

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Econofisica: la fisica che predice i mercati

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:
Giuseppe Matera

Anno Accademico 2016/2017

All knowledge degenerates into probability.

David Hume

Indice

Introduzione	4
1 Introduzione all'Econofisica	6
1.1 Fisici ed economia: un interesse secolare	6
1.1.1 La nascita dell'econofisica	7
1.2 La Complessità come materia di studio	8
1.2.1 Le caratteristiche fondamentali della Complessità	9
1.3 Il sistema complesso "mercato finanziario"	12
1.3.1 Le peculiarità del sistema	12
1.3.2 Ordine e caos in Borsa	14
1.3.3 Tasche di prevedibilità: il preludio della fine	16
2 La Standard Finance Theory	19
2.1 L'ostacolo insormontabile	19
2.2 Le basi probabilistiche della random walk	20
2.3 Variazioni di prezzo su un timestep	25
2.4 Variazioni di prezzo su più timestep	28
2.4.1 Alcune proprietà statistiche dei momenti	29
2.4.2 La probability distribution function (PDF)	31
2.4.3 Il Teorema del Limite Centrale	32
2.5 Equazione d'evoluzione nel tempo continuo	34
2.6 Equazioni differenziali stocastiche per l'evoluzione del prezzo	37
3 Gli indici dello Shanghai stock exchange e del NYSE	39
3.1 Premesse	39
3.2 Analisi empirica	41

Conclusioni	53
A Teoria della probabilità	54
A.1 Spazi di probabilità e variabili aleatorie	54
A.2 Distribuzioni di probabilità	55
A.2.1 Le distribuzioni marginali	56
A.3 Variabili aleatorie continue	56
A.4 Variabili aleatorie discrete	57
A.4.1 Valor medio, varianza e covarianza	57
A.5 La distribuzione gamma	59
A.5.1 La distribuzione esponenziale	59
A.5.2 Le <i>gamma distribution</i>	59
A.6 Distribuzione di Lévy	60
A.7 La funzione caratteristica	60
A.7.1 Trasformata di Fourier	60
A.8 Momenti e indici	61
Bibliografia	62

Introduzione

Sin dal 1970 la mole di dati inerenti al mondo della Finanza è diventata imponente. Dal 1973, anno in cui le valute hanno iniziato ad essere scambiate nel cosiddetto mercato *forex*, Foreign Exchange Market, al 1995 il volume di transazioni finanziarie è diventato ottanta volte più grande. Circa a metà di quel periodo è avvenuta anche la rivoluzione dell'*electronic trading*, infatti dal 1980 i dati sono stati trasferiti tutti in forma digitale e registrati a una frequenza molto più alta che in precedenza, strumenti, questi, sviluppati con lo scopo di prevedere e investire sul mercato. In questa tesi si presenta un'analisi di Econofisica, ovvero un approccio pioneristico ai mercati finanziari, a cui si è tentato di applicare concetti provenienti dalla fisica e più in particolare dalla fisica statistica, quali distribuzioni con leggi di potenza, correlazioni, serie randomiche nel tempo, processi stocastici, sistemi complessi.

In seguito alla modellizzazione di un mercato ideale, il vero obiettivo dell'Econofisica riguarda l'analisi e la previsione sui mercati reali, ragion per cui, in special modo negli ultimi anni, si è stati spettatori di un progressivo discostamento dalla teoria classica della finanza matematica, grazie anche alla nascita della Scienza della Complessità, di cui il mercato finanziario è uno dei più noti esempi.

La relazione fra scienze, in particolare la Fisica, e la Finanza è ancora allo stadio embrionale, l'Econofisica come ramo di studio autonomo ha infatti meno di quarant'anni, ma in un mondo in cui i dati e i *pattern* finanziari sono di sempre più difficile previsione ed è necessario implementare i modelli già teorizzati, l'interesse fra i fisici cresce in modo considerevole faccendo supporre che maggiori e più importanti risultati arriveranno in un prossimo futuro.

In questo lavoro di tesi si è voluta dare un'idea generale delle genesi della materia, degli strumenti statistici e probabilistici che utilizza e infine si è presentata un'analisi condotta su due indici finanziari, l'indice dello *Shanghai stock market* e il *NYSE*.

Nel primo capitolo si passano in rassegna gli scienziati che più di tutti hanno contri-

buto a pensare l'economia, tipicamente considerata una scienza sociale, in termini quantitativi, si fornisce un breve insieme di caratteristiche proprie di un Sistema Complesso e si procede ad analizzare le caratteristiche di un mercato finanziario concludendo quindi che quest'ultimo possa essere analizzato con le proprietà della Scienza della Complessità.

Nel secondo capitolo si analizza la *Standard Finance Theory* e i suoi concetti cardine, quali la *random walk*. Inoltre si discutono le forme analitiche delle variazioni di prezzo sui mercati, considerando anche l'ipotesi delle variabili distribuite in modo indipendente e identico. Si giunge infine alla formulazione di due equazioni: l'equazione d'evoluzione nel tempo continuo e l'equazione differenziale stocastica per l'evoluzione del prezzo.

Nel terzo capitolo si ha l'analisi empirica sui due indici finanziari, l'indice dello *Shanghai stock market* e il *NYSE*. Vengono dunque discussi concetti propri di questi due indici, come l'andamento *intraday*, i rendimenti assoluti e la volatilità.

Infine è presente un'appendice sui principali argomenti di teoria della probabilità e statistica presentati in questa trattazione.

Capitolo 1

Introduzione all'Econofisica

1.1 Fisici ed economia: un interesse secolare

Le radici dell'econofisica, intesa in senso ampio come insieme di teorie matematiche e statistiche utilizzate in ambito economico e sociologico, sono molto più antiche della nascita della materia di studio propriamente detta. Difatti l'interesse dei fisici nei riguardi delle scienze sociali non risale certo al ventesimo secolo. Si possono citare molteplici esempi di scienziati che sin dal 1700 hanno volto i loro interessi e le loro ricerche all'economia e alla sociologia, applicando e estendendo i principi, le leggi e i modelli scoperti e usati nelle scienze pure.

Primo fra tutti, il matematico e fisico svizzero Daniel Bernoulli, autore tra l'altro del saggio *"Specimen theoriae novae de mensura sortis"*, propriamente *"Esposizione di una nuova teoria di misura del rischio"* [2], in cui viene presentato e risolto dallo stesso scienziato il cosiddetto paradosso di San Pietroburgo, un problema di probabilità e teoria delle decisioni dell'economia classica, introducendo il concetto di utilità marginale, ovvero la variazione nella soddisfazione o nei vantaggi derivati dal consumo di un dato bene o un dato servizio e il principio dell'utilità marginale decrescente, legge che afferma che all'aumentare del consumo di un bene, l'utilità marginale di quel bene diminuisce. Nelle sue parole

The determination of the value of an item must not be based on the price, but rather on the utility it yields... There is no doubt that a gain of one thousand ducats is more significant to the pauper than to a rich man though both gain the same amount.

La determinazione del valore di un bene non deve essere basata sul prezzo, ma piuttosto sull'utilità che esso produce... È indubbio che guadagnare un milione di ducati è più rilevante per una persona povera che per una ricca sebbene il guadagno sia il medesimo.

Un ulteriore esempio ragguardevole è Jan Tinbergen, premio Nobel per l'Economia nel 1969, che, dopo aver studiato matematica e fisica all'Università di Leiden, sotto la guida di Paul Ehrenfest, noto fisico teorico austriaco, ha conseguito il Dottorato con una tesi dal titolo esplicativo del suo interesse verso le scienze esatte, "*Problemi di minimizzazione in Fisica e in Economia*". Fu anche creatore del modello gravitazionale del commercio mondiale, caposaldo dell'economia internazionale, che predice il flusso di commercio tra due paesi basandosi sulla conoscenza sulla distanza e l'ampiezza di questi ultimi e il loro prodotto interno lordo, tramite la formula:

$$F_{ij} = G \frac{M_i^{\beta_1} M_j^{\beta_2}}{D_{ij}^{\beta_3}}. \quad (1.1)$$

In (1.1) $M_i^{\beta_1}$ e $M_j^{\beta_2}$ rappresentano i rispettivi PIL per i due paesi, indicizzati i e j , G è una costante e β_1 , β_2 , β_3 sono dei parametri, da determinare in entrambi i casi sperimentalmente. L'equazione (1.1) ricalca nella forma la Legge della gravitazione universale di Isaac Newton (1.2), da cui prende il nome peraltro

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1.2)$$

Infine, ultimo ma non per importanza, è doveroso riportare il caso di Louis Bachelier, matematico parigino del ventesimo secolo, allievo del celebre Henri Poincaré. Egli fu il primo a modellizzare il processo stocastico del moto browniano, cinque anni prima di Albert Einstein. Egli fu anche il primo ad applicare questo modello, nella sua tesi di dottorato, "*La teoria della speculazione*", per valutare stock option e proprio per questo viene universalmente considerato come il pioniere e il fondatore della finanza matematica e perciò precursore dell'econofisica.

1.1.1 La nascita dell'econofisica

Il termine *econofisica* si riferisce più strettamente, nell'ambito generale degli strumenti matematici e statistici applicati all'economia e alla finanza, all'estensione della fisica statistica allo studio dei problemi che solitamente cadono nella sfera dell'economia e, in

particolare, della finanza. Dal punto di vista di un economista, l'econofisica ha lo scopo di creare modelli capaci di riprodurre e predire il comportamento stocastico del prezzo delle azioni e le corrispondenti variazioni dei rendimenti e applicare questi modelli allo studio di prodotti finanziari e strategie, come ad esempio l'option pricing.

La nascita ufficiale del movimento si fa convenzionalmente risalire al 1996, anno di pubblicazione di un articolo di Stanley et al. (1996), che ha anche coniato il termine *econofisica*, mentre secondo altri autori, Kutner and Grech (2008), è possibile tracciare una nascita informale in uno studio pubblicato da Mantegna (1991) in cui era analizzata l'evoluzione dei mercati finanziari in termini di processi stabili di Lévy [9].

Tuttavia questi articoli e studi sono il naturale coronamento di un crescente interesse dei fisici nell'economia e nella finanza iniziato a partire dagli anni '60, soprattutto in USA, dove è stato guidato e incentivato da condizioni particolarmente stimolanti. Infatti, come menziona Kaiser [11], ci furono in quegli anni, la *Sputnik era*, delle cosiddette "bolle di Dottorati in Fisica", causate dalla situazione geopolitica dell'epoca, che vedeva contrapposte il blocco orientale e gli Stati Uniti su più piani, tra cui appunto lo sviluppo tecnologico. Un fenomeno ripetutosi negli anni '80, durante l'amministrazione Reagan, in cui il crescente timore di una competizione economica con il Giappone ha innescato una serie di ingenti finanziamenti al settore biotech, all'ingegneria e alle scienze fisiche. Questa seconda bolla fu particolarmente favorevole al settore di fisica della materia condensata, campo in cui spesso i fisici utilizzano metodi statistici per indagare le proprietà fisiche delle fasi della materia. Infatti non è certo un caso che più d'un padre dell'econofisica (e.g. J. L. McCauley e H.E. Stanley) è direttamente associato alla fisica della materia condensata.

1.2 La Complessità come materia di studio

Si sente spesso dire che i mercati finanziari possono essere studiati come sistemi complessi ma è bene precisare cosa sottende quest'affermazione e cosa la differenzia dall'essere soltanto *complicati*. Sebbene non esista una definizione univoca, la nozione scientifica di Complessità è solitamente descritta attraverso degli esempi del mondo che ci circonda che gli scienziati credono essere complessi, come i semafori di una città, le cellule umane e persino le frange di guerriglieri ribelli. [8]

Volendo definire più in generale il nucleo fondamentale di questi esempi di *sistemi complessi* dalla vita quotidiana si giunge a trattare una situazione in cui un insieme

di oggetti, o agenti, sono in competizione per ottenere un qualche tipo di risorse, le quali sono limitate. In tale contesto la formazione di una folla, a partire dai singoli oggetti-agenti, ha degli effetti pratici ben visibili e molto importanti. Ad esempio, in un mercato finanziario l'insorgenza spontanea di folto insieme di persone che vogliono vendere e che quindi sono in competizione per trovare dei compratori può portare a un crollo del mercato in cui il prezzo precipita in poco tempo.

Il principale obiettivo della *Scienza della Complessità* è comprendere, controllare ma soprattutto prevedere tali fenomeni che emergono dal comportamento della folla, in particolare quelli potenzialmente catastrofici come epidemie, crolli della borsa e ingorghi del traffico. Sorge quindi spontanea la domanda: questi fenomeni sono predicibili in qualche modo o sorgono dal nulla senza avvisaglie? È possibile anche fare in modo di evitarli? Un aspetto notevole che caratterizza questi fenomeni è che possono nascere in assenza di qualsiasi coordinatore o controllore. Non c'è dunque bisogno di una "mano invisibile", ma l'insieme di oggetti-agenti è capace di organizzarsi da sé in modo tale da generare il suddetto fenomeno.

La forza e la velocità di tale situazione estrema è ragguardevole, si sa bene infatti quanto sia facile lasciarsi trascinare, volenti o nolenti nei flussi e riflussi della mentalità della folla. Si pensi alla *Dot-com Bubble* dei primi anni duemila, chiaro esempio dell'*effetto gregge* e delle cosiddette "informational cascades", situazione in cui un agente abbandona le proprie idee e informazioni per seguire quelle altrui. [4], in quanto generata dall'eccessiva fiducia nelle aziende attive nel settore di Internet che andava diffondendosi in quegli anni oltreché per l'irrazionalità degli investitori, anche per via dell'influenza dei mezzi d'informazione e dei fund manager che incentivavano questo genere di investimenti.

1.2.1 Le caratteristiche fondamentali della Complessità

Poiché non esiste una definizione chiara e universalmente accettata, la maggior parte degli studiosi hanno delineato i tratti peculiari di un Sistema Complesso partendo da casi specifici, già analizzati e studiati come Sistemi Complessi, giungendo ad individuare alcune precise caratteristiche [7], fra cui:

- **Molti agenti interagenti.** Nel caso dei mercati finanziari, sono gli investitori o i traders, nel caso del traffico, sono gli autisti, in definitiva il sistema contiene molti componenti, a cui la comunità scientifica si riferisce come "oggetti" o "agenti". L'interazione fra di loro può avere caratteristiche differenti, a seconda che tutti gli

agenti condividano le stesse informazioni, come gli investitori davanti al medesimo grafico con l'andamento del prezzo di un dato assett, o che l'informazione sia condivisa soltanto da alcuni agenti, in modo privato. Tuttavia, ad ogni modo gli agenti sono tutti connessi insieme per mezzo delle loro interazioni, in quanto tali quindi possono essere pensati come facenti parte di un network, ragion per cui lo studio dei network è diventato parte integrante dello studio della Scienza della Complessità. Nella maggior parte dei casi, gli agenti che rispondono al *feedback* dell'informazione e che competono per vincere, si comportano perlopiù in modo non previsto, non standard, è perciò difficile delineare le caratteristiche dell'*agente tipo*;

- **Feedback.** Il comportamento degli oggetti-agenti è influenzato dalla memoria di quanto già accaduto nel sistema o in un altro luogo, altrimenti detto "feedback". Più in generale ciò accade quando l'output di un sistema viene reindirizzato come input dello stesso sistema, parte integrante di una catena causa-effetto, a formare un ciclo.

Simple causal reasoning about a feedback system is difficult because the first system influences the second and second system influences the first, leading to a circular argument. This makes reasoning based upon cause and effect tricky, and it is necessary to analyze the system as a whole. [1]

Applicare il semplice ragionamento causale ad un sistema con feedback è difficile perché il primo sistema influenza il secondo e il secondo influenza il primo, inducendo una circolarità. Ciò rende questo ragionamento basato sulla causa e sull'effetto complicato, ed è necessario analizzare il sistema nel complesso.

