

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Inflazione cosmologica

Relatore:

Prof. Roberto Casadio

Presentata da:

Maria Vittoria Gurrieri

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

Lo scopo di questo lavoro è quello di introdurre e descrivere l'inflazione cosmologica come soluzione ai problemi del Modello Standard del Big Bang.

Nella prima parte viene illustrato il contesto nel quale introdurre le ipotesi di inflazione. Si prende in esame la Relatività Generale con le equazioni di campo, la metrica e le proprietà principali della teoria del Big Bang. Si indagano, quindi, le inconsistenze del modello, focalizzando l'attenzione sul problema dell'orizzonte e della piattezza dell'universo. Nella seconda parte del lavoro si analizzano più nel dettaglio le caratteristiche dell'inflazione. Si descrive la necessità di un campo scalare, inflatone, che guidi l'espansione, le condizioni e l'approssimazione di slow-roll e il vincolo sul numero di e-foldings necessari affinché il Modello Standard sia consistente con le osservazioni.

Nella parte finale sono proposti tre modelli di inflazione: vecchia, nuova e caotica, analizzando qualitativamente le proprietà del potenziale associato all'inflatone.

Indice

Elenco delle figure	5
Introduzione	6
1 Evoluzione e geometria dell'universo	10
1.1 Scale caratteristiche dell'universo e orizzonti	10
1.2 La metrica di Robertson-Walker	12
1.3 Evoluzione e fasi dell'universo	15
1.3.1 Storia dell'universo	15
1.3.2 Tre fasi evolutive	17
1.4 Equazioni di Friedmann	20
2 Problemi del modello classico cosmologico	24
2.1 Radiazione cosmica di fondo	24
2.2 Problema dell'universo piatto	26
2.3 Problema dell'orizzonte	27
3 L'inflazione	30
3.1 Condizioni per l'inflazione e soluzioni al modello classico	30
3.2 Campo scalare	33
3.3 Condizione di slow-roll	38
3.4 Quanta inflazione è necessaria?	41

3.5	Equazione di Hamilton-Jacobi per l'inflazione	42
3.6	Tre tipi di inflazione	44
	Conclusioni	48
	Bibliografia	50

Elenco delle figure

1	<i>Legge di Hubble e relativi dati sperimentali: velocità di recessione dell'universo in funzione della distanza dell'oggetto celeste osservato.</i>	7
2	<i>L'inflazione come espansione accelerata delle dimensioni dell'universo in funzione del tempo. . . .</i>	8
1.1	<i>Tre tipi di curvatura dell'universo espressi in funzione del valore di Ω.</i>	14
1.2	<i>Fasi evolutive dell'universo.</i>	17
2.1	<i>Immagine delle fluttuazioni di temperatura nella Radiazione Cosmica di Fondo, realizzate con nove anni di osservazioni di WMAP.</i>	25
2.2	<i>Rappresentazione di come varia nel tempo il cono di luce in relazione al tempo passato dell'origine dell'universo. r_{ph} è l'orizzonte della particella.</i>	29
3.1	<i>Soluzione inflazionaria al problema dell'orizzonte cosmologico. L'immagine mostra come nel tempo siano cambiate le dimensioni della distanza di Hubble comovente.</i>	32
3.2	<i>Il grafico mostra come cambia la densità della materia, della radiazione e dell'energia oscura in funzione delle dimensioni dell'universo. Si osserva che sebbene la percentuale di densità di radiazione e di materia diminuiscano progressivamente all'aumentare del raggio cosmico, quella di dark energy rimane sempre costante.</i>	34
3.3	<i>Andamento del potenziale scalare dell'inflatone. Si mostra lo stato iniziale metastabile e quello finale, dopo l'inflazione, stabile.</i>	45
3.4	<i>Andamento del potenziale scalare dell'inflatone. Si mostra lo slow-roll del campo lungo il potenziale.</i>	46
3.5	<i>Andamento del potenziale scalare dell'inflatone.</i>	47

Introduzione

La cosmologia si occupa dello studio dell'universo, per il quale un ruolo fondamentale viene svolto dalla teoria della gravitazione. La Relatività Generale descrive la relazione fra la distribuzione della massa e dell'energia, che risultano essere sorgenti gravitazionali, e la geometria dello spazio-tempo. In questo contesto la gravità non è più da considerare come una forza che agisce all'interno dello spazio-tempo ma piuttosto come una sua proprietà intrinseca.

Sono state proposte più soluzioni alle equazioni di campo di Einstein, ognuna delle quali descrive un universo con proprietà differenti. Nel 1924, in particolare, viene introdotta la *metrica di Robertson-Walker*, che descrive un universo isotropo e omogeneo, le cui dimensioni dipendono dal tempo attraverso il parametro di scala dell'universo $a(t)$. Come conseguenza gli unici modelli consistenti con tale metrica sono quelli che descrivono un universo non statico, che si espande o si contrae. Una verifica sperimentale a tale ipotesi viene data nel 1929 dall'astrofisico Edwin Hubble. La legge di Hubble $v = Hd$, dove v è la velocità di recessione dell'universo, d è la distanza dell'oggetto celeste osservato e H è la costante di Hubble, dimostra che esiste un fenomeno di dilatazione dello spazio-tempo intergalattico. Ciò causa una velocità di allontanamento delle galassie più lontane maggiore rispetto a quelle più vicine [1].

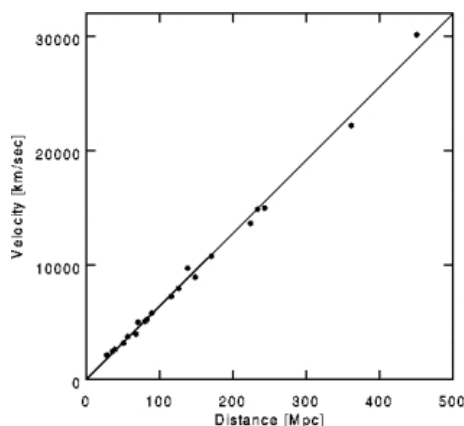


Figura 1: Legge di Hubble e relativi dati sperimentali: velocità di recessione dell'universo in funzione della distanza dell'oggetto celeste osservato.

Tutti questi risultati hanno portato alla formulazione del Modello Standard di Hot Big-Bang. Esso descrive un universo per il quale vale la metrica di *Robertson-Walker*, che si espande in maniera adiabatica ed è dominato dalla radiazione. L'universo nelle sue condizioni iniziali è isotropo e omogeneo, costituito da un gas di particelle prive di massa e in equilibrio termico alla temperatura T_0 . Per essere in accordo con le osservazioni sperimentali, un tale scenario dell'universo primordiale richiede un *fine-tuning* delle condizioni iniziali, cioè un processo attraverso il quale si impone che delle costanti fisiche soddisfino a dei vincoli molto particolari e abbiano dei valori contenuti in un range molto piccolo. Il Modello Standard infatti, porta con se due dei maggiori problemi della cosmologia classica:

- il problema dell'orizzonte
- il problema della piattezza

La prima di queste due complicazioni, che consiste nel fatto che punti troppo distanti dello spazio presentino tuttavia le stesse proprietà fisiche, viene risolta assumendo che l'universo primordiale sia omogeneo. Da ciò segue che le forze che creano le condizioni iniziali siano in grado di violare la causalità.

Il secondo problema, invece, riguarda il valore che assume oggi il parametro di densità dell'universo, $\Omega \approx 1$ infatti è un valore instabile. Se l'universo fosse chiuso in un tempo di Planck $5.4 \times 10^{-44}s$ esso avrebbe raggiunto la sua dimensione massima; per un universo aperto in un tempo di Planck, il valore della densità Ω si sarebbe dimezzata. Ciò implica dei vincoli sulle condizioni iniziali estremamente stringenti.

Queste incongruenze vengono risolte per la prima volta nel 1981 dal fisico Alan Guth, il quale ipotizza un modello di *universo inflazionario*.

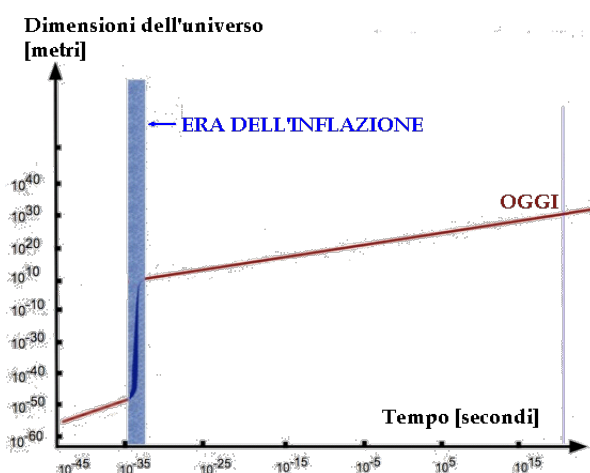


Figura 2: L'inflazione come espansione accelerata delle dimensioni dell'universo in funzione del tempo.

Viene supposta l'esistenza di una fase di espansione accelerata e non adiabatica dell'universo per la quale $S_p = z^3 S_0$, dove S_p ed S_0 rappresentano rispettivamente il valore di entropia oggi e quello nelle condizioni iniziali, e z è un fattore di larghezza [2].

Il ruolo dell'inflazione non sarebbe solo quello di spiegare le proprietà di isotropia e di piattezza dell'universo che si osserva oggi, ma anche di comprendere l'origine delle strutture su grande scala. Se è vero che l'inflazione elimina le disomogeneità su grande scala, dall'altra lato essa spiega come fluttuazioni microscopiche di campi quantistici possano raggiungere scale cosmologiche formando, per collasso gravitazionale, le strutture che oggi osserviamo nell'universo.

