, t_0, x_0)$ la soluzione massimale del Problema di Cauchy*

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definita sul dominio massimale $\mathcal{D}(t_0,x_0) =]\alpha(t_0,x_0), \beta(t_0,x_0)[$. Allora:

- *l'insieme $\mathcal{D} := \{(t,t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{2+N} : (t_0,x_0) \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(t_0,x_0)\}$ è aperto;*
- *la funzione $(t,t_0,x_0) \mapsto \gamma(t,t_0,x_0)$ è continua su $\mathcal{D}$;*
- *$\beta(t_0,x_0)$ è i.s.c. su Ω e $\alpha(t_0,x_0)$ è s.s.c. su Ω.*

Osservazione A.3.3. L'asserto della semicontinuità delle funzioni che formano gli estremi dell'intervallo massimale è equivalente al seguente: fissato $(t_0, x_0) \in \Omega$, per ogni scelta di $\epsilon > 0$, esiste un intorno V_ϵ di (t_0, x_0) in Ω tale che le soluzioni massimali di tutti i Problemi di Cauchy (associati alla stessa ODE $\dot{x} = f(t, x)$) con dati iniziali in V_ϵ hanno dominio massimale almeno $[\alpha(t_0, x_0) + \epsilon, \beta(t_0, x_0) - \epsilon]$. $\sharp$

Dimostrazione. (Del Teor.A.3.2). Supponiamo che valga il seguente

CLAIM: *Siano $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ in modo che $\alpha(t_0, x_0) < \bar{\alpha} < \bar{\beta} < \beta(t_0, x_0)$. Preso comunque un $\epsilon > 0$ esiste un intorno $V \subset \Omega$ di (t_0, x_0) tale che, per ogni $(t_1, x_1) \in V$,*

- $\mathcal{D}(t_1, x_1) \supset [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$;
- $||\gamma(t, t_1, x_1) - \gamma(t, t_0, x_0)|| < \epsilon$ *per* $t \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$.

Assumiamo il CLAIM e proviamo il teorema. Per semplicità di notazione poniamo

$$\gamma_i(t) = \gamma(t, t_i, x_i), \quad \alpha_i = \alpha(t_i, x_i), \quad \beta_i = \beta(t_i, x_i) \qquad i = 0, 1.$$

Iniziamo mostrando la continuità di γ_0 su $\mathcal{D}$. Fissiamo $(t', t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, $\epsilon > 0$ e scegliamo $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ tali che $\alpha_0 < \bar{\alpha} < t' < \bar{\beta} < \beta_0$. Per il CLAIM esiste un intorno V di (t_0, x_0) contenuto in Ω tale che la soluzione γ_1 è definita per $(t_1, x_1) \in V$, $t \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ e, inoltre,

$$||\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{per } t \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}].$$

Osserviamo che $t \mapsto \gamma_0(t)$ è continua su $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ in quanto soluzione di (PC), ricordando che $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subset [\alpha_0, \beta_0]$. Pertanto esiste $\delta > 0$ con $\{|t - t'| < \delta\} \subset [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ tale che

$$||\gamma_0(t) - \gamma_0(t')|| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{se } |t - t'| < \delta.$$

Di conseguenza, per $(t, t_1, x_1) \in \{|t - t'| < \delta\} \times V$, si ha:

$$||\gamma_1(t) - \gamma_0(t')|| \leq ||\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|| + ||\gamma_0(t) - \gamma_0(t')|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Questo prova la continuità della funzione γ su $\mathcal{D}$.

Notiamo che $\mathcal{D}$ è aperto, infatti se $(t', x_0, t_0) \in \mathcal{D}$, si è visto che l'insieme $\{|t - t'| < \delta\} \times V$ è un intorno di (t', t_0, x_0) contenuto in $\mathcal{D}$ (dal fatto che $\{|t - t'| < \delta\} \subseteq \mathcal{D}(t_0, x_0)$ e $V \subseteq \Omega$).

Mostriamo infine la i.s.c. di β (la s.s.c. di α si prova in modo analogo). Usando ancora il CLAIM abbiamo che per ogni $\bar{\beta} < \beta_0$ esiste un intorno $V \subseteq \Omega$ di (t_0, x_0) per il quale, se $(t_1, x_1) \in V$, allora $\mathcal{D}(t_1, x_1) \supset [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, cioè $\beta_1 > \bar{\beta}$, da cui la i.s.c. di β in (t_0, x_0).

Resta da dimostrare il CLAIM.

Consideriamo il compatto $K := \{(s, \gamma_0(s)) : s \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]\}$. Dal Lem.A.1.4 esistono $h, r > 0$ e un insieme compatto $K' \subset \Omega$ contenente K tale che

$$C_{h,r}(s, \gamma_0(s)) := \{(s', x') : |s' - s| \leq h, \, ||x' - \gamma_0(s)|| \leq r\} \subset K', \quad \text{per } s \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}].$$

Inoltre, sempre per il Lem.A.1.4, è noto che possiamo scegliere h e r in modo che tutti i cilindri $C_{h,r}(s, \gamma_0(s))$ (al variare di $s \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$) siano di sicurezza per l'equazione differenziale $\dot{x} = f(t, x)$. Siano poi $M_1 := \max_{K'} ||f(t, x)||$ e M_2 la costante di lipschitz di f su K'. Dato $0 < \epsilon < r$, scegliamo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo in modo che

$$\delta < \min\{h, r\}, \quad [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \quad \text{e} \quad \delta(1 + M_1) \exp(M_2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})) < \epsilon < r.$$

Poniamo $V := \{(t, x) \in \Omega : |t - t_0| < \delta, ||x - x_0|| < \delta\}$ e osserviamo che $V \subset C_{h,r}(t_0, x_0) \subset K'$. Fissato $(t_1, x_1) \in V$, essendo $|t_1 - t_0| < \delta$, si ha

$$||\gamma_0(t_1) - x_0|| \leq \int_{t_0}^{t_1} ||f(s, \gamma_0(s))||\, ds \leq M_1 |t_1 - t_0| \leq M_1 \delta. \tag{A.5}$$

Consideriamo quindi la funzione $t \mapsto \gamma_1(t)$ definita sull'intervallo massimale $]\alpha_1, \beta_1[$ e definiamo $t^* := \sup\{t : (s, \gamma_1(s)) \in K', s \in [t_1, t]\}$. Dal fatto che il grafico di $(t, \gamma_1(t))$ è destinato ad uscire dal compatto K' (si veda la Prop.A.2.3), abbiamo che $t^* < \beta_1$. Inoltre, per $t < \min\{t^*, \bar{\beta}\}$, si ha che $(t, \gamma_i(t)) \in K'$ per $i = 0, 1$, pertanto:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) - \gamma_0(t) &= x_1 - x_0 + \int_{t_1}^{t} f(s, \gamma_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma_0(s))\, ds \\
&= x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} f(s, \gamma_0(s))\, ds + \int_{t_1}^{t} f(s, \gamma_1(s))\, ds - \int_{t_1}^{t} f(s, \gamma_0(s))\, ds \\
&= x_1 - x_0 + x_0 - \gamma_0(t_1) + \int_{t_1}^{t} \Big(f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_0(s)) \Big)\, ds.
\end{aligned}$$

Per $t_1 < t < \min\{t^*, \bar{\beta}\}$ abbiamo la seguente stima:

$$\begin{aligned}
||\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|| &\leq ||x_1 - x_0|| + ||x_0 - \gamma_0(t_1)|| + \int_{t_1}^{t} ||f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_0(s))||\, ds \\
&\leq \delta + \delta M_1 + \int_{t_1}^{t} M_2 ||\gamma_1(s) - \gamma_0(s)||\, ds.
\end{aligned}$$

Nell'ultima stima si è usato, nell'ordine: $(t_1, x_1) \in V$ e la definizione di V, la stima in (A.5), la definizione di M_2 insieme al fatto che il grafico di γ_0 giace in $K \subset K'$ e che il grafico di γ_1 giace in K' almeno per i tempi in $[t_1, t^*]$. Infine, dalla Disuguaglianza di Gronwall e dalla scelta di δ, otteniamo:

$$||\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|| \leq \delta(1 + M_1) \exp(M_2(t - t_1)) < \epsilon < r \tag{A.6}$$

per $t_1 < t < \min\{t^*, \bar{\beta}\}$. Questa stima prova anche che, in tale intervallo di tempo, si ha

$$(t, \gamma_1(t)) \in C_{h,r}(t, \gamma_0(t)) \subset K'.$$

Ora, se per assurdo fosse $t^* < \bar{\beta}$, avremmo provato che

$$||\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|| < \epsilon < r \qquad \text{per ogni } t \in]t_1, t^*[$$

e, per continuità, la disuguaglianza si propaga a $t = t^*$. Quindi $(t^*, \gamma_1(t^*)) \in \mathrm{Int}\big(C_{h,r}(t^*, \gamma_0(t^*))\big) \subset K'$ ed essendo $\mathrm{Int}\big(C_{h,r}(t^*, \gamma_0(t^*))\big)$ un aperto contenuto in K' viene contraddetta la definizione di t^*. Ne segue che $t^* \geq \bar{\beta}$, dunque $\beta_1 > t^* \geq \bar{\beta}$. La disuguaglianza (A.6) conclude la dimostrazione del CLAIM e il teorema è provato. $\square$

A.4 Introduzione di parametri

E' chiaro che la soluzione massimale di (PC) dipende sia dai dati iniziali sia da eventuali parametri che possono comparire nell'equazione differenziale. Consideriamo quindi Problemi di Cauchy associati ad ODE del tipo

$$\dot{x} = f(t, x, z)$$

dove $f : \Omega \times O \to \mathbb{R}^N$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$, $O \subseteq \mathbb{R}^m$ degli aperti e con la convenzione che $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $z \in \mathbb{R}^m$. Qui O ha il ruolo di spazio di parametri.

Il trucco si basa sulla possibilità di "spostare" i parametri sia nell'incognita, sia nei dati iniziali. Più precisamente, fissati $(t_0, x_0) \in \Omega$ e $z_0 \in O$, il Problema di Cauchy

$$(PC_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z) \\ \dot{z} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

e quest'ultimo può essere pensato come un nuovo Problema di Cauchy

$$(PC_2) \quad \begin{cases} (x, z)' = (f(t, x, z), 0) \\ (x, z)(t_0) = (x_0, z_0) \end{cases}$$

definito sull'aperto $\Omega \times O$ con dato iniziale (t_0, x_0, z_0) e associato ad una ODE con funzione definente $\hat{f}(t, x, z) = (f(t, x, z), 0)$.