La sua natura può variare nel tempo - per esempio, può essere positiva in un istante e negativa nell'istante successivo - o anche in importanza e ordine di grandezza. Tale variazione può avvenire sia a livello microscopico che a livello macroscopico, o anche in entrambi. La presenza di quest'effetto indica che il sistema ricorda il proprio passato e ne risponde in maniera solitamente non banale.;

Il risultato concreto del fatto che tutti conservino questa memoria è che anche il sistema, come un intero, ricorda. Proprio per questo motivo, ad esempio, apparirà un dato *pattern* d'insieme nello stock market o nello schema del traffico cittadino;

- **Non stazionarietà.** Non è possibile assumere che le proprietà statistiche e dinamiche che il sistema aveva in passato rimangano inalterate nel futuro del sistema. Nella fattispecie della finanza, lo storico dei livelli di volatilità, ottenuti tramite lo studio delle serie di prezzi passate non sono stimatori efficaci per la determinazione della futura volatilità;
- **Adattamento.** Un agente del sistema è capace di cambiare il proprio comportamento, in relazione al feedback che riceve, al fine di migliorare le proprie performance;
- **Evoluzione.** Tutta la popolazione del sistema cambia, guidata dall'ambiente di agenti che interagiscono e si adattano sotto l'influenza del feedback, ed evolve in modo non triviale e spesso complicato. Ad esempio, gli analisti finanziari frequentemente ne parlano come se il mercato fosse un essere vivente, definendolo a seconda dei casi *pessimista*, *negativo* oppure *fiducioso*, *ottimista*. Il sistema di norma rimane ben lontano dalla situazione di equilibrio, con ciò si intende che al suo interno può accadere qualsiasi cosa e, se si aspetta abbastanza, accadrà. Perciò il sistema può presentare situazioni di comportamento estremo, quali i crolli della Borsa nel caso dei mercati finanziari. Questo fatto apre le porte ai discorsi sulla predicibilità: essendo fenomeni emergenti e di per sé sorprendenti è possibile prevederli basandosi soltanto sul comportamento e sulle proprietà dei singoli oggetti? Queste situazioni estreme nascono del tutto casualmente o sono generate da una sorta di *commedia degli equivoci*?;
- **Unicità della realizzazione.** Il sistema è una realizzazione di per sé unica, perciò le strategie standard in cui si eguagliano le medie calcolate nel tempo a quelle calcolate sugli ensembles potrebbero non funzionare;
- **Sistema aperto.** L'apertura di un sistema indica che esso può essere influenzato dall'ambiente in cui vive, proprio come un mercato potrebbe essere condizionato dalla pubblicazione di notizie sui giornali riguardanti i profitti di una certa azienda quotata. Poiché il sistema è combinato strettamente al suo ambiente, è complicato difficile distinguere fra effetti esogeni, provenienti dall'esterno, ed endogeni, generatisi all'interno.

In sostanza, il valore aggiunto della Scienza della Complessità è scoprire e studiare relazioni fra Sistemi Complessi che prima venivano studiati separatamente. Contraria-

mente alla Fisica degli ultimi secoli, che ha adottato una visione chiaramente riduzionista, la quale ha portato i fisici a “rompere” l’atomo col fine di guardare ai “pezzi” dentro di esso, poi a rompere questi pezzi per guardare ancora più dentro fino ad arrivare al livello dei quark, la Scienza della Complessità si occupa di rimettere insieme questi pezzi per studiarne le similarità e le interazioni.

Inoltre, un suo ulteriore scopo è studiare quantitativamente il comportamento d’insieme di un sistema pur senza una completa conoscenza dei singoli componenti. Infatti, come si è visto precedentemente, semplici “pezzi”, che interagiscono in modo anche semplice, possono dar vita a una ricchissima varietà di esiti realistici.

1.3 Il sistema complesso “mercato finanziario”

Ogni Sistema Complesso ha le sue peculiarità e la sua importanza all’interno della Scienza della Complessità, tuttavia è ben comprensibile perché nella vita di ogni essere umano far fruttare i propri risparmi occupa un posto di rilievo. Conoscere in anticipo i movimenti dei mercati può essere di grande aiuto a questo fine, tuttavia esiste un enorme problema: i mercati sono sistemi di difficile lettura, continuamente mutevoli in modi che spaventano persino gli analisti più esperti e coraggiosi. Ciononostante, essi hanno anche un considerevole vantaggio, infatti sono generatori di un’immensa mole di dati che può essere utilizzata per una verifica incrociata del proprio modello predittivo, una volta costruitone uno s’intende.

Assodato ciò, perché ci si dovrebbe spingere a credere che prevedere i movimenti di prezzo di un dato asset sia possibile in qualche modo, seppur arduo e approssimato? La ragione risiede nel fatto che ogni movimento di prezzo sia effettivamente una “registrazione” in tempo reale delle azioni di tutti i “partecipanti” al suddetto mercato e che ognuno di questi stia tentando di vincere in un vasto sistema globale. Tale sistema, però, nella sua forma più semplice si può ridurre a un gioco di decisioni binario, in cui le opzioni sono vendere o comprare.

1.3.1 Le peculiarità del sistema

Come già anticipato, una predizione nei mercati finanziari è profondamente differente da quella del meteo o dai risultati ottenuti lanciando una moneta o girando la ruota della

roulette, non soltanto per la rilevanza degli effetti generati, ma anche per le caratteristiche costitutive degli stessi.

In un mercato, gli agenti provano tutti a prevedere i movimenti dei prezzi per decidere se vendere o comprare. Ed è la stessa domanda netta di ordini *buy* o *sell* a determinare il movimento di prezzo successivo, che perciò ritorna come feedback agli agenti che potrebbero usarlo per prendere decisioni sui loro successivi movimenti ma loro, come tutti gli esseri umani, non potranno evitare di vedere pattern nei grafici del mercato, o di credere di vederli, a cui di conseguenza reagiranno. Com'è evidente, un mercato finanziario è costellato di feedback, che appunto conduce a nuove decisioni riguardo al vendere o comprare titoli, azione che produce un nuovo movimento di prezzo che a sua volta, a chiudere la catena di causa ed effetto, genera un nuovo feedback.

Fenomeno, questo, che di certo non compare lanciando una moneta ad esempio. Questa è composta di molecole che, sebbene nell'insieme sembrano comportarsi in modo complicato, obbediscono alle Leggi del Moto di Newton, per cui non hanno il potere di prendere decisioni e in nessun modo il risultato del processo è correlato a quel che le persone prevedono accadrà. Allo stesso modo per le previsioni meteorologiche, anche se uno scienziato avesse elaborato il modello perfetto del tempo meteorologico, questo non smetterebbe di comportarsi esattamente come si comportava prima.

Ad ogni modo, questo non è vero per i mercati: se qualcuno avesse in mano il modello perfetto, questo cesserebbe di essere perfetto proprio a causa del forte impatto del feedback, ognuno userebbe quelle previsioni e il mercato sarebbe inevitabilmente distorto. Ad esempio, se quel dato modello prevedesse che certo stock debba essere venduto, tutti i trader proverebbero a venderlo allo stesso tempo e quello stock diverrebbe privo di valore all'istante poiché nessuno vorrebbe comprarlo. Ciò porta alla conclusione che qualsiasi modello predittivo che sia troppo conosciuto oppure largamente utilizzato comprometterebbe il valore degli stock posseduti dai trader, piuttosto che aiutar loro a guadagnare più denaro.

Perdipiù, il metodo principalmente utilizzato dai manager di fondi azioni e dai broker per gestire il rischio e il contenuto dei portafogli dei loro clienti ha un'enorme limitazione in sé, indipendentemente da quanto sia astuta ed efficace: esso è tanto valido quanto è valido il modello impiegato per descrivere i movimenti di mercato sottostanti.

Come analizzeremo in seguito studiando la *random walk*, la distanza percorsa al tempo t in un moto unidimensionale e del tutto casuale può essere scritta come t^a , in cui in tal caso $a = 0.5$. Il classico esempio per la cosiddetta passeggiata aleatoria è il cammino

percorso da un ubriaco che esce da un locale, compiuto con passi unitari in distanza e con tutte le direzioni equiprobabili, schema che facilmente si trasferisce nell'ambito finanziario, in cui un passo è equivalente a un movimento di prezzo. Risulta quindi che la random walk rappresenta il modello standard di come un mercato finanziario funzioni, quello utilizzato anche dalla maggior parte degli operatori del settore citati in precedenza. Questo modello, capostipite della *Standard Finance Theory*, ha come assunto principale che il movimento di prezzo di un preciso asset sul mercato sia descritto al meglio dal lancio di una moneta: testa significa che il prezzo salirà di una certa quantità, croce al contrario indica un abbassamento di prezzo dello stesso quantitativo.

Ma sorge un problema: in generale il prodotto di un Sistema Complesso non è schematizzabile come una random walk, perché si può affermare che nel mondo reale un Sistema Complesso tende ad assumere un comportamento non troppo ordinata né troppo disordinata. Dal punto di vista analitico, i pattern osservati hanno un valore di a non uguale a 0.5.

Dunque applicando la Standard Finance Theory alla vita reale si scoprono due gravi crepe nella teoria: la prima riguarda i dati quantitativi, che studiati e analizzati, hanno mostrato seguire un comportamento con valori di a che differiscono significativamente da 0.5, sostanzialmente perché la random walk è un sistema senza feedback, non ha infatti memoria alcuna del passato, la seconda è per certi versi ancor più sorprendente perché si è notato che non solo il valore di a differisce da 0.5 per un particolare mercato, ma differisce da 0.5 indipendentemente quale che sia il mercato considerato e questo è un chiaro esempio di come i fenomeni emergenti da un Sistema Complesso possano avere proprietà universali.

1.3.2 Ordine e caos in Borsa

Come tutti i Sistemi Complessi, i mercati si muovono continuamente tra l'ordine e il disordine, saltano da comportamenti ordinati quali sono i crolli di Borsa ad alcuni completamente disordinati in cui non è possibile riscontrare nessuno schema. Proprio per questo motivo l'unica strada per studiare questo Sistema Complesso è un teoria della Complessità. Probabilmente esistono casi in cui la Standard Finance Theory sembra funzionare, ma inevitabilmente fallirà, in special modo quando nel mercato i comportamenti della folla si riflettono in un movimento di prezzo spiccato e deciso.

Recenti pubblicazioni mostrano come invece nei mercati azionari i movimenti di prezzo seguano un comportamento medio dopo t passi temporali proporzionale a t^a , dove in questa situazione $a \gg 0.5$. In altre parole, il prezzo nella maggior parte dei mercati è più “tenace”, a feedback più positivo, rispetto alla random walk. Come già anticipato, risulta anche che molti mercati azionari in giro per il mondo tendono ad avere valori molto simili di a , sebbene si trovino su continenti diversi e abbiano ordine di grandezza, composizione e numero di scambi quotidiani molto dissimili. Ciò a primo impatto sembrerebbe insensato e del tutto casuale, tuttavia a un’indagine più approfondita emerge un fattore che unifica tutti i mercati finanziari del mondo: tutti loro infatti hanno a che fare con titoli e vendita di titoli, sono tutti composti da un insieme di oggetti che hanno il compito di prendere decisioni, i trader appunto, sulla base dei feedback ricevuti a proposito dei movimenti di prezzo precedenti e tale metodo di prendere decisioni è uguale indipendentemente che ci si trovi a Londra, a Pechino o a New York.

In virtù di questa “internazionalità” di modi di decidere, si può intuire cosa accade quando viene rilasciato un preciso feedback. C’è subito l’emergere di una folla e di un’anti-folla e l’entità di cambiamento di prezzo dipenderà da quanto queste due componenti si annullano a vicenda e il verso del cambiamento d’altronde è determinato da quale delle due componenti “vince”. Inoltre, il fatto che nonostante le chiare differenze degli individui che compongono i sistemi-mercati finanziari per il mondo, il loro comportamento d’insieme è, per così dire, unificato. Ecco quindi le ragioni della Scienza della Complessità, l’unica capace di una teoria descrittiva del comportamento collettivo di sistemi di esseri umani.

Tuttavia, affrontata la *pars destruens*, adesso si perviene alla *pars construens*, passando in rassegna le questioni fondamentali per poter costruire un modello di previsione dei mercati realistico. Il primo punto è relativo al feedback dell’informazione: quali fonti e quali tipi d’informazione preferiscono i trader? La risposta è quasi ovvia, dato che si è continuamente tempestati di grafici che mostrano i rialzi e i ribassi più recenti dei prezzi sulle principali emittenti televisive e sui giornali economici maggiormente diffusi, questi grafici non potranno che arrivare anche ai trader, ancora più numerosi e più dettagliati. Inoltre, com’è possibile codificare tutta l’enorme mole di informazioni e dati? Ispirandosi alle decisioni binarie del lancio di una moneta, il modo più semplice per la codifica è usare gli 1, assegnati a un rialzo o un ribasso nel prezzo di entità superiore a L , un limite assegnato a priori, e gli 0, spettanti invece a un movimento minore di L . Il valore limite di L potrebbe essere dedotto da ragioni esogene o endogene al mercato. Un esempio del

primo caso potrebbe essere scegliere L in relazione al fatto che le notizie del giorno siano giudicate positive o negative per l'andamento della Borsa, un esempio del secondo d'altra parte potrebbe nascere da effetti macroeconomici, infatti se i tassi d'interesse sono bassi le persone potrebbero essere tentate di investire i loro risparmi nel mercato piuttosto che riporli al sicuro in banca. In conclusione quindi L dà un'idea dell'attrattività del mercato o dello stock in considerazione. Assodato questo, non ha senso porsi altre domande. Lo scopo di ridurre ai minimi termini il mercato è stato adempito ed è quanto serve per riprodurre fedelmente le caratteristiche quantitative dei movimenti reali di prezzo sui mercati poiché esso cattura l'essenza di un Sistema Complesso formato da un insieme di agenti che interagiscono tramite informazioni condivise e feedback e competono per il miglior prezzo.

1.3.3 Tasche di prevedibilità: il preludio della fine

Uno dei più importanti *fenomeni emergenti* che è possibile discutere è il crollo dei mercati. Ci sono momenti in cui il mercato tende a puntare al ribasso per un periodo di tempo sufficientemente esteso. Questo, agli occhi della Scienza della Complessità, è un classico esempio di *tasca di prevedibilità* che appare spontaneamente a partire dalla situazione di disordine in cui versava in precedenza il sistema ed è peraltro la controprova del perché i mercati finanziari possano essere stilizzati come entità che vivono nella terra di mezzo fra l'ordine e il disordine, come ogni altro Sistema Complesso.

Esiste una vera e propria tassonomia delle crisi, perché non tutte sono generate dagli stessi fattori, hanno la stessa forma o gli stessi effetti. Più in generale, in qualità di scienziati, il modo di analisi e i dati che si dovrebbero trarre da queste crisi sono inerenti alle forze interne, che compongono il mercato: quella della folla e quella dell'anti-folla. Di solito esse stanno approssimativamente in reciproco equilibrio, cosa che provoca le fluttuazioni casuali nel prezzo. D'altra parte, le crisi sono ottimi esempi di momenti in cui impera una situazione di non equilibrio fra le due parti, il cui effetto dominante è un movimento netto e definito in una sola direzione, effetto denominato "*evento estremo*" ed è di fondamentale importanza per l'evoluzione efficace e innovativa di un Sistema Complesso.

Poiché la crisi, quindi l'ordine, emerge dal disordine con le lenti appropriate sarà possibile scavare a fondo nel Sistema Complesso e prevedere un marcato cambiamento provando ad individuare queste *tasche di ordine*, come si può ben vedere in Figura 1.1.

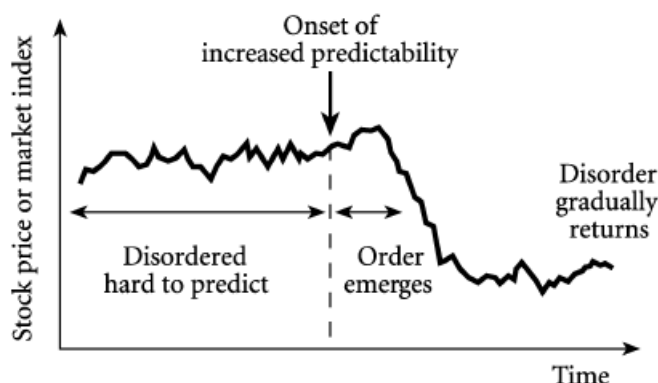


Figura 1.1: L'emergere dell'ordine nel mercato indica che ci sarà un periodo di predicibilità più alta prima del crash. Figura tratta da [8].

La conclusione a cui si perviene quindi è che i mercati finanziari diventano più prevedibile nel momento che precede un grande cambiamento rispetto a qualsiasi altro momento e proprio perché è questo cambiamento che interessa e preoccupa gli investitori e i trader, è stata sviluppata una teoria matematica dal fisico David M.D. Smith [10], strumento utile in generale nella Scienza della Complessità, non soltanto a proposito di Finanza.

Per avere un'idea di come un Sistema Complesso evolverà nel futuro può risultare utile la metafora dei corridoi. Se il corridoio è largo e non sembra indichi una direzione ben definita, in alto o in basso, non è di certo il momento ideale per fare previsioni sui futuri movimento di prezzo. Potrebbe invece essere proficuo giocare a favore della volatilità dei mercati e per esempio acquistare o vendere alcuni particolari derivati finanziari, chiamate opzioni. Per contrasto, capita che i corridoi entro cui si muove il sistema siano più stretti e ben definiti, quello sarà indubbiamente un buon momento per fare delle previsioni per il futuro.

