

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

IL CAMPO DI KLEIN-GORDON E I DIAGRAMMI DI FEYNMAN

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Paolo Baglioni

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

In questa trattazione viene presentata brevemente la teoria moderna dei campi classici relativistici. Partendo dalla trattazione classica della meccanica analitica si arriva a formulare una teoria di campo in accordo con i postulati della relatività ristretta. Particolare attenzione è stata fornita ad un'interpretazione particellare dei campi, senza introdurre il formalismo matematico della teoria dei campi quantistici, evitando quindi la procedura della *seconda quantizzazione* o dei cammini di Feynman. Questo ha permesso di mettere in risalto le strutture fondamentali del campo di Klein-Gordon e di descrivere mediante l'utilizzo del propagatore di Feynman alcune interazioni tra le sorgenti e il campo stesso. Sono state analizzate le soluzioni della dinamica libera del campo e della dinamica con sorgenti statiche e non statiche, con particolare interesse verso le interazioni che coinvolgono scambi di particelle *virtuali* e *reali*. Sono state aggiunte delle applicazioni della teoria alla modellizzazione di alcuni processi di diffusione come quella di pioni su un potenziale elettromagnetico e lo scattering pione-pione. Nell'ultimo capitolo sono stati introdotti i diagrammi di Feynman come metodo grafico per rappresentare alcuni processi, in particolar modo sono stati analizzati processi di auto-interazione e di interazione mediata da mesoni σ .

Indice

1	Teoria dei campi relativistici	1
1.1	Introduzione al formalismo Lagrangiano	1
1.1.1	Il principio variazionale di Hamilton	1
1.1.2	Il formalismo lagrangiano nella meccanica dei campi	3
1.2	Caratteristiche dei campi scalari relativistici	8
1.2.1	Invarianza di Lorentz e località	8
1.2.2	Soluzioni per particelle libere	10
1.2.3	Simmetrie dei campi: il teorema di Noether	11
1.2.4	Il campo elettromagnetico	16
2	Il campo di Klein-Gordon	19
2.1	Sorgenti esterne statiche	19
2.1.1	Funzione di Green del campo con singola sorgente	20
2.1.2	Soluzione con doppia sorgente: Il campo di Yukawa	24
2.2	Propagatori per sorgenti non statiche	26
2.2.1	Il propagatore di Feynman: particelle e anti-particelle	26
2.2.2	Scattering di pioni su un potenziale elettromagnetico	32
3	Diagrammi di Feynman per campi scalari	36
3.1	Campi auto-interagenti	36
3.1.1	Tree diagrams	38
3.1.2	Formulazione nello spazio dei momenti	39
3.2	Regole di Feynman	41
3.2.1	Propagatori	41
3.2.2	Vertici	42
3.2.3	Loop chiusi	43
3.2.4	Scattering Pione-Pione	45
	Bibliografia	50

Capitolo 1

Teoria dei campi relativistici

1.1 Introduzione al formalismo Lagrangiano

Nelle teorie di campo moderne un ruolo importantissimo è svolto dalla formulazione Lagrangiana delle equazioni del moto. Queste sono particolarmente utili quando è necessario descrivere le caratteristiche salienti di un sistema tramite principi variazionali che mettono in luce più facilmente le peculiarità di un sistema come ad esempio le sue simmetrie. La formulazione lagrangiana rende anche più agevole una scrittura delle equazioni del moto che siano covarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz (trasformazioni di spazio-tempo). Iniziamo quindi con l'introdurre i principi cardine di questo tipo di formalismo, riferendoci in primo luogo ad una trattazione non relativistica e finito-dimensionale. Come vedremo la teoria di campo si pone come prolungamento naturale della precedente e mostrerà sin dalle prime equazioni una predisposizione ad una immediata generalizzazione relativistica.

1.1.1 Il principio variazionale di Hamilton

Allo scopo di introdurre il principio variazionale (uno degli strumenti più efficaci del formalismo Lagrangiano) iniziamo con il considerare un sistema meccanico formato da N particelle di uguale massa che si muovono nello spazio. Associate a tale sistema avremo $3N$ coordinate $q_i(t)$ che descrivono una traiettoria nello spazio-tempo. Nella meccanica classica le equazioni del moto associate a queste coordinate sono derivate direttamente dalla legge di Newton

$$F_i(t) = m\ddot{q}_i(t) \tag{1.1.1}$$

Nel caso in cui la forza è di tipo conservativo (sono questi i casi più frequenti e interessanti) allora è esprimibile come derivata parziale rispetto alle coordinate di un campo potenziale V :

$$F_i(t) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{1.1.2}$$

Una volta assegnati posizione e velocità al tempo $t = t_0$ è sempre possibile (almeno in linea di principio) trovare le traiettorie delle particelle risolvendo il sistema di equazioni differenziali associato al sistema.

La formulazione variazionale è totalmente equivalente alla visione di Newton, tuttavia il problema viene spostato dalla risoluzione dell'equazione differenziale alla minimizzazione di una particolare grandezza caratterizzante il sistema, l'azione. Allo scopo di illustrare il principio di Hamilton definiamo prima quindi l'azione come :

$$\mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt \quad (1.1.3)$$

dove $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ è detta Lagrangiana del sistema. Notiamo che per come è stata definita $\mathcal{S}[q_i(t)]$ in (1.1.3) si tratta di un funzionale in quanto associa ad ogni traiettoria nello spazio-tempo un numero reale, risultato dall'integrale della Lagrangiana lungo tutta la traiettoria. Ovviamente le infinite traiettorie lungo le quali si andrà a calcolare l'azione dovranno condividere il valore delle coordinate in due tempi diversi:

$$q_{i_1} = q_i(t_1) \quad (1.1.4)$$

$$q_{i_2} = q_i(t_2) \quad (1.1.5)$$

In questo caso quindi le condizioni iniziali, che nella meccanica newtoniana erano riferite alla posizione e alla velocità iniziale, adesso sono diventati due punti per i quali le traiettorie devono passare in due istanti di tempo diversi. Supporremo che tali istanti di tempo siano gli estremi di integrazione dell'azione. Possiamo così formulare il principio di Hamilton :

Principio variazionale di Hamilton: *Le traiettorie fisiche seguite dal sistema sono quelle che rendono stazionaria l'azione, ossia*

$$\delta\mathcal{S}[q_i(t)] = 0 \quad (1.1.6)$$

Nell'ottica variazionale quindi si ottiene un nuovo modo di interpretare le traiettorie fisiche del sistema: queste ultime sono quelle che minimizzano il funzionale di azione, attraverso la funzione Lagrangiana. Sotto questo punto di vista il principio variazionale diventa un vero e proprio principio primo dal quale possono essere ricavate sia la formulazione lagrangiana che quella newtoniana della meccanica.

La funzione Lagrangiana presente nella definizione del funzionale di azione soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.1.7)$$

che possono essere interpretate come vere e proprie equazioni del moto. Per dimostrare l'equivalenza tra la (1.1.6) e la (1.1.7) possiamo procedere in questo modo: consideriamo

in primo luogo un cambio di traiettoria infinitesimale ed esaminiamo la variazione dell'azione. Se le perturbazioni della traiettoria fisica sono parametrizzate da ϵ il principio di Hamilton richiede che sulla traiettoria fisica

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \epsilon} = 0. \quad (1.1.8)$$

Consideriamo quindi una fluttuazione della traiettoria che lasci invariate le coordinate in t_1 e t_2 :

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t) \quad (1.1.9)$$

$$\dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t) + \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \quad (1.1.10)$$

che induce una variazione infinitesima dell'azione:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \mathcal{S}[q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t)] - \mathcal{S}[q_i(t), \dot{q}_i(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

il secondo termine a destra della terza uguaglianza si annulla in quanto $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ per le condizioni (1.1.4) e (1.1.5). La (1.1.11) implica quindi che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.1.12)$$

che dimostra l'equivalenza tra il principio di Hamilton e le equazioni del moto di Eulero-Lagrange. Questo è un risultato molto importante che trova un suo analogo in regime relativistico, come verrà mostrato nelle pagine successive.

1.1.2 Il formalismo lagrangiano nella meccanica dei campi

Fino ad ora abbiamo analizzato sistemi con un numero finito di gradi di libertà. La generalizzazione delle equazioni ad un numero infinito di gradi di libertà è necessaria se non indispensabile per una formulazione della teoria di campo. Questa operazione può essere vista come un passaggio da *sistemi discreti* a *sistemi continui*. Ad esempio, immaginiamo di avere una barra di lunghezza l soggetta a vibrazioni longitudinali. Approssimiamo questo sistema come una serie alternata di N piccole palline di massa m interconnesse da molle elastiche di costante elastica k (Figura 1.1). Per la descrizione di

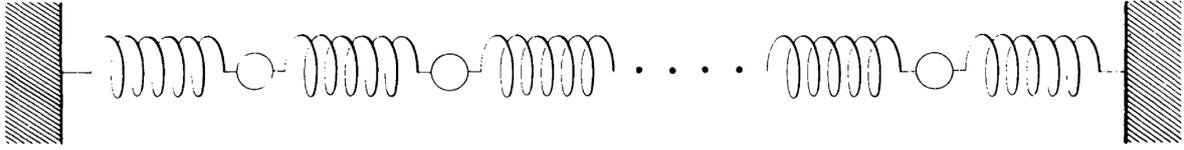


Figura 1.1: Rappresentazione grafica di una barra formata da componenti discreti, in questo caso una serie alternata di palline e molle.

questo sistema dovremmo utilizzare un set discreto di coordinate, una per ogni pallina. Se lo spostamento dell' i -esima particella è misurato dalla quantità ϕ_i , allora l'energia cinetica totale del sistema sarà:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m \dot{\phi}_i^2 \quad (1.1.13)$$

Il termine di energia potenziale invece è la somma delle compressioni/allungamenti di ogni singola molla:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} k(\phi_i - \phi_{i-1})^2 \quad (1.1.14)$$

dove $\phi_0 = \phi_{N+1} = 0$ poichè gli estremi sono fissi. In fine si ha che la Lagrangiana del sistema è

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(m \dot{\phi}_i^2 - k(\phi_i - \phi_{i-1})^2 \right) - \frac{1}{2} k(\phi_{N+1} - \phi_N)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i - \frac{1}{2} k(\phi_N)^2 \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

dove \mathcal{L}_i è la Lagrangiana per unità di lunghezza, data da:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{m}{a} \dot{\phi}_i^2 - k a \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{a} \right)^2 \right). \quad (1.1.16)$$

Utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange (1.1.7)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0 \quad (1.1.17)$$

otteniamo quindi le equazioni del moto:

$$\frac{m}{a} \ddot{\phi}_i - ka \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{a^2} \right) = 0 \quad (1.1.18)$$

Ora possiamo effettuare un passaggio al continuo: ciò corrisponde formalmente al limite $a \rightarrow 0$, mantenendo l fissato. Ora la dinamica della nostra barra verrà descritta da un appropriato campo $\phi = \phi(x, t)$. In questo limite m/a rappresenta la densità di massa ρ e ka il modulo di Young Y . Per capire cosa succede nel limite del continuo introduciamo la variabile x al posto dell'indice i che ci specificherà la posizione lungo la barra. Allora $\phi_i \mapsto \phi(x)$ e $\phi(i+1) \mapsto \phi(x+a)$ ed otteniamo così

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a^2} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{a^2} \right) &\mapsto \\ \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\phi(x+a) - \phi(x)}{a^2} - \frac{\phi(x) - \phi(x-a)}{a^2} \right) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

A questo punto notiamo che l'equazione (1.1.18) si riduce, nel limite continuo, all'equazione di propagazione di un'onda all'interno di una barra solida:

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.20)$$

Questo semplice esempio ci mostra già i punti più salienti del passaggio da un sistema discreto ad uno continuo; il fatto più importante è il nuovo ruolo che viene a svolgere la coordinata di posizione x , la quale non è più una variabile canonica del sistema, serve solo come indice continuo al posto dell'indice discreto i . Inoltre dato che in generale ϕ dipende anche dal tempo (introdotto anche in meccanica analitica classica come parametro esterno) potremo scrivere in generale che $\phi = \phi(x, t)$ e questo ci mostra come sia immediatamente possibile fare un'estensione relativistica, dato che adesso le coordinate spaziali e temporali entrano nelle equazioni con lo stesso ruolo (in questo caso entrambe come derivate del secondo ordine). L'esempio appena citato si può generalizzare facilmente sostituendo alla barra una membrana 2-dimensionale oppure un solido continuo 3-dimensionale e cambiando $\phi(x, t)$ con $\phi(x, y, t)$ e $\phi(x, y, z, t)$ rispettivamente.