Lo studio della cosmologia si basa principalmente sulle osservazioni sperimentali, le quali hanno consentito di dare un forte input al Modello Standard dell'Hot Big-Bang specie grazie alla scoperta della *Radiazione Cosmica di Fondo (CMB)*. Questa è stata osservata per la prima volta nel 1964 dai fisici Arno Penzias e Robert Wilson e dimostra la validità dell'ipotesi delle altissime temperature dell'universo primordiale. La *Radiazione Cosmica di Fondo* si è poi raffreddata in seguito all'espansione dell'universo per la legge del redshift cosmologico, secondo la quale la lunghezza d'onda λ risulta proporzionale al fattore di scala dell'universo a . In questo contesto, la teoria dell'inflazione mostra il suo potere nel predire talune proprietà dell'universo, come ad esempio le anisotropie nella CMB riconducibili a onde gravitazionali prodotte durante l'inflazione.

Capitolo 1

Evoluzione e geometria dell'universo

1.1 Scale caratteristiche dell'universo e orizzonti

Secondo il modello standard del Big Bang, l'universo si è formato circa 13 miliardi di anni fa con temperatura e densità estremamente alte, per poi iniziare una fase di espansione e raffreddamento che continua tutt'oggi. Dal Principio Cosmologico segue che l'universo è isotropo e omogeneo e questo implica che la distanza fra due qualsiasi punti comoventi, cioè solidali con il moto di espansione dell'universo, è proporzionale al fattore di scala $a(t)$. Questo parametro quantizza l'espansione dell'universo e dipende dal **tempo cosmologico**, cioè il tempo misurato da un osservatore solidale con il sistema di coordinate comoventi. La distanza comovente è quindi definita come la distanza propria $r(t)$, che varia nel tempo con l'espansione, divisa per il fattore di scala

$$x = \frac{r(t)}{a(t)} \tag{1.1}$$

Dalla legge di Hubble è poi possibile definire la diretta correlazione fra:

- la distanza di un osservatore da una galassia e la velocità di recessione dell'universo v ,

- la distanza e lo spostamento verso il rosso $z = \frac{v}{c}$ della luce emessa dalla galassia stessa

$$z = \frac{H_0 D}{c} \quad \Rightarrow \quad v = H_0 D \quad (1.2)$$

dove $H_0 = \frac{\dot{a}}{a}$ è la costante di Hubble che dipende solo dal tempo e misura il tasso di espansione dell'universo. Il suo valore stimato oggi è $H_0 \simeq \frac{h}{3000} Mpc^{-1}$, con h un fattore di incertezza.

Dalla espressione (1.2) si può notare che la costante di Hubble ha le dimensioni dell'inverso di un tempo. Si ricavano, quindi, il tempo di Hubble H^{-1} e la distanza di Hubble cH^{-1} , quest'ultima vale H^{-1} per $c = 1$. Queste grandezze definiscono la *scala di Hubble*, in particolare durante un tempo di Hubble $a(t)$ cresce di un fattore e , mentre la lunghezza di Hubble dà una stima dell'ordine di grandezza del raggio dell'universo osservabile, per questo viene anche detta **orizzonte** o **orizzonte cosmologico** [3].

Oltre questa scala ne sono state definite altre che descrivono i punti che possono essere entrati in contatto causale fra loro. Ponendo l'osservatore nell'origine, possono essere in un rapporto di causalità solo gli eventi che si trovano all'interno del cono di luce dell'osservatore stesso. Si definisce quindi, **orizzonte della particella**, la distanza che può avere percorso la luce dall'origine dell'universo ad ora. Questa grandezza in termini di distanza comovente è definita come

$$x_p(t) = \int_0^t \frac{t'}{a(t')} dt \quad (1.3)$$

e la corrispondente distanza propria è

$$r_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{t'}{a(t')} dt$$

Si definisce invece, **orizzonte degli eventi**, la distanza che la luce potrà percorrere in futuro, cioè la massima distanza comovente in cui si può trovare un dato punto al quale l'osservatore potrà mandare informazioni in un qualunque istante di tempo futuro t (prima di una eventuale fine dell'universo)

$$x_e(t) = \int_t^T \frac{t'}{a(t')} dt \quad (1.4)$$

con T tempo che definisce la fine dell'universo.

La corrispondente distanza propria è

$$r_e(t) = a(t) \int_t^T \frac{t'}{a(t')} dt$$

Questa definizione in sostanza è un analogo del concetto di orizzonte della particella però diretto al futuro, i punti che si trovano a distanza maggiore di $r_e(t)$ non potranno mai entrare in contatto causale con l'osservatore [4].

1.2 La metrica di Robertson-Walker

Per preservare omogeneità e isotropia dello spazio ed incorporare l'evoluzione temporale, bisogna assumere che il fattore di scala dell'universo $a(t)$ dipenda dal tempo. Esistono dei sistemi di coordinate privilegiati nei quali le simmetrie dell'universo vengono mostrate esplicitamente. In particolare applicando il Principio Cosmologico si identifica in maniera univoca la metrica di *Friedmann-Robertson-Walker*. L'elemento di linea assume la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.5)$$

t è il tempo cosmologico, r la coordinata radiale comovente adimensionale, e θ e ϕ le

coordinate angolari comoventi.

$d\sigma$ rappresenta lo spostamento sulla sottovarietà omogenea ed isotropa tridimensionale Σ_t , tale che la varietà spaziotemporale $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma_t$

$$d\sigma^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.6)$$

Il fattore K prende il nome di *costante di curvatura dell'universo* [5]. Riscalando r e $a(t)$ esso può essere ricondotto ai valori $K = 0, \pm 1$ e caratterizza la geometria dell'ipersuperficie di tipo spazio Σ_t . K infatti, è definito a partire dal tensore di Riemann, che identifica appunto la curvatura intrinseca di una varietà. Per un universo isotropo e omogeneo, lo scalare di Ricci R assume un valore costante, e in particolare

$$R = 6K$$

in 3D.

- **Universo piatto** $K = 0$

L'elemento di line $d\sigma$ assume la forma

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

infatti la metrica g_{ij} , descritta da (1.6), per $K = 0$ assume la forma Euclidea.

- **Universo chiuso** $K = 1$

Σ_t ha curvatura positiva ed è rappresentata da una sfera 3D.

- **Universo aperto** $K = -1$

Σ_t ha curvatura negativa ed è rappresentata da una iperbole 3D.

La curvatura dell'universo può anche essere ricavato a partire dal *parametro di densità dell'universo* Ω il cui significato verrà spiegato nei paragrafi successivi. Risulta che per

$$\begin{cases} K = -1 & \Rightarrow & \Omega > 1 \\ K = 1 & \Rightarrow & \Omega < 1 \\ K = 0 & \Rightarrow & \Omega = 1 \end{cases}$$

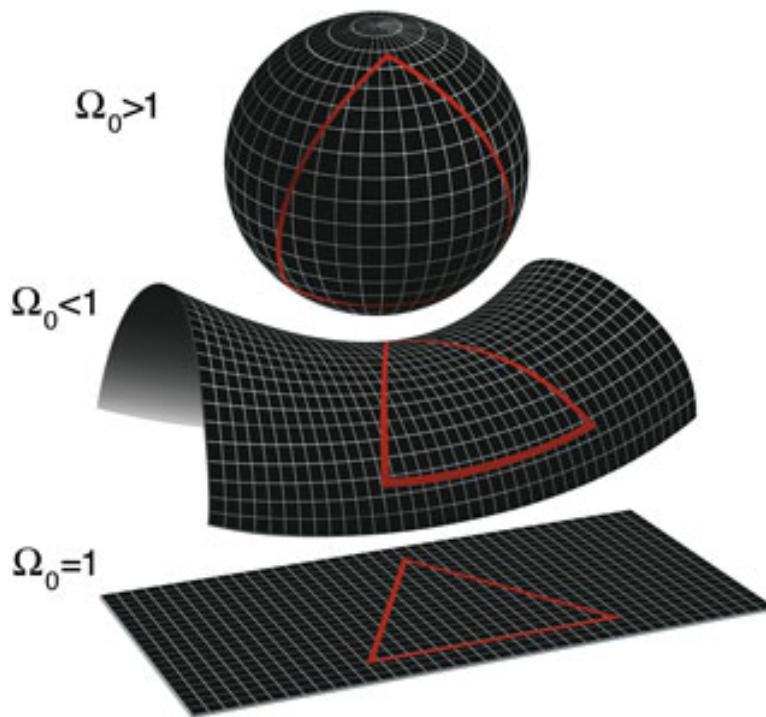


Figura 1.1: Tre tipi di curvatura dell'universo espressi in funzione del valore di Ω .

1.3 Evoluzione e fasi dell'universo

1.3.1 Storia dell'universo

Si ritiene che l'universo si sia formato intorno a 13.82 miliardi di anni fa. Nei suoi istanti iniziali esso era costituito da un *brodo* caldo, denso e uniforme di particelle che riempiva lo spazio in maniera uniforme [6]. Ciò nonostante le prime informazioni oggi da noi accessibili risalgono a 10^5 anni dopo, quando ha inizio il periodo di disaccoppiamento fra materia e radiazione. A quel tempo la temperatura dell'universo era di $T > 10^3 K$. La Radiazione Cosmica di Fondo che oggi si rileva, si forma proprio in questa fase.