Determinare in quale dei due momenti ci si trova può essere complicato, anche perché il mercato finanziario è talvolta ordinato, altre disordinato. In media, ciò provoca un'oscillazione del parametro a , esponente di t^a , dal valore "ordinato" di 1 e quello completamente casuale di 0.5. Inoltre, in qualunque istante, il feedback dell'informazione tenderà ad incentivare il trend attuale del prezzo, ovvero facendo in modo di rendere i corridoi più stretti e marcando una direzione ben precisa e persistente, oppure andrà contro l'attuale trend, dopo di cui il mercato entrerà in una situazione di incertezza, senza più una direzione da seguire. A tale scopo, il fisico Nachi Gupta dell'University of

Oxford, ha sviluppato degli strumenti matematici [5], spiegando che la costruzione dei suddetti corridoi, e quindi la prevedibilità, sia possibile perché i mercati non sono mai continuamente prevedibili o non prevedibili, bensì mostrano periodi in cui si comportano in modo del tutto random e altri in cui è possibile rintracciare delle *tasche di prevedibilità* associate a “tasche” di ordine, com'è evidente in Figura 1.2 .

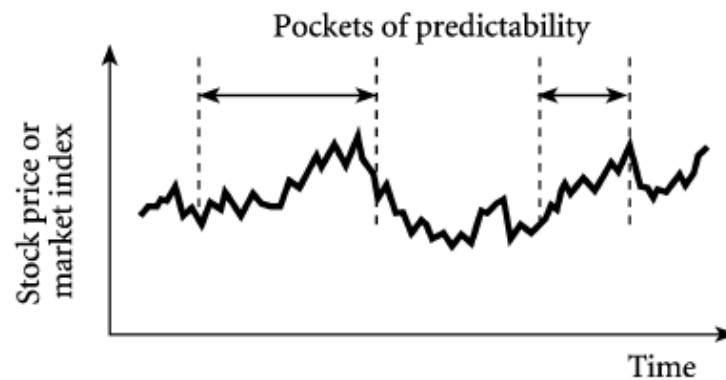


Figura 1.2: Nella sua continua oscillazione fra l'ordine e il disordine, un Sistema Complesso attraversa anche le tasche di prevedibilità indicate, che tipicamente precedono un periodo d'ordine. Figura tratta da [8].

Capitolo 2

La Standard Finance Theory

2.1 L'ostacolo insormontabile

La questione che in genere affrontano gli analisti di Borsa e gli studiosi del settore nel tentativo di elaborare una teoria adatta a gestire il rischio, i portafogli, il prezzo o l'eventuale copertura per la compravendita di uno strumento finanziario riguarda l'efficacia e l'applicabilità del modello sviluppato per descrivere i movimenti di mercato sottostanti. Nella Standard Finance Theory questi ultimi sono solitamente descritti da un processo stocastico, ragion per cui è possibile usare, per la loro analisi, il calcolo stocastico, nel limite del tempo continuo.

Tuttavia questa tipologia di approccio pone delle problematiche in seno alla teoria.

Il primo assunto ingannevole viene fatto a proposito del limite del tempo continuo. Se si ammette questo, si deve ammettere anche un *trading*, ovvero una compravendita di strumenti finanziari, continua e perciò risulta continuo anche l'aggiornamento della strategia utilizzata per la copertura del rischio, che non si rinnova più in conseguenza di ogni movimento di prezzo, bensì ad ogni passo temporale, fatto sostanzialmente impossibile nel mondo reale. Inoltre, dal momento che esiste un costo di transazione praticamente per ogni compravendita, si crea una vera e propria barriera che limita e rende svantaggioso questo aggiornamento "ad alta frequenza" perché maggiore è il numero di *re-hedging*, maggiore è il prezzo di commissione da pagare all'istituto di credito che tratta il titolo in questione.

Un'ulteriore difficoltà si incontra quando si prova a parametrizzare e strutturare un processo stocastico che effettivamente somigli a quel che accade in borsa. Ciò di soli-

to conduce alla creazione di modelli di mercato *ad hoc*, per mezzo di un processo che sembra un assemblamento alchemico più che una deduzione teorica. Non è sempre possibile infatti adattare queste “ricette” stocastiche alle serie temporali di prezzo sui mercati finanziari, perché queste mostrano spesso un’ampia gamma di *stylized facts*, ovvero caratteristiche empiriche dei mercati che deviano dal comportamento standard della random walk, praticamente impossibili da includere nello studio di un modello stocastico.

Il caposaldo della Standard Finance Theory è costituito dall’Ipotesi dei Mercati Efficienti, la cosiddetta EMH, *Efficient Market Hypothesis*, riassunta nell’affermazione, che sembra quasi un monito, “*There is no free lunch in finance*”, nulla è concesso gratuitamente in Finanza. Quest’ipotesi afferma in sintesi che l’intera storia di informazioni per un asset è riflessa e inserita nel suo prezzo e che il mercato risponde istantaneamente a nuove informazioni. Tenendo conto di questo principio nessuna informazione utile sui futuri cambiamenti di prezzo si può trarre analizzando le serie di prezzo precedenti, perché se anche si ammette l’esistenza di un dato pattern, esso sarà così limitato e su piccola scala che nessuna sistematica strategia di trading possa avere un profilo rischio/rendimento più vantaggioso rispetto all’andamento del mercato.

Dunque la descrizione teorica, una volta posta l’Ipotesi dei Mercati Efficienti, che viene utilizzata nella Standard Finance Theory è che i prezzi sui mercati seguano una qualche forma di random walk, di cui è utile perciò conoscere i dettagli e i limiti per avere una visione globale sui meccanismi che regolano la formazione dei prezzi.

2.2 Le basi probabilistiche della random walk

La teoria probabilistica della random walk si costruisce a partire dal lancio di una moneta. Se questa non è truccata, Testa (T) o Croce (C) hanno eguale probabilità di presentarsi, per cui $p[\text{testa}] = p[\text{croce}] = 0.5$.

Si può schematizzare questo lancio come l’estrazione di un valore casuale Δx da una funzione di densità di probabilità, *probability density function* (PDF) data, $p[\Delta x]$, denotando $\Delta x = +d$ come il risultato Testa e $\Delta x = -d$ come il risultato Croce. Il grafico della PDF $p[\Delta x]$ è riportato in Figura 2.1.

Questo esperimento di lancio della moneta può essere il modello di un semplice mercato, il cui cambiamento di prezzo al passo temporale i -esimo è dato dalla moneta lanciata

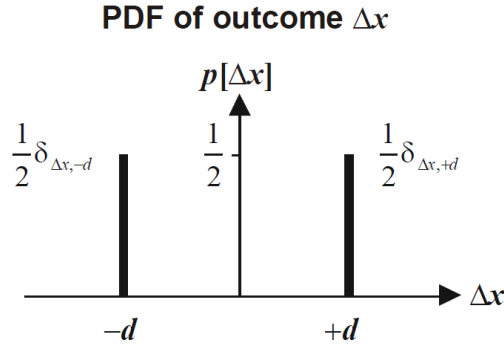


Figura 2.1: Funzione di distribuzione di probabilità che descrive i possibili esiti del lancio di una moneta e, per estensione, delle variazioni di prezzo in un mercato modellizzato dal lancio di una moneta. Figura tratta da [7].

in quell'istante. Quindi, dato x_i il prezzo all'istante i -esimo, si ha

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i,i-1} = \Delta x_i \quad (2.1)$$

in cui l'ultima uguaglianza è posta per semplicità di scrittura.

Per estensione, l'equazione per il cambiamento di prezzo dopo n passi temporali è

$$x_i - x_{i-n} = \sum_{k=i+1-n}^i \Delta x_k. \quad (2.2)$$

A titolo esemplificativo, si consideri la serie di risultati TTCT, che seguendo lo schema precedente genera una serie di prezzi che si muove in alto, in alto, in basso e infine ancora in alto con passo di "distanza" d , come rappresentato in Figura 2.2.

Generalmente si può pensare a questo esempio come la base della Standard Finance Theory, nonostante alcuni particolari modelli al suo interno siano più complicati, perché le proprietà statistiche del modello del lancio della moneta e quello della Standard Finance Theory sono molto simili.

In particolare, il modello di prezzo basato sul lancio della moneta assume che gli esiti successivi, Δx_i sono variabili distribuite in modo indipendente e identico, *independent and identically distributed*, (i.i.d.). Quest'affermazione è consistente con il meccanismo alla base del modello, ovvero il lancio della moneta, poiché difatti gli esiti di successivi lanci sono di certo indipendenti ed essendo usata ad ogni passo temporale la stessa moneta la PDF, $p[\Delta x]$, è sempre identica. Inoltre tale modello è coerente con l'ipotesi

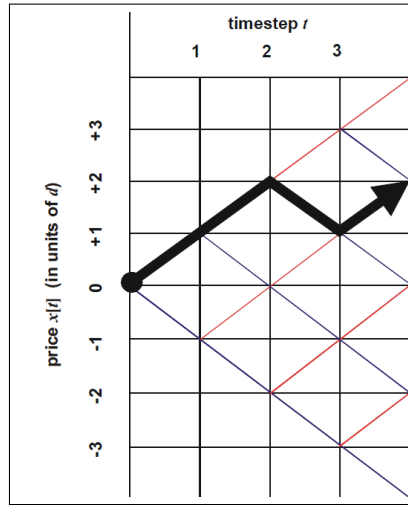


Figura 2.2: Serie di prezzi in un mercato modellizzato dal lancio di una moneta, in cui le variazioni Δx hanno valore $+d$ o $-d$ in modo equiprobabile. Figura tratta da [8].

dei Mercati Efficienti dato che la serie di prezzi considerata è random, fatto che rende impossibile predire gli esiti futuri sulla base di quelli passati.

Tuttavia, in genere la Standard Finance Theory non è così semplicistica, sebbene in molte situazioni si possa riscontrare l'assunzione della variabili i.i.d., distribuite in modo indipendente e identico. Per questo motivo è utile studiare più a fondo queste due assunzioni, in modo tale da generalizzare la situazione modellizzata.

Si considerino allora i seguenti cambiamenti di prezzo misurati a differenti passi temporali

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_j, \dots, \Delta x_n$$

in un mercato reale, in cui ovviamente non si sa a priori se l'assunzione delle variabili i.i.d valga o no. La PDF per il cambiamento di prezzo Δx_i al passo temporale i -esimo è data da $p_i[\Delta x_i]$. *

- **Ipotesi (i): Le variabili**

$$\{\Delta x_i\} \equiv \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_j, \dots$$

*Oltre allo scenario qui suggerito in cui le variabili $\{\Delta x_i\}$ rappresentano le variazioni di prezzo ai timestep $1, 2, \dots, i \dots$, si potrebbero intendere anche come qualunque dato di un'altra serie di dati finanziari, per esempio come variazioni di prezzo tra diversi asset a un dato istante (caso in cui l'etichetta i riferita all'asset in questione piuttosto che al tempo) o come variazioni giornaliere nel tasso di cambio tra valute differenti e il dollaro statunitense.

sono indipendenti.

Si consideri la distribuzione di probabilità congiunta $p[\Delta x_i, \Delta x_j]$ che descrive la probabilità di ottenere i valori Δx_i e Δx_j in due passi temporali dati, i e j , i quali saranno considerati *indipendenti* se

$$p[\Delta x_i \Delta x_j] = p_i[\Delta x_i] p_j[\Delta x_j] \quad (2.3)$$

in cui $p_i[\Delta x_i]$ e $p_j[\Delta x_j]$ sono le funzioni di densità di probabilità marginali per i timestep i e j . Vale a dire, la PDF può essere scritta come il prodotto delle PDF marginali per le variazioni di prezzo i e j .

Perciò, il valore medio di qualunque prodotto di funzioni di Δx_i e Δx_j , ad esempio $f(\Delta x_i) g(\Delta x_j)$ diventa

$$\begin{aligned} \langle f[\Delta x_i] g[\Delta x_j] \rangle &= \sum_{\Delta x_i, \Delta x_j} f[\Delta x_i] g[\Delta x_j] p[\Delta x_i, \Delta x_j] \\ &= \sum_{\Delta x_i, \Delta x_j} f[\Delta x_i] g[\Delta x_j] p[\Delta x_i] p[\Delta x_j] \\ &= \left\{ \sum_{\Delta x_i} f[\Delta x_i] p_i[\Delta x_i] \right\} \left\{ \sum_{\Delta x_j} f[\Delta x_j] p_j[\Delta x_j] \right\} \\ &= \langle f[\Delta x_i] \rangle \langle g[\Delta x_j] \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Un'importante conseguenza di questa indipendenza emerge nel caso specifico dato da $f[\Delta x_i] = \Delta x_i$ e $g[\Delta x_j] = \Delta x_j$, in cui l'equazione (2.4) diventa

$$\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle = \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle. \quad (2.5)$$

Se vale l'equazione (2.5), si dice che le variabili Δx_i e Δx_j sono *non correlate*. In particolare, l'equazione (2.5) può essere soddisfatta per specifici insiemi di dati senza che venga soddisfatta anche la (2.4), perciò si conclude che variabili indipendenti sono necessariamente non correlate, mentre variabili non correlate non sono sempre indipendenti.

Nei mercati reali non è evidente *a priori* se tali variazioni sono davvero indipendenti. La maggior parte dei test statistici riporteranno soltanto la seguente misura di correlazione

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle - \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle \\ &\equiv \langle (\Delta x_i - \langle \Delta x_i \rangle) (\Delta x_j - \langle \Delta x_j \rangle) \rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

denominata *covarianza*. Come si nota dall'equazione (2.5), se $c_{ij} = 0$, allora le variabili sono non correlate. Ad ogni modo, l'assenza di correlazione verificata tramite la (2.6) non esclude l'esistenza di correlazioni di grado superiore.

La misura di correlazione derivata dall'equazione (2.6) è associata alle potenze di Δx_i e Δx_j con esponente $n = 1$, ovvero è lineare in Δx_i e in Δx_j , difatti nella (2.4) sono stati considerati $f[\Delta x_i]$ e $g[\Delta x_j]$ proporzionali rispettivamente a Δx_i e Δx_j .

Mentre, correlazioni di ordine superiore sono associate a potenze di grado maggiore, in formule

$$f[\Delta x_i] \propto (\Delta x_i)^m, \quad (2.7)$$

$$g[\Delta x_j] \propto (\Delta x_j)^m \quad (2.8)$$

in cui $m > 1$, oppure a funzioni non analitiche, come per esempio

$$f[\Delta x_i] \propto |\Delta x_i|, \quad (2.9)$$

$$g[\Delta x_j] \propto |\Delta x_j|. \quad (2.10)$$

In linea di principio, si dovrebbero controllare tutte le precedenti correlazioni di ordine superiore per accertarsi dell'effettiva indipendenza di due variabili.

- **Ipotesi (ii): Le variabili**

$$\{\Delta x_i\} \equiv \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_j, \dots$$

sono distribuite in modo identico.

Se le funzioni di densità di probabilità marginali per i timestep i e j , $p_i[\Delta x_i]$ e $p_j[\Delta x_j]$, sono funzioni identiche, allora Δx_i e Δx_j sono distribuite in modo identico. In un mercato reale, ciò non è generalmente vero perché, ad esempio, la PDF di un dato periodo, un determinato giorno o un determinato mese, non sarà esattamente uguale a quella del periodo immediatamente successivo o precedente.

A seconda che le due ipotesi precedenti siano verificate, tutti i processi di formazione del prezzo sul mercato possono essere classificati in quattro categorie. Solitamente, la Standard Finance Theory tenderà a considerare la prima, in cui valgono entrambe le ipotesi.

2.3 Variazioni di prezzo su un timestep

Si assuma in tal caso di trattare variazioni di prezzo distribuite in modo indipendente e identico, per cui è possibile analizzare le proprietà della PDF di una singola variabile $\Delta x_i = \Delta x$, al fine di descrivere i cambiamenti tra due istanti successivi.

Il valore medio di una funzione $f[\Delta x]$ è definito come

$$\begin{aligned}\langle f[\Delta x] \rangle &= \sum_{\Delta x} f[\Delta x] p[\Delta x] \\ &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f[\Delta x] p[\Delta x] d[\Delta x].\end{aligned}\tag{2.11}$$

In questo caso Δx può assumere valori sia discreti che continui e il valor medio può essere calcolato con la sommatoria con $p[\Delta x]$ quando la PDF è discreta e l'integrale con $p[\Delta x]$ quando la PDF è continua, rispettivamente. Entrambe le situazioni possono essere analizzate e risultare utili, peraltro presentano le stesse conclusioni ma, poiché l'esempio citato in precedenza del lancio di una moneta è discreto, in questa trattazione si assumerà Δx discreto.