Sempre nel limite otterremo che la Lagrangiana del sistema può essere scritta come integrale sullo spazio di un'appropriata densità di Lagrangiana \mathcal{L} , in modo che l'azione può essere scritta come:

$$\mathcal{S}[\phi(x, t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L} \quad (1.1.21)$$

e possiamo procedere come nelle pagine precedenti per ottenere una nuova equazione del moto per il campo, passando per il principio variazionale di Hamilton. Notiamo a tal proposito che la variazione (che prima era fatta sulla traiettoria che seguiva il sistema)

adesso va fatta sul campo e non su (x, t) che sono solo indici continui che parametrizzano il sistema. Consideriamo quindi la seguente variazione infinitesima

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &\rightarrow \phi(x, t) + \delta\phi(x, t) \\ \partial_t\phi(x, t) &\rightarrow \partial_t\phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial t}\delta\phi(x, t) \\ \partial_x\phi(x, t) &\rightarrow \partial_x\phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\delta\phi(x, t)\end{aligned}\tag{1.1.22}$$

che induce una fluttuazione infinitesima dell'azione attorno al punto di equilibrio:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[\phi(x, t)] &= \mathcal{S}[\phi(x, t) + \delta\phi(x, t)] - \mathcal{S}[\phi(x, t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi(x, t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\frac{\partial}{\partial t}\delta\phi(x, t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\frac{\partial}{\partial x}\delta\phi(x, t) \right)\end{aligned}\tag{1.1.23}$$

Possiamo risolvere questo integrale integrando per parti il secondo e il terzo termine:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\frac{\partial}{\partial t}\delta\phi(x, t) \right) &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\delta\phi \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} \right) \delta\phi(x, t) \\ \int_0^l dx \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\frac{\partial}{\partial x}\delta\phi(x, t) \right) &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\delta\phi \right]_0^l - \int_0^l dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)} \right) \delta\phi(x, t)\end{aligned}$$

i primi termini a destra dell'uguale danno contributo nullo poichè il campo non deve essere affetto da variazione nell'istante finale e nell'istante iniziale (così come non lo erano le q_i considerate nella precedente sezione). In altre parole, per ricollegarci all'esempio precedente, le estremità della barra non devono subire spostamento. La variazione dell'integrale (1.1.21) si riduce quindi a

$$\delta\mathcal{S}[\phi(x, t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \delta\phi \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)} \right) = 0\tag{1.1.24}$$

otteniamo quindi le equazioni di Eulero-Lagrange per il campo $\phi(x, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \right) = 0.\tag{1.1.25}$$

Possiamo generalizzare subito la (1.1.25) a campi più generici $\phi(x, y, z, t)$ utilizzando la notazione di Einstein sullo spazio-tempo di Minkowski

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0\tag{1.1.26}$$

ed estenderla anche per campi a più componenti¹

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = 0 \quad (1.1.27)$$

in questo modo abbiamo ottenuto le equazioni del moto per un sistema ad infiniti gradi di libertà che tiene conto dei principi della Relatività Ristretta, ossia le variabili di spazio e tempo giocano lo stesso ruolo, e sono invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz tra sistemi di riferimento inerziali. Difatti, come vedremo nella sezione successiva, un'adeguata scelta della Lagrangiana al quale applichiamo le equazioni ricavate precedentemente produrrà l'equazione di Klein-Gordon che è l'equazione di campo relativistica per particelle scalari.

¹Tale formula si rivelerà utile quando andremo ad analizzare il caso specifico del campo elettromagnetico.

1.2 Caratteristiche dei campi scalari relativistici

Come anticipato precedentemente, l'equazione (1.1.26) rappresenta l'equazione del moto per il nostro sistema. Il problema quindi adesso si riduce a trovare una Lagrangiana che ne descriva coerentemente le proprietà salienti. La più semplice Lagrangiana ² che possiamo scegliere è la seguente ³:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (1.2.1)$$

per il campo scalare reale ϕ . I termini che contengono le derivate rispetto alle coordinate sono chiamati termini *cinetici*, in analogia con la meccanica classica (ovviamente, per la simmetria tra spazio e tempo, non saranno più solo derivate temporali ma saranno derivate rispetto a tutte le coordinate). Possiamo quindi ora applicare le equazioni di Eulero-Lagrange sulla Lagrangiana (1.2.1)

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu(-\partial^\mu\phi) + m^2\phi = -\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0 \quad (1.2.2)$$

ed otteniamo l'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square - m^2)\phi(x, y, z, t) = 0, \quad \square = \partial_\mu\partial^\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (1.2.3)$$

Storicamente l'equazione (1.2.3) non fu ottenuta mediante il formalismo della meccanica lagrangiana ma a partire dall'equazione di Schroedinger, inserendo in quest'ultima il quadrato dell'energia e scrivendo la corretta relazione (relativistica) tra questa e le variabili di impulso e massa della particella. Analizziamo adesso le caratteristiche di trasformazione dell'equazione di Klein-Gordon.

1.2.1 Invarianza di Lorentz e località

È importante sottolineare due aspetti della teoria. Il primo è la località: come si può notare dalla lagrangiana (1.2.1) non ci sono termini di accoppiamento diretto tra $\phi(x)$ e $\phi(y)$, se $x \neq y$. Questa lagrangiana infatti non contiene alcun termine del tipo

$$L = \int d^3x \int d^3y \phi(x)\phi(y) \quad (1.2.4)$$

²D'ora in poi, ogni volta che ci riferiamo alla Lagrangiana del sistema intenderemo in realtà la densità di Lagrangiana \mathcal{L} così definita: $L = \int \mathcal{L} d^3x$, dal momento che la Lagrangiana non svolgerà un ruolo cardine nelle equazioni.

³In meccanica quantistica relativistica è spesso utile scrivere le quantità in unità naturali per le quali $c = \hbar = 1$.

benchè x e y sono, in questa trattazione, solo delle coordinate utilizzate per indicizzare in modo continuo i punti degli eventi dello spazio-tempo. Al più possiamo accoppiare tramite i termini cinetici $\partial_\mu\phi$ i campi $\phi(x)$ e $\phi(x + \delta x)$. Questa proprietà è chiamata *località* ed emerge come punto chiave delle teorie di campo, come questa. Le lagrangiane considerate quindi saranno sempre *lagrangiane locali* del sistema. Come vedremo, questo implicherà restrizioni ben precise sui sistemi considerati.

Il secondo punto è l'invarianza delle equazioni del moto sotto trasformazioni di Lorentz. Dal momento che queste ultime derivano direttamente dall'azione e dalla lagrangiana del sistema occorre dimostrare se queste siano effettivamente invarianti ogni volta che ϕ è uno scalare. Un campo scalare sotto trasformazioni di Lorentz si trasforma come⁴

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.2.5)$$

e le sue derivate

$$\partial_\mu\phi(x) \mapsto (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu(\partial_\nu\phi)(y) , \quad y = \Lambda^{-1}x \quad (1.2.6)$$

Questo significa che, data la lagrangiana nella forma generica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \mathcal{V}(\phi) \quad (1.2.7)$$

i termini cinetici si trasformano come

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) &\mapsto -\frac{1}{2}(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\partial_\rho\phi)(y)(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu(\partial_\sigma\phi)(y)\eta^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\rho\phi)(y)(\partial_\sigma\phi)(y)\eta^{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\sigma\phi)(y)(\partial_\sigma\phi)(y) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

quindi la parte cinetica è invariante così come lo è il potenziale $\mathcal{V}(\phi)$ (in quanto funzione scalare di uno scalare di Lorentz). La lagrangiana in definitiva si trasforma come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \mathcal{V}(\phi(x)) \mapsto -\frac{1}{2}\partial^\sigma\phi\partial_\sigma\phi - \mathcal{V}(\phi(y)) = \mathcal{L}' \quad (1.2.9)$$

mentre l'azione

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(x) \mapsto \int d^4x \mathcal{L}(y) = \int d^4y \mathcal{L}(y) = \mathcal{S}' \quad (1.2.10)$$

⁴La matrice Λ^{-1} appare nelle trasformazioni delle coordinate poichè le trasformazioni considerate sono trasformazioni *attive*, ossia trasformazioni che agiscono direttamente sul campo. Si prenda come esempio un campo scalare reale $\phi(\mathbf{x})$ nullo ovunque tranne in $(1, 0, 0)$. Se consideriamo una rotazione intorno all'asse z di un angolo pari a $\frac{\pi}{2}$, $R : \mathbf{x} \mapsto R\mathbf{x}$, il nuovo campo sarà nullo ovunque tranne in $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$. Volendo esprimere il nuovo campo in funzione del primo dobbiamo quindi valutare quest'ultimo in $(1, 0, 0)$ così che otteniamo la relazione $\phi'(\mathbf{x}) = \phi(R^{-1}\mathbf{x})$.

dove abbiamo utilizzato il fatto che il determinante dello Jacobiano, ossia della matrice di Lorentz Λ è unitario (almeno per il gruppo di Lorentz proprio e ortocrono, quello considerato nelle trasformazioni precedenti).

Abbiamo quindi dimostrato che sia la lagrangiana sia l'azione sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. Le equazioni del moto per i campi sono quindi compatibili con i due principi della Relatività Ristretta.

1.2.2 Soluzioni per particelle libere

Iniziamo con l'osservare che la Lagrangiana (1.2.1) si riferisce ad un sistema di particelle libere. Questo fatto emerge sia notando che l'equazione di Klein-Gordon generata da questa Lagrangiana si riferisce proprio a stati di moto liberi (storicamente infatti fu ricavata come generalizzazione relativistica dell'equazione di Schroedinger per particelle libere), oppure notando che le soluzioni di quest'equazione sono delle onde piane:

$$\phi(x) = e^{ip_\mu x^\mu} \quad (1.2.11)$$

con p_μ quadrimpulso arbitrario. Sostituendo l'espressione di ϕ all'interno dell'equazione otteniamo

$$(\square - m^2)\phi = (\square - m^2)e^{ip_\mu x^\mu} = -e^{ip_\mu x^\mu} (p^2 + m^2) = 0 \quad (1.2.12)$$

dove $p^2 = p_\mu p^\mu = -p_0^2 + \mathbf{p}^2$. L'onda piana quindi può essere soluzione dell'equazione di Klein-Gordon solo se soddisfa la relazione di dispersione

$$p^2 + m^2 = 0 \quad (1.2.13)$$

e identificando la componente p_0 con l'energia della particella troviamo proprio che la relazione di dispersione si riconduce all'energia di una particella relativistica libera. Emergono tuttavia anche stati ad energia negativa: questo sarà l'argomento del prossimo capitolo.

La soluzione più generale dell'equazione di Klein-Gordon per un campo reale scalare può essere scritta (grazie al principio di sovrapposizione) quindi come l'integrale di onde piane del tipo (1.2.11):

$$\phi(x) = \int d^3p (a(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - iE(\mathbf{p})t} + a^*(-\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + iE(\mathbf{p})t}) \quad (1.2.14)$$

dove $E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

L'equazione di Klein-Gordon presa in esame descrive quindi un campo scalare reale senza sorgenti e non auto-interagente. Questa situazione è abbastanza restrittiva ma presenta degli elementi base per tutta la nostra trattazione. Una prima generalizzazione può essere ottenuta sostituendo ad un campo scalare reale un campo complesso mediante un opportuno cambiamento della Lagrangiana che si scriverà adesso come:

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi \phi^* \quad (1.2.15)$$

La nuova Lagrangiana unita alle equazioni del moto di Eulero-Lagrange produrrà due equazioni, una per ϕ e una per ϕ^* :

$$(\square - m^2)\phi = 0 \quad (1.2.16)$$

$$(\square - m^2)\phi^* = 0 \quad (1.2.17)$$

la Lagrangiana (1.2.15) induce quindi due campi di Klein-Gordon soluzioni della (1.2.16) e della (1.2.17):

$$\phi(x) = \int d^3p (a(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - iE(\mathbf{p})t} + b^*(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + iE(\mathbf{p})t}) \quad (1.2.18)$$

$$\phi(x)^* = \int d^3p (b(-\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - iE(\mathbf{p})t} + a^*(-\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + iE(\mathbf{p})t}) \quad (1.2.19)$$

possiamo quindi immaginare il campo di Klein-Gordon (soluzione della relativa equazione) come una somma di infinite onde piane ognuna delle quali è soluzione anch'essa del problema ed entra nell'integrale con un preciso peso, stabilito in base alle condizioni al contorno.