Supporremo f continua su $\Omega \times O$ e che abbia derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_j} \qquad 1 \le i \le N, \quad 1 \le j \le m$$

continue su $\Omega \times O$, in tal modo viene garantita l'unica risolubilità sia di (PC_1) sia di (PC_2).

Denotiamo provvisoriamente con $t \mapsto x(t, t_0, x_0; z_0)$ la soluzione massimale di (PC_1), dipendente sia dai dati iniziali (t_0, x_0) sia dal parametro z_0, e chiamiamo $t \mapsto (x(t, t_0, (x_0, z_0)), z(t, t_0, (x_0, z_0)))$ la soluzione massimale di (PC_2), dipendente dai dati iniziali $(t_0, (x_0, z_0))$.

Non è difficile riconoscere che tali funzioni hanno lo stesso dominio massimale, che $z(t, t_0, (x_0, z_0)) \equiv z_0$ e che si ha

$$x(t, t_0, x_0; z_0) = x(t, t_0, (x_0, z_0)),$$

per ogni t nel comune dominio massimale.

Riprendendo la solita notazione γ per la soluzione massimale nel seguito scriveremo, per semplicità, $\gamma(t, t_0, x_0, z_0)$ e denoteremo con

$$\mathcal{D}(t, t_0, x_0, z_0) =]\alpha(t_0, x_0, z_0), \beta(t_0, x_0, z_0)[$$

il suo dominio massimale.

Possiamo quindi applicare il Teor.A.3.2 nel caso di (PC_2) ed ereditare le informazioni per la soluzione di (PC_1).

Teorema A.4.1 (Dipendenza continua dai dati e dai parametri). *Nelle notazioni precedenti, si ha:*

- *l'insieme* $\mathcal{D} := \{(t, t_0, x_0, z_0) \in \mathbb{R}^{2+N+m} : (t_0, x_0, z_0) \in \Omega \times O,\ t \in \mathcal{D}(t_0, x_0, z_0)\}$ *è aperto;*
- *la funzione* $(t, t_0, x_0, z_0) \mapsto \gamma(t, t_0, x_0, z_0)$ *è continua su* $\mathcal{D}$*;*
- $\beta(t_0, x_0, z_0)$ *è i.s.c. su* $\Omega \times O$ *e* $\alpha(t_0, x_0, z_0)$ *è s.s.c. su* $\Omega \times O$.

Dal teorema di cui sopra segue il seguente risultato:

Corollario A.4.2. *Preso* $s \in \mathbb{R}$*, consideriamo il seguente Problema di Cauchy parametrico*

$$(PC_s) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, s) & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con le usuali ipotesi su f*. Detta* $\gamma(\cdot, s) \in C^1(\mathcal{D}(s), \mathbb{R}^N)$ *la soluzione massimale di* (PC_s)*, allora per ogni compatto* $K \subset \mathbb{R}$ *e* $h > 0$*, esiste* $\epsilon = \epsilon(K, h) > 0$ *tale che*

- $\mathcal{D}(s) \supset [-\epsilon, \epsilon]$ *per ogni* $s \in K$*;*
- $||\gamma(t, s)|| \leq h$ *per ogni* $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ *e per ogni* $s \in K$.

Dimostrazione. Fissiamo il compatto $K \subset \mathbb{R}$, $h > 0$ e sia $\mathcal{D}(s) =]\alpha(s), \beta(s)[$.

Per il Teor.A.4.1, $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ risultano rispettivamente s.s.c. e i.s.c. su $\mathbb{R}$. Poiché le funzioni s.s.c. (i.s.c.) su un compatto ammettono massimo (minimo), esistono s_1, $s_2 \in K$ tali che

$$\alpha(s) \leq \alpha(s_1) \quad \text{per ogni } s \in K \quad \text{e} \quad \beta(s) \geq \beta(s_2) \quad \text{per ogni } s \in K.$$

Posti $\bar{\alpha} := \alpha(s_1)$ e $\bar{\beta} := \beta(s_2)$, deve necessariamente essere (essendo $t_0 = 0$),

$$\alpha(s) \leq \bar{\alpha} < 0 < \bar{\beta} \leq \beta(s) \qquad \text{per ogni } s \in K.$$

Pertanto $\gamma(\cdot, s)$ è definita almeno su $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, uniformemente per $s \in K$.

Dal Teor.A.4.1 segue inoltre che $(t, s) \mapsto \gamma(t, s)$ è definita e continua, quindi uniformemente continua, sul compatto $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \times K$. Dunque, ricordando anche l'Oss.A.3.3, è possibile trovare $\epsilon > 0$ (che dipenderà da K e h ma non da s) tale che $[-\epsilon, \epsilon] \subseteq [\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \subset \mathcal{D}$, per ogni $s \in K$ e,

$$||\gamma(t, s) - \gamma(0, s)|| = ||\gamma(t, s)|| \leq h \qquad \text{per ogni } t \in [\epsilon, \epsilon] \text{ e per ogni } s \in K.$$

Questo conclude la prova. $\square$

A.5 Dipendenza C^k

Il Teor.A.4.1 assicura che la soluzione di un Problema di Cauchy dipende in modo continuo dai dati iniziali e dai parametri. Vogliamo ora provare un più forte risultato di regolarità: questa dipendenza è tanto regolare quanto è regolare la funzione f definente l'equazione differenziale.

Iniziamo con un lemma tecnico.

Lemma A.5.1. *Sia $I =]a, b[$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $V \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto convesso. Sia poi $f = f(t, y) \in C(I \times V, \mathbb{R})$ e supponiamo che, per ogni $t \in I$ fissato, la mappa $y \mapsto f(t, y)$ sia differenziabile su V e che $\nabla_y f$ sia continuo su $I \times V$. Allora la funzione $g \in C(I \times V \times V, \mathbb{R}^N)$ definita da*

$$g(t, y_1, y_2) := \int_0^1 (\nabla_y f)\big(t, sy_2 + (1-s)y_1\big)\, ds$$

verifica, per ogni $(t, y), (t, y_1), (t, y_2) \in I \times V$, le seguenti proprietà:

$$g(t, y, y) = (\nabla_y f)(t, y) \quad e \quad f(t, y_1) - f(t, y_2) = \langle g(t, y_1, y_2), y_1 - y_2 \rangle.$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue da una diretta applicazione del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale alla funzione

$$F(s) := f\big(t, sy_2 + (1-s)y_1\big) \quad 0 \le s \le 1,$$

ben definita grazie all'ipotesi sulla convessità di V. □

Il lemma precedente può essere facilmente esteso per funzioni a valori vettoriali. Più precisamente, consideriamo una funzione $f \in C(I \times V, \mathbb{R}^p)$ e supponiamo che, per ogni $t \in I$ fissato, la mappa $y \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^p$ sia differenziabile su V e che $\mathcal{J}_y f$ sia continua su $I \times V$. Ragionando componente per componente, ad f verrà associata una funzione g continua su $I \times V \times V$ a valori nelle matrici $p \times N$ data da

$$g(t, y_1, y_2) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\big(t, sy_2 + (1-s)y_1\big)\, ds$$

verificante, per ogni $(t, y), (t, y_1), (t, y_2) \in I \times V$,

$$g(t, y, y) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(t, y) \quad \text{e} \quad f(t, y_1) - f(t, y_2) = g(t, y_1, y_2) \cdot (y_1 - y_2).$$

Siamo pronti per enunciare il seguente

Teorema A.5.2 (Dipendenza C^1). *Sia $\Omega \times O \subseteq \mathbb{R}^{1+N} \times \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $f = f(t, x, z) : \Omega \times O :\to \mathbb{R}^N$ una funzione continua dotata di derivate parziali*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_j} \qquad 1 \le i \le N, \quad 1 \le j \le N$$

continue su $\Omega \times O$. Dato $(t_0, x_0, z) \in \Omega \times O$, sia $t \mapsto \gamma(t, t_0, x_0, z)$ la soluzione massimale del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definita sul dominio massimale $\mathcal{D}(t_0,x_0,z) =]\alpha(t_0,x_0,z),\beta(t_0,x_0,z)[$. *Allora la funzione* $(t,t_0,x_0,z) \mapsto \gamma(t,t_0,x_0,z)$ *è di classe* C^1 *sull'aperto*

$$\mathcal{D} = \{(t,t_0,x_0,z) \in \mathbb{R}^{2+N+m} : (t_0,x_0,z) \in \Omega \times O,\ t \in \mathcal{D}(t_0,x_0,z)\}.$$

Valgono inoltre i seguenti fatti:

- *la funzione* $\mathcal{D}(t_0,x_0,z) \ni t \mapsto \frac{\partial\gamma}{\partial x_0}(t,t_0,x_0,z)$ *è soluzione massimale del problema di Cauchy lineare omogeneo*

$$(\bigstar)\ \begin{cases} \dot{A} = J(t)A \\ A(t_0) = I_N, \end{cases} \qquad \textit{dove}\ \ J(t) = J_{t_0,x_0,z}(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z)$$

  e I_N *è la matrice identità* $N \times N$*;*

- *la funzione* $\mathcal{D}(t_0,x_0,z) \ni t \mapsto \frac{\partial\gamma}{\partial z}(t,t_0,x_0,z)$ *è soluzione massimale del problema di Cauchy lineare non omogeneo*

$$(2\bigstar)\ \begin{cases} \dot{B} = J(t)B + g(t) \\ B(t_0) = 0, \end{cases} \qquad \textit{dove}\ \ g(t) = g_{t_0,x_0,z}(t) := \frac{\partial f}{\partial z}(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z);$$

- $\dfrac{\partial\gamma}{\partial t_0}(t,t_0,x_0,z) = -\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_0}(t,t_0,x_0,z)\cdot f(t_0,x_0,z)$ *per ogni* $t \in \mathcal{D}(t_0,x_0,z)$.