Scegliendo $f[\Delta x] = \Delta x$ in (2.11) si ottiene il valore medio $\langle \Delta x \rangle$, che rappresenta il momento di ordine uno di $p[\Delta x]$. In generale, come si evince dall'appendice A.8, si definisce momento centrale m -esimo

$$\langle (\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^m \rangle.\tag{2.12}$$

Si noti che la più comune misura della fluttuazione di un prezzo nella Standard Finance Theory è la *varianza*, ovvero il momento dato da (A.27) di ordine due

$$\sigma_{i,i-1}^2 \equiv \sigma^2 = \langle (\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^2 \rangle.\tag{2.13}$$

Prendendo la radice quadrata di (2.13) si ottiene la *deviazione standard* σ , della variazione di prezzo Δx su un singolo timestep, anche conosciuta nella Standard Finance Theory come *volatilità*. È proprio la volatilità ad essere usata nel calcolo del rischio finanziario e nell'option pricing, indice che implica la conoscenza di soltanto due tra gli infiniti momenti della PDF $p[\Delta x]$, sebbene in generale tutti questi momenti contengono nuove ed eventualmente fondamentali informazioni riguardo a $p[\Delta x]$.

A tal proposito, un esempio sul calcolo del rischio nei mercati è esplicativo: dal momento che grandi variazioni di prezzo generalmente occorrono meno di frequente che

piccole variazioni, la PDF $p[\Delta x]$ nella maggior parte dei casi decresce monotonicamente quando la suddetta variazione aumenta, in formule

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow \infty} p[\Delta x] = 0, \quad (2.14)$$

tuttavia non esiste una legge universale per sapere *a priori* quanto rapidamente questa funzione tende a zero in un mercato reale. Potrebbe succedere di trovare nelle “code” della distribuzione pesi significativi, le cosiddette *fat tails*. Dato che l’informazione sulle dinamiche del mercato proviene dalla conoscenza di $p[\Delta x]$ per tutti i Δx , sia grandi che piccoli, non considerando queste fat tails si potrebbero perdere dati significativi sulla probabilità delle grandi variazioni di prezzo.

In sintesi, le stime standard del rischio potrebbero dare risultati fuorvianti, se basati solamente sulla deviazione standard delle variazioni di prezzo, e perciò sui primi due momenti statistici. Il motivo principale per cui questo problema è di gran lunga più importante, pur considerando che questa via condurrà inevitabilmente a una stima meno precisa, è che una teoria finanziaria si deve preoccupare di stimare accuratamente il rischio, dove con rischio s’intende il rischio di grosse perdite di capitale investito e di conseguenza grandi deviazioni dal valore medio.

Per chiarire i concetti precedentemente espressi, si consideri l’esempio grafico in Figura 2.3. Si analizzino due possibili PDF per la variazione di prezzo Δx , la PDF lorentziana

$$p[\Delta x] = \frac{C}{(\Delta x)^2 + C^2 \pi^2} \quad (2.15)$$

in cui C è una costante e la PDF gaussiana

$$p[\Delta x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.16)$$

Entrambe sembrano molto simili ad un primo sguardo, entrambi i picchi sono posizionati nel punto $\Delta x = 0$ ed entrambe le distribuzioni tendono a zero per grandi valori di $|\Delta x|$, anche se la Lorentziana ha code più significative e un picco più alto. Esistono tuttavia delle differenze fondamentali per le stime finanziarie: l’equazione (2.15) mostra che per la Lorentziana vale, per grandi $|\Delta x|$, una dipendenza del tipo $p[\Delta x] \sim (\Delta x)^{-2}$, perciò mentre la varianza σ^2 è finita per la Gaussiana, è invece infinita per la Lorentziana. Questo fatto pone dei problemi perché valutare il valore $\sigma^2 = \infty$ nelle formule dell’option pricing per esempio è privo di senso. Allora per quanto riguarda la stima standard del rischio, che dipende da σ appunto, esiste una differenza abissale tra una distribuzione

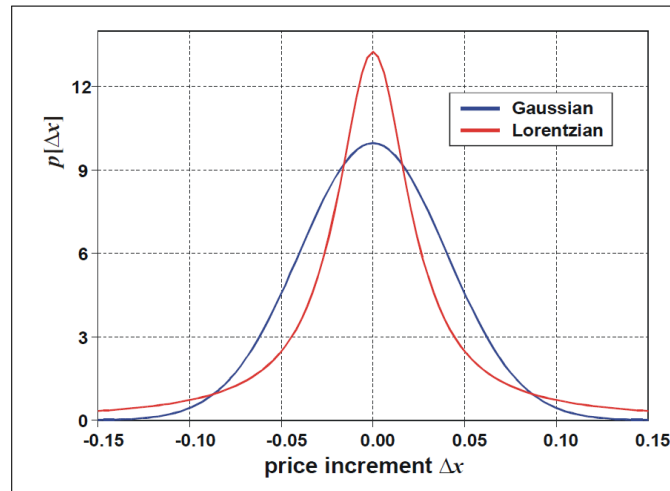


Figura 2.3: Le due PDF che approssimano la PDF per la variazione di prezzo Δx : la Gaussiana, dalla caratteristica forma a campana, e la Lorentziana, con un picco più alto e code meno folte. Figura tratta da [7].

gaussiana delle variazioni di prezzo e una Lorentziana, nonostante entrambe siano ottime candidate.

Come menzionato prima, ogni descrizione realistica del rischio in finanza deve essere in grado di spiegare le code della distribuzione $p[\Delta x]$, per cui è necessario avere più informazioni possibili sulla forma della $p[\Delta x]$ che le descriva al meglio. Nondimeno sorgono delle difficoltà, perché queste corrispondono a grandi deviazioni dal valore medio, $|\Delta x|$, che diventano sempre più rare all'aumentare di $|\Delta x|$. Per di più le code sono i punti della distribuzione in cui tipicamente si hanno meno punti reali, quindi meno informazioni statistiche.

In conclusione, il rischio concerne variazioni di prezzo anomale, mentre la volatilità misura le tipiche fluttuazione attorno alla media, per cui da sola non è sufficiente per classificare il rischio. Una trattazione più approfondita richiederebbe l'impiego di momenti di ordine superiore al secondo e la conoscenza della forma della funzione che determina le code.

2.4 Variazioni di prezzo su più timestep

Lo studio e la caratterizzazione di $p[\Delta x]$ è utile nel caso in cui le variazioni di prezzo su un mercato reale siano distribuite in modo indipendente e identico. Se vale questa condizione, quanto espresso nel paragrafo precedente si estende alla probabilità di osservare una data sequenza di variazioni di prezzo $\{\Delta x_i\} \equiv \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$, ovvero

$$\begin{aligned} p[\{\Delta x_i\}] &\equiv p[\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n] \\ &= p[\Delta x_1] p[\Delta x_2] \dots p[\Delta x_i] \dots p[\Delta x_n]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Comunque, per ogni variabile che non sia distribuita in modo indipendente e identico, l'equazione (2.17) non vale.

Nel caso in cui le variabili siano distribuite in modo indipendente ma non identico si ha invece

$$\begin{aligned} p[\{\Delta x_i\}] &\equiv \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n \\ &= p_1[\Delta x_1] p_2[\Delta x_2] \dots p_i[\Delta x_i] \dots p_n[\Delta x_n] \end{aligned} \quad (2.18)$$

e dato che le PDF sono differenti per ogni istante, adesso il processo non si potrà più definire stazionario.

Determinare le distribuzioni $p_i[\{\Delta x_i\}]$ ha delle rilevanti implicazioni per la stima del rischio finanziario. Infatti, considerando quest'ultimo come la possibilità di perdere denaro, è chiaro come questa perdita possa essere suddivisa in più timestep.

Se si deve calcolare la probabilità di perdere il 20% del valore di un dato portafoglio di titoli azionari su qualunque scala temporale, non è più sufficiente conoscere la distribuzione $p[\Delta x]$, che fornirebbe esclusivamente la probabilità di perdere 20 punti percentuali nell'arco di un giorno soltanto, ma si dovrebbero anche considerare le probabilità di perdere il 20% del portafoglio in un periodo di due giorni, di tre giorni e così via. Le modalità di perdere 20 punti percentuali non è d'altra parte unica, poiché si potrebbe perderne 10 dopo il primo giorno e 8 dopo il secondo e viceversa, e in molti altri modi ancora. Se le variabili fossero distribuite in modo indipendente ma differente l'una dall'altra, allora il calcolo è semplice, come in (2.18).

Se d'altra parte le variabili sono anche dipendenti, l'equazione (2.18) non vale più. Si prenda a titolo esplicativo ancora una volta il caso del lancio della moneta e si consideri

uno scenario in cui la dipendenza degli esiti del lancio è tale che se occorre una sequenza di 5 Croce (C), 5 diminuzioni di prezzo nel linguaggio del modello del mercato finanziario, allora la probabilità di un'ulteriore Croce è pari a 1. Dunque, la serie di prezzi evolve in maniera del tutto causale fino all'istante in cui si presenta l'occorrenza di 5 Croce consecutivi, istante in cui il prezzo inizia a diminuire vertiginosamente fino al crollo della borsa. Tornando alla (2.18), sarebbe necessario considerare non solo le probabilità degli eventi indipendenti che conducono alla perdita netta del 20%, ma anche le probabilità condizionali di ogni evento che potrebbe portare alla stessa perdita.

2.4.1 Alcune proprietà statistiche dei momenti

Utilizzando la notazione citata in (2.1), è possibile ricavare le proprietà statistiche dei momenti delle variazioni di prezzo misurate nella scala temporale di più timestep. Dunque la variazione totale è data da $\Delta x_{n,0} = \sum_{j=1}^n \Delta x_j = x_n - x_0$ e il suo valore medio da

$$\langle \Delta x_{n,0} \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \Delta x_j \rangle. \quad (2.19)$$

Data la linearità del valor medio risulta quindi che la media della somma è uguale alla somma delle medie, conclusione valevole sia che le Δx_j siano distribuite in modo indipendente e identico o no. Per le prime vale l'equazione $\langle \Delta x_j \rangle = \langle \Delta x \rangle$ per ogni j , ragion per cui la (2.19) diviene

$$\langle \Delta x_{n,0} \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \Delta x_j \rangle = n \langle \Delta x \rangle. \quad (2.20)$$

Si riprenda ora in esame il mercato modellizzato dal lancio della moneta. Poiché esso è equo, $\langle \Delta x \rangle = 0$ e quindi $\langle \Delta x_{n,0} \rangle = 0$.

Quanto detto torna utile per il seguente calcolo della varianza

$$\begin{aligned} \sigma_{n,0}^2 &= \langle (\Delta x_{n,0} - \langle \Delta x_{n,0} \rangle)^2 \rangle = \langle (\Delta x_{n,0})^2 \rangle - \langle \Delta x_{n,0} \rangle^2 \\ &= \left\langle \left(\sum_{j=1}^n \Delta x_j \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \Delta x_j \right\rangle^2 \\ &= \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta x_i \Delta x_j \right\rangle}_{=\sum_{i=1}^n \langle (\Delta x_i)^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle} - \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \langle \Delta x_j \rangle \right)^2}_{=\sum_{i=1}^n \langle \Delta x_i \rangle^2 + \sum_{i \neq j} \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se la variazioni di prezzo Δx_i sono non correlate, allora $\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle = \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle$ con $i \neq j$, quindi l'equazione (2.21) si semplifica in

$$\begin{aligned}\sigma_{n,0}^2 &= \sum_{i=1}^n \langle (\Delta x_i)^2 \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \Delta x_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \{ \langle (\Delta x_i)^2 \rangle - \langle \Delta x_i \rangle^2 \} = \sum_{i=1}^n \sigma_{i,i-1}^2\end{aligned}\quad (2.22)$$

da cui il noto risultato che per le variabili non correlate, la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze. Per variabili distribuite in modo indipendente e identico, la varianza di ogni timestep è identica, $\sigma_{i,i-n}^2 \equiv \sigma^2$

$$\sigma_{i,i-n}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{i,i-1}^2 = n \sigma^2. \quad (2.23)$$

Da (2.23) si deduce uno dei risultati più utili nella Standard Finance Theory, ovvero che la deviazione standard, quindi la volatilità, di una variazione di prezzo in un intervallo di n timestep aumenta come

$$\sigma_{i,i-n} = n^{\frac{1}{2}} \sigma \quad (2.24)$$

ovvero la volatilità delle variazioni di prezzo aumenta dopo un intervallo temporale pari a n come la radice quadrata dell'incremento di tempo, $n^{\frac{1}{2}}$. Nella situazione descritta all'inizio del paragrafo [2.2, si ha $\sigma = d$ e di conseguenza $\sigma_{i,i-n} = n^{\frac{1}{2}} d$.

D'altra parte, opposto al caso descritto dalla (2.22), si ha quello di variabili correlate, al punto tale da avere stesso valore e stesso segno, Δx , la cui varianza è data da

$$\begin{aligned}\sigma_{i,i-n}^2 &= \langle (\Delta x_{n,0} - \langle \Delta x_{n,0} \rangle)^2 \rangle = \langle (\Delta x_{n,0})^2 \rangle - \langle \Delta x_{n,0} \rangle^2 \\ &= \left\langle \left(\sum_{j=1}^n \Delta x_j \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \Delta x_j \right\rangle^2 = \langle (n \Delta x)^2 \rangle - \langle n \Delta x \rangle^2 \\ &= n^2 [\langle (\Delta x)^2 \rangle - \langle \Delta x \rangle^2] = n^2 \sigma^2\end{aligned}\quad (2.25)$$

da cui si ricava che la volatilità delle variazioni di prezzo dopo n timestep adesso varia come

$$\sigma_{i,i-n} = n \sigma. \quad (2.26)$$

Questi andamenti sono ben comprensibili se si pensa alle differenze tra una passeggiata casuale in tutte le direzioni e una in una linea retta a velocità costante. La distanza

percorsa nel primo caso è proporzionale a $n^{\frac{1}{2}}$, mentre nel secondo proprio a n , il numero di timestep.

Generalizzando, si ha che per un livello di correlazione non nullo e positivo, l'espressione analitica per la deviazione standard si trova tra il caso “non correlato” di $n^{\frac{1}{2}}$ e quello “correlato” di n . Mentre, se la correlazione è negativa, la dipendenza corrispondente è proporzionale a n^0 . Dati empirici provenienti dalle serie di prezzi risultano avere la proprietà secondo cui la volatilità della variazione del prezzo dopo n timestep aumenta come

$$\sigma_{i,i-n} \sim n^{\frac{1}{\mu}} \sigma \quad (2.27)$$

dove μ è un valore determinato empiricamente dallo studio delle serie. Un trend persistente, ossia che continua nella stessa direzione degli step precedenti, implica un valore $1 \leq \mu \leq 2$, mentre un trend “anti-persistente” è descritto da un valore $\mu > 2$.

2.4.2 La probability distribution function (PDF)

La forma funzionale della PDF, $p[\Delta x_{n,0}]$, è di fondamentale importanza per la costruzione del modello già citato. Si consideri il caso banale, con $n = 2$, in (2.2). Si ottiene $\Delta x_{n=2,0} = \sum_{j=1}^2 \Delta x_j = \Delta x_1 + \Delta x_2$, in cui però potrebbero esserci varie combinazioni di Δx_1 e Δx_2 tali che la loro somma risulti essere $\Delta x_{n=2,0}$ per cui si può scrivere

$$\begin{aligned} p[\Delta x_{n=2,0}] &= \sum_{\substack{\Delta x_1, \Delta x_2: \\ \Delta x_{n=2,0} = \Delta x_1 + \Delta x_2}} p[\Delta x_1, \Delta x_2] \\ &= \sum_{\Delta x_1} p[\Delta x_1, \Delta x_{n=2,0} - \Delta x_1] \end{aligned} \quad (2.28)$$

in cui con $p[\Delta x_1, \Delta x_2]$ s'intende la distribuzione di probabilità congiunta di Δx_1 e Δx_2 .

Se le due variazioni Δx_1 e Δx_2 sono distribuite in modo indipendente e identico, allora è possibile riscrivere la (2.28) in modo più semplice

$$\begin{aligned} p[\Delta x_{n=2,0}] &= \sum_{\Delta x_1} p[\Delta x_1, \Delta x_{n=2,0} - \Delta x_1] \\ &= \sum_{\Delta x_1} p[\Delta x_1] p[\Delta x_{n=2,0} - \Delta x_1] = p[\Delta x] \times p[\Delta x] \end{aligned} \quad (2.29)$$

in cui $p[\Delta x] \times p[\Delta x]$ la convoluzione discreta delle due PDF $p[\Delta x]$.

Ripetendo i calcoli per $n = 3$, si ottiene la PDF $p[\Delta x_{n=3,0}]$ come la convoluzione di $p[\Delta x_{n=2,0}]$ e $p[\Delta x]$. Ciò può essere ripetuto per ogni n , il che avrà un effetto di “sfumare”

le code e rendere il picco centrale più pronunciato, $p[\Delta x_{n,0}]$ inizierà quindi ad assomigliare sempre di più, all'aumentare di n , a una distribuzione gaussiana, a campana.