Si ipotizza che circa 10^{-48} s dalla nascita dell'universo, le quattro forze fondamentali costituissero una unica forza e la densità di energia fosse dell'ordine della scala di Planck ($\sim 10^{18} GeV$). Pochi istanti dopo, in seguito al disaccoppiamento della forza gravitazionale si suppone abbia avuto inizio l'inflazione, alla fine della quale, a circa 10^{-32} s, inizia il Cold Big Bang, che costituisce una fase di transizione nella quale l'universo è dominato da particelle non relativistiche, detta *matter-domination* [3].

Durante l'inflazione la densità di energia dell'universo è dominata dal potenziale di un campo scalare detto **inflatone**. Sono proprio queste le circostanze in cui si definiscono le condizioni iniziali per il Big Bang. Al termine del Cold Big Bang le particelle non relativistiche decadono velocemente in particelle relativistiche e in un processo chiamato *reheating*, durante il quale la temperatura dell'universo aumenta, ha inizio un periodo detto Hot Big Bang nel quale è la radiazione a dominare. La temperatura è di circa $100 GeV$, tutte le forze fondamentali sono ormai disaccoppiate, si formano i gluoni e le prime coppie di quark-antiquark, i fotoni si scindono e si annichiliscono costantemente in coppie elettrone-positrone. Si ipotizza che proprio in questa fase si sia creata l'asimmetria fra materia e antimateria in un processo detto *asimmetria barionica*. I quark condensano in adroni e così i neutrini cessano di essere in equilibrio termico con il resto della materia, formando una radiazione cosmica di fondo, la cui temperatura è di circa

$T = 1.95K$ e che risale ad un tempo molto anteriore alla radiazione fotonica (oggi non si è in grado di rilevare questo segnale nell'universo).

Due minuti dopo l'origine dell'universo inizia la *nucleosintesi*, un processo durante il quale la maggior parte dei neutroni decade in protoni, si abbassa considerevolmente l'energia dell'universo fino a circa $0.1MeV$ consentendo la formazione dei primi nuclei. Grazie all'accordo fra le abbondanze di deuterio e di elio-4 che si registrano oggi nell'universo, e i dati attesi dalla teoria della nucleosintesi, è stato dato un forte sostegno alla teoria del Big Bang.

Quando la temperatura dell'universo scende a $T = 10^5K$ la quantità di materia non relativistica eguaglia quella della materia relativistica e si arriva alla fase di *matter-domination*, nella quale tutt'oggi ci troviamo. In questo periodo l'espansione dell'universo accelera in modo che la temperatura si abbassi più velocemente. Circa 10^5 anni dopo la nascita dell'universo l'energia raggiunge $0.1eV$, la temperatura è di $300K$ e ha inizio la *ricombinazione* [6]. Durante questa fase gli elettroni si legano ai nuclei generando i primi atomi, la temperatura si abbassa tanto da non consentire più ai fotoni di rimuovere gli elettroni dai nuclei. Avviene quindi il *disaccoppiamento* totale di materia e radiazione e si genera la Radiazione Cosmica di Fondo, la cui temperatura oggi è di $T = 2.728K$, con una lunghezza d'onda nel range delle microonde e con delle anisotropie dell'ordine di $10^{-4}K$ [3].

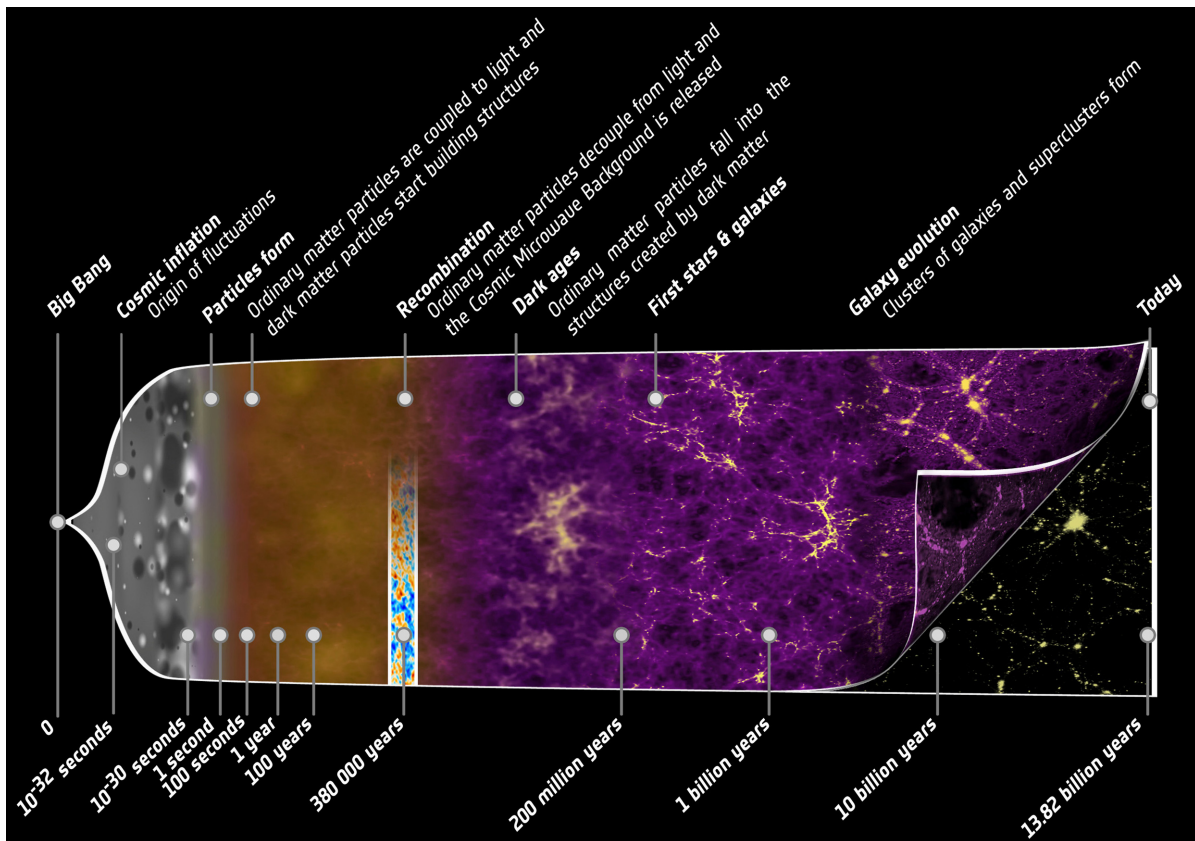


Figura 1.2: *Fasi evolutive dell'universo.*

1.3.2 Tre fasi evolutive

Come accennato nel capitolo precedente, esistono delle fasi dell'universo in cui a dominare è la presenza di materia o di radiazione. Ciò significa che se si assume che lo spazio è pervaso da un fluido perfetto, in base al periodo preso in esame l'universo può essere costituito in maggior percentuale da alcune sostanze rispetto che da altre.

Il tensore energia-impulso di tale sostanza, ha la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}$$

con $u_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}u^{\nu} = (-1, 0, 0, 0)$ la quadrivelocità di un fluido comovente.

In forma matriciale

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & g_{ij}P & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, P, P, P)$$

con ρ e P la densità e la pressione del fluido.

Il tensore energia-impulso soddisfa l'equazione di continuità

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$$

In particolare se si considera la componente tale che $\nu = 0$, si trova la legge di conservazione locale dell'energia [5]

$$\nabla_\mu T^\mu_0 = -\partial_0\rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \Rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.7)$$

che è equivalente alla legge di conservazione per una trasformazione adiabatica $dE = -PdV$ in un elemento di volume dV ($V \propto a^3$), dove ρdV rappresenta il decremento dell'energia gravitazionale in seguito all'espansione e PdV il lavoro fatto dall'espansione. Se si assume che la forma per l'energia sia $E = (\rho + P)a^3$ e che P non cambi nel tempo, si ritrova l'espressione (1.7), infatti

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}[(\rho + P)a^3] \Rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$$

Integrando questa equazione

$$\frac{\dot{\rho}}{(\rho + P)} dt = - \int 3\frac{\dot{a}}{a} dt$$

e facendo l'ansatz che l'equazione di stato dell'universo assuma la forma

$$P = w\rho \quad (1.8)$$

con w una costante, trovo che

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} = (1+z)^{3(1+w)} \quad (1.9)$$

dove z rappresenta il redshift ed essendo una grandezza osservabile è spesso usato al posto di a [4].

In base al valore che w assume si distinguono tre casi che corrispondono a tre possibili stati dell'universo in cui a dominare sono rispettivamente la materia, la radiazione o la costante cosmologica Λ .

1. Materia

Il fluido cosmico è costituito da materia fredda, non relativistica nella forma di polvere e la cui pressione è $P = 0$. Segue che $w = 0$ e, sostituendo nella espressione (1.9), si trova

$$\rho_m(a) \propto a^{-3} = (1+z)^3$$

2. Radiazione

L'universo è riempito da un gas caldo ultra-relativistico, la cui equazione di stato dalla meccanica relativistica è

$$P_r = \frac{1}{3}\rho_r$$

Segue che $w = \frac{1}{3}$ e quindi l'espressione della densità di energia diventa

$$\rho_r(a) \propto a^{-4} = (1+z)^4$$

3. Energia del vuoto

Questo stato corrisponde ad un universo piatto e statico senza polvere nè radiazione, ma per il quale viene introdotta la costante cosmologica Λ che rappresenta una componente di energia che spiega l'accelerazione nell'espansione dell'universo. Si osserva che $w = -1$ e cioè che

$$p_\Lambda = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\sqrt{8\pi G}}$$

Questo implica un valore negativo della pressione, che spiega il fatto che il valore

della costante cosmologica Λ era trascurabile ai tempi della nascita dell'universo, ma è andato via via crescendo nel tempo.