I campi presi in considerazione presentano una simmetria rispetto ad alcune particolari trasformazioni: una di queste è ad esempio la simmetria di Lorentz. Molte volte questa simmetria è già evidente dalla Lagrangiana del sistema. Queste trasformazioni ci risulteranno molto utili per definire le nuove grandezze conservate (insieme alle correnti ad esse associate) e questo sarà l'argomento della prossima sezione.

1.2.3 Simmetrie dei campi: il teorema di Noether

Le simmetrie giocano un ruolo cruciale nella formulazione della teoria di campo relativistica poichè permettono di collegare le invarianze per trasformazioni alle equazioni di continuità. Le simmetrie di un sistema sono tutte quelle trasformazioni che lasciano inalterate in forma le equazioni del moto.

Di particolare interesse sono quelle simmetrie che dipendono da parametri continui, associati quindi a gruppi di Lie. A queste simmetrie sono associate le *equazioni di continuità* che assicurano la conservazione di appropriate cariche. Il teorema di Noether svolge un ruolo cruciale e per questo lo enunciamo di seguito:

Teorema di Noether: *Ogni simmetria continua della lagrangiana genera una corrente conservata J^μ tale che se un campo soddisfa le equazioni del moto di Eulero-Lagrange, allora per tale campo vale l'equazione:*

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.2.20)$$

o, in alternativa:

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.2.21)$$

Per dimostrare l'enunciato possiamo far uso di trasformazioni infinitesime rispetto al gruppo di simmetria; la trasformazione per parametri finiti potrà essere ottenuta mediante la composizione di quella generata dai parametri infinitesimi.

Sotto queste trasformazioni abbiamo che:

$$\delta\phi = X(\phi) \quad (1.2.22)$$

è una simmetria se le equazioni del moto rimangono invariate in forma. Questo equivale a richiedere che la lagrangiana cambi al più per una quadri-divergenza, ossia

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi) \quad (1.2.23)$$

per una qualche funzione F del campo ϕ . Considerando ora delle variazioni *arbitrarie* di ϕ otteniamo che

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right). \quad (1.2.24)$$

Quando le equazioni del moto sono soddisfatte, ossia per le traiettorie fisiche del campo ϕ , il primo termine si annulla in quanto corrisponde alle equazioni di Eulero-Lagrange. Di conseguenza, per queste soluzioni abbiamo che

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \quad (1.2.25)$$

Se la trasformazione che induce $\delta\phi$ è una simmetria per la lagrangiana, allora $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi)$. Sottraendo quest'ultima alla (1.2.25) otteniamo che

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} X(\phi) - F^\mu(\phi) \right) = 0 \quad (1.2.26)$$

che dimostra la (1.2.20).

Questa dimostrazione è particolarmente importante poichè non solo ci assicura l'esistenza di una quadri-corrente conservata, ma ci fornisce anche un'espressione per costruirla. Infatti confrontando la (1.2.26) con la (1.2.20) otteniamo

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} X(\phi) - F^\mu(\phi) \quad (1.2.27)$$

Invarianza per traslazioni di spazio-tempo

Le trasformazioni associate alle traslazioni di spazio-tempo fanno parte del gruppo di Poincarè. Quest'ultimo estende il gruppo di Lorentz aggiungendo al set di trasformazioni di boosts e rotazioni anche le traslazioni. Dalla richiesta che le equazioni del moto siano invarianti per queste ultime segue che, attraverso il teorema di Noether, ci siano delle equazioni di continuità associate e le rispettive cariche conservate.

Si consideri la seguente trasformazione infinitesima:

$$\begin{aligned} x^\nu &\mapsto x^\nu + \epsilon^\nu \\ \phi(x) &\mapsto \phi(x) - \epsilon^\nu \partial_\nu \phi(x) \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

sostituendo tale espressione nella lagrangiana, troviamo che le leggi di trasformazione per quest'ultima sono

$$\mathcal{L}(x) \mapsto \mathcal{L}(x) - \epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x). \quad (1.2.29)$$

Grazie alla richiesta che le equazioni del moto siano invarianti per traslazioni spazio-temporali possiamo utilizzare il teorema di Noether e ricavare la quadri-corrente conservata. Notando che $\delta \mathcal{L} = -\epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x) = \partial_\mu F^\mu$ e che $\delta \phi = X(\phi) = -\epsilon^\nu \partial_\nu \phi(x)$, utilizzando la (1.2.27) otteniamo:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} X(\phi) - F^\mu(\phi) = \\ &= \partial^\mu \phi \epsilon^\nu \partial_\nu \phi + \epsilon^\mu \mathcal{L}(x) = \\ &= \epsilon^\nu [\partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + \eta^\mu_\nu \mathcal{L}(x)]. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Prendendo ora la componente lungo la direzione $\nu = 0, 1, 2, 3$ otteniamo

$$(J^\mu)_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + \eta^\mu_\nu \mathcal{L} = \mathcal{T}^\mu_\nu \quad (1.2.31)$$

dove abbiamo riconosciuto il tensore energia-impulso.

Possiamo quindi affermare che la simmetria per traslazioni di spazio-tempo induce quattro equazioni di continuità a cui corrispondono le conservazioni delle componenti del 4-impulso propagato dal campo. Le equazioni di continuità sono:

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.32)$$

Invarianza per trasformazioni di Lorentz

La richiesta che le equazioni del moto siano invarianti per trasformazioni di Lorentz segue direttamente dalla richiesta di ottenere una teoria di campo compatibile con i principi della Relatività Ristretta.

Si consideri una trasformazione di Lorentz infinitesima

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (1.2.33)$$

dove $\omega^\mu_\nu \ll 1$ ⁵. Sotto questa trasformazione la variazione del campo è data da

$$\begin{aligned}\phi(x) &\mapsto \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) \\ &= \phi(x^\mu) - \underbrace{\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)}_{\delta\phi}\end{aligned}\tag{1.2.34}$$

La trasformazione induce anche una trasformazione infinitesima della lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\mapsto \mathcal{L}' = \mathcal{L} - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L} \\ &= \mathcal{L} - \partial_\mu (\omega^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L})\end{aligned}\tag{1.2.35}$$

poichè ω^μ_ν è antisimmetrica e $\partial_\mu x^\nu = \delta^\nu_\mu$ è simmetrica.

Dal momento che le equazioni del moto devono essere invarianti per trasformazioni di Lorentz, possiamo scrivere la variazione di lagrangiana come :

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi)\tag{1.2.36}$$

e quindi che

$$F^\mu = -\omega^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L}(x).\tag{1.2.37}$$

Riconoscendo $X(\phi) = \delta\phi = -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)$, mediante la (1.2.27) otteniamo la corrente di Noether

$$\begin{aligned}j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\kappa\phi + \omega^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu\phi [\omega^\lambda_\sigma x^\sigma \partial_\lambda\phi] + \omega^\mu_i x^i \mathcal{L}(x). \\ &= \omega^\lambda_\sigma [\partial^\mu\phi x^\sigma \partial_\lambda\phi + x^\sigma \eta^\mu_\lambda \mathcal{L}(x)] \\ &= \omega^\lambda_\sigma \mathcal{T}^\mu_\lambda x^\sigma\end{aligned}\tag{1.2.38}$$

Fissando due indici possiamo ridefinire la quadri-corrente come

$$(J^\mu)^{\lambda\kappa} = (\mathcal{T}^{\mu\kappa} x^\lambda - \mathcal{T}^{\mu\lambda} x^\kappa)\tag{1.2.39}$$

e notando che $\partial_\mu (J^\mu)^{\lambda\kappa} = 0$ otteniamo sei leggi di conservazione (come il numero di componenti indipendenti della quadri-corrente anti-simmetrica). È facile intuire che le componenti spaziali dell'equazione si riferiscono alla conservazione del momento angolare totale trasportato dal campo (generato dalle rotazioni) poichè possiamo interpretare la precedente espressione come le componenti del prodotto vettoriale tra una coordinata e un momento. Per quanto riguarda invece la parte temporale l'equazione di continuità implica la conservazione della velocità del centro di energia ed è la simmetria associata alle trasformazioni di boost.

⁵Di seguito verrà usato il fatto che ω è una matrice antisimmetrica. Questo segue dal fatto che $(\delta^\mu_\sigma + \omega^\mu_\sigma)(\delta^\nu_\kappa + \omega^\nu_\kappa)\eta^{\sigma\kappa} = \eta^{\mu\nu}$.

Simmetrie interne

Consideriamo ora le simmetrie interne al sistema e vediamo quale tipologia di corrente conservata generano. Una *simmetria interna* è una trasformazione che agisce sul campo (e non sulle coordinate) e non dipende dal punto dello spazio-tempo considerato. Per capire in cosa consistono le simmetrie interne prendiamo ad esempio un campo scalare complesso ϕ e la sua lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^* \quad (1.2.40)$$

Possiamo subito notare che quest'ultima è simmetrica rispetto allo scambio di ϕ con ϕ^* . La (1.2.40) è invariante anche per trasformazioni di fase del tipo

$$\begin{aligned} \phi &\mapsto \phi' = e^{i\alpha} \phi \\ \phi^* &\mapsto (\phi^*)' = e^{-i\alpha} \phi^* \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

dipendenti dal parametro continuo α . Queste trasformazioni appartengono al gruppo $U(1)$, il gruppo delle matrici complesse unitarie 1×1 . Poichè un campo complesso ϕ può sempre essere visto come una coppia di campi reali (ϕ_1, ϕ_2) secondo la relazione

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad (1.2.42)$$

$$\phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad (1.2.43)$$

possiamo riscrivere la lagrangiana (1.2.40) tenendo conto delle precedenti uguaglianze come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (1.2.44)$$

L'invarianza in questa nuova rappresentazione corrisponde ad una rotazione ortogonale generata dalle matrici appartenenti al gruppo $SO(2)$ reali che mescolano le componenti di ϕ_1 e ϕ_2 in modo che i nuovi campi ϕ_j siano dati da

$$\phi_j = \mathcal{O}^i{}_j \phi_i \quad , \quad \mathcal{O}^T \mathcal{O} = \mathbb{1} \quad (1.2.45)$$

L'analogia tra l'invarianza rispetto ad $U(1)$ del campo complesso e quella rispetto ad $SO(2)$ dei rispettivi campi reali non è accidentale ma è riconducibile al fatto che i due gruppi sopracitati sono localmente equivalenti.

Tornando al campo ϕ complesso, possiamo generare delle variazioni infinitesime secondo le trasformazioni 1.2.41 ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\alpha\phi \\ \delta\phi^* &= -i\alpha\phi^* \end{aligned} \quad (1.2.46)$$

Dal momento che la lagrangiana è simmetrica per queste trasformazioni, possiamo affermare che sotto le (1.2.41) abbiamo

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (1.2.47)$$

Quindi, dal momento che $X(\phi) = i\alpha\phi$ e $X(\phi^*) = -i\alpha\phi^*$, utilizzando la relazione (1.2.27) otteniamo la corrente di Noether associata alle simmetrie interne di fase

$$J^\mu = i(\partial^\mu\phi)\phi^* - i(\partial^\mu\phi^*)\phi \quad (1.2.48)$$

che soddisfa la relazione

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.2.49)$$

ed emerge l'equazione di continuità che rende esplicito il vincolo di conservazione della carica, in questo caso data dall'integrale della componente J^0 sullo spazio 3-dimensionale. Dall'interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica, sappiamo che questo tipo di simmetrie interne sono associate alla conservazione della probabilità. Notiamo a tal proposito che la carica conservata non è definita positiva: l'equazione di campo quindi non potrà più essere interpretata come una equazione di singola particella. Tali problemi interpretativi verranno risolti nell'ambito della *seconda quantizzazione* introducendo, per esempio, la densità di numero barionico e la densità di numero leptonic⁶.