2.4.3 Il Teorema del Limite Centrale

Il fatto che operando la convoluzione discreta di più PDF si ottenga una distribuzione gaussiana è una chiara applicazione del Teorema del Limite Centrale, che gioca un ruolo cruciale nella Standard Finance Theory.

Assumendo la notazione utilizzata in (2.2) e che le variabili Δx_i siano distribuite in modo indipendente e identico, si vuole calcolare ora la trasformata di Fourier della funzione di densità di probabilità $p[x]$. Per definizione

$$\langle e^{iqx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} p[x] dx. \quad (2.30)$$

Dal momento che vale l'equazione (2.20), come esponente nella (2.30) è possibile considerare la quantità $(\Delta x_{n,0} - \overline{\Delta x_{n,0}})/n \equiv (\Delta x_{n,0} - n \overline{\Delta x})/n$.

Segue che

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left(\frac{ik (\Delta x_{n,0} - n \overline{\Delta x})}{n} \right) \right\rangle &= \left\langle \exp \left(\frac{ik (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_n - n \overline{\Delta x})}{n} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \exp \left(\frac{ik \{ [\Delta x_1 - \overline{\Delta x}] + [\Delta x_2 - \overline{\Delta x}] + \dots + [\Delta x_n - \overline{\Delta x}] \}}{n} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \exp \left(\frac{ik [\Delta x - \overline{\Delta x}]}{n} \right) \right\rangle^n \\ &= \left\langle 1 + \frac{ik}{n} (\Delta x - \overline{\Delta x}) - \frac{k^2}{2n^2} (\Delta x - \overline{\Delta x})^2 \right\rangle^n \\ &= \left(1 + 0 - \frac{k^2}{2n^2} + \dots \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{k^2 \sigma^2}{2n} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

in cui si è fatto uso del fatto che le variabili sono distribuite in modo indipendente e identico per passare dalla seconda alla terza riga e dell'espansione di Taylor della funzione esponenziale il risultato $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$ attorno al valore $\overline{\Delta x}$ nella quarta riga.

La PDF invece si ricava calcolando la trasformata di Fourier inversa a partire dalla formula (2.30) ponendo $q = x/n$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} p[\Delta x_{n,0} - \overline{\Delta x_{n,0}}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{q^2 n \sigma^2}{2}} e^{-iq(\Delta x_{n,0} - \overline{\Delta x_{n,0}})} dq \\ &= \left(\frac{1}{2\pi n \sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\Delta x_{n,0} - \overline{\Delta x_{n,0}})^2}{2n \sigma^2}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si giunge quindi a un notevole risultato: qualunque sia la forma della PDF su un timestep, essa tenderà a una distribuzione gaussiana nel limite $n \rightarrow \infty$. In altre parole, la PDF per le variazioni di prezzo $\Delta x_{n,0}$ è una distribuzione con la seguente forma

$$p[\Delta x_{n,0}] = \left(\frac{1}{2\pi \sigma_{n,0}^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\Delta x_{n,0} - \overline{\Delta x_{n,0}})^2}{2\sigma_{n,0}^2}} \quad (2.33)$$

dove $\sigma_{n,0}^2$ è la deviazione standard.

Si ritrova quindi il risultato (2.24), dato che le variabili in tal caso sono distribuite in modo indipendente e identico, perciò anche necessariamente non correlate, perciò la volatilità è data da $\sigma_{n,0} = n^{\frac{1}{2}} \sigma$. Si arguisce perché, data questa convergenza, la distribuzione gaussiana ha molte applicazioni come modello delle variazioni di prezzo nella Standard Finance Theory. È comunque necessario precisare le condizioni sotto cui questa convergenza “funziona bene”, ovvero

1. le variazioni di prezzo su un singolo timestep $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ sono variabili distribuite in modo indipendente e identico;
2. la PDF $p[\Delta x]$ su un singolo timestep ha una varianza finita;
3. n è tale per cui il limite $n \rightarrow \infty$ è effettivamente raggiunto.

Purtroppo per la teoria, le tre condizioni non sono sempre rispettate sulle scale temporali dei mercati reali. Quindi non è sempre vero che la PDF per le variazioni di prezzo sono gaussiane.

Le suddette condizioni necessitano di una spiegazione più approfondita: esistono analisi empiriche che dimostrano che la condizione 1) non regge perché le variazioni di prezzo su qualsiasi intervallo di tempo considerato, che sia ore, giorni o settimane, non sono distribuite in modo indipendente e identico. Nonostante le correlazioni temporali di

ordine uno siano nulle, calcolate con (2.6), di solito “sopravvivono” correlazioni temporali di ordine più alto.

A proposito della 2) invece, si è già notato che alcuni candidati per modellizzare la distribuzione delle variazioni $p[\Delta x]$, per esempio la distribuzione Lorentziana, hanno varianza infinita. In particolare, la Lorentziana assume un andamento del tipo $p[\Delta x] \sim (\Delta x)^{-2}$ per grandi valori di $|\Delta x|$, vale a dire sulle code della distribuzione. Di conseguenza questi punti avranno valori molto elevati per i momenti di ordine maggiore e per questo mostreranno una debole convergenza a una gaussiana.

Infine, per la condizione 3), si affronta il problema dell’intervallo di tempo più tipico in borsa. Dato $\tau = 60$ min l’intervallo temporale per un timestep, una scala temporale classica, per esempio di un giornata lavorativa, corrisponde a circa 12τ , che di certo non si avvicina al limite di $n \rightarrow \infty$. Tuttavia in pratica si conclude che soltanto la parte centrale della distribuzione, posta attorno al valore medio $\overline{\Delta x_{n,0}}$ si avvicina sensibilmente a una gaussiana all’aumentare di n . Per cui non c’è alcuna sicurezza sulla convergenza a una distribuzione normale delle code della PDF $p[\Delta x_{n,0}]$ e poiché queste code sono determinanti per il calcolo del rischio finanziario, non è possibile utilizzare l’approssimazione gaussiana per le stime del rischio.

Si fa menzione ora di un caso particolare in cui l’approssimazione gaussiana funziona e quindi valga la (2.33). Assunte le variabili distribuite in modo indipendente e identico, si costruisce la PDF per $n = 2$ timestep operando la convoluzione di $p[\Delta x]$ con sé stessa. Dalla teoria è noto che la convoluzione di due distribuzioni gaussiane è anch’essa una gaussiana, si generalizzi quindi al caso n -esimo, ovvero

$$p[\Delta x_{n,0}] = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{n,0}^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\Delta x_{n,0} - \overline{\Delta x_{n,0}})^2}{2\sigma_{n,0}^2}}, \quad (2.34)$$

esattamente come nell’equazione (2.33), con una deviazione standard pari a $\sigma_{n,0} = n^{\frac{1}{2}}\sigma$. In tal senso, si può dire che una proprietà della distribuzione gaussiana è l’autosimilarità, cioè possiede la stessa forma funzionale su tutte le scale temporali, ovvero qualunque sia l’ n considerato, come si può riscontrare in Figura 2.4 .

2.5 Equazione d’evoluzione nel tempo continuo

Utilizzando la distribuzione gaussiana citata in precedenza, si può generare una serie di prezzi in modo diretto “pescando” casualmente valori delle variazioni di prezzo dalla

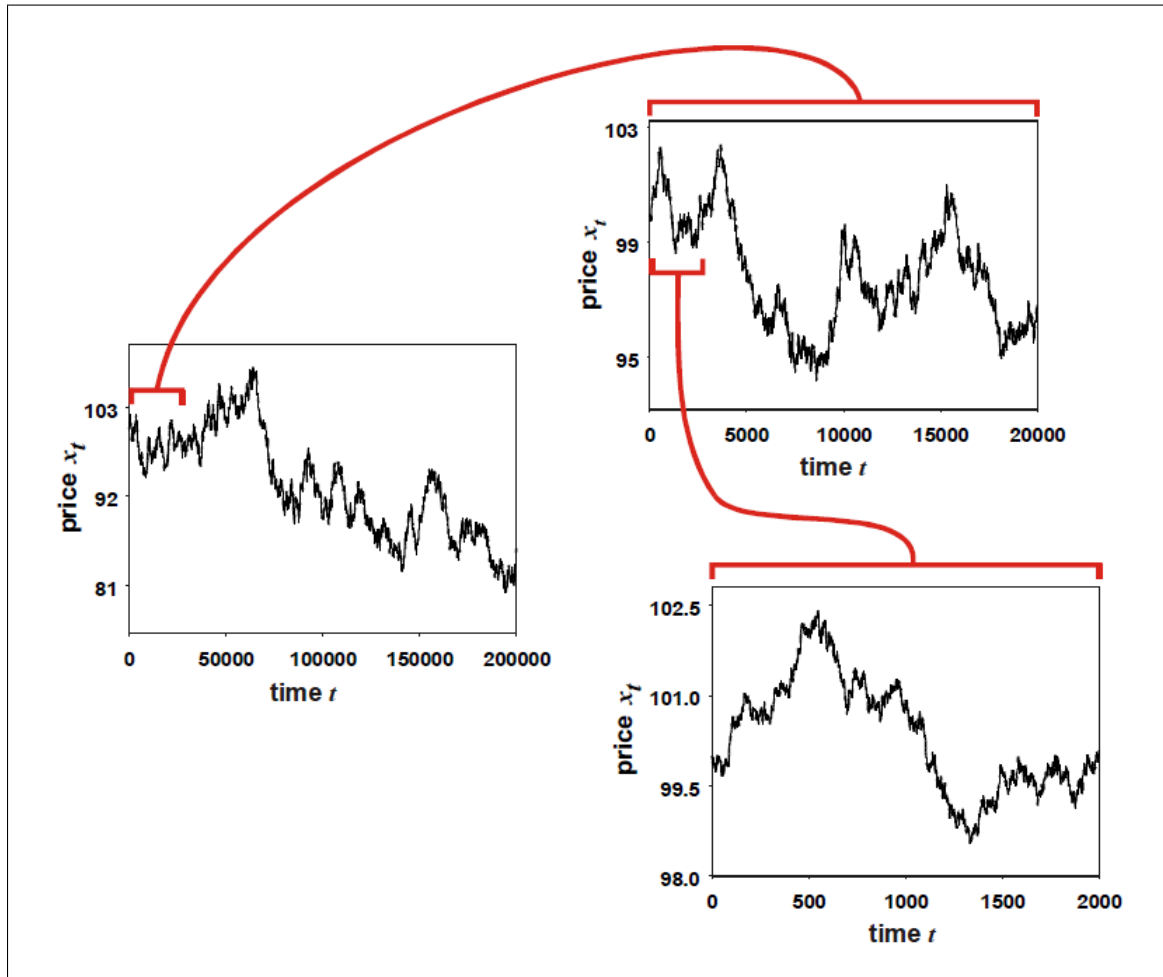


Figura 2.4: Serie di prezzi randomica utilizzando l'equazione (2.34), in cui è possibile notare la somiglianza della stessa serie su più scale temporali. Figura tratta da [7].

PDF, la serie risultante è a tutti gli effetti una random walk. Tali processi si dicono solitamente *processi di Wiener* o *moti browniani*. Dopo aver compiuto nei paragrafi precedenti un'analisi nel caso discreto, si passa al tempo continuo.

Si supponga di trovarsi al timestep n durante la random walk descritta dal modello di prezzo del lancio della moneta descritto in Figura 2.2. Si definisce $p[x_t = m d]$ la probabilità che il prezzo al tempo t abbia il valore $x[t] = x_t = m d$ e poiché la probabilità di una variazione di prezzo, positiva o negativa, è $p[\Delta x_{t,t-1} = \pm d] = \frac{1}{2}$, si può ottenere $p[x_t = m d]$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} p[x_t = m d] &= p[x_{t,t-1} = (m+1) d] p[\Delta x_{t,t-1} = -d] \\ &\quad + p[x_{t,t-1} = (m-1) d] p[\Delta x_{t,t-1} = +d] \\ &= \frac{1}{2} (p[x_{t-1} = (m+1) d]) \end{aligned} \quad (2.35)$$

da cui, sottraendo da entrambi i membri $p[x_{t-1} = m d]$, si ricava

$$\begin{aligned} p[x_t = m d] - p[x_{t-1} = m d] &= \frac{1}{2} (p[x_{t-1} = (m+1) d]) - p[x_{t-1} = m d] \\ &= \frac{1}{2} \{ (p[x_{t-1} = (m+1) d]) - p[x_{t-1} = m d] \\ &\quad + (p[x_{t-1} = (m-1) d]) - p[x_{t-1} = m d] \} \end{aligned} \quad (2.36)$$

da cui infine

$$\begin{aligned} \frac{p[x_t = m d] - p[x_{t-1} = m d]}{\delta_t} &= \frac{\delta_x^2}{2 \delta_t} \left\{ \frac{(p[x_{t-1} = (m+1) d]) - p[x_{t-1} = m d]}{\delta_x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p[x_{t-1} = (m-1) d]) - p[x_{t-1} = m d]}{\delta_x^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

in cui δ_t, δ_x sono quantità infinitesime rispettivamente di tempo e spazio.

Nell'equazione (2.37) sono presenti le controparti discrete delle derivate parziali rispetto al tempo e al prezzo. Prendendo il limite $\delta_t, \delta_x \rightarrow 0$ mantenendo però il rapporto $\frac{\delta_x^2}{2 \delta_t}$ finito si ottiene infine

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.38)$$

dove $D \equiv \frac{\delta_x^2}{2\delta_t}$ è una costante di diffusione e (2.38) è la nota *equazione di diffusione*, usata in Fisica per descrivere la dinamica casuale delle particelle che diffondono in un gas. Si noti che avendo supposto il limite continuo, sia nella variabile del prezzo che in quella temporale, $p(x, t) dx$ è una funzione di distribuzione di probabilità continua in x e in t e quindi la soluzione di quest'equazione dà la probabilità, anch'essa continua, $p(x, t) dx$ che il prezzo all'istante t abbia un valore compreso fra x e $x + dx$.

2.6 Equazioni differenziali stocastiche per l'evoluzione del prezzo

Alla descrizione dell'evoluzione della PDF all'aumentare del numero di timestep n si può giungere anche, in modo equivalente, presentando i processi con le equazioni differenziali stocastiche che li caratterizzano, in cui un'equazione stocastica appunto traccia l'evoluzione in modo continuo del prezzo nel tempo, $x(t)$.

Si riconsideri la notazione utilizzata in (2.2) e si scriva la variazione di prezzo come $\sigma \Delta X_i$, in cui σ definisce il modulo del timestep e ΔX_i è una variabile stocastica che fornisce l'esito del lancio della moneta all' i -esimo passo. Poiché le variabili studiate sono distribuite in modo indipendente e identico, si può scrivere direttamente $\Delta x = \sigma \Delta X$.

Assumendo allora che la variazione di prezzo sia infinitesima, è possibile trattare tutte le variazioni come tali sostituendo $\Delta x \rightarrow \delta x$ e $\Delta X \rightarrow \delta X$, ottenendo quindi la seguente equazione differenziale stocastica

$$dx = \sigma dX \tag{2.39}$$

in cui dX è la variabile stocastica nominata in precedenza. Per applicare il Teorema del Limite Centrale, e successivamente l'approssimazione a una gaussiana, è necessario che la varianza, dt , corrisponda a un breve intervallo temporale, tuttavia sufficiente grande da contenere $n \rightarrow \infty$ timestep, con le singole variazioni a varianza finita e distribuite in modo indipendente e identico. In sostanza si sceglie dt tale per cui si possa calcolare la convoluzione della PDF per la variazione di un solo step un numero pressoché infinito di volte. D'altronde, se il tempo fosse continuo di certo sarebbe possibile individuare $n = \infty$ timestep infinitesimi in ogni intervallo temporale. Tuttavia l'unità minima temporale deve essere non inferiore alla durata effettiva dei *trades* sul mercato azionario, perciò quest'intervallo è finito e solitamente molto ampio. Ciò in parte spiega le ragioni per cui

analizzando i dati finanziari reali si possa pervenire a conclusioni differenti dalla teoria dell'approssimazione gaussiana.

Come già visto, l'andamento sui mercati spesso può presentare un trend, quindi un effetto deterministico, oltre alla totale casualità della random walk. Per tenere conto di questo possibile esito, si aggiunge un "termine di deriva" all'equazione (2.39), che perciò diviene

$$dx = \sigma dX + \mu dt \quad (2.40)$$

in cui μ è il tasso di variazione del prezzo.

Integrando l'equazione (2.40) si ottiene

$$x(t) = x(0) + \mu t + \phi \sigma \sqrt{t} \quad (2.41)$$

in cui ϕ è una variabile stocastica distribuita gaussianamente con media zero e varianza unitaria, cioè $\phi \sim N[0, 1]$.