Dimostrazione. Ricordando il gioco fatto per passare da (PC_1) all'equivalente (PC_2) possiamo supporre che f non dipenda da z. Pertanto, d'ora in avanti, consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

avente soluzione massimale $t \mapsto \gamma(t,t_0,x_0)$ definita sull'intervallo massimale $\mathcal{D}(t_0,x_0) =]\alpha(t_0,x_0),\beta(t_0,x_0)[$.

Per il Teor.*A.3.2*, γ è continua sull'aperto

$$\mathcal{D} = \{(t,t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{2+N} : (t_0,x_0) \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(t_0,x_0)\},$$

ed essendo $f \in C(\Omega,\mathbb{R}^N)$ anche la funzione

$$(t,t_0,x_0) \mapsto \frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,t_0,x_0) = f(t,\gamma(t,t_0,x_0))$$

è continua su $\mathcal{D}$.

Proviamo ora l'esistenza delle derivate parziali di γ rispetto t_0 e x_0. Fissiamo $(t^*,\bar{z}) = (t^*,(\bar{t},\bar{x})) \in \mathcal{D}$ e sia $[a,b] \subset \mathcal{D}(\bar{t},\bar{x})$ tale che $t^*,\bar{t} \in [a,b]$. Sia poi $r > 0$ tale che

- $K := [a,b] \times \overline{B(\bar{z},r)} \subset \mathcal{D}$;
- $(t_0,x_0) \in B(\bar{z},r)$ se $t_0 \in [a,b]$.

Dal fatto che gli asserti del teorema sono locali è sufficiente provarli nell'interno $\mathcal{U}$ di K, che è un intorno di $(t^*, (\bar{t}, \bar{x}))$. Scegliamo quindi un punto $(t_0, x_0) \in B(\bar{z}, r)$.

Volendo provare l'esistenza di $\frac{\partial \gamma}{\partial x_0}$ definiamo, per ogni $h \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo tale che $(t_0, x_0 + he_k) \in B(\bar{z}, r)$ e $k \in \{1, ..., N\}$,

$$\gamma_h(t) := \gamma(t, t_0, x_0 + he_k), \qquad t \in \mathcal{D}(t_0, x_0 + he_k).$$

Poiché $K \subset \mathcal{D}$, γ_h è definita almeno su $[a, b] \ni t_0$. Inoltre, essendo γ continua su $\mathcal{D}$ e K è compatto, abbiamo

$$\lim_{h \to 0} \gamma_h(t) = \gamma_0(t) := \gamma(t, t_0, x_0), \quad \text{uniformemente per } t \in [a, b]. \tag{A.7}$$

Per il Lem.A.1.4, scelti $\eta, \delta > 0$, possiamo trovare un compatto K' in Ω tale che $[t - \eta, t + \eta] \times \overline{B(\gamma_0(t), \delta)} \subseteq K'$ per ogni $t \in [a, b]$. Inoltre, per (A.7) esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\sup_{t \in [a,b]} ||\gamma_h(t) - \gamma_0(t)|| < \delta, \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R},\ |h| \leq \epsilon. \tag{A.8}$$

Osserviamo che per $0 < |h| < \epsilon$, la funzione

$$u_h : [a, b] \to \mathbb{R}^N \qquad u_h(t) := \big(\gamma_h(t) - \gamma_0(t)\big)/h$$

verifica:

$$\begin{cases} \dot{u}_h(t) = \big(f(t, \gamma_h(t)) - f(t, \gamma_0(t))\big)/h \\ u_h(t_0) = (x_0 + he_k - x_0)/h = e_k. \end{cases}$$

Da (A.8) si ha che $\gamma_h(t) \in B(\gamma_0(t), \delta)$ e, grazie al Lem.A.5.1, u_h risolve sull'aperto $]a, b[$ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = J_h(t)x \\ x(t_0) = e_k, \end{cases}$$

dove $J_h(t) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, s\gamma_h(t) + (1 - s)\gamma_0(t)\big)\, ds$, con $|h| < \epsilon$.

Osserviamo inoltre che, per l'uniforme continuità di f su $K' \subset \Omega$ e le identità (A.7) e (A.8), abbiamo:

- $(t, h) \mapsto J_h(t)$ è continua su $[a, b] \times] - \epsilon, \epsilon[$;
- $J_h(t) \to J(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma_0(t))$ per $h \to 0$, uniformemente per $t \in [a, b]$.

Facciamo ora variare $k = 1, ..., N$ e collezioniamo le funzioni u_h così ottenute ponendole in colonna in una $N \times N$-matrice U_h, soluzione su $]a, b[$ del Problema di Cauchy matriciale

$$(PC_h) \qquad \begin{cases} \dot{A}_h = J_h(t)A_h \\ A_h(t_0) = I_N. \end{cases}$$

Il Teor.A.4.1 garantisce che il limite

$$U(t) := \lim_{h \to 0} U_h(t)$$

esiste per ogni $t \in]a,b[$ ed è l'unica soluzione massimale di

$$(PC_0) \qquad \begin{cases} \dot{A} = J(t)A \\ A(t_0) = I_N. \end{cases}$$

Dall'arbitrarietà di $(t_0, x_0) \in B(\bar{z}, r)$, abbiamo ottenuto che $U(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$ esiste per ogni $(t, t_0, x_0) \in \mathcal{U}$.

Al fine di verificare che questa matrice Jacobiana ha entrate continue, riscriviamo ($\bigstar$) nella forma più esplicita

$$\begin{cases} \dot{A} = J(t, t_0, x_0)A \\ A(t_0) = I_N, \end{cases} \qquad \text{dove} \quad J(t, t_0, x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(t, t_0, x_0)).$$

Poiché f fa derivate parziali continue su Ω e $\gamma \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^N)$, la funzione $(t, t_0, x_0) \mapsto J(t, t_0, x_0)$ è continua su $\mathcal{U}$. Di conseguenza, per il Teor. A.3.2, la mappa $(t, t_0, x_0) \mapsto \frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$ è continua su $\mathcal{U}$ e, come funzione di t, è soluzione massimale di ($\bigstar$).

Prendiamo ora in analisi l'esistenza e continuità di $\frac{\partial \gamma}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)$. Definiamo quindi, per $h \in \mathbb{R}$ tale che $(t_0 + h, x_0) \in B(\bar{z}, r)$, la mappa

$$\psi_h(t) := \gamma(t, t_0 + h, x_0),$$

definita almeno su $[a, b]$ per tale scelta di r. Con le solite notazioni per η, δ e K', dal fatto che

$$\lim_{h \to 0} \psi_h(t) = \psi_0(t) := \gamma(t, t_0, x_0) \quad \text{uniformemente per } t \in [a, b], \tag{A.9}$$

è possibile trovare $\epsilon > 0$ tale che

$$\sup_{t \in [a,b]} ||\psi_h(t) - \psi_0(t)|| < \delta, \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R},\ |h| \leq \epsilon.$$

Poiché la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x(t_0, t_0 + h, x_0) \end{cases}$$

è la stessa di

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0 + h) = x_0, \end{cases}$$

usiamo le dovute notazioni

$$\gamma(t, t_0 + h, x_0) = \gamma(t, t_0, \gamma(t_0, t_0 + h, x_0)),$$

per ogni $t \in [a, b] \subset \mathcal{D}(t_0 + h, x_0) = \mathcal{D}(t_0, \gamma(t_0, t_0 + h, x_0))$.

Pertanto, per $0 < |h| < \epsilon$, la funzione

$$v_h : [a, b] \to \mathbb{R}^N \qquad v_h(t) := \big(\psi_h(t) - \psi_0(t)\big)/h$$

può essere riscritta come

$$v_h(t) = \big(\gamma(t, t_0, \gamma(t_0, t_0 + h, x_0)) - \gamma(t, t_0, x_0)\big)/h.$$

Da (A.9) e dal fatto che $\gamma(t_0, t_0, x_0) = x_0$ possiamo supporre ϵ sufficientemente piccolo in modo che

$$(t_0, \gamma(t_0, t_0 + h, x_0)) \in B(\bar{z}, r), \quad \text{per ogni } |h| \leq \epsilon$$

e quindi applicare il Lem.*A*.5.1 ottenendo

$$v_h(t) = \tilde{J}_h(t) \cdot \left(\frac{\gamma(t_0, t_0 + h, x_0) - x_0}{h}\right), \quad \text{per } t \in [a, b],\ 0 < |h| < \epsilon$$

dove $\tilde{J}_h(t) := \int_0^1 \frac{\partial \gamma}{\partial x_0}\big(t, t_0, s\gamma(t_0, t_0 + h, x_0) + (1 - s)x_0\big)\, ds$, con $|h| < \epsilon$.

Inoltre, per la continuità di $\frac{\partial \gamma}{\partial x_0}$ su $\mathcal{D}$ e dunque sul compatto K, si ha:

$$\lim_{h \to 0} \tilde{J}_h(t) = \tilde{J}_0(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(t, t_0, x_0), \quad \text{uniformemente per } t \in [a, b]. \tag{A.10}$$

D'altra parte, poiché $x_0 = \gamma(t_0 + h, t_0 + h, x_0)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \gamma(t_0, t_0 + h, x_0) - x_0 &= \gamma(t_0, t_0 + h, x_0) - \gamma(t_0 + h, t_0 + h, x_0) \\ &= -h \int_0^1 \dot{\gamma}\big(t_0 + (1 - s)h, t_0 + h, x_0\big)\, ds \\ &= -h \int_0^1 f\big(t_0 + (1 - s)h, \gamma(t_0 + (1 - s)h, t_0 + h, x_0)\big)\, ds \\ &= -h \int_0^1 f\big(t_0 + (1 - s)h, \psi_h(t_0 + (1 - s)h)\big)\, ds. \end{aligned}$$

Passando al limite sotto al segno di integrale (per convergenza uniforme) si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0, t_0 + h, x_0) - x_0}{h} = -f(t_0, \psi_0(t_0)) = -f(t_0, x_0). \tag{A.11}$$

Abbiamo quindi, da (A.10) e (A.11), che

$$\lim_{h \to 0} v_h(t) = -\frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) \cdot f(t_0, x_0) \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Di conseguenza, dall'arbitrarietà di $(t_0, x_0) \in B(\bar{z}, r)$ e ricordando la definizione di v_h, otteniamo:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_0}(t, t_0, x_0) = -\frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) \cdot f(t_0, x_0) \quad \text{per ogni } (t, t_0, x_0) \in \mathcal{U}.$$