1.2.4 Il campo elettromagnetico

L'equazione di Klein-Gordon può essere immaginata come se fosse una equazione classica, e descriva un campo ϕ classico, come ad esempio il campo elettromagnetico. Il campo elettromagnetico infatti soddisfa equazioni di questo tipo. L'equazione di Klein-Gordon potrebbe descrivere quindi un qualche tipo di campo ad interpretazione classica. Dalla meccanica quantistica sappiamo che un campo elettromagnetico classico è un caso limite della propagazione di quanti di un campo quantistico. Utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange (1.1.26) sulla corretta Lagrangiana ci aspettiamo dunque di ritrovare la corretta descrizione di questo campo in ambito classico. Il problema si riduce quindi nel trovare l'appropriata Lagrangiana del campo elettromagnetico. Se definiamo il quadri-potenziale ϕ^μ come

$$\phi^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (1.2.50)$$

dove $\varphi(x)$ è il potenziale coulombiano associato al campo elettrico e \mathbf{A} è il potenziale vettore, possiamo scrivere le componenti del tensore di campo elettromagnetico associate ad \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu \quad (1.2.51)$$

⁶Nell'ambito di una teoria di campo che rispetti i principi della Relatività Ristretta questo risultato non deve sorprenderci. Infatti l'equivalenza massa-energia permette processi di creazione e distruzione di particelle che rompono inevitabilmente la conservazione della densità di probabilità.

in questo modo le equazioni di Maxwell con sorgente si scrivono in forma covariante⁷

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu = 0 \quad (1.2.52)$$

dove J^μ è il quadri-vettore corrente, $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$. Sappiamo che queste sono le equazioni per le soluzioni del campo elettro-magnetico e quindi realizzano un minimo per l'azione. Di conseguenza la variazione dell'integrale funzionale deve essere nulla se calcolato lungo queste "traiettorie":

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} d^4x (\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu) \delta\phi_\nu = - \int_{t_1}^{t_2} d^4x (F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi_\nu) - J^\nu \delta\phi_\nu) \quad (1.2.53)$$

dove si è fatto uso dell'integrale per parti, annullando il primo termine poichè $\delta\phi_\nu$ agli estremi deve essere nullo. Ora ponendo $J^\nu \delta\phi_\nu = \delta(J^\nu \phi_\nu)$ ⁸ e notando che $F^{\mu\nu}$ è un tensore antisimmetrico, possiamo affermare che nel primo integrando contribuisce solo la parte antisimmetrica di $\delta(\partial_\mu \phi_\nu)$:

$$F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi_\nu) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta(F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} \delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (1.2.54)$$

e l'ultima uguaglianza è data dal fatto che $\delta F^2 = 2F\delta F$. Ricostruendo ora la variazione di azione otteniamo:

$$0 = - \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left(\frac{1}{4} \delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - \delta(J^\nu \phi_\nu) \right) = -\delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\nu \phi_\nu \right) \quad (1.2.55)$$

ed è immediata l'identificazione

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\nu \phi_\nu \right) = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L} \quad (1.2.56)$$

da cui deriviamo l'espressione per la Lagrangiana del campo elettro-magnetico:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\nu \phi_\nu \quad (1.2.57)$$

Osserviamo subito che la Lagrangiana (1.2.57) è uno scalare per trasformazioni di Lorentz e contiene anche i termini di accoppiamento tra il quadri-potenziale ϕ^ν e la quadri-corrente J^ν , in questo caso sorgente del campo. Come le sorgenti interagiscono con il campo sarà discusso nel successivo capitolo introducendo le funzioni di Green e i propagatori, che hanno proprio il compito di propagare la perturbazione generata dalla sorgente in un punto dello spazio-tempo.

⁷Anche qui considereremo $c = \hbar = 1$.

⁸È permesso portare la sorgente dentro il segno di differenziale poichè quest'ultima non dipende dalla variazione del campo.

Applichiamo ora le equazioni del moto di Eulero-Lagrange nel formalismo dei campi classici sulla Lagrangiana (1.2.57), dopo averla riscritta esplicitando $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + J_\mu\phi^\mu = \\
&= -\frac{1}{4}[(\partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu)(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu)] + J_\mu\phi^\mu = \\
&= -\frac{1}{4}(\partial^\mu\phi^\nu\partial_\mu\phi_\nu - \partial^\mu\phi^\nu\partial_\nu\phi_\mu - \partial^\nu\phi^\mu\partial_\mu\phi_\nu + \partial^\nu\phi^\mu\partial_\nu\phi_\mu) + J_\mu\phi^\mu = \\
&= -\frac{1}{4}(\eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi^\nu\partial_\mu\phi^\beta\eta_{\beta\nu} - \eta^{\mu\kappa}\partial_\kappa\phi^\nu\partial_\nu\phi^\lambda\eta_{\lambda\mu} - \eta^{\nu\gamma}\partial_\gamma\phi^\mu\partial_\mu\phi^\omega\eta_{\omega\nu} + \eta^{\nu\theta}\partial_\theta\phi^\mu\partial_\nu\phi^\chi\eta_{\chi\mu}) + J_\mu\phi^\mu = \\
&= -\frac{1}{4}(\eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi^\nu\partial_\mu\phi^\beta\eta_{\beta\nu} - \delta_\lambda^\kappa\partial_\kappa\phi^\nu\partial_\nu\phi^\lambda - \delta_\omega^\gamma\partial_\gamma\phi^\mu\partial_\mu\phi^\omega + \eta^{\nu\theta}\partial_\theta\phi^\mu\partial_\nu\phi^\chi\eta_{\chi\mu}) + J_\mu\phi^\mu = \\
&= -\frac{1}{4}(\eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi^\nu\partial_\mu\phi^\beta\eta_{\beta\nu} - \partial_\lambda\phi^\nu\partial_\nu\phi^\lambda - \partial_\gamma\phi^\mu\partial_\mu\phi^\gamma + \eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi^\nu\partial_\mu\phi^\beta\eta_{\beta\nu}) + J_\mu\phi^\mu = \\
&= -\frac{1}{4}(2\eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi^\nu\partial_\mu\phi^\beta\eta_{\beta\nu} - 2\partial_\lambda\phi^\nu\partial_\nu\phi^\lambda) + J_\mu\phi^\mu
\end{aligned} \tag{1.2.58}$$

ora possiamo calcolare, mediante la (1.1.26), il primo termine delle equazioni del moto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa\phi^\gamma)} &= -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu}\delta_\alpha^\kappa\delta_\gamma^\nu\partial_\mu\phi^\beta + \eta^{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu}\delta_\nu^\kappa\delta_\gamma^\beta\partial_\alpha\phi^\nu - \delta_\lambda^\kappa\delta_\gamma^\nu\partial_\nu\phi^\lambda - \delta_\nu^\kappa\delta_\gamma^\lambda\partial_\lambda\phi^\nu) = \\
&= -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\kappa}\eta_{\beta\gamma}\partial_\mu\phi^\beta + \eta^{\alpha\kappa}\eta_{\nu\gamma}\partial_\alpha\phi^\nu - \partial_\gamma\phi^\kappa - \partial_\gamma\phi^\kappa) = \\
&= -\frac{1}{2}(\partial^\kappa\phi_\gamma + \partial^\kappa\phi_\gamma - \partial_\gamma\phi^\kappa - \partial_\gamma\phi^\kappa) = \partial_\gamma\phi^\kappa - \partial^\kappa\phi_\gamma
\end{aligned} \tag{1.2.59}$$

e ricordando la definizione (1.2.51) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\nu)} &= \partial^\nu\phi^\mu - \partial^\mu\phi^\nu = -F^{\mu\nu} \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\nu} &= J^\nu
\end{aligned} \tag{1.2.60}$$

quindi le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\nu} = -(\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu) = 0 \tag{1.2.61}$$

che rispecchiano le equazioni di Maxwell con sorgenti. Abbiamo quindi dimostrato che nel caso dell'elettromagnetismo le equazioni del moto di Eulero-Lagrange (che sono invarianti in forma rispetto alle leggi della Relatività Ristretta), una volta scelta la giusta Lagrangiana, generano le equazioni classiche per il campo elettro-magnetico.

Capitolo 2

Il campo di Klein-Gordon

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto la teoria di campo relativisticamente invariante. Di seguito vedremo come questa teoria spiega l'interazione tra particelle associate al campo e sorgenti.

2.1 Sorgenti esterne statiche

L'equazione

$$(\square - m^2)\phi = 0 \tag{2.1.1}$$

si riferisce, come abbiamo visto, ad un campo le cui soluzioni sono onde piane con energia e momento che soddisfano le condizioni di dispersione

$$p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \tag{2.1.2}$$

L'equazione non contiene nessuna sorgente e ϕ è un campo totalmente libero. Ci interessa ora cercare la forma dell'equazione di Klein-Gordon e della relativa lagrangiana che preveda una sorgente del campo per studiare poi le soluzioni. Possiamo ottenerla in modo intuitivo facendo l'analogia con le equazioni di Laplace e di Poisson nell'elettromagnetismo.

L'equazione di Laplace

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{2.1.3}$$

e la relativa equazione di Poisson ¹

$$\nabla^2\phi = \rho(\mathbf{x}) \tag{2.1.4}$$

¹Il segno davanti alla sorgente è convenzionale. Per l'equazione di Poisson utilizzeremo il segno positivo, mentre per quella di Klein-Gordon negativo. Tale scelta è ininfluente. Occorre però mantenere la coerenza con la scelta della Lagrangiana, dove i termini di interazione tra campo e sorgente dovranno entrare con il segno coerente rispetto all'equazione di campo.

descrivono rispettivamente un campo in assenza di sorgente (la prima) e un campo la cui densità di sorgente è distribuita secondo la funzione $\rho(\mathbf{x})$ (la seconda). Possiamo costruire, seguendo questa analogia, l'equazione di Klein-Gordon per un campo reale in presenza di una sorgente del campo localizzata nel punto dello spazio-tempo x^2 :

$$(\square - m^2)\phi(x) = -J(x) \quad (2.1.5)$$

e la relativa lagrangiana (costruita via eq. di Eulero-Lagrange):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi \quad (2.1.6)$$

È immediato verificare che tale lagrangiana genera proprio l'equazione di Klein-Gordon disomogenea.

2.1.1 Funzione di Green del campo con singola sorgente

Per risolvere l'equazione (2.1.5) è utile definire la funzione di Green per l'equazione di Klein-Gordon :

Def. (Funzione di Green): *Le funzioni di Green $G(x)$ associate all'equazione di Klein-Gordon sono tutte quelle funzioni che risolvono l'equazione*

$$(\square - m^2)G(x) = -\delta^{(4)}(x) \quad (2.1.7)$$

È semplice verificare che, una volta trovata la funzione di Green definita precedentemente, il campo soluzione della (2.1.5) può essere scritto sempre come:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4y G(x-y)J(y) \quad (2.1.8)$$

dove $\phi_0(x)$ risolve l'equazione omogenea di Klein-Gordon. Infatti, per verifica diretta, possiamo mostrare che una soluzione così scritta risolve la (2.1.5):

$$\begin{aligned} (\square - m^2)\phi(x) &= (\square - m^2) \left(\phi_0(x) + \int d^4y G(x-y)J(y) \right) = \\ &= \underbrace{(\square - m^2)\phi_0(x)}_{=0} + (\square - m^2) \left(\int d^4y G(x-y)J(y) \right) = \\ &= \int d^4y ((\square - m^2)G(x-y)J(y)) = \\ &= - \int d^4y \delta^{(4)}(x-y)J(y) = \\ &= -J(x) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

²Quest'ultima sarà ovviamente funzione delle coordinate x^μ

Tentiamo ora di dare una rappresentazione della funzione di Green associata al campo di Klein-Gordon³. Le soluzioni poi dell'equazione disomogenea potranno essere costruite (almeno in linea di principio, e conoscendo l'espressione esplicita della sorgente del campo) tramite la (2.1.8).

Iniziamo notando che una funzione di Green qualsiasi può essere espressa mediante la sua trasformata di Fourier

$$G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{G}(k) \quad (2.1.10)$$

e applicando l'equazione di Klein-Gordon (2.1.7) otteniamo:

$$\begin{aligned} (\square - m^2)G(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\square - m^2)e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{G}(k) = \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (k^\mu k_\mu + m^2)e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{G}(k) = \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla rappresentazione integrale della funzione Delta di Dirac. È immediato notare quindi che i coefficienti di Fourier sono

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^\mu k_\mu + m^2} \quad (2.1.12)$$

e otteniamo così la rappresentazione integrale della funzione di Green:

$$G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k^\mu k_\mu + m^2} \quad (2.1.13)$$

Adesso che abbiamo l'espressione per la funzione di Green possiamo costruire la nostra funzione. Ad esempio possiamo supporre che la nostra sorgente sia puntiforme, posizionata in \mathbf{x}_0 e indipendente dal tempo, così che essa potrà essere espressa come:

$$J(\mathbf{x}, t) = g\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.1.14)$$

L'equazione di Klein-Gordon assumerà la forma:

$$(\square - m^2)\phi = -g\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.1.15)$$

e la variazione del campo rispetto allo stato libero $\phi_0(x)$ sarà:

$$\delta\phi(x) = \int d^4y G(x-y)J(y) = \int d^4y \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{k^\mu k_\mu + m^2} \right) J(y) \quad (2.1.16)$$

³Quella fornita in questa sezione sarà una rappresentazione di tipo integrale.