In linea teorica, stante la (2.41), la x potrebbe comunque diventare negativa, per evitare ciò si può considerare, piuttosto che la variazione, la variazione percentuale

$$\frac{dx}{x} = \sigma dX + \mu dt \quad (2.42)$$

che integrata a sua volta dà

$$x(t) = x(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \phi \sigma \sqrt{t} \right]. \quad (2.43)$$

Capitolo 3

Gli indici dello Shanghai stock exchange e del NYSE

3.1 Premesse

Esposta la trattazione teorica standard dei movimenti dei prezzi degli asset sui mercati secondo il modello della random walk, la prima questione che si apre è se e a quale estensione sia possibile applicare questi risultati al mondo reale ed eventuale, quali differenze intercorrono fra i due sistemi.

Seguendo [7], si presentano le analisi dei dati provenienti da due indici azionari di due differenti Borse valori. Inizialmente si troverà che non sono presenti correlazione di ordine uno, perciò a primo impatto verrebbe da ritenere che le relative serie di pezzi seguano l'andamento di una random walk. Tuttavia a un'analisi più approfondita tali dati presenteranno una correlazione temporale di ordine superiore e inoltre una distribuzione di prezzi non approssimabile a una gaussiana. Si concluderà perciò che in generale i mercati finanziari non seguono il modello standard della passeggiata aleatoria, bensì se ne discostano anche in modo molto marcato. Queste caratterizzazioni empiriche prendono il nome di stylized facts e sono di fondamentale importanza nello studio dell'econofisica.

Le motivazioni, invece, di tale analisi è che qualunque modello candidato a descrivere i movimenti di prezzo sui mercati o stimare il rischio finanziario deve tener conto ed essere consistente con i suddetti stylized facts per essere effettivamente utile nelle previsioni e nelle stime dei suddetti.

Il nucleo di questo studio è stato quindi analizzare la storia recente di due indici

e trovare la distribuzione che approssimava al meglio quella delle variazioni di prezzo considerate. Nondimeno prima di iniziare a processare i set di dati finanziari, è sorta una significativa questione relativa alla mole di dati da includere. Dal punto di vista statistico, sarebbe ideale passare al setaccio più dati possibile, anche perché è estremamente complicato scegliere quali non considerare. Ogni vero Sistema Complesso, e tutti i mercati finanziari lo sono, come si è visto nel paragrafo 1.3.1, segue un andamento non lineare perciò ogni situazione potrebbe essere vista come un periodo “speciale”, che si discosta dalla norma. In un certo senso, tutti i timestep sembrano presentare movimenti anomali, come si può notare in Figura 3.1.

Non è nemmeno semplice distinguere i casi esogeni da quelli endogeni nei dati empirici, anche perché seppur le influenze siano esterne, la risposta del sistema è comunque regolata dai meccanismi di feedback ed evoluzione interni.

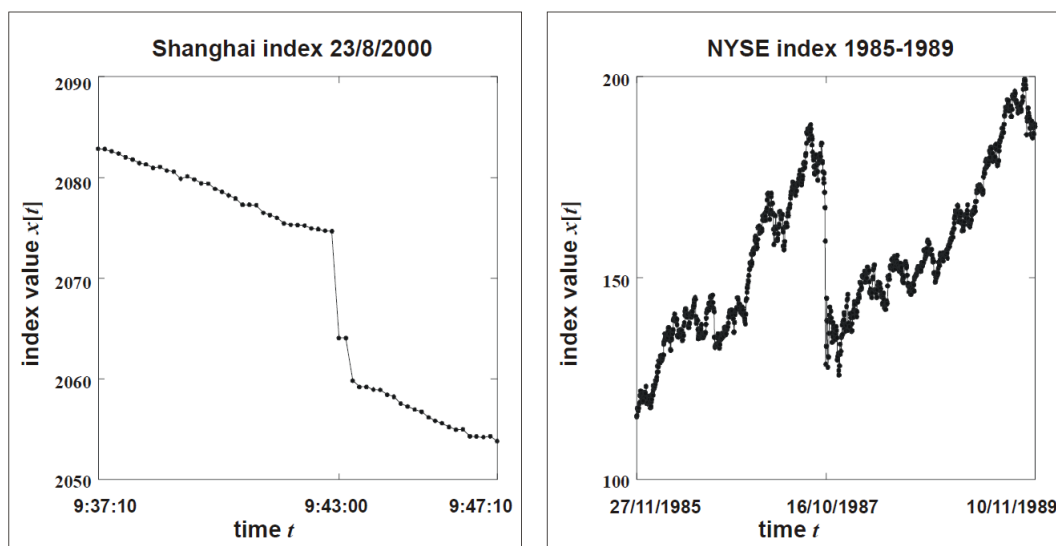


Figura 3.1: Periodi in cui si riscontra un possibile comportamento atipico, nell’indice dello Shanghai Stock Exchange (a sinistra) e nell’indice del New York Stock Exchange (a destra). Figura tratta da [7].

Perciò si è intrapresa la via dell’analisi di più dati possibili. Sorge, con altrettanta rilevanza, il quesito su quali indici azionari studiare e perché. In tale questione sovviene in aiuto uno dei maggiori risultati dell’Econofisica degli ultimi venti anni, che stabilisce che l’analisi statistica delle serie di prezzi che provengono da un ampio range di mercati finanziari di tutto il mondo esibisce alcune proprietà universali, come riportato in det-

taglio in [12] e [3]. Essi infatti, come già evidenziato nel paragrafo 1.3.1, nonostante le differenze in termini di orari di attività delle borse, numero di trades giornalieri, nazione, livello di liquidità, etc., hanno alla base un tratto in comune: sono formati da traders che comprano e vendono sul mercato, tentando di prevedere il futuro studiando il passato.

Nello specifico i dataset di cui si riportano le analisi sono il *NYSE composite index*, registrato quotidianamente a partire dal 1966 fino al 2000, e l'indice dello *Shanghai stock exchange*, i cui dati sono stati invece registrati ad intervalli di 10 secondi in un periodo complessivo di 10 mesi tra il 2000 e il 2001. Assodate le differenze già menzionate, dall'analisi sarà ben evidente che il primo rispecchia le tipiche borse valori statunitensi, con molta liquidità e una consolidata storia finanziaria, da cui un dataset a bassa frequenza di campionamento ma analizzato sul lungo periodo, il secondo d'altra parte riguarda un mercato giovane ed emergente e se ne studia un periodo relativamente breve ma con frequenza molto alta.

3.2 Analisi empirica

Si definisca una nuova variabile, per ognuno dei due indici considerati, che andrà a formare una serie di rendimenti logaritmica, ovvero

$$z[t, t - \Delta t] \equiv z[t] = \log \frac{x[t]}{x[t - \Delta t]}. \quad (3.1)$$

Prima di addentrarci nel cuore dell'analisi, è necessario fare una premessa. Mentre il NYSE composite index in tale studio ha frequenza giornaliera e quindi non ha uno schema di variazione *intra-day*, ovvero infragiornaliero, nello *Shanghai index* è presente un *intra-day* pattern, visibile in Figura 3.2, causato perlopiù dalle reazioni dei traders alle informazioni acquisite durante le ore di chiusura del mercato o anche da attività finanziarie effettuate in istanti prossimi all'orario di chiusura, che riguarda le variazioni assolute di rendimento dell'indice ed è da rimuovere in vista dell'analisi che si vuole effettuare, $|z[t]|$.

Si consideri dapprima che t_{day} , il generico istante della giornata, può essere posto in corrispondenza con un tempo t assoluto e si definisca la funzione $daytime(t)$ che fornisce l'istante della giornata corrispondente al tempo assoluto t .

Questo schema, $A(t_{day})$, può essere descritto analiticamente come

$$A(t_{day}) = \langle |z[daytime(t)] = t_{day}| \rangle. \quad (3.2)$$

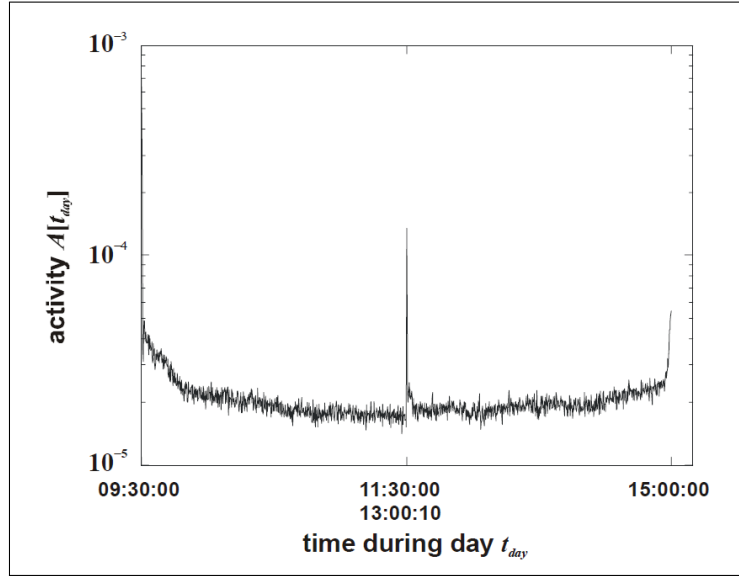


Figura 3.2: Andamento intra-day per le variazioni dell'indice dello Shanghai stock exchange. Figura tratta da [7].

Questo pattern funziona come un offset poiché ha un effetto sistematico su tutte le variazioni di prezzo di uno stesso giorno, per eliminarlo è possibile ridefinire la variabile rendimento in tal modo

$$z[\text{daytime}(t)] \rightarrow \frac{z[\text{daytime}(t)]}{A(t_{\text{day}})}.$$

Si procede ora all'effettiva analisi, iniziando col cercare le correlazioni lineari, cioè di ordine uno. Nello specifico si calcola l'autocorrelazione fra i rendimenti, i cui grafici sono mostrati in Figura 3.3 che in sostanza è data dall'applicazione della formula in (2.6), normalizzata dividendo il valore di c_{ij} per la variazione di $z[t]$, σ^2 , ovvero

$$\rho(z(t), z(t - \Delta t)) = \frac{\left\langle \left[\left(z[t] - \overline{z[t]} \right) \left(z[t - \Delta t] - \overline{z[t - \Delta t]} \right) \right] \right\rangle}{\sigma^2} \quad (3.3)$$

in cui Δt è un dato intervallo temporale.

Nel caso le variabili risultassero non correlate, allora

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(z[t] - \overline{z[t]} \right) \left(z[t - \Delta t] - \overline{z[t - \Delta t]} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(z[t] - \overline{z[t]} \right) \right\rangle \left\langle \left(z[t - \Delta t] - \overline{z[t - \Delta t]} \right) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

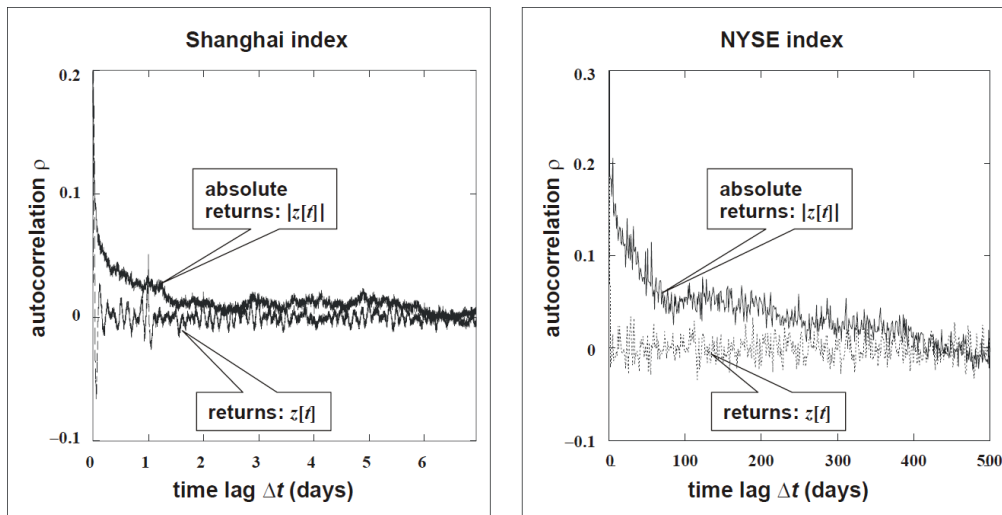


Figura 3.3: Autocorrelazione dei rendimenti e dei rendimenti assoluti nell'indice dello Shanghai Stock Exchange (a sinistra) e nell'indice del New York Stock Exchange (a destra) in funzione di un intervallo di tempo dato, Δt . Figura tratta da [7].

Come si nota in Figura 3.3, l'autocorrelazione è nulla per ogni valore di Δt , andamento coerente con la Standard Finance Theory esposta nel capitolo 2 che ipotizza variazioni di prezzo non correlate.

Ora si passa a controllare se esistono correlazioni temporali non lineari, tra cui per esempio l'autocorrelazione del rendimento in valore assoluto, $|z[t]|$, il quale misura la correlazione nel tempo dell'oscillazione della dimensione del rendimento. Dal punto di vista analitico, l'equazione utilizzata per questo caso è tratta da (3.3) operando la seguente variazione

$$z[t] \rightarrow |z[t]|$$

per ogni termine in (3.3) in cui compare la funzione $z[t]$. Sempre in Figura 3.3 si nota che quest'autocorrelazione non lineare è non nulla in un ampio range di intervalli di tempo.

È quindi possibile concludere che sorprendentemente la correlazione nel tempo del valore assoluto di $z[t]$ sopravvive lungo un periodo di gran lunga superiore alle aspettative createsi con l'analisi della correlazione lineare effettuata in precedenza. Con riferimento al Figura 3.3, si vede come tale periodo, nel caso del NYSE, duri anche molto più di un mese.

Al fine di studiare nel dettaglio i motivi dell'andamento, presente in Figura 3.3, dell'autocorrelazione dei rendimenti in valore assoluto, si esamina la loro cosiddetta *volatilità*

locale, un nuovo indice determinato dalla deviazione standard, misurata in un intorno di un dato istante t , della fluttuazione dei rendimenti $z[t]$. * Come si evince dalla Figura 3.4, per il New York Stock Exchange la volatilità locale non è costante nel tempo, anzi presenta una forma molto oscillante con significative deviazioni. Perdi più sono evidenti dei cluster di volatilità che sembrano suggerire che periodi di forte volatilità nei mercati generano ulteriore volatilità nei periodi successivi, fatto consistente con l'analisi in Figura 3.3. L'anello di congiunzione fra questa ipotesi teorica e l'effettiva attività sui mercati potrebbe essere un maggiore livello di liquidità o un numero più elevato di trades. Si conferma quindi che le attività sui mercati finanziari sono un processo non stazionario.

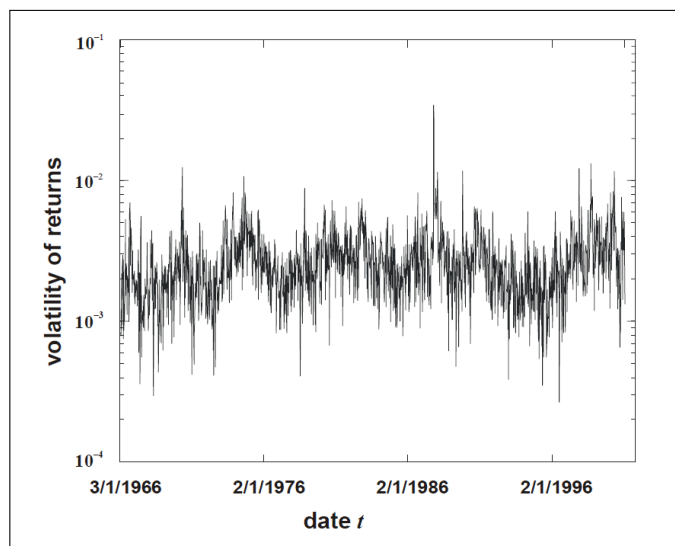


Figura 3.4: Volatilità locale in funzione del tempo per l'indice dello NYSE. Figura tratta da [7].

L'interrogativo che segue la verifica della correlazione delle variabili è relativo alla distribuzione di probabilità che seguono le variazioni di prezzo Δx . Come suggerito anche in uno dei capisaldi dell'Econofisica già citato [12], questa distribuzione è la *distribuzione di Lévy troncata* e non la Gaussiana, come supposto in precedenza.

*A proposito di un'analisi quantitativa dell'intorno di tempo considerato nella misura dei rendimenti, è necessario far presente che nell'analisi qui riportata non è presente alcun tipo di dato. Si può supporre che la scelta sia stata effettuata prendendo in considerazione un intervallo di tempo sufficientemente grande per avere dei dati da analizzare ma piccolo in modo da non falsare la variazione dei rendimenti nel tempo

La distribuzione di Lévy troncata è costituita essenzialmente da due componenti, cioè una distribuzione di Lévy per la parte centrale della PDF e un troncamento con la forma di un decadimento esponenziale nelle due code esterne. Un esempio grafico, tratto da dataset dell'indice di Shanghai e in comparazione con altre distribuzioni, si trova in Figura 3.5.