Si noti che $(t, t_0, x_0) \mapsto \frac{\partial \gamma}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)$ è continua su $\mathcal{U}$ per la continuità di f su Ω e di $\frac{\partial \gamma}{\partial x_0}$ su $\mathcal{U}$. Il teorema è così provato. $\square$

Osservazione A.5.3. Nella prova di cui sopra è contenuto un notevole risultato, ovvero l'esistenza delle derivate seconde

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_0}(t,t_0,x_0,z)\right),\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,t_0,x_0,z)\right)\quad \text{e}\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t_0}(t,t_0,x_0,z)\right),$$

fornite nonché da funzioni continue in (t,t_0,x_0,z). D'altra parte, da

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,t_0,x_0,z)=f(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z)$$

e avendo dimostrato che γ è C^1 in tutti i suoi argomenti, segue che $f(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z)$ è C^1 rispetto a (t_0,x_0,z) (sotto la sola ipotesi di continuità di f rispetto a t), e, di conseguenza, anche $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,t_0,x_0,z)$ è C^1 rispetto a (t_0,x_0,z). Esistono quindi e sono continue

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,t_0,x_0,z)\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,t_0,x_0,z)\right)\quad \text{e}\quad \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,t_0,x_0,z)\right).$$

Per il Teorema di Schwarz è possibile scambiare l'ordine di tali derivate seconde. $\sharp$

Osservazione A.5.4. Apparentemente non abbiamo provato la formula (2★). In realtà essa discende dal seguente ragionamento: dalla prova sopra (avendo inglobato la dipendenza dal parametro z nella dipendenza dal dato x_0), segue che la soluzione $\gamma(t,t_0,x_0,z)$ dipende in modo C^1 da z. Possiamo quindi differenziare rispetto a z la seguente identità:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t,t_0,x_0,z)=f(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z)$$

e, per quanto detto, scambiare $\frac{\partial}{\partial t}$ con $\frac{\partial}{\partial z}$. Ne segue, dalla regola della derivata composta

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,t_0,x_0,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z)\frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,t_0,x_0,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z),$$

con le posizioni

$$\begin{aligned} B(t) &:= \frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,t_0,x_0,z),\\ g(t) &:= \frac{\partial f}{\partial z}(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z),\\ J(t) &:= \frac{\partial f}{\partial x}(t,\gamma(t,t_0,x_0,z),z). \end{aligned}$$

$\sharp$

Un ragionamento induttivo su k, partendo dal caso $k=1$ nella prova del Teor.A.5.2, permette di ottenere il seguente fondamentale risultato:

Teorema A.5.5 (Dipendenza C^k). *Sia $\Omega\times O\subseteq \mathbb{R}^{1+N}\times\mathbb{R}^m$ un aperto e sia $f=f(t,x,z):\Omega\times O\to\mathbb{R}^N$ una funzione di classe C^k, con $k\geq 1$ o $k=\infty$. Dato*

$(t_0, x_0, z) \in \Omega \times O$, *sia* $t \mapsto \gamma(t, t_0, x_0, z)$ *la soluzione massimale del Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definita sul dominio massimale $\mathcal{D}(t_0, x_0, z)$. *Allora la funzione* $(t, t_0, x_0, z) \mapsto \gamma(t, t_0, x_0, z)$ *è di classe* C^k *sull'aperto*

$$\mathcal{D} := \{(t, t_0, x_0, z) \in \mathbb{R}^{2+N+m} : (t_0, x_0, z) \in \Omega \times O,\ t \in \mathcal{D}(t_0, x_0, z)\}.$$

Appendice B

Il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per ODE

Lo scopo principale di questa seconda appendice consiste nel dimostrare il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per ODE, che ha avuto un ruolo da protagonista nella presente tesi. Nel seguito, per brevità, ci riferiremo ai nomi sopracitati con l'acronimo di CBHD.

B.1 Il Teorema Esponenziale e l'operazione di CBHD

Iniziamo con il costruire un'appropriata struttura algebrica astratta in cui enunciare il Teorema Esponenziale di CBHD, dal quale dedurremo importanti risultati applicabili in molti altri ambienti.

Nel seguito $\mathbb{K}$ sarà un campo a caratteristica nulla.

Sia $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ l'algebra associativa unitaria dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ nelle indeterminate non commutative x e y (con l'usuale prodotto tra polinomi), naturalmente dotata di una struttura di algebra di Lie ponendo $[p, q] := p \cdot q - q \cdot p$, per $p, q \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle$.

Denotiamo con

$$\mathcal{L}(x, y) := \bigcap_{\{x,y\} \subset \mathfrak{g} \subseteq \mathbb{K}\langle x,y\rangle} \mathfrak{g}$$

la più piccola sottoalgebra di Lie di $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ contenente x e y e chiamiamo i suoi elementi Lie polinomi in x e y.

Indichiamo poi con $\mathfrak{T}[[t]]$ l'algebra associativa unitaria delle serie di potenze formali nell'indeterminata t a coefficienti nell'algebra $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$, avente quindi elementi della forma

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \qquad \text{con } a_k \in \mathbb{K}\langle x, y\rangle, \text{ per ogni } k \geq 0$$

e il solito prodotto di Cauchy per le serie di potenze formali.

Chiamiamo grado minimo di $p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathfrak{T}[[t]]$ il numero

$$\underline{\deg}(p) := \begin{cases} \min\{k : a_k \neq 0\} & \text{se} \quad p \neq 0 \\ +\infty & \text{se} \quad p = 0. \end{cases}$$

E' possibile dotare $\mathfrak{T}[[t]]$ di una metrica ponendo, per $p, q \in \mathfrak{T}[[t]]$,

$$d(p,q) := e^{-\underline{\deg}(p-q)}, \quad \text{con la convenzione } e^{-\infty} = 0.$$

Più precisamente, d munisce $\mathfrak{T}[[t]]$ di una struttura di spazio ultrametrico in quanto, per ogni $p, q, r \in \mathfrak{T}[[t]]$, è soddisfatta la seguente formulazione più forte della disuguaglianza triangolare:

$$d(p,q) \leq \max\{d(p,r), d(r,q)\}.$$

Osserviamo che, data una successione $\{p_n\}_n$ in $\mathfrak{T}[[t]]$, si ha

$$p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\deg}(p_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

da cui è immediato riconoscere la convergenza di ogni successione di Cauchy in $\mathfrak{T}[[t]]$, o, in altre parole, la completezza di $(\mathfrak{T}[[t]], d)$.

In particolare, in uno spazio ultrametrico una successione è di Cauchy se e solo se la distanza tra l'n-esimo e l'$(n+1)$-esimo termine tende a 0 per $n \to \infty$. Da ciò segue, per l'invarianza per traslazioni di d, che ogni serie $\sum_{n\geq 0} p_n$ in $\mathfrak{T}[[t]]$ soddisfa la condizione di Cauchy, dunque è convergente, se e solo se $p_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Introduciamo ora l'endomorfismo di $\mathfrak{T}[[t]]$

$$D_t : \mathfrak{T}[[t]] \to \mathfrak{T}[[t]] \qquad D_t\left(\sum_{k\geq 0} a_k t^k\right) := \sum_{k\geq 1} k a_k t^{k-1},$$

che risulta essere una derivazione continua di $\mathfrak{T}[[t]]$ ed una biezione tra i due seguenti sottoinsiemi delle serie di potenze formali con termine di grado 0 uguale a 0 e ad 1:

$$\mathfrak{T}[[t]]_+ := \left\{\sum_{k\geq 0} a_k t^k \in \mathfrak{T}[[t]] : a_0 = 0\right\},$$

$$1 + \mathfrak{T}[[t]]_+ := \left\{\sum_{k\geq 0} a_k t^k \in \mathfrak{T}[[t]] : a_0 = 1\right\}.$$

La "facile" convergenza delle serie nello spazio metrico $\mathfrak{T}[[t]]$ (e la caratteristica 0 di $\mathbb{K}$) fa si che siano bel definite le mappe:

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{T}[[t]]_+ \to 1 + \mathfrak{T}[[t]]_+ \qquad \mathrm{Exp}(p) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!},$$

$$\mathrm{Log} : 1 + \mathfrak{T}[[t]]_+ \to \mathfrak{T}[[t]]_+ \qquad \mathrm{Log}(1+q) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} q^k.$$

Proposizione B.1.1. *Le mappe* Exp *e* Log *sopra definite sono l'una l'inversa dell'altra.*

Dimostrazione. Proviamo che $\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(p)) = p$ per ogni $p \in \mathfrak{T}[[t]]_+$, la prova che $\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}(1+q)) = 1+q$ per ogni $q \in \mathfrak{T}[[t]]_+$ è analoga. Sia quindi $p \in \mathfrak{T}[[t]]_+$, si ha:

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(p)) = \mathrm{Log}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^i}{i!}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^i}{i!}\right)^j$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sum_{i_1=1}^{\infty} \frac{p^{i_1}}{i_1!} \cdots \sum_{i_j=1}^{\infty} \frac{p^{i_j}}{i_j!} = \sum_{k=1}^{\infty} p^k \sum_{j=1}^{k} \sum_{i_1+\cdots+i_j=k} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \frac{1}{i_1! \cdots i_j!} =: (\star).$$

Prendiamo innanzitutto in esame il caso in cui $p = x \in \mathbb{R}$ e $1+q = e^x$. Applicando lo sviluppo di Maclaurin di $\log(1+q)$ con $q \in]-1,1[$, cioè con $x < \log 2$, nel caso reale si ha:

$$x = \log(e^x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{j=1}^{k} \sum_{i_1+\cdots+i_j=k} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \frac{1}{i_1! \cdots i_j!}.$$

Da ciò segue che l'identità

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i_1+\cdots+i_j=k} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \frac{1}{i_1! \cdots i_j!} = \begin{cases} 1 & se\, k=1 \\ 0 & se\, k>1 \end{cases}$$

risulta vera in $\mathbb{Q}$ e di conseguenza in $\mathbb{K}$, dato che ogni campo di caratteristica zero contiene un sottocampo isomorfo a $\mathbb{Q}$. Possiamo così concludere che $(\star) = p$. $\square$

Nel seguito useremo anche la notazione compatta e^u per $\mathrm{Exp}(u)$, con $u \in \mathfrak{T}[[t]]_+$. Andiamo a formulare il Teorema Esponenziale nell'ambiente algebrico costruito.