Dai risultati ottenuti, data l'*equazione di Friedmann*, si ottiene la dipendenza di a dal tempo

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho} \propto \sqrt{a^{-3(1+w)}} \propto a^{-\frac{3(1+w)}{2}}$$

Dove abbiamo trascurato Λ , e abbiamo considerato il caso di un universo piatto con $K = 0$.

Integrando

$$\int \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) a^{\frac{3(1+w)}{2}} dt = \int dt$$

otteniamo il seguente risultato

1. domina la materia

$$a \propto t^{\frac{2}{3}}$$

2. domina la radiazione

$$a \propto t^{\frac{1}{2}}$$

3. energia del vuoto

$$a \propto e^{const \cdot t}$$

1.4 Equazioni di Friedmann

L'equazione di campo di Einstein descrive la curvatura dello spazio-tempo, le cui caratteristiche geometriche sono contenute nel tensore di ricci $R_{\mu\nu}$, in funzione della densità di materia, di energia e della pressione descritti dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

Se si applica la metrica di *Friedmann-Robertson-Walker*, che, come detto precedentemente, viene identificata in maniera univoca assumendo il Principio Cosmologico, si trovano le equazioni di Friedmann come soluzioni dell'equazione di campo

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \end{cases} \quad (1.11)$$

Più propriamente la prima equazione si chiama *equazione di Friedmann*, mentre la seconda *equazione di Raychaudhuri* [4].

La prima si ricava dalle componenti $\mu\nu = 00$, la seconda $\mu\nu = ij$, per

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

L'equazione di Friedmann mette in relazione la variazione del fattore di scala $a(t)$ con la densità di energia, la costante di curvatura K e la costante cosmologica Λ (non sempre considerata). Se l'universo è piatto ($K = 0$) la sola presenza di energia ne determina l'espansione ($H > 0$).

Come conseguenza dell'equazione di Raychaudhuri, se è verificata la condizione $\rho + 3p < 0$, l'universo subisce una accelerazione del fattore di scala. Mentre infatti la densità di energia è sempre positiva, la pressione P può assumere valori negativi (inflazione guidata da un campo scalare).

Mettendo insieme le (1.11) e combinandole con l'equazione di stato dell'universo ($P = w\rho$), si costruisce un sistema completo di equazioni che determinano i valori delle incognite $a(t)$ e $\rho(t)$.

Oggi si assume $a(t) = 1$, inoltre introducendo il parametro di densità Ω , l'equazione di Friedmann può essere scritta nella forma

$$\Omega - 1 = \frac{K}{H^2} \quad (1.12)$$

Si deve sottolineare che il valore di $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$, dove $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \simeq 1.88h^2 \times 10^{-29} g \cdot cm^{-3}$ [3] è la densità critica, fornisce informazioni sulla geometria dell'universo come evidenziato al paragrafo precedente (Fig. 1.1).

Le due equazioni (1.11) vennero corrette nel 1917 da Einstein, il quale introdusse la costante cosmologica Λ e ne riaggiustò il valore, al fine di ottenere le equazioni del moto che descrivono un universo statico in accordo con le credenze del tempo. Si osserva in realtà che introducendo un valore positivo di Λ nelle equazioni di Friedmann, la costante cosmologica assume il ruolo di contrastare la forza gravitazionale attrattiva, consentendo una accelerazione nell'espansione dell'universo

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{1}{3}\Lambda \end{cases} \quad (1.13)$$

Il fatto che la fisica del vuoto abbia le stesse caratteristiche se studiata da qualsiasi osservatore inerziale, ha portato il fisico Lemaitre a intuire che il contributo dato dal vuoto al tensore energia-impulso è lo stesso della costante cosmologica di Einstein Λ . Se Λ viene posta a sinistra dell'equazione di Einstein, il suo ruolo è quello di apportare una correzione geometrica al tensore di Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$. Ma se viene spostato a destra, cambia significato, e rappresenta la correzione dell'energia del vuoto al tensore energia-impulso. Segue che il contributo apportato alla densità di energia da Λ è $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$, mentre la pressione associata assume un valore negativo $P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$ [4]. Quando la costante cosmologica è positiva, il contributo gravitazionale del vuoto è repulsivo contrapponendosi a quello positivo della materia. Per valori di $\Lambda < 0$, invece, il

contributo gravitazionale è attrattivo, sommandosi così a quello della materia.

Le equazioni (1.13) con $\Lambda > 0$ descrivono l'universo di *Friedmann-Lemaitre*. In questo contesto il parametro di densità totale assume la forma

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda \quad (1.14)$$

dove Ω_m , Ω_r , Ω_Λ sono rispettivamente i contributi di materia, radiazione ed energia del vuoto:

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{\rho_m}{\rho_c} \\ \Omega_r &= \frac{\rho_r}{\rho_c} \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{8\pi G\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H^2}\end{aligned}$$

Capitolo 2

Problemi del modello classico cosmologico

Il Modello Classico del Big Bang non presenta inconsistenze nella sua formulazione, ciò nonostante più che essere una teoria in grado di spiegare l'origine dell'universo, essa descrive ciò che accade dopo l'esplosione. La sua formulazione, infatti, risulta incompleta in quanto non vengono spiegate le ragioni dell'espansione, ma solo le conseguenze del Big Bang, nè l'origine della materia, assumendo per ogni particella dell'universo l'esistenza di un suo precursore fin dall'inizio [7].

2.1 Radiazione cosmica di fondo

La Radiazione Cosmica di Fondo (CMB) che venne osservata per la prima volta nel 1964 dai fisici Penzias e Wilson, è la radiazione elettromagnetica che permea l'universo ed è considerata come un residuo di quella prodotta inizialmente dal Big Bang ad una temperatura di $T \simeq 3000K$. Lo spettro della CMB approssima molto bene quello del corpo nero e la sua scoperta è considerata una delle maggiori prove alla teoria del Big Bang.

La Radiazione Cosmica di Fondo presenta un'alta omogeneità, la sua temperatura è di

$$T = (2.7255 \pm 0.0006)K$$

con anisotropie di una parte su 10^5 [8]. Queste corrispondono a irregolarità della superficie di ultimo scattering e quindi sono caratterizzate da scale di lunghezza tali da impedire un rapporto causale fra di esse. Inoltre, essendo molto piccole e per lo più della stessa ampiezza, si potrebbe immaginare che siano da ricondurre a condizioni iniziali molto particolari del Big Bang, oppure che si potrebbero associare a effetti di fluttuazioni del campo gravitazionali in tempi molto più recenti rispetto alla sua formazione. La spiegazione maggiormente sostenuta dai cosmologi è quella data dall'inflazione. Secondo questa teoria le anisotropie erano presenti sotto forma di fluttuazioni di campo quantistico per il principio di indeterminazione e ciò avrebbe prodotto una distribuzione della densità di energia non omogenea. In seguito all'espansione accelerata dell'universo, durante l'inflazione, le anisotropie avrebbero raggiunto l'ampiezza che oggi osserviamo. Per avere una stima dei valori attesi e poterli confrontare con quelli osservati, servirebbe però avere maggiori informazioni sul potenziale scalare che guida l'inflazione [3].

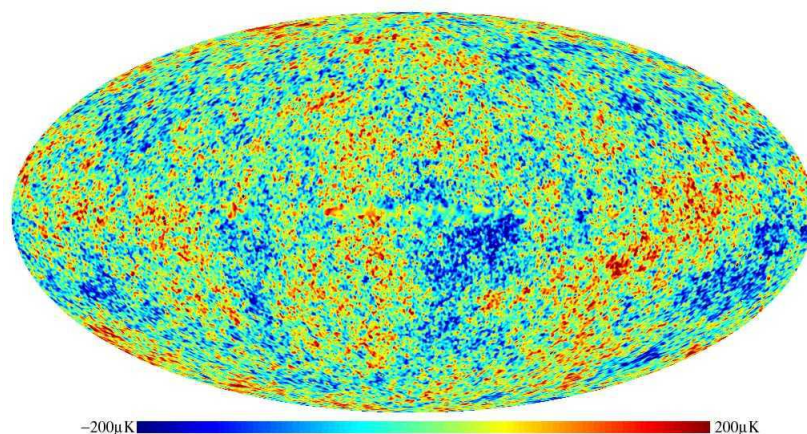


Figura 2.1: Immagine delle fluttuazioni di temperatura nella Radiazione Cosmica di Fondo, realizzate con nove anni di osservazioni di WMAP.

2.2 Problema dell'universo piatto

Riscrivendo l'equazione di Friedmann in termini del parametro di densità Ω , essa assume la forma

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2} \quad (2.1)$$

Segue che se l'universo è piatto, $K = 0$, rimane tale per sempre essendo $\Omega = 1$.

Altrimenti se il valore di Ω all'inizio dell'universo si fosse discostato da 1, dato che $|\Omega - 1| = (aH)^{-2}$ ci si aspetterebbe di osservare oggi uno scenario completamente diverso.

- Per $\Omega < 1$ il termine di curvatura diventa dominante ma con contributo negativo, pertanto l'universo si espande tanto velocemente da assumere le dimensioni attuali in un brevissimo tempo e in meno di 1s dopo la sua nascita avrebbe dovuto raggiunto una temperatura minore di $3K$.
- Per $\Omega > 1$, l'universo presenta una curvatura positiva ($K > 0$). Ciò lo avrebbe portato al fenomeno del Big Crunch, per il quale l'universo sarebbe dovuto ricollassare su se stesso in breve tempo.