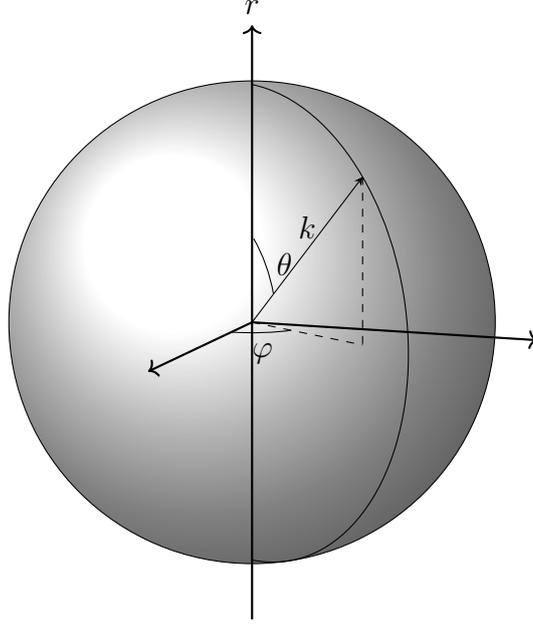


Figura 2.1: Illustrazione del passaggio in coordinate sferiche. L'asse verticale è stato preso coincidente con r in modo da ottenere la corretta integrazione sugli angoli θ e ϕ .

secondo la costruzione (2.1.8). Procediamo ora con il calcolo del precedente integrale:

$$\begin{aligned}
\delta\phi(x) &= \int d^4y G(x-y)J(y) = \int d^4y \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu-y^\mu)}}{k^\mu k_\mu + m^2} \right) J(y) \\
&= \int d^4y \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu-y^\mu)}}{k^\mu k_\mu + m^2} \right) g\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = \\
&= \int dy^0 \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \right) e^{-ik_0(x^0-y^0)} = \\
&= \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \right) e^{-ik_0x^0} \underbrace{\int dy^0 e^{ik_0y^0}}_{2\pi\delta(k_0)} = \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \int dk^0 \delta(k_0) \frac{e^{-ik_0x^0}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} = \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}{\mathbf{k}^2 + m^2}
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Ponendo ora $|\mathbf{k}| = k$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r$ possiamo passare in coordinate sferiche (Figura 2.1):

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}{k^2 + m^2} = -\frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2 + m^2} = \\
&= \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_1^{-1} d(-\cos\theta) 2\pi \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2 + m^2} = \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \left[\frac{e^{ikr \cos\theta}}{ikr} \right]_0^\pi = \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \left(\frac{e^{-ikr} - e^{ikr}}{ikr} \right) = \tag{2.1.18} \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} \frac{2 \sin kr}{r} = \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} \text{Im}[e^{ikr}] = \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2 r} \text{Im} \left[\int_0^\infty dk \frac{ke^{ikr}}{(k+im)(k-im)} \right] =
\end{aligned}$$

Possiamo calcolare l'integrale mediante il teorema dei residui chiudendo il percorso nel semipiano dove $\text{Im}(k) > 0$ in modo da non avere contributi sul cerchio di raggio $r \rightarrow \infty$ grazie all'esponenziale decrescente. Valutiamo l'integrale sul percorso chiuso come i residui contenuti all'interno del percorso stesso: nel semipiano superiore l'integrando presenta un polo semplice in $k = im$ che possiamo calcolare come segue

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \frac{g}{(2\pi)^2 r} \text{Im} \left[\int_0^\infty dk \frac{ke^{ikr}}{(k+im)(k-im)} \right] = \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2 r} \text{Im} \left[2\pi i \text{Res} \left(\frac{ke^{ikr}}{(k+im)(k-im)} \right)_{k=im} \right] = \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2 r} \text{Im} \left[2\pi i \frac{ime^{-mr}}{2im} \right] = \tag{2.1.19} \\
&= \frac{g}{(2\pi)^2 r} \text{Im} [i(\pi e^{-mr})] = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \\
&= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}
\end{aligned}$$

Notiamo che le variazioni del campo generate da una sorgente statica hanno un range caratteristico proporzionale a m^{-1} che può essere interpretato come lunghezza d'onda Compton del quanto del campo. Il caso precedente è un esempio molto importante: difatti il campo di Klein-Gordon (2.1.19) è un campo a rapida decrescenza con l'aumento della distanza e quindi molto idoneo nella modellizzazione delle forze di corto raggio.

Vedremo nella prossima sezione come questo campo può essere interpretato nell'ambito della fisica delle particelle come campo associato alla forza nucleare forte tra due sorgenti⁴ del campo e come questo permise a Yukawa di fornire una prima stima della massa dei quanti del campo stesso.

2.1.2 Soluzione con doppia sorgente: Il campo di Yukawa

Consideriamo adesso due sorgenti localizzate in due punti dello spazio-tempo differenti. Queste due sorgenti interferiscono l'uno con l'altra a causa del fatto che esse generano un disturbo del campo che si propaga nello spazio-tempo e quindi interagiranno tramite esso esattamente come una carica elettrica interagisce con un'altra carica elettrica attraverso il campo elettro-magnetico. La funzione di Green $G(x - y)$ descrive la propagazione dell'interazione tramite il campo e per questo motivo è chiamata propagatore⁵. Seguendo l'analogia con l'elettromagnetismo, possiamo quindi dire che il campo ha il ruolo di mediare l'interazione tra le due sorgenti che si accoppiano con esso. Vediamo come questo emerge dai calcoli e come agisce il propagatore nel meccanismo di interazione.

Consideriamo una doppia sorgente $J = J_1 + J_2$. L'azione si scrive come:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + (J_1 + J_2)\phi \right) \quad (2.1.20)$$

Utilizzando l'espressione (2.1.8) per il campo $\phi(x)$, identificando con $\phi_0(x)$ la soluzione dell'equazione omogenea e con $\phi'(x)$ la soluzione dell'equazione non omogenea, l'interazione tra le sorgenti può essere messa in evidenza facendo qualche semplificazione: si può iniziare notando che

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = \partial^\mu (\phi \partial_\mu \phi) - \phi \partial^\mu \partial_\mu \phi \quad (2.1.21)$$

questo ci permette di riscrivere l'azione come:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu (\phi \partial_\mu \phi) + \frac{1}{2} \phi \square \phi - \frac{1}{2} \phi m^2 \phi + (J_1 + J_2)\phi \right) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (\square - m^2)\phi + \phi (J_1 + J_2) - \underbrace{\frac{1}{2} \partial^\mu (\phi \partial_\mu \phi)}_{\text{termini di bordo}} \right) = \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

I termini di bordo possono essere trascurati in quanto, tramite il teorema di Gauss, il loro valore dipende solo dal bordo del dominio di integrazione e non modifica le equazioni

⁴Due nucleoni, in questo caso.

⁵Per comodità si definisce il propagatore come (-i) volte la funzione di Green. Tale definizione è convenzionale ed è quella che verrà usata nelle equazioni successive.

del moto. Possiamo quindi semplificare ulteriormente l'azione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi(\square - m^2)\phi + \phi(J_1 + J_2) \right) = \\
&= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi_0 \underbrace{(\square - m^2)\phi_0}_{=0} + \frac{1}{2} \phi' \underbrace{(\square - m^2)\phi'}_{=-(J_1+J_2)} + \frac{1}{2} \phi' \underbrace{(\square - m^2)\phi_0}_{=0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \phi' \underbrace{(\square - m^2)\phi'}_{=-(J_1+J_2)} + \phi_0(J_1 + J_2) + \phi'(J_1 + J_2) \right] = \\
&= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi_0(J_1 + J_2) + \frac{1}{2} \left(\int d^4y (J_1 + J_2)(x)G(x-y)(J_1 + J_2)(y) \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

e il termine di interazione si riduce quindi a

$$\mathcal{S}_{int} = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y [J_2(x)G(x-y)J_1(y) + J_1(x)G(x-y)J_2(y)] \tag{2.1.24}$$

Valutando il primo integrale per due sorgenti puntiformi del tipo (2.1.14) localizzate in \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 otteniamo:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int d^3x dt \int d^3y dt' \frac{1}{2} J_2(x)G(x-y)J_1(y) = \\
&= \int d^3x dt \int d^3y dt' \frac{1}{2} g_1 \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x})G(x-y)g_2 \delta^{(3)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{y}) = \\
&= \int dt \int dt' \frac{g_1 g_2}{2} \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik_0(t-t')} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \right) = \\
&= \int dt \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_1 g_2}{2} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \int dt' e^{-ik_0(t-t')} = \\
&= \int dt \int dk^0 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g_1 g_2}{2} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} e^{-ik_0 t} \delta(k_0) = \\
&= \frac{1}{2} \int dt \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g_1 g_2 \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{\mathbf{k}^2 + m^2} =
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

dove possiamo riconoscere dentro l'integrale in t il campo $\delta\phi(\mathbf{r}_1)$ calcolato nella (2.1.19). Dal momento che nel risultato dell'integrale compare solo il modulo di $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ possiamo affermare che I_1 è simmetrico rispetto allo scambio di sorgenti, così che l'azione assume la forma:

$$\mathcal{S}_{int} = I_1 + I_2 = \int dt \frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{m|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{2.1.26}$$

Quest'ultima considerazione poteva essere anticipata notando la simmetria delle funzioni di Green che ci dice che i due contributi in (2.1.24) sono identici. Il conto esplicito

ha riprodotto questo risultato. L'integrando precedente rappresenta l'interazione tra due sorgenti statiche puntiformi del campo come ad esempio due nucleoni posizionati in \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Questo potenziale prende il nome di potenziale di Yukawa e fu il primo modello che ebbe successo per descrivere le forze nucleari forti che tenevano insieme nel nucleo protoni e neutroni. Yukawa ipotizzò l'esistenza di un campo "mesonico" come mediatore della forza e valutando il range d'azione di quest'ultima riuscì a stimare la massa m dei quanti del campo a circa 100 MeV. L'esistenza di questi quanti (chiamati pioni) fu poi confermata dai risultati sperimentali che misurarono una massa di circa 135 MeV. L'interazione emerge dai calcoli proprio tramite la funzione di Green che in questa interpretazione si configura come propagatore di quanti da una sorgente all'altra e vice-versa.

Il campo di Yukawa fornisce anche un'altra informazione: sostituendo nel potenziale trovato precedentemente una massa nulla ritroviamo un campo che si propaga esattamente come un campo elettromagnetico che interagisce con due cariche elettriche. Questo ci suggerisce che la forza di Coulomb agisce a lunga distanza perchè i mediatori della forza (i fotoni) sono senza massa e quindi annullano l'esponenziale decrescente che invece è tipico delle forza a corto raggio (associate quindi alla propagazione di quanti massivi).

2.2 Propagatori per sorgenti non statiche

Vogliamo adesso analizzare il caso di sorgenti dipendenti dal tempo. In particolare ci concentreremo sull'evoluzione del campo in presenza di sorgenti che permangono per un tempo limitato e studieremo come questi effetti si propagano a tempi macroscopici rispetto alla permanenza della sorgente stessa. Vedremo che, tramite l'uso dei propagatori, riusciremo a descrivere l'emissione e l'assorbimento di particelle da parte delle sorgenti e a dare una struttura causale alla teoria mediante alcune precise prescrizioni.