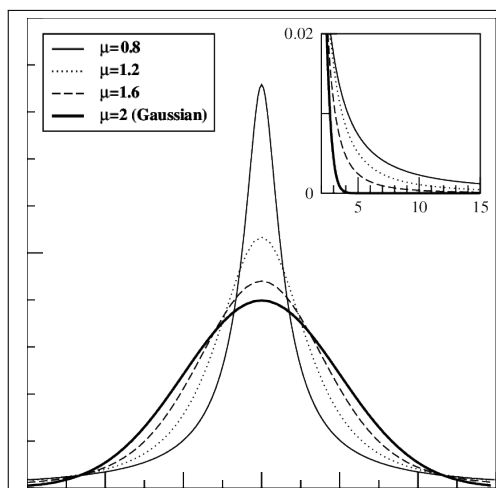


Figura 3.5: Grafico normalizzato della distribuzione di Lévy con valori di $\mu = 0.8, 1.2, 1.6$ e 2. Si noti come quest'ultimo corrisponda effettivamente a una Gaussiana e che più piccolo il valore di α , più stretta e spiccata la parte centrale della distribuzione e più grosse le code. Figura tratta da [7].

Nello specifico, una distribuzione di Lévy, come si evince da A.6 è una classe di distribuzione caratterizzata da fat tails, ovvero da significative code esterne. Ad esempio, la distribuzione lorentziana già citata in (2.15) rientra in questa classe. La caratteristica peculiare di quest'insieme di distribuzioni è la dipendenza da potenze del parametro z per grandi valori di Δz , ovvero

$$p[z] \equiv p_{L,\alpha}[z] \sim |z|^{1+\alpha}, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

in cui α rispetta la condizione $0 < \alpha < 2$, per garantire la stabilità per convoluzione. Segue che la varianza e la deviazione standard non sono finite.

Non esiste una forma analitica per $p_{L,\alpha}$, a meno che $\alpha = 1$, caso in cui

$$p_{L,\alpha=1} = \frac{C}{z^2 + C^2 \pi^2} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} C |z|^{-2} \quad (3.6)$$

cioè la distribuzione di Lévy corrisponde a una distribuzione lorentziana.

La condizione $0 < \alpha < 2$ ha rilevanza fondamentale perché la PDF per le variazioni di prezzo lungo più timestep è formata con la convoluzione dalla PDF per un singolo timestep e se quest'ultima segue effettivamente la distribuzione di Lévy, la stabilità garantita dalla suddetta condizione assicura che la PDF rimarrà di Lévy su ogni scala temporale, per cui non convergerà mai a una Gaussiana.

Questa conclusione sembra essere inconsistente con il Teorema del Limite Centrale, riportato nel paragrafo 2.4.3. Tuttavia se si guarda alle condizioni per cui vale il Teorema in questione, si nota che sebbene siano rispettate 1) e 3), cioè le variabili sono distribuite in modo indipendente e identico e il caso considerato riguarda il limite $n \rightarrow \infty$, 3) non lo è poiché la varianza non è finita, dato che $\alpha < 2$. Nonostante la distribuzione di Lévy sia quindi un buon candidato per descrivere la PDF delle variazioni di prezzo, la non convergenza a una Gaussiana la rende meno ideale, proprio per questo motivo si è introdotta la distribuzione di Lévy troncata che mantiene la dipendenza già descritta in (3.5) per le code esterne ma in seguito diventa esponenziale, fatto che assicura una varianza finita e una possibile convergenza a una Gaussiana.

Si può quindi concludere che la distribuzione dei rendimenti sull'indice dello Shanghai stock exchange e dello NYSE sembrano seguire una legge di potenza, non approssimabile a una Gaussiana. D'altra parte, la dinamica non-Gaussiana del sistema può essere descritta da una distribuzione di Lévy troncata.

I risultati numerici, riportati in Figura 3.6, confermano quanto predice la teoria. Per ognuno dei due mercati studiati, si è partiti dalla serie temporale originale per costruire un'altra serie che riporta i rendimenti nel tempo, calcolati su un intervallo di tempo fissato, Δt . L'interesse dell'analisi verte anche sul comportamento dei mercati su differenti scale temporali, perciò si formano altre serie di rendimenti calcolati però su Δt differenti.

Ad un'analisi grafica della Figura 3.6, le PDF appaiono molto diverse tra di loro per ogni mercato e anche per ogni prospettiva temporale nello stesso mercato.

Le code delle distribuzioni sono più grandi di quelle di una distribuzione gaussiana ma poiché indagare intervalli temporali più larghi significa strettamente avere meno punti con cui costruire uno studio statistico allora si procede a studiare il picco al centro della distribuzione in Figura 3.6, $p[z = 0]$, ovvero la probabilità che il rendimento in funzione di Δt sia nullo. Così facendo si massimizza il quantitativo di dati da poter analizzare.

I dati sono ben adattati da una retta in una scala logaritmica, come si può notare

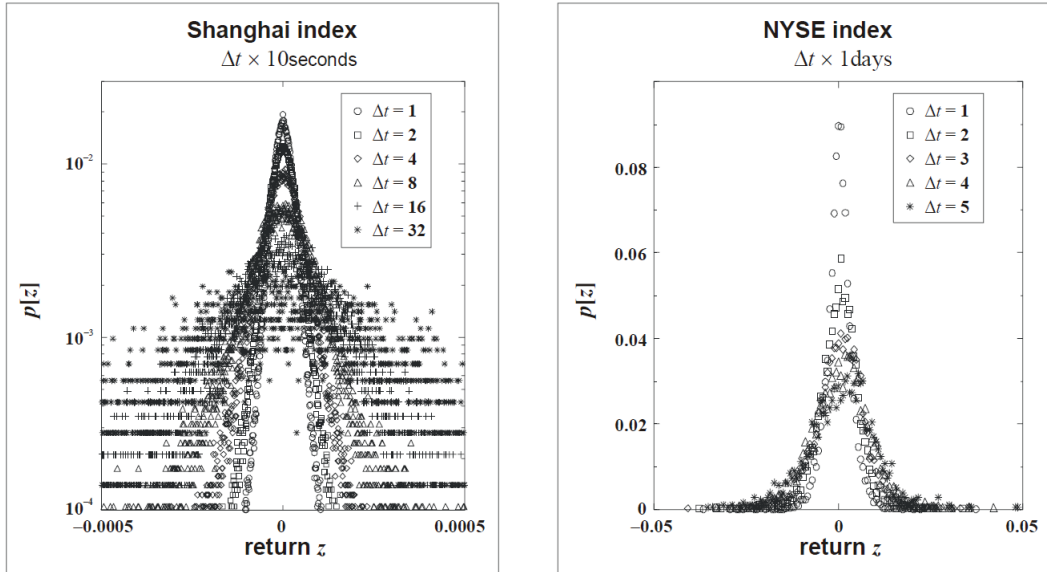


Figura 3.6: PDF dei rendimenti calcolati per diversi incrementi temporali Δt . Per la Borsa di Shanghai (a sinistra) l'unità temporale è un intervallo di 10 secondi, mentre per il NYSE (a destra) l'unità è un periodo di un giorno. Figura tratta da [7].

in Figura 3.7, per entrambi i casi quindi si può dedurre che seguano un comportamento esponenziale. È rilevante inoltre che i due valori dei coefficienti angolari delle rette del fit, -0.6957 e -0.6922 , sono molto simili.

Entrambi i valori dei coefficienti angolari non corrispondono a un comportamento gaussiano, perché dato che in tal caso la PDF gaussiana sarebbe

$$p_G [z] = \left[\frac{1}{2\pi \Delta t \sigma^2} \right]^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2\Delta t \sigma^2}} \quad (3.7)$$

in cui σ^2 è la varianza per un singolo timestep e Δt è il numero di passi temporali nell'intervallo di tempo considerato, per cui

$$\log p_G [z = 0] = -0.5 \log \Delta t + C$$

che dà un valore del coefficiente angolare pari a -0.5 , non consistente coi valori sperimentali.

Si assuma ora che la distribuzione di Lévy stabile descriva la porzione centrale del grafico in Figura 3.6, distribuzione che nonostante non sia esprimibile in forma esatta, si

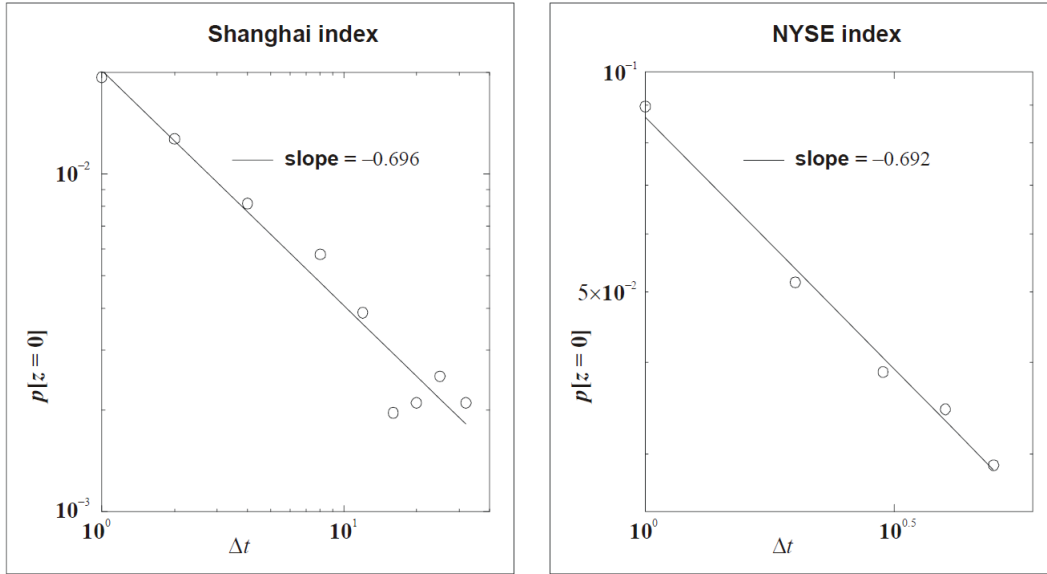


Figura 3.7: Grafico in scala logaritmica del picco della PDF, $p[z = 0]$, in funzione del tempo per lo *Shanghai market index* (a sinistra) e il *NYSE composite index* (a destra). Figura tratta da [7].

può scrivere come

$$p_{L,\alpha}[z] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma \Delta t |q|^\alpha} \cos(qz) dq \quad (3.8)$$

in cui $e^{-\gamma \Delta t |q|^\alpha}$ è la funzione caratteristica di un processo stabile di Lévy simmetrico. La probabilità di avere un rendimento nullo è fornita da

$$p[z = 0] = p_{L,\alpha}[0] = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{\alpha}\right]}{\pi \alpha (\gamma \Delta t)^{1/\alpha}} \quad (3.9)$$

dove Γ è la funzione Gamma. Da cui

$$\log p[z = 0] = -\frac{1}{\alpha} \log \Delta t + C$$

che ha coefficiente angolare pari a $-\frac{1}{\alpha}$.

Si può dimostrare che per una distribuzione gaussiana valga la condizione $\alpha = 2$ nell'equazione (3.5), perciò volendo comparare i valori di α empirici, prendendo il reciproco dei valori di $\frac{1}{\alpha}$ riportati in precedenza si trova per i due casi $\alpha = 1.44$ e $\alpha = 1.44$, entrambi perciò non compatibili con un andamento gaussiano.

Infine si vuole controllare se tale andamento di Lévy può essere esteso alle PDF dei rendimenti per entrambi i mercati e tutte le prospettive temporali. A tale scopo si definisca

$$z_s \equiv \frac{z}{(\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (3.10)$$

e

$$p_s [z_s] \equiv (\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}} p_{L,\alpha} [z] = (\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}} p_{L,\alpha} \left[z_s (\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}} \right]. \quad (3.11)$$

Nel caso in cui le PDF fossero gaussiane, ciò comporterebbe che $\alpha = 2$ per cui l'equazione (3.10) diventerebbe

$$z_s = \frac{z}{(\Delta t)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.12)$$

mentre l'equazione (3.11) diverrebbe

$$\begin{aligned} p_s [z_s] &\equiv (\Delta t)^{\frac{1}{2}} p_G \left[z_s (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta t\sigma^2}} e^{-\frac{[(\Delta t)^{\frac{1}{2}} z_s]^2}{2\Delta t\sigma^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z_s^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

in cui non compare il termine Δt , per cui tutte le curve sarebbero graficamente identiche se si opera il cambio di variabile $z \rightarrow z_s$. Questa proprietà, definita autosimilarità, è stata già incontrata nel paragrafo 2.4.3 e indica che se le PDF dei prezzi misurati sui mercati fossero approssimativamente gaussiane allora seguendo le trasformazioni (3.10) e (3.11), tutte le curve collasserebbero in una, identica per ogni Δt considerato.

Come si evince dalla Figura 3.7, i coefficienti angolari dei due *best fit* $\alpha = -0.696$ e $\alpha = -0.692$, rispettivamente per lo Shanghai index e il NYSE index, perciò saranno utilizzati questi valori nelle equazioni (3.10) e (3.11), le conseguenti PDF “riscalate” sono mostrate in Figura 3.8

È sorprendente notare che già per un valore di α non compatibile con quello gaussiano di $\alpha = 2$ le varie distribuzioni, differenti per ogni Δt , si sovrappongono in un'unica curva piuttosto bene, escludendo alcuni punti nelle code della distribuzione dell'indice dello stock exchange di Shanghai. Si vede inoltre che l'adattamento è tanto migliore quanto più ci si avvicina al picco della distribuzione, ovvero $z_s = 0$.

Questo ragionamento porta alla conclusione che la distribuzione di Lévy descrive meglio le dinamiche di variazione del prezzo per rendimenti limitati, di media dimensione piuttosto che la distribuzione normale.

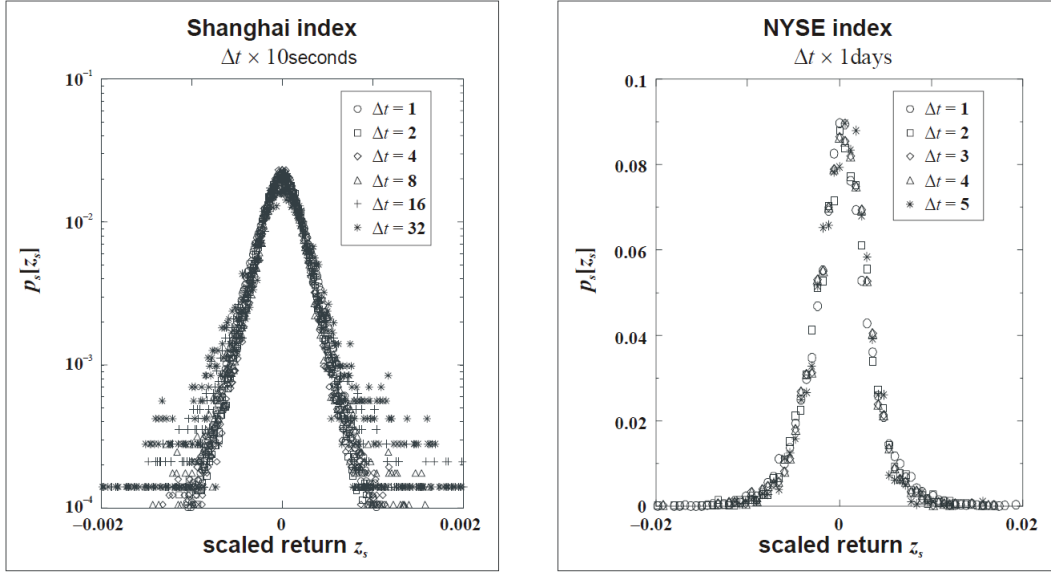


Figura 3.8: Grafico “risalato” della Figura 3.6 utilizzando le trasformazioni (3.10) e (3.11). Figura tratta da [7].

Con maggior dettaglio, ora si vuole analizzare la distribuzione dei rendimenti dell’indice dello Shanghai stock exchange in relazione a una distribuzione di Lévy con $\alpha = 1.44$, una distribuzione gaussiana con la stessa deviazione standard dei dati empirici e un’altra che si adatti come best fit alla parte centrale del grafico dei dati finanziari, come rappresentato in Figura 3.9.