Teorema B.1.2 (**CBHD**)**.** *Consideriamo la serie di potenze in $\mathfrak{T}[[t]]$ definita da*

$$Z := \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(xt) \cdot \mathrm{Exp}(yt)) \tag{B.1}$$

e denotiamo con $Z_n(x,y) \in \mathbb{K}\langle x,y\rangle$ i suoi coefficienti:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x,y) t^n.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Z_n(x,y)$ è un Lie polinomio in x e y:

$$Z_n(x,y) \in \mathcal{L}(x,y) \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Il teorema è altamente non banale infatti, dalle definizioni di Exp e Log, si ha:

$$Z = \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(xt) \cdot \mathrm{Exp}(yt)) = \mathrm{Log}\left(\sum_{i+j\geq 1} \frac{x^i y^j}{i!j!} t^{i+j}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k \geq 1} \frac{x^{i_1} y^{j_1} \cdots x^{i_k} y^{j_k}}{i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!} t^{i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k}.$$

Dunque, il Teorema di CBHD assicura che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\cdots,(i_k,j_k)\neq(0,0) \\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{x^{i_1}y^{j_1}\cdots x^{i_k}y^{j_k}}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!} \in \mathcal{L}(x,y).$$

L'idea della dimostrazione, che omettiamo per l'onerosità dei calcoli, si basa sulla possibilità di manipolare (B.1) per ottenere uno sviluppo di ogni coefficiente di Z come combinazione lineare dei coefficienti di ordine minore, in cui $Z_1 = x+y$ e $Z_2 = \frac{1}{2}[x,y]$ sono chiaramente Lie polinomi. Più precisamente, usando la notazione $Z(t)$ per Z (che verrà giustificata in seguito), tale rappresentazione ricorsiva degli $Z_n(x,y)$ scaturisce dall'identità equivalente a $\mathrm{Exp}(Z(t)) = \mathrm{Exp}(xt)\cdot\mathrm{Exp}(yt)$ e ottenuta da questa mediante opportuni risultati di rappresentazione algebrica, data da

$$\frac{1-e^{-\mathrm{ad}\,Z(t)}}{\mathrm{ad}\,Z(t)}(D_tZ(t)) = e^{-\mathrm{ad}\,Z(t)}(x) + y, \tag{B.2}$$

dove $(\mathrm{ad}\,x)(y) := [x,y]$ è la mappa aggiunta di x e usando la notazione compatta $e^{\cdot}$ per $\mathrm{Exp}(\cdot)$.

Osserviamo che (B.2) contiene un profondo significato, il quale emerge chiaramente se sviluppata nella seguente forma simmetrica:

$$D_tZ(t) = \frac{\mathrm{ad}\,Z(t)}{e^{\mathrm{ad}\,Z(t)}-1}(x) + \frac{-\mathrm{ad}\,Z(t)}{e^{-\mathrm{ad}\,Z(t)}-1}(y). \tag{B.3}$$

Nel seguito ci riferiremo all'ODE autonoma non lineare in $Z(t)$ di cui sopra con il nome di ODE di Poincaré.

Ponendo $\mathbf{b}(z) := \dfrac{z}{e^z-1}$, l'ODE di Poincaré può essere scritta come:

$$D_tZ(t) = \mathbf{b}(\mathrm{ad}\,Z(t))(x) + \mathbf{b}(-\mathrm{ad}\,Z(t))(y).$$

Pensando a z come una variabile complessa, non è difficile riconoscere che $\mathbf{b}$ è olomorfa sulla palla centrata nell'origine di raggio 2π e quindi che può essere rappresentata come serie di potenze

$$\mathbf{b}(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} z^n, \quad \text{per ogni } z \in B(0,2\pi) \subset \mathbb{C}.$$

Il seguente lemma permetterà di trovare una formula chiusa e non ricorsiva per determinare i coefficienti Z_n che compaiono nel Teorema di CBHD.

Lemma B.1.3. *Si consideri la mappa lineare $\phi : \mathbb{K}\langle x,y\rangle \to \mathcal{L}(x,y)$ tale che $\phi(1) = 0$, $\phi(x) = x$, $\phi(y) = y$ e, per ogni scelta di indici $i_1, j_1, ..., i_k, j_k$ e $k \in \mathbb{N}$,*

$$\phi(x^{i_1}y^{j_1}\cdots x^{i_k}y^{j_k}) := \frac{(\mathrm{ad}\,x)^{i_1}(\mathrm{ad}\,y)^{j_1}\cdots(\mathrm{ad}\,x)^{i_k}(\mathrm{ad}\,y)^{j_k-1}(y)}{i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k}.$$

Allora ϕ è una proiezione, precisamente è suriettiva e $\phi(l) = l$ per ogni $l \in \mathcal{L}(x,y)$.

Grazie al Teorema di CBHD, la mappa sopra definita dà, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'espressione di $Z_n(x,y)$ come Lie polinomio

$$Z_n(x,y) = \phi(z_n(x,y)) \tag{B.4}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{\substack{(i_1,j_1),\cdots,(i_k,j_k)\neq(0,0)\\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}}\frac{(\operatorname{ad}x)^{i_1}(\operatorname{ad}y)^{j_1}\cdots(\operatorname{ad}x)^{i_k}(\operatorname{ad}y)^{j_k-1}(y)}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}.$$

Teorema B.1.4. *Dalla proprietà universale dell'algebra $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$, la formula (B.4) vale per tutti gli elementi X,Y di un'algebra associativa unitaria $(A,*)$, sostituendo x con X, y con Y e il prodotto in $\mathbb{K}\langle x,y\rangle$ con il prodotto $*$.*

Definizione B.1. *Sia $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ un'algebra di Lie, definiamo per ogni $n\in\mathbb{N}$ le mappe $Z_n:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $(a,b)\mapsto Z_n(a,b)$ dove*

$$Z_n(a,b) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{\substack{(i_1,j_1),\cdots,(i_k,j_k)\neq(0,0)\\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}}\frac{(\operatorname{ad}a)^{i_1}(\operatorname{ad}b)^{j_1}\cdots(\operatorname{ad}a)^{i_k}(\operatorname{ad}b)^{j_k-1}(b)}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}. \tag{B.5}$$

Inoltre poniamo

$$a\diamond b := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b) \tag{B.6}$$

se ciò a senso, (e.g., se la serie converge rispetto una qualche topologia su $\mathfrak{g}$). Chiamiamo (B.6) serie omogenea di CBHD.

Introduciamo anche la seguente notazione:

$$C_{i,j}(a,b) := \sum_{k=1}^{i+j}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{\substack{(i_1,j_1),\cdots,(i_k,j_k)\neq(0,0)\\ i_1+\cdots+i_k=i\\ j_1+\cdots+j_k=j}}\frac{(\operatorname{ad}a)^{i_1}(\operatorname{ad}b)^{j_1}\cdots(\operatorname{ad}a)^{i_k}(\operatorname{ad}b)^{j_k-1}(b)}{(i+j)\cdot i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}, \tag{B.7}$$

che permette di scrivere

$$Z_n(a,b) = \sum_{i+j=n} C_{i,j}(a,b), \quad n\geq 1$$

e, se lecito, di esprimere $a\diamond b$ come

$$a\diamond b = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{i,j}(a,b).$$

B.2 L'operazione di CBHD in algebre di Lie finito-dimensionali

Ci proponiamo ora di provare un importante risultato di convergenza locale della serie di CBHD.

Sia $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ un'algebra di Lie finito-dimensionale su $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K}$ è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e sia $||\cdot||$ una norma su $\mathfrak{g}$ verificante

$$||[a,b]|| \leq ||a||\cdot||b||, \quad \text{per ogni } a,b\in\mathfrak{g}. \tag{B.8}$$

L'esistenza[1] di tale norma è garantita dalla condizione sulla dimensione di $\mathfrak{g}$. Andiamo quindi a studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b)$, con $a,b \in \mathfrak{g}$.

Osserviamo che, usando la rappresentazione di $Z_n(a,b)$ fornita da (B.5) e applicando (B.8), si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Z_n(a,b)|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{(i_1,j_1),\cdots,(i_k,j_k)\neq(0,0)} \frac{||a||^{i_1+\cdots+i_k} \cdot ||b||^{j_1+\cdots+j_k}}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{(i,j)\neq(0,0)} \frac{||a||^i}{i!} \cdot \frac{||b||^j}{j!} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(e^{||a||+||b||} - 1 \right)^k =: (\star).$$

Si vorrebbe usare per $(\star)$ il noto sviluppo di Maclaurin

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} q^k = -\log(1-q), \quad |q| < 1$$

ma ciò è possibile sotto la condizione che $|e^{||a||+||b||}-1| < 1$, cioè se $||a||+||b|| < \log 2$. Abbiamo quindi ottenuto che

$$||a \diamond b|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||Z_n(a,b)|| \leq -\log(2 - e^{||a||+||b||}) = \log\left(\frac{1}{2 - e^{||a||+||b||}} \right) \tag{B.9}$$

ogni qual volta che $||a|| + ||b|| < \log 2$.

Abbiamo così provato il seguente fatto:

Teorema B.2.1. *Sia $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ un'algebra di Lie finito-dimensionale su $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K}$ è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e sia $||\cdot||$ una norma su $\mathfrak{g}$ verificante (B.8).*

Allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ di $0 \in \mathfrak{g}$ tale che la serie omogenea di CBHD

$$a \diamond b := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b)$$

converge totalmente[2], quindi uniformemente, per ogni $a,b \in \mathcal{U}$.