2.2.1 Il propagatore di Feynman: particelle e anti-particelle

Introduciamo il simbolo di propagatore definito come precedentemente:

$$\Delta(x - y) = -iG(x - y) \tag{2.2.1}$$

e si può verificare che il propagatore risolve la seguente equazione:

$$(\square - m^2)\Delta(x - y) = i\delta^{(4)}(x - y) \tag{2.2.2}$$

Per sorgenti dipendenti dal tempo, è importante capire cosa succede al campo dopo che la sorgente sia stata spenta in un certo istante. Ci concentriamo quindi sull'evoluzione temporale della perturbazione del campo dallo stato libero:

$$\begin{aligned}
\delta\phi(x) &= \int d^4y G(x-y)J(y) = \int d^4y i\Delta(x-y)J(y) = \\
&= \int d^4y \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu-y^\mu)}}{k_\mu k^\mu + m^2} \right) J(y) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k_\mu k^\mu + m^2} \left(\int d^4y e^{-ik_\mu y^\mu} J(y) \right) = \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k_\mu k^\mu + m^2} J(k)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

dove $J(k)$ indica la trasformata di Fourier della sorgente J . Esplicitando la dipendenza dal tempo otteniamo:

$$\delta\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 t}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} J(\mathbf{k}, k_0) \right) \tag{2.2.4}$$

Per tempi grandi, l'integrando della parte temporale oscilla molto rapidamente così che ci aspettiamo che la somma per interferenza di onde piane sia nulla⁶. Tuttavia il propagatore ha una singolarità (un polo semplice) in $k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ che rende l'integrale non nullo. Questo significa che benchè la sorgente permanga per un tempo limitato e ridotto, gli effetti possono propagarsi anche su scale di tempi macroscopici. Tuttavia le uniche onde piane che si manifestano a $t \gg 1$ e non vengono annullate dalla somma per interferenza sono quelle che rispettano la relazione di dispersione

$$w(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{2.2.5}$$

e la precedente equazione suggerisce proprio che queste onde siano onde quanto-meccaniche associate alla propagazione di particelle relativistiche di energia $\varepsilon = \hbar\omega$, vettore d'onda \mathbf{k} e massa m che soddisfano la condizione di mass-shell e che hanno la possibilità di propagarsi anche su scale di tempo macroscopiche rispetto alla durata della sorgente. Per questo motivo sono chiamate particelle *reali*.

Tutte le onde invece che non soddisfano la relazione di dispersione (2.2.5) non possono manifestare i loro effetti su scale di tempo grandi e per questo vengono chiamate particelle *virtuali*.

In quest'ottica gioca un ruolo fondamentale il propagatore. Il suo valore dipende dalle prescrizioni che utilizziamo per calcolare i poli. Essendo entrambe sull'asse di integrazione, questi dovranno essere evitati spostando il cammino di integrazione sopra

⁶Per il lemma di Riemann-Lebesgue se una funzione è sommabile, ossia l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ è convergente, allora la sua trasformata di Fourier si annulla nel limite in cui $t \rightarrow \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int dx e^{-itx} f(x) = 0$. Questo non è il caso di cui stiamo discutendo poiché l'integrando è singolare.

o sotto il polo (o alternativamente possono essere spostati i poli e lasciare inalterato il cammino di integrazione) e le diverse combinazioni produrranno diversi risultati. Noi tratteremo il propagatore di Feynman.

Se applichiamo ai poli $k_0(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ uno shift di una quantità $-i\epsilon$ (ossia li spostiamo nel semipiano in cui $\text{Im}(k_0) < 0$) significa che, utilizzando il teorema dei residui, la perturbazione del campo emergerà solo per $t > 0$. Il contributo dei due poli del propagatore sull'integrale (2.2.4) è:

$$\delta\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \vartheta(t) \left[2\pi i \left(\frac{e^{-i\omega(\mathbf{k})t}}{2\omega(\mathbf{k})} \right) J(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) + 2\pi i \left(\frac{e^{+i\omega(\mathbf{k})t}}{-2\omega(\mathbf{k})} \right) J(\mathbf{k}, -\omega(\mathbf{k})) \right]$$

Al contrario, spostare entrambe i poli sopra l'asse di integrazione di $+i\epsilon$ comporterà che le particelle reali sopra menzionate renderanno non nullo l'integrale per tempi negativi. Otterremo che il campo ϕ assumerà la forma:

$$\delta\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \vartheta(-t) \left[2\pi i \left(\frac{e^{-i\omega(\mathbf{k})t}}{-2\omega(\mathbf{k})} \right) J(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) + 2\pi i \left(\frac{e^{+i\omega(\mathbf{k})t}}{2\omega(\mathbf{k})} \right) J(\mathbf{k}, -\omega(\mathbf{k})) \right]$$

Dal momento che, come abbiamo detto precedentemente, le onde che soddisfano la (2.2.5) sono le sole onde che si propagano su scale macroscopiche e possono essere interpretate come particelle relativistiche, dopo lo spegnimento della sorgente ci aspettiamo un solo contributo nella forma

$$\frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t} \quad (2.2.6)$$

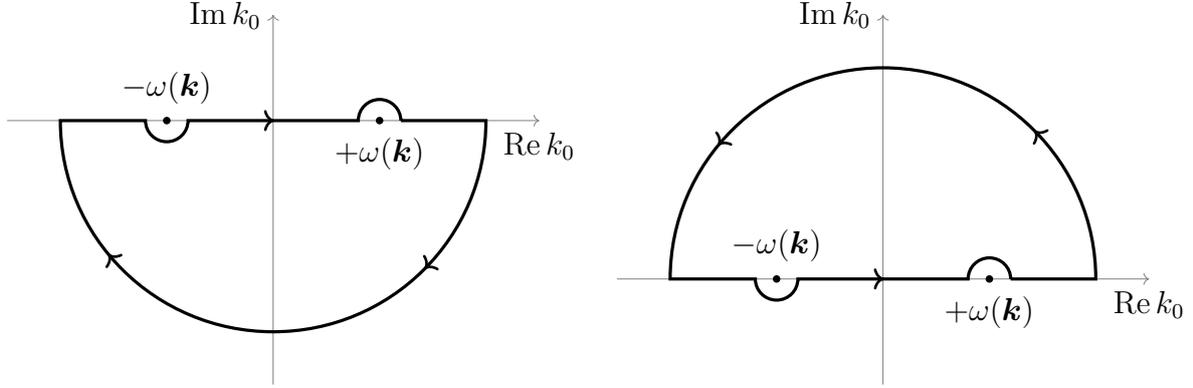
corrispondenti a onde progressive associate a particelle di momento \mathbf{k} ed energia $\varepsilon = \hbar\omega(\mathbf{k})$. La prima prescrizione sarà quindi quella di spostare solo il polo $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ sotto il percorso di integrazione sull'asse reale in modo da ottenere in tempi successivi lo spegnimento della sorgente solo la propagazione di particelle reali ad energia positiva.

In modo complementare, spostiamo la singolarità $k_0 = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ sopra il percorso di integrazione. Otterremo così delle onde del tipo

$$\frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k})t} \quad (2.2.7)$$

che corrispondono a stati di particelle ad energia negativa che si propagano *indietro* nel tempo, ossia ad istanti precedenti l'accensione della sorgente. Questo sembrerebbe violare la struttura causale della teoria poichè si potrebbe pensare che una sorgente possa causare degli effetti osservabili sul campo ancora prima della sua accensione in quanto Δ è non nullo per $t < 0$. Da questo punto di vista possiamo però interpretare particelle ad energia negativa che si propagano indietro nel tempo come *antiparticelle* che viaggiano avanti nel tempo con energia positiva⁷. Questa interpretazione è chiamata

⁷Possiamo anticipare già da ora che nel caso di campi scalari reali la differenza tra particella e la rispettiva antiparticella non assume nessun ruolo. Invece nel caso di campi scalari complessi, dove le trasformazioni di coniugazione di carica operano in modo non banale, emergono alcune differenze sostanziali tra le due come ad esempio la diversa carica elettrica.



(a) Per propagare a tempi positivi bisogna chiudere il percorso nel semipiano inferiore di k_0 . (b) Per propagare a tempi negativi bisogna chiudere il percorso nel semipiano superiore di k_0 .

Figura 2.2: Schema riassuntivo delle prescrizioni di Feynman/Stueckelberg.

interpretazione di Feynman/Stueckelberg e le prescrizioni precedentemente illustrate sono le *prescrizioni di Feynman/Stueckelberg* associate al propagatore del campo (Figura 2.2). Questa interpretazione risulta, come vedremo, molto efficace per la spiegazione del fenomeno di assorbimento o emissione da parte di sorgenti accoppiate al campo e troverà un'importante applicazione nei diagrammi di Feynman. In quest'ottica quindi è stata recuperata sia la struttura causale della teoria, sia è stato spiegato come interpretare gli stati ad energia negativa che emergevano dall'equazione di Klein-Gordon.

Alla luce di questo possiamo ora interpretare il processo di accoppiamento di due sorgenti del campo, che ammettiamo siano separate da una distanza di tipo tempo, attive ai tempi t_1 e t_2 . L'azione che descrive l'interazione tra le due è:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{int}[J_1, J_2] &= \int d^4x \int d^4y J_1(x) i\Delta(x-y) J_2(y) = \\ &= \int d^4x \int d^4y J_1(x) \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\omega(\mathbf{k})(t_1-t_2)}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} J_2(y) \right) = \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

ed ora il processo assume una duplice configurazione:

- $t_1 - t_2 > 0$:

posso calcolare la parte temporale dell'integrale utilizzando il teorema dei Residui e chiudendo il percorso nella parte inferiore del piano di k_0 ottenendo:

$$\mathcal{S}_{int}[J_1, J_2] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x dt_1 \int d^3y dt_2 \left(J_1(x) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\omega(\mathbf{k})(t_1-t_2)}}{2\omega(\mathbf{k})} J_2(y) \right)$$

che rappresenta una sovrapposizione di onde con quadri-vettore $k^\mu = (\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})$ che si propagano dal punto dello spaziotempo (t_2, \mathbf{y}) al punto (t_1, \mathbf{x}) ossia particelle relativistiche che vengono emesse da J_2 e vengono successivamente assorbite da J_1 .

- $t_1 - t_2 < 0$:

posso calcolare la parte temporale dell'integrale utilizzando il teorema dei Residui e chiudendo il percorso chiuso nella parte superiore del piano di k_0 ottenendo:

$$\mathcal{S}_{int}[J_1, J_2] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x dt_1 \int d^3y dt_2 \left(J_1(x) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\omega(\mathbf{k})(t_1-t_2)}}{2\omega(\mathbf{k})} J_2(y) \right)$$

che rappresenta una sovrapposizione di onde con quadri-vettore $k^\mu = (-\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})$ che si propagano dal punto dello spaziotempo (t_2, \mathbf{y}) al punto (t_1, \mathbf{x}) ossia particelle relativistiche che vengono emesse da J_2 e vengono successivamente assorbite da J_1 muovendosi questa volta indietro nel tempo (questo deriva dal fatto che $t_1 - t_2 < 0$). Alternativamente possiamo interpretare il precedente integrale come una sovrapposizione di onde con quadri-vettore $k^\mu = (\omega(\mathbf{k}), -\mathbf{k})$ che si propagano dal punto dello spaziotempo (t_1, \mathbf{x}) al punto (t_2, \mathbf{y}) ossia anti-particelle relativistiche che vengono emesse da J_1 e vengono successivamente assorbite da J_2 . Recuperiamo in questo modo la struttura causale di cui parlavamo precedentemente.

In questo esempio la distinzione tra anti-particella e particella è superflua in quanto il campo è un campo reale. La distinzione tra le due diventa cruciale quando abbiamo a che fare con campi complessi nei quali la coniugazione di carica produce effetti misurabili. Nel caso il campo sia di natura complessa l'accoppiamento con le sorgenti è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi \phi^* + J \phi^* + J^* \phi \quad (2.2.9)$$

dove $J = J_1 + J_2$, come si può verificare tramite le equazioni di Eulero-Lagrange. In tal caso l'analisi rimane la stessa solo che l'azione di interazione tra le due sorgenti diventa:

$$\mathcal{S}_{int}[J_1, J_2] = \int d^4x \int d^4y J_1^*(x) \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})-i\omega(\mathbf{k})(t_1-t_2)}}{-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \right) J_2(y) + (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.2.10)$$

quindi J_2 in questo caso emette una particella che viene assorbita da J_1^* o, alternativamente, J_1^* emette un anti-particella (uguale alla precedente ma con carica opposta) che viene assorbita da J_2 . Adesso quindi il propagatore ha assunto un'*orientazione* nel senso che una particella può essere solo emessa da J_2 ed assorbita da J_1^* e un'antiparticella può essere solo emessa da J_1^* ed assorbita da J_2 . Il processo inverso non è più permesso.