Infine, assodato che l’autocorrelazione dei rendimenti è nulla, perciò si può arguire che i rendimenti sono essenzialmente non correlati. Se si assume che le variabili considerate sono anche distribuite in modo identico, allora dal capitolo 2 si deduce che

$$\sigma_{\Delta} \propto \sqrt{\Delta t} \quad (3.14)$$

ma la non stazionarietà del processo di formazione del prezzo e una residua correlazione fra le variazioni di prezzo non nulla potrebbe modificare questa relazione e inferire un ulteriore colpo alla Standard Finance Theory. Infatti si trova che sui mercati reali (3.14) non è valida per ogni Δt . Un’ipotesi alternativa di questa dipendenza si trova in [3] e analiticamente è

$$\langle z_{t,t-\Delta t}^q \rangle \sim (\Delta t)^{\zeta_q} \quad (3.15)$$

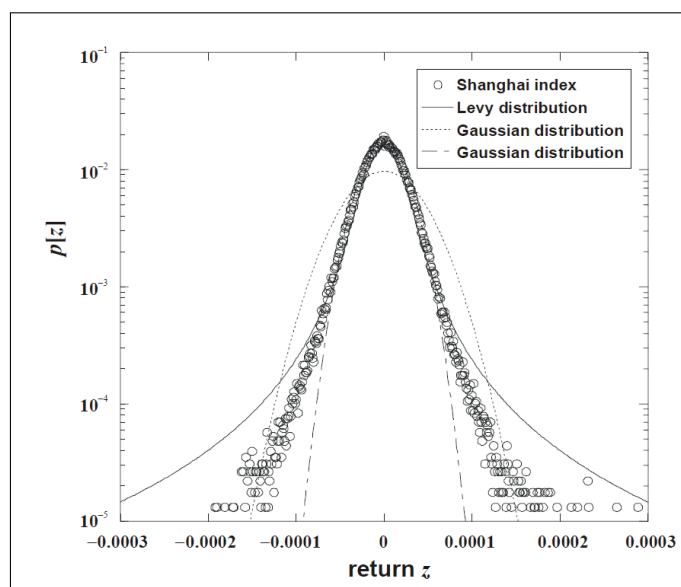


Figura 3.9: PDF dei rendimenti dello Shanghai index su un intervallo di tempo fissato, $\Delta t = 1$. Questo grafico è comparato a due distribuzioni gaussiane, best fit rispettivamente della parte centrale e delle code della distribuzione dei dati sperimentali, e una distribuzione di Lévy troncata con $\alpha = 1.44$. Figura tratta da [7].

in cui Δt un intervallo di tempo fissato e q è un esponente arbitrario. Tramite la funzione ζ_q la dipendenza da Δt può cambiare esponente su prospettive temporali differenti. Si evidenzia che per $q = 2$ l'equazione (3.15) rappresenta la varianza.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stata tracciata un'introduzione all'Econofisica. Dopo una breve parentesi sulla sua genesi storica, si è provato a spiegare quali siano le peculiarità connotate alla Complessità e cosa esse generano in un Sistema Complesso, concludendo che un mercato finanziario si può definire e studiare come un Sistema Complesso a tutti gli effetti. Successivamente è stata presentata un'analisi empirica di mercati reali, di cui i due esempi citati sono stati scelti perché chiaramente differenti, sia per storia che per costituzione. Si è pervenuti a risultati statistici molto simili tra di loro che però contrastano la Standard Finance Theory, il cui paradigma risiede nella cosiddetta random walk. Questo studio è solo un piccolo frammento di quello che è presente sulle scrivanie degli Econofisici in questo periodo in cui questa branca sta fiorendo e dando i suoi risultati maggiori. La più grande conclusione a cui finora si è giunti, fatto evidenziato anche in questa tesi, è che nonostante le diverse sfumature i mercati finanziari di tutto il mondo sembrano seguire i medesimi pattern: code significative per le distribuzioni delle variazioni di prezzo, "la volatilità genera volatilità", decadimento lento dell'autocorrelazione dei rendimenti in valore assoluto. Proprio perché non rispecchia questi requisiti si è scoperto che la distribuzione gaussiana non è un buon candidato per descrivere i movimenti dei prezzi sulle borse valori, nella ricerca il prossimo obiettivo è trovare un modello che rispetti le suddette caratteristiche con la migliore aderenza possibile.

Appendice A

Teoria della probabilità

In questa appendice si riportano in sintesi i principali risultati e le più importanti nozioni di teoria della probabilità utilizzati in questo lavoro di tesi, tratti in special modo da [13].

A.1 Spazi di probabilità e variabili aleatorie

Uno **spazio di probabilità** è un insieme $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dotato della seguente struttura

1. Ω è un insieme, il cosiddetto *spazio campionario*.
2. \mathcal{F} è una collezione di sottoinsieme di Ω . Un elemento di \mathcal{F} è detto *evento*.
3. La misura di probabilità \mathbb{P} è una funzione da \mathcal{F} a $[0, 1]$ che assegna una probabilità a ogni evento contenuto in \mathcal{F} .

In sostanza, considerando lo spazio di probabilità come la modellizzazione di un esperimento, lo spazio campionario \mathbb{P} si può pensare come l'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento.

L'insieme degli eventi, \mathcal{F} , invece deve soddisfare le seguenti proprietà

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Se \mathcal{F} contiene un insieme A , allora \mathcal{F} contiene anche l'insieme A^c , ovvero $\Omega \setminus A$.
3. Se $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ è una collezione finita o numerabile di eventi in \mathcal{F} , allora la loro unione $\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ è anche in \mathcal{F} .

Si noti che combinando le proprietà (2) e (3) è possibile estendere la proprietà (3) alle intersezioni finite o numerabili.

La misura di probabilità \mathbb{P} infine deve soddisfare le seguenti proprietà

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Se $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ è una collezione finita o numerabile di eventi disgiunti, allora

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{P}(A_i) \quad (\text{A.1})$$

Una **variabile aleatoria** è una funzione definita su Ω il cui codominio in questo lavoro di tesi è \mathbb{R} . Difatti una variabile aleatoria rappresenta un osservabile, qualcosa che si possa misurare.

Formalmente, perché una funzione X sia una variabile aleatoria si richiede che il sottoinsieme

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$$

di Ω è un evento di \mathcal{F} per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ragion per cui, considerando i complementi, le unioni e le intersezioni si avrà che l'insieme $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ è in \mathcal{F} per una vasta collezione di insiemi B .

Per semplicità di scrittura, si usa di solito X invece di $X(\omega)$ per indicare il valore che la variabile aleatoria assume. Perciò se \mathbb{P} è una misura di probabilità si può studiare la probabilità dell'evento

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

che si indica con $\mathbb{P}(X \in B)$.

La notazione più comune a tal riguardo indica di scrivere, quando una variabile aleatoria X segue una data distribuzione di probabilità, per esempio quella uniforme

$$X \sim U[a, b].$$

A.2 Distribuzioni di probabilità

Lo studio della distribuzione di una variabile aleatoria X può essere sintetizzato dalla cosiddetta **funzione di ripartizione** di X , definita come

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad (\text{A.2})$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che abbia le seguenti proprietà

1. F è non decrescente.
2. F è continua a destra.
3. $F(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$.
4. $F(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow \infty$.

Più precisamente, una distribuzione di una variabile aleatoria X è la funzione

$$B \rightarrow \mathbb{P}(X) \in B,$$

valutata sui diversi insiemi $B \subset \mathbb{P}$ tuttavia nelle situazioni pratiche si identifica la distribuzione con la funzione di ripartizione, dato che la prima determina in modo unico la seconda.

Le variabili aleatorie continue e quelle discrete formano le più importanti classi di variabili aleatorie. In questa trattazione si è avuto a che fare prettamente con casi discreti, quali i movimenti di prezzo sui mercati finanziari o i lanci della moneta.

A.2.1 Le distribuzioni marginali

Si assuma che $\mathbf{X} = (Y, Z)$ abbia una densità f su \mathbb{R}^2 , allora le densità marginali di Y e Z sono date da

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z) dz \quad (\text{A.3})$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z) dy. \quad (\text{A.4})$$

A.3 Variabili aleatorie continue

Una variabile aleatoria X è detta **continua** se la funzione di ripartizione F può essere espressa come un integrale, cioè ci sia una funzione f tale che

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (\text{A.5})$$

in cui f è chiamata funzione di densità di probabilità di X .

Ciò implica che F è una funzione continua. In particolare $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - \lim_{y \rightarrow x} F(y) = 0$.

Si noti che la funzione di densità di probabilità di X non è unica e nei punti in cui F è differenziabile si può ottenere $f(x) = F'(x)$.

Infine si ha che $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(u)du$.

A.4 Variabili aleatorie discrete

Una variabile aleatoria X si dice **discreta** se esiste un insieme finito o numerabile B tale che $\mathbb{P}(X \in B) = 1$.

È possibile rappresentare la distribuzione di una variabile aleatoria discreta X con la sua funzione di massa di probabilità

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, che vale zero dovunque escluso un finito o numerabile insieme di punti.

Si ha inoltre

$$\sum_x p_X(x) = 1 \tag{A.6}$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} p_X(x) \text{ per ogni insieme } A \subseteq \mathbb{R}. \tag{A.7}$$

I punti x in cui $\mathbb{P}(X = x) > 0$ si dicono **atomi** della distribuzione di X .

In tal caso la funzione di distribuzione di X è costante su ogni intervallo che non contiene nessun atomo e ha delle discontinuità in corrispondenza di questi punti.

A.4.1 Valor medio, varianza e covarianza

Sia X una variabile aleatoria discreta con funzione di massa di probabilità $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$. Si definisce **valor medio** di X

$$\langle X \rangle = \sum_x x p_X(x) \tag{A.8}$$

nel caso in cui questa somma converge.

Si definisce similmente anche il valor medio di una funzione di una variabile aleatoria X

$$\langle X \rangle = \sum_x g(x) p_X(x) \tag{A.9}$$

nel caso in cui questa somma converge.

Le principali proprietà del valor medio sono

1. Per ogni evento A , sia I_A la funzione indicatrice dell'evento A , dove

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Allora $\langle I_A \rangle = \mathbb{P}(A)$.

2. Se $\mathbb{P}(X) \geq 0$, allora $\langle X \rangle \geq 0$.

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e X, Y variabili aleatorie. Allora $\langle \alpha X + \beta Y \rangle = \alpha \langle X \rangle + \beta \langle Y \rangle$.

La **varianza** di una variabile aleatoria X è definita

$$Var(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle. \quad (\text{A.10})$$

La varianza si può alternativamente esprimere come

$$Var(X) = \langle (X)^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \quad (\text{A.11})$$

D'altra parte la **covarianza** di due variabili aleatorie X e Y è definita come

$$Cov(X, Y) = \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle, \quad (\text{A.12})$$

alternativamente esprimibile come

$$Cov(X, Y) = \langle (XY) - \langle X \rangle \langle Y \rangle \rangle, \quad (\text{A.13})$$

Si noti che $Var(X) = Cov(X, X)$. Inoltre, poiché il valor medio è lineare in X , si deduce una proprietà di bilinearità per la covarianza, ovvero

$$Cov(\alpha X + b, cY + d) = ac Cov(X, Y). \quad (\text{A.14})$$

Un caso particolare dell'equazione (A.14) è il seguente

$$Var(\alpha X + b) = \alpha^2 Var(X). \quad (\text{A.15})$$

Si ha infine un'ulteriore proprietà

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 Cov(X, Y) \quad (\text{A.16})$$

che si estende facilmente al caso n -simo

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j) \quad (\text{A.17})$$

A.5 La distribuzione gamma

L'insieme delle distribuzioni gamma generalizza quello delle distribuzioni esponenziali, qui brevemente richiamate.

A.5.1 La distribuzione esponenziale

Una variabile aleatoria X segue una distribuzione esponenziale con parametro λ se la sua funzione di ripartizione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso si scrive quindi $X \sim \exp(\lambda)$. Alcune note proprietà sono

$$\langle X \rangle = 1/\lambda \tag{A.18}$$

$$Var(X) = 1/\lambda^2. \tag{A.19}$$

La distribuzione esponenziale infine è *memoryless*, ovvero $\mathbb{P}(X > x + t \mid X > t)$ non dipende da t .

A.5.2 Le *gamma distribution*

La distribuzione gamma con *rate* λ e *shape* r ha densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

In tal caso $\Gamma(r)$ è la funzione gamma, definita come

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty z^{r-1} e^{-z} dz \tag{A.20}$$

che è un'estensione della funzione fattoriale, in cui $\Gamma(r) = (r-1)!$ dove r è un numero intero.

Una distribuzione gamma con *shape* $r = 1$ è una distribuzione esponenziale.

La distribuzione gamma si estende direttamente al caso di n variabili aleatorie distribuite in modo indipendente e identico alla distribuzione gamma con *rate* λ , poiché $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ avrà anche una distribuzione gamma con *rate* λ .

A.6 Distribuzione di Lévy

La funzione di densità di probabilità per una **distribuzione di Lévy** è

$$f(x; \mu, c) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}} \quad (\text{A.21})$$

in cui μ e c sono parametri dati.

Come ogni distribuzione stabile, fatta eccezione per la distribuzione normale, le code della funzione di densità di probabilità esibiscono un comportamento da *heavy tails*, ossia decrescono come la legge di potenza

$$f(x; \mu, c) \sim \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} \text{ per } x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.22})$$

A.7 La funzione caratteristica

La **funzione caratteristica** è definita come la trasformata di Fourier della funzione di densità di probabilità.

A.7.1 Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier di una funzione $P(x)$ è un'altra funzione data da

$$\chi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{isx} dx. \quad (\text{A.23})$$

L'inversa di una trasformata di Fourier è diretta da calcolare,

$$\mathbb{P}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) e^{isx} dx. \quad (\text{A.24})$$

La principale proprietà della trasformata di Fourier riguarda la **convoluzione**. Infatti, siano $F(x)$ e $G(x)$ due funzioni, allora la trasformata di Fourier delle loro convoluzioni è semplice il prodotto delle trasformate di Fourier. Calcoli più completi possono essere trovati in [6].

Indipendentemente dal fatto che la variabile aleatoria considerata sia discreta o continua, data una variabile aleatoria qualsiasi X si può sempre scrivere la funzione caratteristica come

$$\chi_X(s) = \langle e^{isX} \rangle. \quad (\text{A.25})$$

Si può direttamente estendere al caso di un insieme di variabili aleatorie X_1, \dots, X_N

$$\chi_X(\mathbf{s}) = \langle e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{X}} \rangle \quad (\text{A.26})$$

in cui $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$

A.8 Momenti e indici

Si definisce momento centrale m -esimo

$$\langle (\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^m \rangle. \quad (\text{A.27})$$

Alcuni di questi momenti di ordine superiore al primo hanno una rilevanza tale da possedere un nome specifico. Per esempio, la *skewness*, una misura dell'asimmetria della distribuzione di probabilità rispetto al valore medio, è data da

$$\gamma_1 \equiv \left\langle \frac{(\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^3}{\sigma^3} \right\rangle. \quad (\text{A.28})$$

La *skewness* è nulla se $p[\Delta x]$ è simmetrica.

La curtosi di $p[\Delta x]$ invece è data da

$$\kappa \equiv \left\langle \frac{(\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^4}{\sigma^4} \right\rangle \quad (\text{A.29})$$

e assume il valore $\kappa = 3$ se la distribuzione di $p[\Delta x]$ è gaussiana. [14]

Bibliografia

- [1] Åström, K. J.; Murray, R. M., *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press 2010, p. 1.
- [2] Bernoulli, D., English translation in *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*, *Econometrica*, Vol. 22 No. 1, 1954, pp. 23-36.
- [3] Bouchaud J.P., Potters M., *Theory of financial risks*, Cambridge University Press, 2000
- [4] Easley D., *Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010, pp. 483–506.
- [5] Gupta N.; Hauser R.; Johnson N.F., *Inferring the Composition of a Trader Population in a Financial Market*, Springer-Verlag Italia, 2007, p. 99.
- [6] Jacobs, K., *Stochastic Processes for Physicists: Understanding Noisy Systems*, Cambridge University Press, 2010.
- [7] Jeffries, P.; Johnson, N.F.; Ming Hui, P., *Financial Market Complexity: What Physics Can Tell Us About Market Behaviour*, Oxford University Press, 2003.
- [8] Johnson N.F., *Two's company, three is complexity*, Oneworld Publications, 2007, pp. 3-18.
- [9] Jovanovic, F.; Schinckus, C., *Econophysics and Financial Economics: An Emerging Dialogue*, Oxford University Press, 2017, pp 78-83.
- [10] Johnson, N. F.; Smith, D. M. D., *Predictability, Risk and Online Management in a Complex System of Adaptive Agents*, physics/0605065, 2006.

- [11] Kaiser, D., *The Physics of Spin: Sputnik Politics and American Physicists in the 1950s*, *Social Research: An International Quarterly*, Vol. 73, 2006, pp. 1225-1252.
- [12] Mantegna R.N., Stanley H.E., *An introduction to Econophysics*, Cambridge University Press, 2000.
- [13] Martin J., *Lecture notes for Probability*, University of Oxford, 2017.
- [14] Reichl E.L., *A Modern Course in Statistical Physics*, Wiley, 2016.