Più precisamente, $\mathcal{U}$ è dato da

$$\mathcal{U} := \left\{ a \in \mathfrak{g} : ||a|| < \frac{\log 2}{2} \right\}.$$

[1] Se $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} = N$ è possibile considerare una norma $||\cdot||_{\mathcal{V}}$ su $\mathfrak{g}$ identificando $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{K}^N$ mediante la scelta di una base $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_N\}$ di $\mathfrak{g}$,

$$||\sum_{k=1}^{N} x_k v_k||_{\mathcal{V}} := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_N|^2}, \quad (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{K}^N.$$

La bilinearità e continuità della mappa $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (a,b) \mapsto [a,b] \in \mathfrak{g}$ rispetto alla topologia di spazio metrico $(\mathfrak{g}, ||\cdot||_{\mathcal{V}})$ garantiscono l'esistenza di una costante $M > 0$ tale che

$$||[a,b]||_{\mathcal{V}} \leq M \, ||a||_{\mathcal{V}} \cdot ||b||_{\mathcal{V}}, \quad \text{per ogni } a,b \in \mathfrak{g}.$$

Ponendo $||\cdot|| := M \, ||\cdot||_{\mathcal{V}}$ si ottiene da $||\cdot||_{\mathcal{V}}$ una norma $||\cdot||$ su $\mathfrak{g}$ ad essa equivalente e verificante (B.8).

[2] $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{a,b\in\mathcal{U}} ||Z_n(a,b)|| < \infty$.

Vogliamo ora specializzare in un'algebra di Lie finito-dimensionale l'ODE formale ottenuta nell'algebra $\mathfrak{T}[[t]]$

$$D_t Z(t) = \mathbf{b}(\mathrm{ad}\, Z(t))(x) + \mathbf{b}(-\mathrm{ad}\, Z(t))(y),$$

dove $Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x,y)t^n$ e $\mathbf{b}(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.

Sia quindi $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale su $\mathbb{R}$ equipaggiata di una norma $||\cdot||$ verificante (B.8). Fissato $z \in \mathfrak{g}$ in modo che $||z|| < 2\pi$, consideriamo la mappa

$$\mathbf{b}(\mathrm{ad}\,\mathrm{z}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \qquad x \mapsto \mathbf{b}(\mathrm{ad}\,\mathrm{z})(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(\mathrm{ad}\,\mathrm{z})^n(x).$$

Osserviamo che la definizione è ben posta, infatti ricordando che la funzione $\mathbf{b}$ è analitica sul disco complesso di centro 0 e raggio 2π, con una diretta applicazione di (B.8) si può verificare facilmente la convergenza assoluta della serie di cui sopra.

Per $x, y \in \mathfrak{g}$, con il solito significato per $Z_n(x,y)$, la stima (B.9) permette di trovare $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo affinché

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} ||Z_n(x,y)|| < 2\pi, \quad \text{ogni qual volta } ||x||, ||y|| < \epsilon.$$

Più precisamente, la condizione

$$\log\left(\frac{1}{2 - e^{||x||+||y||}}\right) < 2\pi, \qquad \text{cioè} \qquad ||x|| + ||y|| < \log(2 - e^{-2\pi}),$$

porta a definire tale ϵ come $\epsilon := \frac{1}{2}\log(2 - e^{-2\pi})$ $(< \frac{\log 2}{2})$.

Presi quindi $x, y \in \mathfrak{g}$ tali che $||x||, ||y|| < \epsilon$, possiamo considerare il seguente Problema di Cauchy su $\mathfrak{g}$:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \mathbf{b}(\mathrm{ad}\,\gamma)(x) + \mathbf{b}(-\mathrm{ad}\,\gamma)(y) \\ \gamma(0) = 0, \end{cases}$$

risolto, sull'intervallo $[-1, 1]$, dalla funzione

$$t \mapsto \gamma(t) := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x,y)t^n.$$

Inoltre, riprendendo la notazione $C_{i,j}$ introdotta in (B.7), si possono dimostrare i seguenti fatti:

- Il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{\mu} = \mathbf{b}(\mathrm{ad}\,\mu)(x) \\ \mu(0) = y \end{cases} \tag{B.10}$$
è soddisfatto, per $t \in [-1, 1]$, dalla mappa
$$\mu(t) := Z(tx, y) = tx + y + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} C_{i,j}(x,y)\right)t^i;$$

- Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\nu} = \mathbf{b}(-\operatorname{ad}\nu)(y) \\ \nu(0) = x \end{cases} \tag{B.11}$$

è soddisfatto, per $t \in [-1, 1]$, dalla mappa

$$\nu(t) := Z(x, ty) = x + ty + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_{i,j}(x, y) \right) t^j.$$

B.3 Il Teorema di CBHD per ODE

Siamo quasi pronti per enunciare e dimostrare il Teorema di CDHB per ODE. Richiamiamo prima alcuni risultati mettendoci nell'ambiente in cui verrà formulato.

Sia $\mathfrak{X}(\Omega)$ lo spazio vettoriale reale dei campi vettoriali C^∞ sull'aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, naturalmente dotato di una struttura di algebra di Lie ponendo $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$, per $X, Y \in \Omega$.

Dato X in $\mathfrak{X}(\Omega)$ e fissato $x \in \Omega$ useremo i seguenti simboli

$$\gamma(t, X, x), \qquad \Psi_t^X(x), \qquad \exp(tX)(x),$$

per riferirci alla soluzione massimale (come funzione di t) uscente da x, definita sul dominio massimale $\mathcal{D}(X, x)$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = X(\gamma) \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

Denoteremo inoltre con Ω_t^X (possibilmente non vuoto) il dominio della mappa $x \mapsto \Psi_t^X(x)$ flusso del campo vettoriale X, cioè:

$$\Omega_t^X := \{x \in \Omega : t \in \mathcal{D}(X, x)\}.$$

Useremo anche la convenzione $(Xf)(x) := X_x(f)$, se $x \in \Omega$ e $f \in C^\infty(\Omega)$.

Dato un diffeomorfismo C^∞ $F : \Omega \to F(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^N$ e un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$, chiamiamo pushforward di X rispetto ad F, il campo vettoriale in $\mathfrak{X}(F(\Omega))$ definito come:

$$(\mathrm{d}FX)_y := \mathrm{d}_{F^{-1}(y)}F(X_{F^{-1}(y)}), \quad y \in F(\Omega)$$

dove $\mathrm{d}F_x$ rappresenta il differenziale di F nel punto x. Indicando $\mathrm{d}F_x$ con F_*, useremo anche le seguenti scritture equivalenti:

$$(F_*X)_{F(x)} = \mathrm{d}_xF(X_x), \quad \text{per ogni } x \in \Omega,$$

$$(F_*X)g(F(x)) = X(g \circ F)(x), \quad \text{per ogni } x \in \Omega,\ g \in C^\infty(F(\Omega)).$$

Osserviamo che, nelle notazioni precedenti, si ha:

$$F(\Psi_t^X(x)) = \Psi_t^{F_*X}(F(x)), \quad \text{per ogni } x \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(X, x),$$

cioè il diffeomorfismo F manda curve integrali di X in $x \in \Omega$, in curve integrali di F_*X in $F(x) \in F(\Omega)$. Infatti, applicando la definizione di curva integrale,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{F(\Psi_t^X(x))\} = \mathrm{d}_{\Psi_t^X(x)}F(X_{\Psi_t^X(x)}) = (F_*X)_{F(\Psi_t^X(x))}.$$

Dunque, la curva $t \mapsto \gamma(t) := F(\Psi_t^X(x))$, risolve il Problema di Caucy

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = (F_*X)_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = F(x) \end{cases}$$

da cui, per l'unicità della soluzione, $\gamma(t) = \Psi_t^{F_*X}(F(x))$.

Non è difficile provare che la funzione flusso $x \mapsto \Psi_t^X(x)$ risulta essere un diffeomorfismo C^∞ con inversa la mappa $\Psi_{-t}^X : \Omega_{-t}^X \to \Omega_t^X$. L'idea consiste quindi nel considerare il pushforward di un campo vettoriale Y rispetto al flusso di un altro campo X, con il fine di ottenere un'interpretazione del commutatore $[X, Y]$ come peso della variazione di Y sotto l'azione delle curve integrali di X.

Presi dunque $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$, consideriamo

$$(\mathrm{d}\Psi_{-t}^X Y)_x = \mathrm{d}_{\Psi_t^X(x)}\Psi_{-t}^X(Y_{\Psi_t^X(x)}), \quad \text{per ogni } x \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(X, x),$$

o, equivalentemente

$$(\mathrm{d}\Psi_{-t}^X Y)f(x) = Y(f \circ \Psi_{-t}^X)(\Psi_t^X(x)), \quad \text{per ogni } x \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(X, x) \text{ e } f \in C^\infty(\Omega).$$

Abbiamo il seguente risultato:

Teorema B.3.1. *Nelle notazioni precedenti, si ha:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{Y(f \circ \Psi_{-t}^X)(\Psi_t^X(x))\} = [X, Y](f \circ \Psi_{-t}^X)(\Psi_t^X(x)), \tag{B.12}$$

vera per ogni $x \in \Omega$, $t \in \mathcal{D}(X, x)$ e per ogni $f \in C^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Proviamo (B.12) nel caso in cui f sia la mappa identità di $\mathbb{R}^N$, cioè

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{Y(\Psi_{-t}^X)(\Psi_t^X(x))\} = ([X, Y]\Psi_{-t}^X)(\Psi_t^X(x)), \quad x \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(X, x). \tag{B.13}$$

Se $x \in \Omega$, $t \in \mathcal{D}(X, x)$, allora $\Omega_t^X \neq \varnothing$ e sappiamo che $\Psi_t^X : \Omega_t^X \to \Omega_{-t}^X$ è un diffeomorfiso C^∞ con inversa Ψ_{-t}^X. Per ogni $x \in \Omega_t^X$ risulta quindi ben posta la mappa

$$\mathcal{D}(X, x) \ni t \mapsto F(t) := (Y\Psi_{-t}^X)(\Psi_t^X(x)),$$

più esplicitamente, si ha:

$$F(t) = \mathcal{J}_{\Psi_{-t}^X}(\Psi_t^X(x))Y(\Psi_t^X(x)).$$

Applicando le note formule di derivazione, abbiamo

$$F'(t) = -\mathcal{J}_{\Psi_{-t}^X}(\Psi_t^X(x))\mathcal{J}_{XI}(\Psi_t^X(x))Y(\Psi_t^X(x)) + \mathcal{J}_{\Psi_{-t}^X}(\Psi_t^X(x))X(YI)(\Psi_t^X(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{J}_{\Psi^X_{-t}}(\Psi^X_t(x))\Big(-Y(XI)(\Psi^X_t(x)) + X(YI)(\Psi^X_t(x))\Big) \\
&= \mathcal{J}_{\Psi^X_{-t}}(\Psi^X_t(x))[X,Y](\Psi^X_t(x)) \\
&= ([X,Y]\Psi^X_{-t})(\Psi^X_t(x)).
\end{aligned}
$$

Ciò prova (B.13) e (B.12) segue direttamente da essa. □

Corollario B.3.2. *Nelle notazioni precedenti, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha:*

$$
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\{Y(f \circ \Psi^X_{-t})(\Psi^X_t(x))\} = \big((\operatorname{ad} X)^k Y\big)(f \circ \Psi^X_{-t})(\Psi^X_t(x)),
$$

per ogni $x \in \Omega$, $t \in \mathcal{D}(X,x)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e dove $(\operatorname{ad} X)^k(Y) = [X,[X\cdots[X,Y]\cdots]]$.