Terminiamo questa sezione fornendo un'espressione più esplicita per il propagatore (2.2.1), calcolato utilizzando le prescrizioni di Feynman/Stueckelberg. Queste ci suggeriscono che devono essere propagate avanti nel tempo le sole onde quanto-meccaniche con frequenze positive e indietro nel tempo solo quelle negative. Applichiamo le prescrizioni quindi nel modo seguente, spostando un polo nel semipiano superiore e uno nel semipiano

inferiore:

$$\begin{aligned}
\Delta(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu-y^\mu)}}{k_\mu k^\mu + m^2} = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu-y^\mu)}}{k_\mu k^\mu + m^2 - i\epsilon} = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^3 k}{i(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik_0(x^0-y^0)}}{k_0^2 - \omega^2(\mathbf{k}) + i\epsilon} = \\
&= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \int \frac{d^3 k}{i(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{-e^{-ik_0(x^0-y^0)}}{(k_0 - \omega(\mathbf{k}) + i\epsilon')(k_0 + \omega(\mathbf{k}) - i\epsilon')}
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

dove $\epsilon' = \epsilon/2\omega(\mathbf{k}) > 0$. Quando $x^0 - y^0 > 0$ vengono propagati in avanti le sole frequenze positive. La singolarità in $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ viene quindi spostata di $-i\epsilon'$ e solo questa parte del dividendo dentro l'integrale contribuirà al residuo, calcolato chiudendo il percorso sul cerchio di raggio infinito nel semipiano inferiore come in Figura 2.3. Indicheremo il propagatore delle frequenze positive con il simbolo Δ^+ . Ovviamente Δ^+ è nullo per $x^0 - y^0 < 0$. Quindi:

$$\Delta^+(x-y) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \vartheta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 k}{i(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{-e^{-ik_0(x^0-y^0)}}{(k_0 - \omega(\mathbf{k}) + i\epsilon')(k_0 + \omega(\mathbf{k}) - i\epsilon')} \right)$$

dove il residuo è calcolato in $k_0 = \omega(\mathbf{k}) - i\epsilon'$ nel limite in cui $\epsilon' \rightarrow 0$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
\Delta^+(x-y) &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \vartheta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\frac{ie^{-i(\omega(\mathbf{k})-i\epsilon')(x^0-y^0)}}{2(\omega(\mathbf{k}) - i\epsilon')} \right) = \\
&= \vartheta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i(\omega(\mathbf{k})(x^0-y^0))}}{2\omega(\mathbf{k})} \right)
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Al contrario, per $x^0 - y^0 < 0$, le prescrizioni di Feynman-Stueckelberg indicano che il polo con frequenza negativa $k_0 = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ deve subire uno shift nel quadrante in cui $\operatorname{Im} k_0 > 0$ in modo che tali soluzioni a frequenza negativa si propagano per $x^0 < y^0$. Quindi, indicando tale soluzione con il simbolo Δ^- possiamo calcolare il valore del propagatore di Feynman partendo dal risultato precedente e chiudendo il cerchio di raggio infinito nel piano superiore di k_0 come indicato in Figura 2.3, cambiando solo il polo che contribuisce ai residui e rendendo nullo il propagatore per tempi $x^0 > y^0$:

$$\Delta^-(x-y) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \vartheta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 k}{i(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{-e^{-ik_0(x^0-y^0)}}{(k_0 - \omega(\mathbf{k}) + i\epsilon')(k_0 + \omega(\mathbf{k}) - i\epsilon')} \right)$$

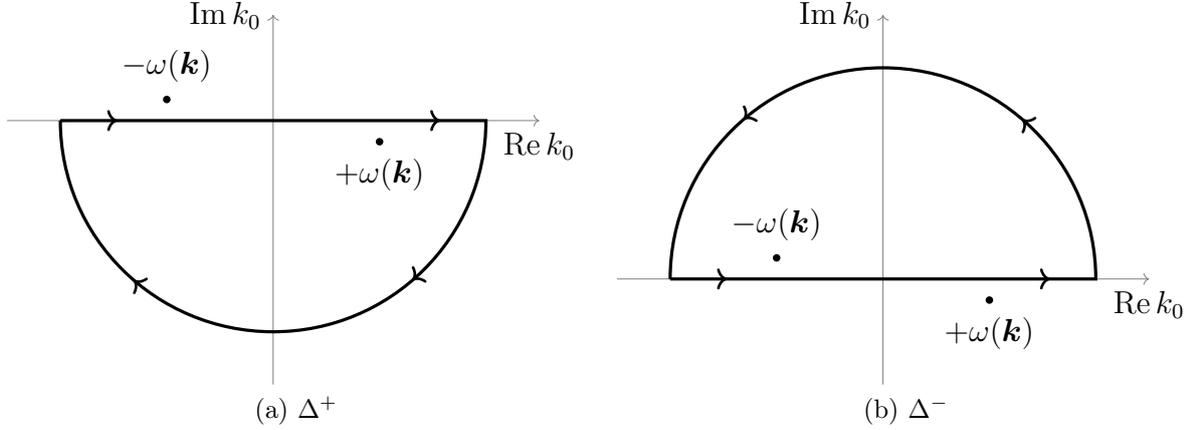


Figura 2.3: Differenza tra i percorsi di integrazione tra il propagatore di frequenze positive e quello di frequenza negativa.

dove il residuo è calcolato in $k_0 = -\omega(\mathbf{k}) + i\epsilon'$ nel limite in cui $\epsilon' \rightarrow 0$. Troviamo quindi che

$$\begin{aligned} \Delta^-(x-y) &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \vartheta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\frac{-e^{-i(-\omega(\mathbf{k})+i\epsilon')(x^0-y^0)}}{-2(\omega(\mathbf{k}) - i\epsilon')} \right) = \\ &= \vartheta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\omega(\mathbf{k})(x^0-y^0)}}{2\omega(\mathbf{k})} \right) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Il propagatore totale sarà la somma dei due:

$$\begin{aligned} \Delta(x-y) &= \Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y) = \vartheta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})-i\omega(\mathbf{k})(x^0-y^0)}}{2\omega(\mathbf{k})} \right) \\ &+ \vartheta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\omega(\mathbf{k})(x^0-y^0)}}{2\omega(\mathbf{k})} \right) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

2.2.2 Scattering di pioni su un potenziale elettromagnetico

Discutiamo adesso il processo di scattering di pioni con carica q su un potenziale elettromagnetico $A^\mu(x)$ debole (che per semplicità verrà considerato nullo al di fuori di una regione limitata dello spazio⁸). Dal momento che i pioni possono avere carica elettrica, il

⁸Questa è un'assunzione molto frequente nei processi di scattering in quanto permette di considerare il moto delle particelle lontane dalla zona di interazione con il potenziale come un moto libero.

campo ad essi associato dovrà essere di natura complessa. La lagrangiana che descrive il processo di interazione è generata mediante la *sostituzione minimale* $\partial_\mu\phi \mapsto \partial_\mu\phi - iqA_\mu\phi$ a cui va aggiunto il termine di accoppiamento con le sorgenti $J^*\phi + J\phi^*$ ottenendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - iqA^\mu)\phi - m^2\phi\phi^* + J^*\phi + J\phi^* = \\ &= -\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi\phi^* - iq(A_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)A^\mu\phi) - q^2A^\mu A_\mu\phi\phi^* + J^*\phi + J\phi^*\end{aligned}\quad (2.2.15)$$

al quale possiamo applicare l'operatore di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\partial_\mu\partial^\mu\phi + 2iqA^\mu\partial_\mu\phi + iq(\partial_\mu A^\mu)\phi - J + q^2A^\mu A_\mu\phi = 0 \quad (2.2.16)$$

e ricavare l'equazione di Klein-Gordon del processo:

$$(\square - m^2)\phi = -(J - 2iqA^\mu\partial_\mu\phi - iq\partial_\mu A^\mu\phi - q^2A^\mu A_\mu\phi) \quad (2.2.17)$$

L'equazione precedente per ϕ può essere scritta in forma integrale facendo uso del propagatore $\Delta(x - y)$:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4y i\Delta(x - y)[J - 2iqA^\mu\partial_\mu\phi - iq\partial_\mu A^\mu\phi - q^2A^\mu A_\mu\phi](y) \quad (2.2.18)$$

dove $\phi_0(x)$ è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon libera. È possibile risolvere l'equazione con un metodo iterativo che permette via via di dare un'approssimazione migliore del campo ϕ . Si può procedere come segue: sostituiamo la soluzione all'ordine più basso

$$\phi^{(0)}(x) = \phi_0(x) + \int d^4y i\Delta(x - y)J(y) \quad (2.2.19)$$

nell'integrando a destra della (2.2.18) ottenendo così un'approssimazione per $\phi(x)$ al primo ordine:

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(x) &= \phi_0(x) + \int d^4y i\Delta(x - y)J(y) + \int d^4y i\Delta(x - y) \times \\ &\quad \times [-2iqA^\mu\partial_\mu - iq\partial_\mu A^\mu - q^2A^\mu A_\mu]\phi^{(0)}(y) \\ &= \phi_0(x) + \int d^4y i\Delta(x - y)J(y) + \int d^4y i\Delta(x - y) \times \\ &\quad \times [-2iqA^\mu\partial_\mu - iq\partial_\mu A^\mu - q^2A^\mu A_\mu] \left(\phi_0(y) + \int d^4z i\Delta(y - z)J(z) \right)\end{aligned}\quad (2.2.20)$$

Il termine di ordine n-esimo sarà nella forma:

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(x) &= \phi_0(x) + \int d^4y i\Delta(x - y)J(y) + \int d^4y i\Delta(x - y) \times \\ &\quad \times [-2iqA^\mu\partial_\mu - iq\partial_\mu A^\mu - q^2A^\mu A_\mu]\phi^{(n-1)}(y)\end{aligned}\quad (2.2.21)$$

Dal momento che stiamo considerando un potenziale elettromagnetico debole possiamo trascurare i termini di ordine superiore al primo e il modulo quadro minkoskiano $A^\mu A_\mu$. Il termine di fluttuazione del campo che contiene l'interazione tra le sorgenti e il potenziale assume la forma

$$\delta\phi = \int d^4y \, i\Delta(x-y)[-2iqA^\mu\partial_\mu - iq\partial_\mu A^\mu] \left(\int d^4z \, i\Delta(y-z)J(z) \right) \quad (2.2.22)$$

Possiamo da qui trovare il potenziale di interazione con un procedimento analogo a quello per trovare la (2.1.24), che questa volta descrive però l'interazione tra due sorgenti del campo J_1^* e J_2 in presenza di un potenziale esterno:

$$\mathcal{S}_{int} = \int d^4x \, J_1^*(x) \int d^4y \, i\Delta(x-y)[-2iqA^\mu\partial_\mu - iq\partial_\mu A^\mu](y) \left(\int d^4z \, i\Delta(y-z)J_2(z) \right) \quad (2.2.23)$$

dove emerge l'azione del propagatore che ha la funzione di propagare le particelle dal punto dello spazio tempo z dove è localizzata J_2 fino al punto y dove è localizzato il potenziale e dal punto y al punto x dove invece è localizzata J_1^* . Tuttavia l'azione (2.2.23) descrive quattro processi diversi ognuno dei quali è caratterizzato da una sequenza di eventi precisa che non emerge a priori dall'equazione ma che dipende dagli intervalli temporali in cui le sorgenti e il potenziali sono attivi:

- *Diffusione di un pione con carica q* : se la sorgente J_2 è localizzata in un intervallo temporale precedente l'accensione del potenziale e la sorgente J_1^* è localizzata in un intervallo temporale successivo, allora il processo si configura come uno scattering di un pione con carica q su un potenziale elettromagnetico A^μ emesso da J_2 e successivamente assorbito da J_1^* .
- *Diffusione di un pione con carica $-q$* : Se la sequenza temporale in cui sono localizzate le sorgenti è inversa, allora il processo corrisponde alla creazione di un pione con carica $-q$ da parte della sorgente J_1^* (antiparticella del pione nel punto .1) diffuso sul potenziale elettromagnetico A^μ e successivamente assorbito dalla sorgente J_2 .
- *Annichilazione particella-antiparticella*: Se le due sorgenti J_1^* e J_2 sono localizzate in un intervallo temporale precedente all'attivazione del potenziale allora il processo corrisponde alla creazione di un pione dalla sorgente J_2 e di un anti-pione dalla sorgente J_1^* e dalla loro annichilazione nella regione in cui A_μ è attivo.
- *Creazione particella-antiparticella*: Se il potenziale A^μ è localizzato in un intervallo temporale precedente rispetto l'attivazione delle sorgenti, il processo corrisponde alla creazione di una coppia particella-antiparticella (di carica q e $-q$) che vengono assorbite successivamente da parte di J_1^* e J_2 rispettivamente.

Il processo si configura quindi come uno scambio di particelle virtuali tra le due sorgenti, questa volta però perturbati dalla presenza di un potenziale elettro-magnetico che aggiunge nuovi processi ai precedenti.