Per ottenere un valore della densità critica pari a quello osservato oggi, circa un secondo dopo la nascita dell'universo si sarebbe dovuto avere

$$|\Omega - 1| \lesssim 10^{-16}$$

[3] Questo valore, estremamente preciso, sembra non essere frutto delle condizioni iniziali, ma dovuto a un processo avvenuto poco dopo la nascita dell'universo. Combinando l'equazione (2.1) con l'equazione di *Raychaudhuri*

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3P)a \quad (2.2)$$

dove è stata trascurata la costante cosmologica Λ , si trova

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H^2\Omega(1+3w) \\ \Omega(1+3w) = -\frac{2}{H^2}\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = -2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}a \\ (\Omega-1)\Omega(1+3w) = -2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}a\frac{K}{H^2a^2} = -\frac{2\ddot{a}aK}{\dot{a}^4} \\ \left\{ \begin{array}{l} (\Omega-1) = \frac{K}{H^2a^2} \\ d\Omega = d\left(\frac{K}{H^2a^2} + 1\right) = Kd(\dot{a}^{-2}) = -2\dot{a}^{-3}\ddot{a}K \end{array} \right. \end{cases}$$

da cui

$$\frac{d\Omega}{d(\log(a))} = (\Omega-1)\Omega(1+3w) \quad (2.3)$$

Le proprietà della (2.3) dipendono dal segno di $(1+3w)$

1. $\Omega = 1$

$(1+3w) > 0$, allora

$$\frac{d\Omega}{d(\log(a))} > 0$$

ogni variazione dalla condizione di universo piatto viene amplificata con una espansione.

2. $\Omega \neq 1$

$(1+3w) < 0$, allora

$$\frac{d\Omega}{d(\log(a))} < 0$$

l'universo evolve verso la condizione di piattezza. Si può quindi immaginare un periodo di espansione accelerata, prima della dominazione della materia, durante il quale il valore del parametro di densità si avvicina all'unità [4].

2.3 Problema dell'orizzonte

Osservando la radiazione cosmica di fondo, si registra una omogeneità dell'universo difficilmente spiegabile attraverso la teoria classica del Big Bang. Non si comprende come

punti dell'universo così distanti fra loro presentino le stesse caratteristiche fisiche. La distanza comovente per la quale è avvenuto contatto causale, prima che la radiazione cosmica di fondo fosse rilasciata, risulta essere molto minore di quella che la radiazione ha percorso da quell'istante. Come possono allora radiazioni provenienti da distanze maggiori della superficie di ultimo scattering presentare, ad esempio, la stessa temperatura $T = 2.73K$ non è spiegabile. Nell'ipotesi in cui l'universo non è omogeneo dall'inizio e il processo di omogenizzazione sia avvenuto 380.000 anni dopo la sua nascita (inizio del disaccoppiamento materia-radiazione), sarebbe necessario assumere la possibilità di trasmissione di energia e informazioni a più di cento volte la velocità della luce [7].

Per comprendere meglio questo fenomeno si può considerare il rapporto fra una certa scala di lunghezza comovente e le dimensioni dell'orizzonte cosmologico $(Ha)^{-1}$. In base al valore che questo rapporto assume, è possibile stabilire se la scala presa in esame si trova all'interno dell'orizzonte stesso o meno, cioè se eventi causali possono riguardare tali scale di distanze [4]. In particolare se si definisce con λ la scala di lunghezza comovente con numero d'onda k si trova che

1. la scala λ sta dentro l'orizzonte se

$$\frac{k}{aH} \ll 1$$

2. la scala sta fuori dall'orizzonte se

$$\frac{k}{aH} \gg 1$$

Inoltre, prendendo in esame un tempo molto lungo t , mentre l'orizzonte delle particelle (1.3) è proporzionale ad a , l'orizzonte cosmologico cresce più lentamente perchè \dot{a} stesso aumenta mentre aumenta a e accelera l'universo. Da ciò segue che punti dello spazio che non sono mai entrati in contatto causale, possano diventare tali con il passare del tempo, mostrando le stesse proprietà fisiche.

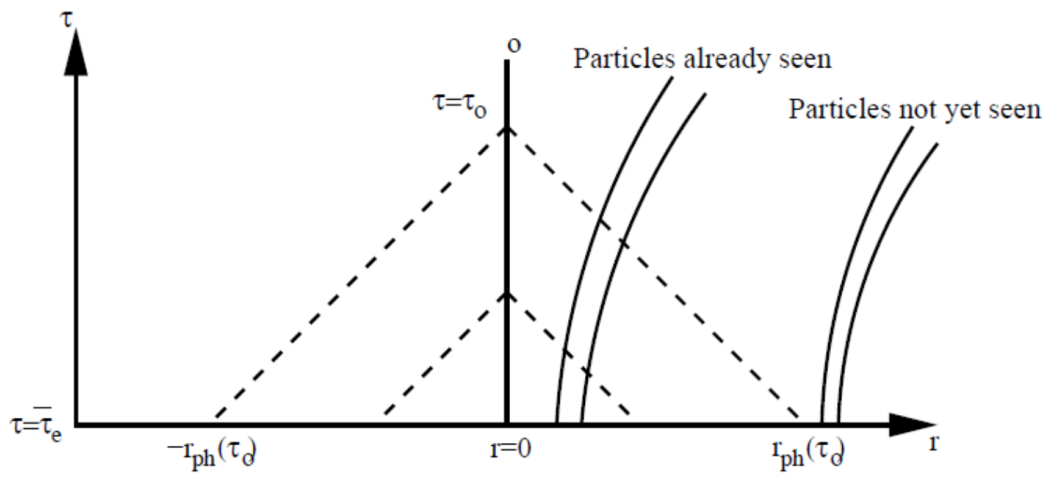


Figura 2.2: Rappresentazione di come varia nel tempo il cono di luce in relazione al tempo passato dell'origine dell'universo. r_{ph} è l'orizzonte della particella.

Capitolo 3

L'inflazione

3.1 Condizioni per l'inflazione e soluzioni al modello classico

L'inflazione è un periodo di espansione accelerata dell'universo durante il quale si verificano tre condizioni fra loro equivalenti

- il fattore di scala dell'universo aumenta, aumentando il raggio dell'universo

$$\ddot{a} > 0$$

- il raggio di Hubble comovente diminuisce durante il periodo dell'inflazione per poi tornare a crescere. Inizialmente $(aH)^{-1}$ era molto maggiore dell'orizzonte della particella, ma al termine dell'inflazione la situazione si è invertita e il raggio di Hubble risulta essere molto più piccolo dell'orizzonte della particella, per poi tornare a crescere

$$\frac{d(aH)^{-1}}{dt} < 0$$

- in questo modo si esprime la condizione affinché si abbia inflazione in termini di vincoli imposti al campo che guida l'espansione. Si richiede infatti, dal momento

che ρ la densità di energia è sempre positiva, che $P < 0$

$$\rho + 3P < 0$$

Si mostra come queste condizioni per l'inflazione risolvano i problemi legati alla teoria classica del Big Bang.

1. Problema della piattezza dell'universo

Si osserva come questo periodo di espansione accelerata implichi un avvicinamento del valore del parametro di densità dell'universo all'unità (punto due). Dall'equazione di Friedmann infatti

$$\Omega = 1 + \frac{K}{(aH)^2}$$

affinchè $\Omega \rightarrow 1$ deve essere $\frac{d}{dt} \frac{K}{(aH)^2} < 0$, che è soddisfatta se vale $\frac{d(aH)^{-1}}{dt} < 0$.

2. Problema dell'orizzonte

Basta ipotizzare che in un qualche tempo della storia dell'universo la superficie di ultimo scattering sia entrata interamente in contatto causale. L'universo che osserviamo oggi è altamente isotropo e con la sua espansione regioni che non erano in contatto causale diventano tali. Ciò implica che questi punti dello spazio mostrino le stesse proprietà fisiche. Si può immaginare allora un periodo durante il quale il raggio di Hubble comovente $(aH)^{-1}$ era molto maggiore delle dimensioni attuali. Successivamente, durante l'espansione, questo sarebbe diminuito notevolmente in modo che punti dello spazio in contatto causale fra loro, prima dell'inflazione, siano usciti dall'orizzonte cosmologico al suo termine.

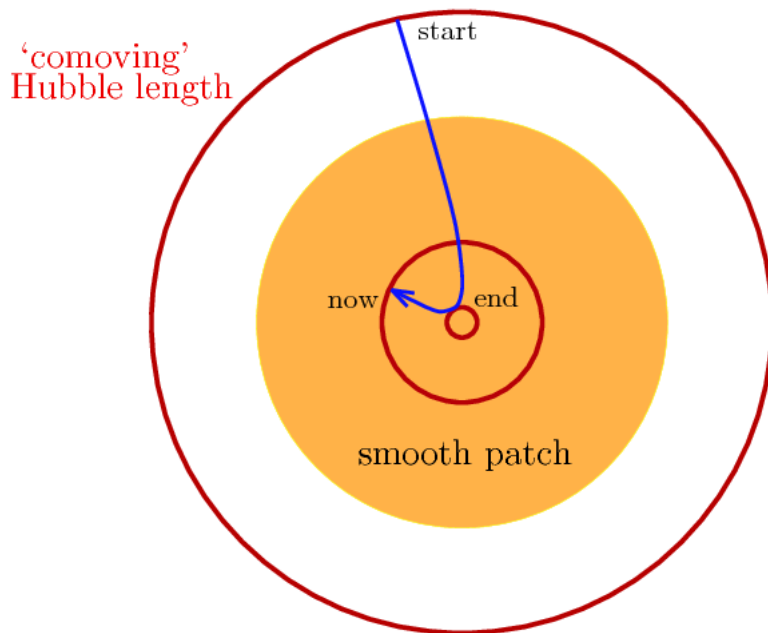


Figura 3.1: *Soluzione inflazionaria al problema dell'orizzonte cosmologico. L'immagine mostra come nel tempo siano cambiate le dimensioni della distanza di Hubble comovente.*

3. Assenza di monopoli magnetici nell'universo

Infine, il motivo principale per cui venne avanzata l'ipotesi di un periodo di inflazione è che questa teoria era in grado di spiegare l'assenza di monopoli magnetici nell'universo, attesi invece in abbondanza dal modello classico. Secondo la teoria della Grande Unificazione, infatti, nelle prime fasi dell'universo le forze fondamentali erano combinate in una unica e attraverso particolari processi ad altissime temperature si sarebbero formati dei monopoli magnetici di ingente densità. Con l'inflazione però, queste disomogeneità avrebbero diminuito a tal punto la loro densità da giustificare il fatto che oggi non siano rilevabili nell'universo.