Dimostrazione. Segue dal Teor.*B.3.1* con un argomento induttivo. □

Un potente strumento quale la formula di Taylor con resto integrale permette di ottenere la seguente versione integrale di (B.12):

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}\Psi^X_{-t}Y)(x) = &\sum_{j=0}^{k} \big((\operatorname{ad} X)^j Y\big)(x)\frac{t^j}{j!} \\
&+\frac{1}{k!}\int_0^t (t-\tau)^k \mathrm{d}\Psi^X_{-\tau}\big((\operatorname{ad} X)^{k+1}Y\big)(x)\, d\tau, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

o, più in generale,

$$
\begin{aligned}
Y(f\circ\Psi^X_{-t})(\Psi^X_t(x)) = &\sum_{j=0}^{k} \big((\operatorname{ad} X)^j Y\big) f(x)\frac{t^j}{j!} \\
&+\frac{1}{k!}\int_0^t (t-\tau)^k \big((\operatorname{ad} X)^{k+1}Y\big)(f\circ\Psi^X_{-\tau})(\Psi^X_\tau(x))\, d\tau, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

per ogni $x \in \Omega$, $t \in \mathcal{D}(X,x)$ e per ogni $f \in C^\infty(\Omega)$.

Ci chiediamo quindi se è lecito mandare $k \to \infty$ nelle formule di cui sopra. Essendo interessati al caso in cui X e Y sono dei campi vettoriali in una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\Omega)$ finito-dimensionale, il seguente risultato permette di rispondere a tale domanda.

Teorema B.3.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(\Omega)$ una sottoalgebra di Lie finito-dimensionale, allora*

$$
(\mathrm{d}\Psi^X_{-t}Y)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \big((\operatorname{ad} X)^j Y\big)(x)\frac{t^j}{j!}, \quad \text{per ogni } x \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(X,x), \tag{B.14}
$$

o, più in generale,

$$
(\mathrm{d}\Psi^X_{-t}Y)f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad} tX)^j Y}{j!} f(x), \quad \text{per ogni } x \in \Omega,\ t \in \mathcal{D}(X,x),\ f \in C^\infty(\Omega),
$$

e le serie di potenze in t ai membri destri sono convergenti.

Questo risultato è altamente non banale, infatti dati X, Y campi vettoriali C^∞ su Ω, è possibile dimostrare che, sotto opportune condizioni sulla norma uniforme di $(\mathrm{ad}\, X)^j Y$, per ogni $x \in \Omega$ fissato la funzione $t \mapsto (\mathrm{d}\Psi_{-t}^X Y)(x)$ non è solo C^∞ ma bensì reale analitica su $\mathcal{D}(X, x)$, condizioni che risultano essere sempre verificate nel caso in cui si prendano X e Y in una sottoalgebra di $\mathfrak{X}(\Omega)$ di dimensione finita.

Nel seguito useremo la seguente notazione compatta

$$\mathrm{d}\Psi_{-t}^X Y = e^{\mathrm{ad}\, tX} Y \quad \text{su } \Omega_t^X.$$

Osserviamo che sotto l'ulteriore ipotesi che ogni campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ sia globale, l'identità sopra diventa un'identità su Ω.

La dipendenza da X di $\Psi_t^X(x)$ suggerisce che questa può essere studiata, oltre che come funzione di t e x, anche come funzione

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \Psi_t^X(x) \in \mathbb{R}^N,$$

quando $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X, x)$ sono fissati. In particolare, si vuole fornire una rappresentazione delle "derivate parziali"

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}_{|\tau=0} \Psi_t^{X+\tau Y}(x)$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$. Osserviamo che la funzione $\Psi_t^{X+\tau Y}(x)$ è ben posta, infatti, fissati $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X, x)$, il Teor.*A.4.1* assicura l'esistenza di un $\epsilon > 0$ tale che $t \in \mathcal{D}(X + \tau Y, x)$, ogni qual volta $\tau \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Forniamo ora un lemma.

Lemma B.3.4. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$, $O \subseteq \mathbb{R}^m$ degli aperti e sia $f = f(t, y, \xi) \in C(\Omega \times O, \mathbb{R}^N)$. Supponiamo che le derivate parziali*

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \qquad 1 \le i \le N, \quad 1 \le j \le m$$

esistano e siano continue su $\Omega \times O$. Detta $t \mapsto \gamma_{t,t_0}^\xi(x)$ la soluzione massimale, definita sul dominio massimale $\mathcal{D}(t_0, x, \xi)$, del Problema di Cauchy parametrico

$$\begin{cases} \dot\gamma = f(t, \gamma, \xi) \\ \gamma(t_0) = x, \end{cases}$$

si ha la seguente identità:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\gamma_{t,t_0}^\xi(x) = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial}{\partial x}\gamma_{t,s}^\xi\right)\left(\gamma_{s,t_0}^\xi(x)\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\left(s, \gamma_{s,t_0}^\xi(x), \xi\right) ds$$

vera per ogni $(t, (t_0, x), \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega \times O$ tali che $t \in \mathcal{D}(t_0, x, \xi)$.

Dimostrazione. E' una conseguenza del Teor.*A.5.2* e della proprietà di semigruppo per ODE non autonome. □

Teorema B.3.5. *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(\Omega)$ una sottoalgebra di Lie di dimensione finita e siano $X, Y \in \mathfrak{g}$. Fissati $x \in \Omega$, $t \in \mathcal{D}(X, x)$, si ha:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}_{|\tau=0} \Psi_t^{X+\tau Y}(x) = \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1}\big((\mathrm{ad}\, X)^j Y\big)(x)}{(j+1)!}.$$

Equivalentemente, in forma compatta,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}_{|\tau=0} \Psi_t^{X+\tau Y}(x) = \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \cdot \left(\frac{e^{\mathrm{ad}\, tX} - 1}{\mathrm{ad}\, tX}(tY) \right)(x).$$

Se ogni campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ è globale le formule sopra sono valide per ogni $t \in \mathbb{R}$, e le serie convergono per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per definizione, la mappa $s \mapsto \Psi_s^{X+\tau Y}(x)$ risolve, su $\mathcal{D}(X + \tau Y, x)$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\gamma = (X + \tau Y)(\gamma) \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

Applicando il Lem.*B*.3.4 con $t_0 = 0$, $f(s, y, \tau) = (X + \tau Y)(y)$ e sostituendo $\gamma_{s,r}^\tau$ con $\Psi_{r-s}^{X+\tau Y}$ si ha, per ogni $s \in \mathcal{D}(X + \tau Y, x)$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Psi_s^{X+\tau Y}(x) &= \int_0^s \mathcal{J}_{\Psi_{s-r}^{X+\tau Y}}\left(\Psi_r^{X+\tau Y}(x)\right) \cdot Y\left(\Psi_r^{X+\tau Y}(x)\right) dr \\ &= \int_0^s \left(Y\Psi_{s-r}^{X+\tau Y}\right)\left(\Psi_r^{X+\tau Y}(x)\right) dr.\end{aligned}$$

Poiché per τ sufficientemente piccolo $t \in \mathcal{D}(X + \tau Y, x)$, possiamo contemporaneamente prendere $\tau = 0$ e $s = t$. Inoltre, dalla proprietà di semigruppo $\Psi_{t-r}^X = \Psi_t^X \circ \Psi_{-r}^X$ e dalla regola della Catena, abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}_{|\tau=0}\Psi_t^{X+\tau Y}(x) &= \int_0^t \left(Y\Psi_{t-r}^X\right)\left(\Psi_r^X(x)\right) dr \\ &= \int_0^t \mathcal{J}_{\Psi_t^X}\left(\Psi_{-r}^X(\Psi_r^X(x))\right) \cdot \left(Y\Psi_{-r}^X\right)\left(\Psi_r^X(x)\right) dr \\ &= \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \cdot \int_0^t \left(Y\Psi_{-r}^X\right)\left(\Psi_r^X(x)\right) dr \\ &= \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \cdot \int_0^t \left(\mathrm{d}\Psi_{-r}^X Y\right)(x)\, dr =: (\star).\end{aligned}$$

Poiché abbiamo preso X e Y in una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\Omega)$ finito-dimensionale, il Teor.*B*.3.3 assicura la validità di (B.14), pertanto è possibile integrare sotto il segno di serie, essendo la serie di potenze convergente, che dà:

$$\begin{aligned}(\star) &= \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \cdot \int_0^t \sum_{j=0}^{\infty} \left((\mathrm{ad}\, X)^j Y\right)(x) \frac{r^j}{j!}\, dr \\ &= \mathcal{J}_{\Psi_t^X}(x) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left((\mathrm{ad}\, X)^j Y\right)(x) \frac{t^{j+1}}{(j+1)!}.\end{aligned}$$

Ciò conclude la prova. □

Osservazione B.3.6. Nelle ipotesi del teorema precedente, supponiamo che $\{X_1, ..., X_m\}$ sia una base di $\mathfrak{g}$. Fissati $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$, esisterà $\epsilon > 0$ tale che, sull'insieme $\{\xi \in \mathbb{R}^m : ||\xi|| \leq \epsilon\}$, sia ben definita la mappa

$$\xi \mapsto E_{t,x}(\xi) := \Psi_t^{\xi \cdot X}(x), \qquad \xi \cdot X := \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_m X_m.$$