3.2 Campo scalare

Le proprietà di qualsiasi sistema in fisica sono specificate dalla sua azione

$$\mathbf{S} = \int \mathbb{L} dt = \int \mathcal{L} dx^4$$

dove \mathbb{L} è la Lagrangiana e \mathcal{L} è la densità di Lagrangiana. Bisogna assicurarsi che la Lagrangiana sia un invariante di Lorentz in modo da obbedire agli assiomi della relatività speciale; inoltre si richiede che, affinché la causalità sia soddisfatta, le equazioni per le funzioni di campo siano al più del secondo ordine nel tempo in modo che il problema di Cauchy abbia una unica soluzione.

I campi in fisica possono essere classificati in base allo spin delle loro particelle, per il campo scalare si trattano particelle con spin 0 [9]. La loro caratteristica, inoltre, è che possiedono una energia potenziale con un redshift molto basso mentre l'universo si espande. Questa ultima proprietà implica che l'equazione di stato per questi campi scalari presenti una pressione negativa e ciò è in accordo con le condizioni di inflazione [3]. Si potrebbe quindi pensare che l'inflazione stessa sia guidata dalla costante cosmologica Λ , essendo questa ultima tale per cui

$$\rho_{vuoto} = -P_{vuoto} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

ciò nonostante con Λ costante è poi difficile spiegare come l'inflazione sia terminata. Dall'espressione $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}$ segue che se nel tempo aumenta H , aumenta pure Λ , altrimenti se $a = 0$ la costante cosmologica si annulla.

Si è allora ipotizzato a partire dagli anni ottanta, grazie agli studi del fisico Alan Guth, l'esistenza di un campo scalare detto *inflatone* il quale avrebbe guidato l'inflazione. Esistono poi altre teorie che ipotizzano l'esistenza di più campi scalari coesistenti, *inflazione ibrida*, che combinandosi avrebbero guidato l'espansione. Queste teorie vengono trascurate e sono ancora oggetto di studi data la loro complessità [3].

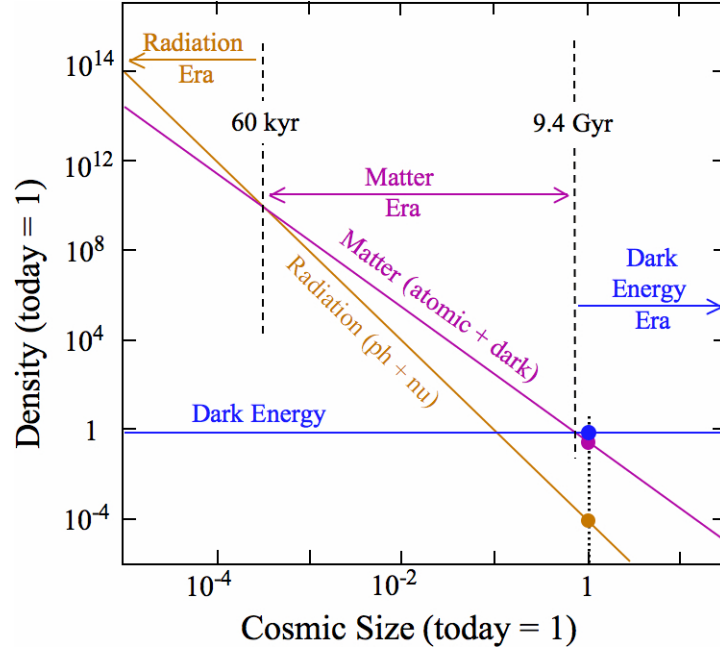


Figura 3.2: Il grafico mostra come cambia la densità della materia, della radiazione e dell'energia oscura in funzione delle dimensioni dell'universo. Si osserva che sebbene la percentuale di densità di radiazione e di materia diminuiscano progressivamente all'aumentare del raggio cosmico, quella di dark energy rimane sempre costante.

Per capire la fisica dietro i processi che guidano l'inflazione se ne studiano allora le proprietà di campo.

La Lagrangiana di un campo scalare ϕ , è $\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$, mentre la densità di Lagrangiana ha la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi(x) \nabla^\mu \phi(x) - V(\phi(x)) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \nabla \phi \nabla \phi) - V(\phi(x)) = \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sostituendo nell'espressione dell'azione

$$\mathbf{S} = \int dx^4 \left[\frac{1}{2} (\dot{\phi}(x))^2 - \nabla \phi(x) \nabla \phi(x) - V(\phi(x)) \right]$$

e applicando il principio variazionale

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{S} &= \delta \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \delta(\mathcal{L}) = \\ &= \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \delta(\partial_\mu \phi(x)) \right) \right]\end{aligned}$$

Integrando per parti il secondo termine, dal momento che

$$[\delta, \partial_\mu] = 0$$

Si ha

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{S} &= \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \delta\phi(x) \right) \right] - \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) \delta\phi(x) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) \right) \delta\phi(x) + \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) \delta\phi(x)\end{aligned}$$

Studiando l'ultimo termine

$$\int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right)$$

Per Gauss

$$\int_V \nabla F dV = \oint_S F dS$$

segue che

$$\begin{aligned}& \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) \right] = \\ &= \int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) \right] = \\ &= \int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi(x))} \right) \delta\phi(x) + \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \left[\nabla \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi(x))} \right) \delta\phi(x) \right] \right]\end{aligned}$$

Il primo termine si annulla, si può allora riscrivere il secondo come

$$\lim_{R \rightarrow \text{inf}} R^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi(x))} \delta\phi(x) \right) = 0$$

dove R è il raggio di una sfera molto grande centrata in $x = 0$, si è assunto un comportamento radiale asintotico e si è imposta la condizione al contorno $\delta\phi = 0$ per R che tende

all'infinito [10].

Imponendo quindi che $\delta\mathbf{S} = 0$ si trova l'equazione del moto del campo detta **equazione di campo**

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (3.2)$$

sostituendo l'espressione di \mathcal{L} data dalla (3.1), si trova

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi + V'(\phi) = 0$$

che per un campo omogeneo spazialmente diventa

$$\ddot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.3)$$

dove il simbolo $'$ indica la derivata $\frac{d}{d\phi}$.

Nel nostro caso un elemento di volume è dato da $d^4x\sqrt{-g}$, l'azione sarà quindi

$$\mathbf{S} = \int d^4x\sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (3.4)$$

La forma più semplice che può assumere \mathcal{L} , per ritrovare attraverso il principio variazionale l'equazione di campo di Einstein, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{R}{8\pi G} + \mathcal{L}_{mat} \quad (3.5)$$

dove G è la costante gravitazionale, R è la costante di curvatura (ottenuta dalla contrazione del tensore di Ricci) e \mathcal{L}_{mat} è una funzione solo di $g_{\mu\nu}$, che rappresenta il contributo di una sorgente di campo gravitazionale. L'equazione (3.4) prende il nome di **azione di Einstein-Hilbert**.

Variando l'azione in funzione della metrica $g_{\mu\nu}$ si ritrova la forma del tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial\mathcal{L}_{mat}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{mat} \quad (3.6)$$

Mettendo insieme questi risultati con il caso di un campo scalare, in coordinate generiche avremo che \mathcal{L}_{mat} assume la forma

$$\mathcal{L}_{mat} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (3.7)$$

ed il tensore energia-impulso del campo scalare sarà dunque

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + V(\phi)\right] \quad (3.8)$$

Considerando poi come condizioni che il campo sia omogeneo e che valga la metrica di *Robertson-Friedman-Walker*, si trova la forma esplicita del tensore energia-impulso, che rappresentano il contributo alla pressione e al volume dati dal campo ϕ [3]

$$\begin{cases} T_{00} \equiv \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \\ T_{ii} \equiv P_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \end{cases} \quad (3.9)$$

Variando ϕ per il principio di azione, ritrovo l'equazione di campo (3.2) e usando la forma del campo scalare \mathcal{L}_{mat} data da (3.7), trovo l'equazione del campo scalare

$$\square\phi + V'(\phi) = 0$$

\square è l'operatore di D'Alambert ed il simbolo $'$ indica la derivata rispetto a ϕ .

È possibile ricavare le equazioni del moto anche privandosi del principio di minima azione; in particolare sostituendo le (3.9) nelle equazioni di continuità e di Friedmann, dove si è posto $\Lambda = K = 0$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \\ H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \end{cases}$$

Si trovano quindi le due equazioni del moto

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \\ H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right] \end{cases} \quad (3.10)$$

Affinchè si abbia inflazione deve essere

$$(\rho + 3P) < 0$$

e ciò implica che

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) < 0 \quad (3.11)$$

affinchè il campo scalare possa scivolare lentamente lungo il suo potenziale e avvenga quindi l'inflazione, il valore del potenziale deve dominare su quello dell'energia cinetica ed inoltre devono essere soddisfatte le condizioni dette di *slow-roll*.

Il termine $3H\dot{\phi}$ che compare nella prima equazione della (3.10), ma non nella formula generale espressa da (3.3), deriva dal tipo di potenziale scalare utilizzato. In questo caso non sono prese in esame le perturbazioni dello spazio tempo, ma sono considerate solo le interazioni del campo scalare ϕ con se stesso.

3.3 Condizione di slow-roll

Come accennato precedentemente, affinché ci sia inflazione il campo scalare deve scivolare lentamente lungo il potenziale e devono essere soddisfatte le ulteriori condizioni di *slow-roll*.

Nell'*approssimazione di slow-roll* le equazioni (3.10) assumono la forma

$$\begin{cases} 3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \\ H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \end{cases} \quad (3.12)$$

Sono stati quindi trascurati i termini

- $\ddot{\phi}$, che restringe il potenziale inflazionario ad un potenziale piatto
- $\dot{\phi}^2$ che per ipotesi è trascurabile rispetto a $V(\phi)$

Da queste equazioni si ricavano le condizioni di *slow-roll*

$$\begin{cases} \epsilon(\phi) \ll 1 \\ |\eta(\phi)| \ll 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

dove

$$\begin{cases} \epsilon(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \\ |\eta(\phi)| = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right) \end{cases}$$

Queste equazioni infatti forniscono solo una condizione necessaria ma non sufficiente per l'*approssimazione di slow-roll* in quanto impongono dei limiti solo sulla forma del potenziale $V(\phi)$ [3].

La prima equazione della (3.12), infatti, in forma completa è una equazione al secondo ordine, per cui $\dot{\phi}$ potrebbe essere scelto liberamente in modo da violare la condizione di *slow-roll*, segue che la prima equazione della (3.12) debba essere considerata come una condizione aggiuntiva.

Si verifica quindi che le (3.12) sono condizioni necessarie

1. $\epsilon(\phi) \ll 1$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &\ll V(\phi) \\ \dot{\phi}^2 &\sim \frac{V'(\phi)^2}{H^2} \ll V(\phi) \end{aligned}$$

Ed essendo poi dalla seconda di (3.11)

$$H^2 \sim V(\phi)$$

segue che

$$V'(\phi)^2 \ll V(\phi) \quad \Rightarrow \quad \epsilon(\phi) \ll 1$$

2. $|\eta(\phi)| \ll 1$

$$V'(\phi) \sim -H\dot{\phi} \sim -\dot{\phi}\sqrt{V(\phi)}$$

derivando rispetto a ϕ

$$V''(\phi) \sim -\dot{\phi} \frac{V'(\phi)}{\sqrt{V(\phi)}} = -\dot{\phi} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \sqrt{V(\phi)}$$

dalla prima condizione di *slow-roll*, segue che

$$-\dot{\phi} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \sqrt{V(\phi)} \ll V(\phi) \quad \Rightarrow \quad |\eta(\phi)| \ll 1$$

L'approssimazione di *slow-roll* è una condizione sufficiente per l'inflazione, ma perchè sia valida deve soddisfare i vincoli imposti dall'inflazione stessa. Affinchè ci sia accelerazione nell'espansione dell'universo, deve essere

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{H}^2}{H} < 1 \quad (3.14)$$

ma dal momento che

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 = 4\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = -\frac{\dot{H}^2}{H}$$

segue

$$-\frac{\dot{H}^2}{H} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \equiv \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{H}^2}{H} \ll 1 \quad (3.15)$$

Come conseguenza il processo di inflazione termina quando vengono violate le condizioni di *slow-roll*, in particolare quando $\epsilon(\phi)$ tende all'unità. È evidente infatti, che se il campo scalare raggiunge un minimo del potenziale, $V'(\phi) = 0$, $\epsilon(\phi)$ diverge. Esistono poi alcune teorie inflazionarie per le quali l'inflazione può terminare sebbene siano ancora valide le condizioni di *slow-roll*.

3.4 Quanta inflazione è necessaria?

Affinchè vengano effettivamente risolti il problema dell'orizzonte e della piattezza, è necessario che almeno un certo ammontare di espansione venga raggiunto. Il numero di e-foldings, cioè l'intervallo di tempo nel quale una grandezza che cresce esponenzialmente aumenta di un fattore e , necessari rappresenta un vincolo importante anche perchè determina la natura delle perturbazioni generate durante l'inflazione.

Come prima richiesta deve essere soddisfatta la condizione che la lunghezza di Hubble comovente misurata oggi, sia contenuta all'interno di quella misurata prima dell'inflazione di modo che sia verificata la causalità fra punti diversi dell'universo osservati oggi

$$\frac{1}{a_0 H_0} < \frac{1}{a_i H_i}$$

0 indica il tempo oggi ed i l'istante prima dell'inflazione [4].

Supponendo che alla fine dell'inflazione inizi subito il periodo di dominio della radiazione durante il quale $H \sim a$

$$\begin{cases} \frac{a_0 H_0}{a_f H_f} \sim \frac{a_0}{a_f} \left(\frac{a_f}{a_0}\right)^2 = \frac{a_f}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_f} \sim 10^{-28} \\ \frac{1}{a_0 H_0} = \frac{1}{a_i H_i} \end{cases}$$

f rappresenta l'istante immediatamente dopo l'inflazione e T è la temperatura. La proporzionalità fra T e l'inverso di a deriva dall'espressione della densità di entropia nel caso di *radiation-domination* $s = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3 = \frac{S}{a^3}$, dove g_* è il numero di stati di spin.

$$\begin{cases} \frac{a_f H_f}{a_0 H_0} \sim 10^{28} \\ \frac{a_f H_f}{a_0 H_0} < \frac{a_f H_f}{a_i H_i} \end{cases}$$

$$(a_i H_i)^{-1} \sim 10^{28} (a_f H_f)^{-1} \quad \Rightarrow \quad N = \log\left(\frac{a_f}{a_i}\right) > 64$$

N , quindi, è il numero di e-foldings necessari affinché venga risolto il problema dell'orizzonte.

Si può quindi calcolare anche il numero di e-foldings necessari per risolvere il problema della piattezza. Sia k il numero d'onda che rappresenta una certa scala di lunghezze comoventi. Durante l'inflazione la lunghezza comovente di Hubble diminuisce di modo che k^{-1} , se precedentemente era contenuta all'interno di $\frac{1}{aH}$, potrebbe ad un certo istante uscirne. È allora importante calcolare il tempo al quale $k = aH$ e stimare il numero di e-foldings necessari affinché ciò avvenga.

Assumendo che le fasi evolutive dell'universo siano schematizzabili in

- Da $k^{-1} = (aH)^{-1}$, alla fine dell'inflazione (t_{end})
- Dalla fine dell'inflazione al Big Bang caldo (t_{BB})
- L'era di dominazione della radiazione (t_{rad})
- Dominazione della materia (t_{mat})

Segue che

$$\frac{k}{aH} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_{end}} \frac{a_{end}}{a_{BB}} \frac{a_{BB}}{a_{rad}} \frac{a_{rad}}{a_0} \frac{H_k}{H_0}$$

Il primo termine dà il numero di e-foldings rimanenti quando $k^{-1} = (aH)^{-1}$, quindi gli altri termini sono considerabili come correzioni

$$N \sim 62$$

risultato consistente con quello ottenuto trattando il problema dell'orizzonte [3].

3.5 Equazione di Hamilton-Jacobi per l'inflazione

Si possono riscrivere le equazioni del moto per l'inflazione attraverso il formalismo hamiltoniano. Ciò consente di fare numerose semplificazioni e ottenere parecchi risultati, in

particolare si considera il caso di un universo piatto ($K = 0$). La formulazione può essere fatta utilizzando al posto della variabile temporale il campo scalare ϕ . Durante la condizione di *slow-roll* infatti, il comportamento di ϕ è monotono nel tempo. Differenziando rispetto al tempo

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \left(V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right)$$

Si ottiene

$$2H\dot{H} = \frac{8}{3}\pi G \left(V'(\phi)\dot{\phi} + \dot{\phi}\ddot{\phi} \right)$$

dove

$$V'(\phi) = \frac{6H\dot{H}}{(8\pi G)\dot{\phi}} - \ddot{\phi}$$

Sostituendo in

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi)$$

si trova

$$2\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{(M_p)^2} \quad (3.16)$$

con $M_p = (8\pi G)^{-1/2}$.

Dal momento che il campo scalare ϕ varia in modo monotono con il tempo, posso dividere entrambi i lati delle equazione per $\dot{\phi}$. Si trova che

$$\dot{\phi} = -2H'(\phi)M_p^2 \quad (3.17)$$

con $H'(\phi) = \frac{dH(\phi)}{d\phi}$. Questa equazione fornisce la relazione fra ϕ e il tempo.

L'equazione di Friedmann allora diventa

$$[H'(\phi)]^2 - \frac{3}{2M_p^2}H(\phi)^2 = -\frac{1}{2M_p^4}V(\phi) \quad (3.18)$$

che non è altro che l'equazione di **Hamilton-Jacobi**, ma consente di utilizzare $H(\phi)$ piuttosto che $V(\phi)$ come quantità fondamentale. Questa sostituzione può essere considerata più naturale da usare in quanto H è un parametro geometrico, così come l'inflazione è un fenomeno geometrico [3].

3.6 Tre tipi di inflazione

In base al tipo di potenziale scalare utilizzato, possiamo distinguere tre modelli di inflazione.