Se ogni campo vettoriale in $\mathfrak{g}$ è globale, $E_{t,x}$ risulta C^∞ su tutto $\mathbb{R}^m$. Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{t,x}}{\partial \xi_i}(\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}_{|\tau=0} \Psi_t^{\xi_1 X_1 + \cdots + (\xi_i + \tau) X_i + \cdots + \xi_m X_m}(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}_{|\tau=0} \Psi_t^{\xi \cdot X + \tau X_i}(x),\end{aligned}$$

da cui, per il Teor.*B*.3.5, si ha la seguente identità

$$\frac{\partial E_{t,x}}{\partial \xi_i}(\xi) = \mathcal{J}_{\Psi_t^{\xi \cdot X}}(x) \cdot \left(\frac{e^{\mathrm{ad}\,(\xi \cdot X)} - 1}{\mathrm{ad}\,(\xi \cdot X)} X_i \right)(x), \tag{B.15}$$

per ogni $i \in \{1, ..., m\}$ e per ogni ξ ove ben definita $E_{t,x}$. $\sharp$

Ricordando che $\exp(X)(x)$ denota la curva integrale, al tempo $t = 1$, del campo vettoriale X uscente da x, possiamo finalmente enunciare il seguente

Teorema B.3.7 (**Teorema di CBHD per ODE**). *Sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(\Omega)$ una sottoalgebra di Lie di dimensione finita, con Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $||\cdot||$ una norma fissata su $\mathfrak{g}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

- *Esiste $\epsilon > 0$ (dipendente da $||\cdot||$) per il quale la serie omogenea di CBHD*

  $$Z(X, Y) := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(X, Y)$$

  converge per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ con $||X||, ||Y|| \leq \epsilon$.

  Inoltre, per ogni $x \in \Omega$ esiste $\epsilon(x) > 0$ (dipendente anche da X e Y) tale che l'identità tra ODE

  $$\exp(Y)\big(\exp(X)(x)\big) = \exp\big(Z(X, Y)\big)(x) \tag{B.16}$$

  è soddisfatta da ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ con $||X||, ||Y|| \leq \epsilon(x)$.

  Se K è un sottoinsieme compatto di Ω, lo stesso $\epsilon(K) > 0$ può essere sostituito al posto di $\epsilon(x)$, uniformemente per $x \in K$.

- *Se ogni campo vettoriale in $\mathfrak{g}$ è globale, allora tale $\epsilon(x)$ di cui sopra non dipende da $x \in \Omega$, ma solo da X e Y.*

- *Infine, se la serie di CBHD converge (in $\mathfrak{g}$) per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e se ogni campo vettoriale in $\mathfrak{g}$ è globale, allora (B.16) risulta vera per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e per ogni $x \in \Omega$, senza alcuna restrizione su $||X||, ||Y||$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathfrak{g}$ ha dimensione finita, possiamo supporre che la norma $||\cdot||$ su $\mathfrak{g}$ verifichi la proprietà (B.8). Per il Teor.*B*.2.1 di convergenza locale della serie di CBHD, è possibile trovare $\epsilon > 0$ (dipendente da $\mathfrak{g}$ e da $||\cdot||$) tale che la serie $Z(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(X,Y)$ sia convergente in $\mathfrak{g}$ ogni qual volta $||X||, ||Y|| \leq \epsilon$. Ovviamente, se $Z(X,Y)$ converge per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, è possibile prendere $\epsilon = \infty$. Dal Teor.*B*.2.1 segue inoltre che anche la doppia serie

$$Z(X,tY) = X + tY + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_{i,j}(X,Y) \right) t^j$$

converge in $\mathfrak{g}$ per $||X||, ||Y|| \leq \epsilon$ e $t \in [0,1]$.

Fissiamo quindi $x \in \Omega$. Per il Teor.*A*.4.1 di dipendenza continua per ODE, esiste $\epsilon(x) > 0$, che possiamo supporre più piccolo di ϵ, tale che le funzioni

$$t \mapsto F(t) := \exp(tY)\big(\exp(X)(x)\big),$$

$$t \mapsto G(t) := \exp\big(Z(X,tY)\big)(x)$$

sono ben poste per t in un intorno aperto di $[0,1]$, quando $||X||, ||Y|| \leq \epsilon(x)$. Tale $\epsilon(x)$ non dipende da x ma solamente da K fintanto che K è un sottoinsieme compatto di Ω e $x \in K$. Osserviamo inoltre che la stima

$$||Z(X,Y)|| \leq \log\left(\frac{1}{2 - e^{||X|| + ||Y||}}\right)$$

ottenuta in (B.9), è anche necessaria a garantire la buona posizione della curva integrale

$$s \mapsto \exp\big(sZ(X,tY)\big)(x)$$

fino ad $s = 1$, uniformemente per $t \in [0,1]$.

Nel caso in cui ogni campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ è globale (dunque, quando esiste, lo è anche $Z(X,Y)$), è possibile prendere $\epsilon(x) = \epsilon$ per ogni $x \in \Omega$, dato che $F(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, mentre $G(t)$ è definita su $[0,1]$ e con $||X||, ||Y|| \leq \epsilon$. Se invece la serie $Z(X,Y)$ converge per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, si può scegliere $\epsilon(x) = \epsilon = \infty$, e $F(t)$ e $G(t)$ sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Resta da dimostrare che $F(t) = G(t)$ per ogni $t \in [0,1]$, da cui seguirà la tesi prendendo $t = 1$. A tal fine mostriamo che F e G risolvono, su $[0,1]$, lo stesso Problema di Cauchy con dato iniziale $F(0) = \exp(X)(x) = G(0)$ (essendo $Z(X,0) = X$).

Come conseguenza della definizione di curva integrale si ha

$$F'(t) = Y(F(t)), \qquad t \in [0,1].$$

Calcoliamo quindi $G'(t)$. Fissata una base $\{X_1, ..., X_m\}$ di $\mathfrak{g}$, esisteranno delle funzioni differenziabili $\xi_1(t), ..., \xi_m(t)$ tali che

$$Z(X,tY) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j(t) X_j =: \xi(t) \cdot X. \tag{B.17}$$

In tal modo possiamo scrivere $G(t) = \Psi_1^{\xi(t)\cdot X}(x)$ e, per l'Oss.$B.3.6$ (riprendendo anche le stesse notazioni), si ha:

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \mathcal{J}_{\xi\mapsto\Psi_1^{\xi\cdot X}(x)}(\xi(t))\cdot\xi'(t)\\
&\overset{(B.15)}{=} \mathcal{J}_{\Psi_1^{\xi(t)\cdot X}}(x)\cdot\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{e^{\mathrm{ad}\,(\xi(t)\cdot X)}-1}{\mathrm{ad}\,(\xi(t)\cdot X)}X_j\right)(x)\cdot\xi_j'(t)\\
&= \mathcal{J}_{\Psi_1^{\xi(t)\cdot X}}(x)\cdot\frac{e^{\mathrm{ad}\,(\xi(t)\cdot X)}-1}{\mathrm{ad}\,(\xi(t)\cdot X)}\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_j'(t)X_j\right)(x) =: (\star).
\end{aligned}$$

Essendo $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale, possiamo servirci dei risultati ottenuti per l'ODE di Poincaré per derivare (B.17) rispetto a t, più precisamente, per (B.11), abbiamo:

$$\sum_{j=1}^{m}\xi_j'(t)X_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(X,tY) = \mathbf{b}\big(-\mathrm{ad}\,Z(X,tY)\big)(Y).$$

Con la notazione più breve Z per $Z(X,tY)$, segue che

$$(\star) = \mathcal{J}_{\Psi_1^Z}(x)\cdot\frac{e^{\mathrm{ad}\,Z}-1}{\mathrm{ad}\,Z}\big(\mathbf{b}(-\mathrm{ad}\,Z)\big)Y(x) =: (2\star).$$

Osservando che, per $w\in\mathbb{C}$ vicino all'origine, si ha

$$\frac{e^w-1}{w}\cdot\mathbf{b}(-w) = \frac{e^w-1}{w}\cdot\frac{-w}{e^{-w}-1} = e^w,$$

possiamo dedurre che

$$\frac{e^{\mathrm{ad}\,Z}-1}{\mathrm{ad}\,Z}\big(\mathbf{b}(-\mathrm{ad}\,Z)\big) = e^{-\mathrm{ad}\,Z},$$

e ottenere così (usando $e^{-\mathrm{ad}\,Z}Y = \mathrm{d}\Psi_{-1}^Z Y$):

$$(2\star) = \mathcal{J}_{\Psi_1^Z}(x)\cdot\big(e^{-\mathrm{ad}\,Z}Y\big)(x) = \mathcal{J}_{\Psi_1^Z}(x)\cdot\big(\mathrm{d}\Psi_{-1}^Z Y\big)(x) = \big(\mathrm{d}\Psi_{-1}^Z Y\big)\Psi_1^Z(x).$$

Ricordando che $\big(\mathrm{d}\Psi_{-1}^Z Y\big)\Psi_1^Z(x) = Y(\Psi_1^Z\circ\Psi_{-1}^Z)(\Psi_1^Z(x))$ e che $\Psi_1^Z\circ\Psi_{-1}^Z = I$, si ha:

$$G'(t) = Y(\Psi_1^Z(x)),$$

e, poiché $\Psi_1^Z(x) = \Psi_1^{Z(X,tY)}(x) = \exp\big(Z(X,tY)\big)(x) = G(t)$, possiamo concludere

$$G'(t) = Y(G(t)).$$

Di conseguenza, F e G soddisfano la stessa ODE, così la prova è conclusa. □

Bibliografia

[01] S. Biagi, A. Bonfiglioli: *An Introduction to the Geometrical Analysis of Vector Fields, with Applications to Maximum Principles and Lie Groups*, submitted monograph, 2017

[02] S. Biagi, A. Bonfiglioli: *A completeness result for time-dependent vector fields and applications*, Commun. Contemp. Math., vol. 17, no. 4, 1450040, 1–26 (2015).

[03] S. Chiappelli, Tesi di Laurea Magistrale in Matematica: *Applicazione ai Gruppi di Lie della Prolungabilità per Equazioni Differenziali Ordinarie*, 2015-2016

[04] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Pitagora, 2001

[05] T.C. Sideris, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, 2013