- **Vecchia Inflazione**

Venne proposto da Alan Guth nel 1981 e fu la prima teoria in grado di spiegare i problemi dell'orizzonte e della piattezza. Si ipotizza l'esistenza di un *falso vuoto* super freddo, con una alta densità di energia, privo di campi e di particelle, che costituisce uno stato metastabile. L'universo andrebbe quindi incontro a una fase di espansione accelerata in modo tale da diventare piatto e di dimensioni prossime a quelle attuali. Il processo successivo che porta all'*Hot Big Bang*, e quindi al riscaldamento dell'universo, risulta poco realistico, motivo per cui questa teoria è stata abbandonata [4]. Per il modello della vecchia inflazione, infatti, si suppone una transizione di fase del primo tipo, cioè tale che non cambia la temperatura T_s e in cui ci si trova in un regime di fase misto per cui alcune parti del sistema hanno cambiato il loro stato. L'universo comincia un processo di supercooling e di espansione esponenziale fino ad una certa temperatura T_f , nella quale inizia la transizione di fase e viene rilasciato il calore latente che si trova alla temperatura iniziale T_s . L'universo viene riscaldato nuovamente fino ad una certa temperatura comparabile con quella iniziale. Questo processo di espansione non adiabatica giustificerebbe il consistente aumento di entropia risolvendo il problema della piattezza dell'universo e dell'orizzonte. Non si comprende, però, come l'inflazione possa avere termine [2].

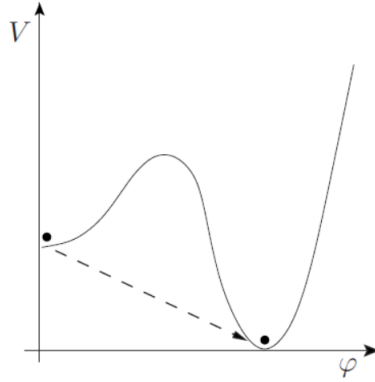


Figura 3.3: Andamento del potenziale scalare dell'inflatone. Si mostra lo stato iniziale metastabile e quello finale, dopo l'inflazione, stabile.

- **Nuova Inflazione**

Venne proposto un paio di anni dopo il modello della "Vecchia inflazione". Si ipotizza l'inizio dell'inflazione in uno stato di falso vuoto o vuoto temporaneo. Per vuoto si intende la condizione per la quale il campo si trova in uno stato di minima densità di energia, non necessariamente 0. In questo caso, in particolare, parliamo di falso vuoto perchè il campo non si trova in un punto di equilibrio stabile ma piuttosto in uno stato metastabile in cima al potenziale scalare. Il campo scalare, dunque, sarebbe scivolato in condizioni di *slow-roll* lungo il potenziale V . In queste circostanze si sarebbero formate le perturbazioni di densità il cui valore è inversamente proporzionale a $\dot{\phi}$, cioè alla velocità del campo. Si suppone che il processo per il quale il campo scalare scivola lungo il potenziale avvenga in tempi lunghi relativamente all'età dell'universo primordiale. Come conseguenza l'inflazione sarebbe avvenuta poco prima dell'inizio di questo processo, quando ancora V si trova nel punto di massimo [7].

Questa teoria, come anche la precedente, ipotizza che l'inflazione sia una fase di passaggio nell'evoluzione dell'universo e presuppone delle condizioni iniziali di

equilibrio termico [4].

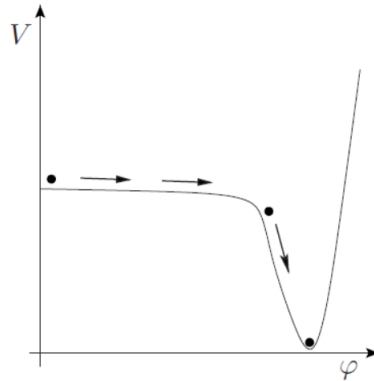


Figura 3.4: *Andamento del potenziale scalare dell'inflatone. Si mostra lo slow-roll del campo lungo il potenziale.*

- **Inflazione Caotica**

I problemi legati alla vecchia e alla nuova inflazione sono stati risolti con la teoria *caotica* introdotta nel 1983 da A. Linde. Secondo questo modello il potenziale del campo scalare può assumere anche una forma più semplice, persino parabolica. L'inflazione avviene mentre il campo scalare, in cima a $V(\phi)$, comincia a scivolare lungo il potenziale, per terminare non appena raggiunto il minimo. Per tale scenario non è necessario che nelle condizioni iniziali l'universo sia in uno stato di equilibrio termico. Si richiede semplicemente che $V(\phi)$ sia sufficientemente piatto da consentire le condizioni di *slow-roll*. Questo modello è quello oggi favorito. Può, infatti, essere preso in esame qualsiasi tipo di potenziale scalare, studiandone tutte le possibili condizioni iniziali. Il campo potrebbe variare da una regione ad un'altra dello spazio, mostrando una distribuzione spaziale totalmente random, in tal modo l'universo presenta regioni che vanno incontro al processo di inflazione, il loro campo scalare infatti si trova in cima al valore del potenziale, mentre altre no [4], [7].

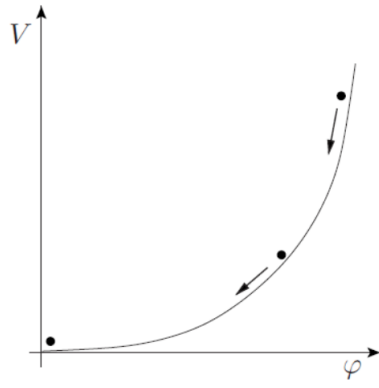


Figura 3.5: *Andamento del potenziale scalare dell'inflatone.*

Conclusioni

L'inflazione fornisce un prequel al Modello Classico del Big Bang, senza perciò modificarne la forma. Imposta le condizioni iniziali dell'universo in modo che il modello classico non presenti inconsistenze con le osservazioni. L'inflazione spiega le cause del Big Bang e ciò che porta l'universo al processo di espansione e raffreddamento. Questo viene fatto attraverso la **repulsione gravitazionale**. In particolare la presenza di un campo scalare con una pressione negativa determina il fatto che alla sua energia potenziale sia associata una forza gravitazionale repulsiva che guida l'espansione dell'universo [7].

Si è sottolineato più volte il fatto che il Big Bang consista in una espansione adiabatica dell'universo. Non considerando l'adiabaticità del processo si violerebbe la condizione di isotropia e omogeneità dello spazio, infatti, se un qualsiasi volumetto di universo avesse un flusso netto di energia, entrante o uscente, si creerebbero zone a densità di energia più alta e più bassa violando il Principio Cosmologico. Non devono quindi avvenire trasferimenti netti di energia da una parte all'altra dell'universo, cosicchè lo scambio di calore sia nullo e il primo principio della termodinamica coincida con la legge di una trasformazione adiabatica [6]. Tuttavia nell'espansione inflazionaria sono presenti processi non adiabatici per i quali l'entropia contenuta in ogni volumetto di energia dell'universo aumenta, procurando una soluzione matematica al problema della piattezza e dell'orizzonte. L'espansione termina quando il campo scalare scivolando lungo il potenziale raggiunge il minimo come conseguenza termina l'effetto della repulsione gravitazionale. Viene quindi rilasciata l'energia del campo scalare che eccitando altre particelle genera il *brodo caldo*

primordiale che dà origine all'Hot Big Bang. Mentre l'espansione dovuta all'inflazione procede, la densità di energia del campo scalare non decresce. Questo sembra violare la conservazione dell'energia. Si assume allora che l'energia gravitazionale sia negativa compensando così l'energia del campo scalare: l'energia dell'universo resta prossima a zero.

Conferme alla teoria inflazionaria possono giungere solo dalle osservazioni sperimentali. In particolare una chiave di svolta è lo studio dei segnali di onde gravitazionali nella radiazione cosmica di fondo.

Bibliografia

- [1] Silvio Bergia, Alessandro Paolo Franco, *Le strutture dello spaziotempo*, Vol. II, Cooperativa Libreria Universitaria Editrice Bologna (2004).
- [2] Alan H. Guth, *Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Stanford Linear Accelerator Center Stanford University, Stanford, California 94305, **PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 23, NUMBER 2** (15 JENUARY 1981) (<https://www.astro.rug.nl/~weygaert/tim1publication/cosmo2007/literature/inflationary.universe.guth.physrevd-1981.pdf>).
- [3] Andrew. R. Liddle, David. H. Lyth (2000), *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press.
- [4] Nicola Pintus, *On Inflationary Cosmological Models*, Ph.D. Thesis (2016) Università degli Studi di Cagliari, (http://veprints.unica.it/1318/1/PhD_Thesis_PintusN.pdf).
- [5] Roberto Casadio, *Elements of Relativity*, appunti per il corso di elementi di teoria della relatività, dispense (2016)
- [6] Matts Roos, *Expansion of the Universe - Standard Big Bang Model*, Department of Physical Sciences and Department of Astronomy FIN-00014 University of Helsinki, Finland, (2008), <https://arxiv.org/pdf/0802.2005.pdf>

- [7] Alan Guth, *Physics@FOM 2015-Masterclass Alan Guth*,
https://www.youtube.com/watch?v=_mGfigimW3M
- [8] P.P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*,
Wiley, (2003)
- [9] Fiorenzo Bastianelli, *Equazioni d'onda relativistiche*, appunti per il corso di Fisica
Teorica I, dispense (2017/2018)
- [10] Roberto Soldati, *Introduction to Quantum Field Theory*, Field Theory I, dispense
(2017)