Capitolo 3

Diagrammi di Feynman per campi scalari

In quest'ultimo capitolo verranno introdotti i diagrammi di Feynman e verrà spiegato come passare da una formulazione analitica (come quella presentata nei capitoli precedenti) ad una formulazione grafica. Il pregio dei diagrammi di Feynman è quello di mettere in luce gli aspetti salienti dell'interazione tra particelle. Introduciamo quindi i campi *auto-interagenti* mediante un'opportuno termine aggiuntivo alla lagrangiana del sistema.

3.1 Campi auto-interagenti

Mediante l'uso del propagatore si possono descrivere anche le *auto-interazioni* del campo con se stesso oltre che le interazioni campo-sorgente e campo-potenziale esterno. Un campo di Klein-Gordon auto-interagente può essere ottenuto mediante un termine aggiuntivo alla lagrangiana nella forma $g\phi^3(x)$ così che il nostro nuovo sistema è descritto da una lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - g\phi^3 + J\phi \quad (3.1.1)$$

dove è stata considerata anche una sorgente esterna al campo J . L'equazione del moto del campo di Klein-Gordon è non omogenea ed emerge applicando le equazioni di Eulero-Lagrange alla lagrangiana (3.1.1) come

$$(\square - m^2)\phi(x) = -(J + 3\phi^2g)(x) \quad (3.1.2)$$

L'auto-interazione, sotto questo punto di vista, si esprime quindi come una vera e propria sorgente *interna* al campo che, come vedremo, interferisce nella propagazione delle

particelle virtuali generate dalla sorgente J . L'equazione integrale per il campo sarà

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4y i\Delta(x-y)(J + 3\phi^2 g) \quad (3.1.3)$$

dove, come al solito, $\phi_0(x)$ è la soluzione associata all'equazione omogenea e $\Delta(x-y)$ è il propagatore del campo.

Utilizzando il metodo iterativo illustrato nell'esempio di scattering pione-pione su un potenziale A^μ possiamo cercare di procedere allo stesso modo e cercare di ottenere un'espressione per $\phi(x)$. In tal modo possiamo ottenere facilmente le espressioni per il campo all'ordine più basso, al primo ordine:

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(x) &= \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1)J(x_1) \\ \phi^{(1)}(x) &= \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1)J(x_1) + \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1)J(x_1)(-3\phi^{(0)}g) \times \\ &\quad \times \int d^4x_2 i\Delta(x_1-x_2)J(x_2) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

e al secondo ordine:

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(x) &= \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1)J(x_1) + \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1)J(x_1)(-3\phi^{(1)}g)\phi^{(1)}(x_1) = \\ &= \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1)J(x_1) + \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1)(-3g) \times \\ &\quad \times \int d^4x_2 i\Delta(x_1-x_2) [J(x_2) - 3g \int d^4x_4 i\Delta(x_2-x_4)J(x_4) \times \\ &\quad \times \int d^4x_5 i\Delta(x_2-x_5)J(x_5)] \times \\ &\quad \times \int d^4x_3 i\Delta(x_1-x_3) [J(x_3) - 3g \int d^4x_6 i\Delta(x_3-x_6)J(x_6) \times \\ &\quad \times \int d^4x_7 i\Delta(x_3-x_7)J(x_7)] \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Il campo ϕ è quindi risultato di una somma infinita di termini troncata in questa trattazione al secondo ordine. L'espressione analitica rende poco immediato che tipo di interazioni contribuiscano effettivamente al campo e per questo possiamo pensare di darne una rappresentazione grafica che faccia corrispondere alla precedente espressione analitica un diagramma ben preciso.

3.1.1 Tree diagrams

Si può tentare di dare una rappresentazione grafica del campo precedentemente descritto mediante i diagrammi di Feynman. Per interazioni come quella analizzata questi diagrammi assumono una forma ad albero e per questo vengono chiamati *tree diagrams*. Questo tipo di diagrammi mettono in evidenza in modo semplice e intuitivo che tipo di processi avvengono e possono essere formalizzati come segue.

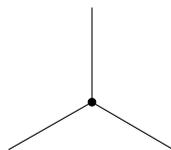
Ogni propagatore può essere rappresentato come una linea che congiunge due punti dello spazio-tempo. Ad esempio $\Delta(x - y)$ avrà una rappresentazione grafica del tipo:



Questa interpretazione è coerente con quanto detto nei capitoli precedenti: infatti il propagatore $\Delta(x - y)$ si configura in questa interpretazione grafica come la propagazione di una particella associata al campo dal punto x al punto y . Le sorgenti $J(x)$ esterne vengono invece rappresentate in questo modo



mentre invece i vertici di auto-interazione come



In questo modo il campo descritto nella (3.1.5) può essere rappresentato (fino al secondo ordine) come somma dei diagrammi presenti nella Figura 3.1.

Emerge in modo chiaro che il campo ϕ misurato in x è formato dal contributo di particelle virtuali che sono emesse dalla sorgente $J(x)$. Queste particelle, durante la loro propagazione, interagiscono tra di loro descrivendo i vertici del diagramma. Questi vertici possono annichilire le particelle virtuali o crearle, esattamente come una sorgente esterna. Più alto sarà l'ordine di espansione, più sarà grande il numero di diagrammi che concorreranno a individuare il valore di $\phi(x)$. Ogni diagramma entrerà nella somma con un proprio *peso* che dipenderà dal numero di modi in cui tale diagramma può essere ottenuto.

I diagrammi di Feynman descrivono tuttavia solo stati perturbati del campo quando la perturbazione è debole. L'espansione in serie infatti richiede che le auto-interazioni considerate siano deboli ($g \ll 1$) e che rappresentino solo una piccola perturbazione dell'equazione del modo (2.1.5).

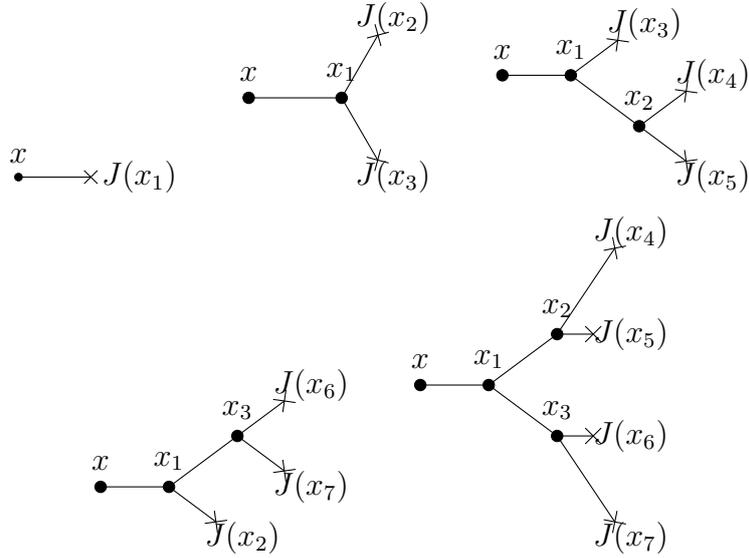
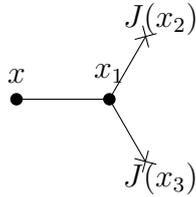


Figura 3.1: Schema riassuntivo dei diagrammi di Feynman per l'espansione del campo fino al secondo ordine.

3.1.2 Formulazione nello spazio dei momenti

È utile riscrivere le precedenti espressioni nello spazio dei momenti piuttosto che in quello delle posizioni. Questo si può fare utilizzando la rappresentazione in trasformata di Fourier dei propagatori (2.1.13). Rappresentare i campi nello spazio dei momenti è più conveniente in quanto mette in luce l'invarianza per traslazioni della teoria.

In quest'ottica il propagatore può essere associato alla propagazione di particelle del campo con momento \mathbf{k} assegnato. Nella formulazione nello spazio dei momenti emerge anche che i processi su cui si deve integrare sono solo quelli che sono compatibili con la conservazione del 4-impulso. Possiamo verificare quanto detto scrivendo un vertice di interazione nello spazio dei momenti. Ad esempio per il diagramma del tipo



che, confrontato con la (3.1.5) corrisponde all'espressione analitica

$$-3g \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1) \int d^4x_2 i\Delta(x_1-x_2)J(x_2) \int d^4x_3 i\Delta(x_1-x_3)J(x_3) \quad (3.1.6)$$

Possiamo sostituire le rappresentazioni in trasformata di Fourier

$$i\Delta(x_i - x_j) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_i - x_j)}}{k^2 + m^2} \quad (3.1.7)$$

sottintendendo che il prodotto scalare è fatto secondo la metrica minkoskiana e dove $k^2 = k_\mu k^\mu = -k_0^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ ottenendo

$$\begin{aligned} & -3g \int d^4 x_1 i\Delta(x - x_1) \int d^4 x_2 i\Delta(x_1 - x_2) J(x_2) \int d^4 x_3 i\Delta(x_1 - x_3) J(x_3) = \\ & = -3g \int d^4 x_1 \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-x_1)}}{k^2 + m^2} \right) \int d^4 x_2 \left(\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_1(x_1-x_2)}}{k_1^2 + m^2} \right) J(x_2) \times \\ & \times \int d^4 x_3 \left(\int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_2(x_1-x_3)}}{k_2^2 + m^2} \right) J(x_3) = \\ & = -3g \int d^4 k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \underbrace{\left(\int \frac{d^4 x_1}{(2\pi)^4} e^{ix_1(-k+k_1+k_2)} \right)}_{\delta^{(4)}(k-k_1-k_2)} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 + m^2} \underbrace{\left(\int d^4 x_2 e^{-ix_2 k_1} J(x_2) \right)}_{J(k_1)} \\ & \times \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_2^2 + m^2} \underbrace{\left(\int d^4 x_3 e^{-ix_3 k_2} J(x_3) \right)}_{J(k_2)} = \\ & = -3g \int d^4 k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \delta^{(4)}(k - k_1 - k_2) \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 + m^2} J(k_1) \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_2^2 + m^2} J(k_2) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Quindi l'espressione precedente descrive un'interazione ad un vertice con tre linee: queste sono corrispondenti ai tre propagatori di particelle con 4-impulso k , k_1 e k_2 interagenti nel vertice stesso. Il vertice ne assicura la loro conservazione totale tramite il termine $\delta^{(4)}(k - k_1 - k_2)$ che limita l'integrazione ai processi per il quale $k = k_1 + k_2$. Dal momento che le particelle con 4-impulso k_1 e k_2 si propagano dalle sorgenti $J(k_1)$ e $J(k_2)$ al vertice, possiamo immaginare ad esempio che queste due particelle si propaghino dalla sorgente ed entrino nel vertice, interagiscono e generano una terza particella con quadrimomento k uscente. Tuttavia il verso del propagatore non è influente in questo esempio specifico in quanto il campo è un campo scalare reale. Il verso del propagatore acquista un significato fondamentale quando si descrivono campi complessi: in quel caso il verso del propagatore indica la direzione del flusso della carica. Per campi complessi invertire il propagatore (ossia la direzione del flusso di carica) corrisponde quindi ad invertire il segno della carica propagata e questo corrisponde, in analogia con quanto visto nello scattering pione-pione su un potenziale elettromagnetico, a descrivere l'antiparticella associata al campo piuttosto che la particella.

3.2 Regole di Feynman

Partendo dalla formulazione in termini di azione della teoria, come fatto nei capitoli precedenti, possiamo ricavare le così dette *regole di Feynman* che permettono di mettere in corrispondenza le espressioni analitiche con le rappresentazioni grafiche (e viceversa) dei campi.

Le rappresentazioni grafiche mediante i diagrammi di Feynman sono utili in quanto permettono di visualizzare i diversi modi di poter combinare vertici e propagatore, oltre che a mettere in luce i processi coinvolti tra particelle (virtuali) del campo.

3.2.1 Propagatori

Possiamo generalizzare quanto detto nella sezione precedente dicendo che ad ogni termine quadratico del campo che è presente nell'azione è associato un propagatore. Prendendo ad esempio l'azione per un campo reale

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \quad (3.2.1)$$

e valutando la sua espressione in termini di trasformate di Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) = \\ &= - \int d^4x \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \left(\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} e^{ik_1x} \phi(k_1) \right) \partial^\mu \left(\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{ik_2x} \phi(k_2) \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}m^2 \left[\left(\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} e^{ik_1x} \phi(k_1) \right) \left(\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{ik_2x} \phi(k_2) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int d^4x (ik_{1\mu}) e^{ik_1x} \phi(k_1) \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} (ik_2^\mu) e^{ik_2x} \phi(k_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int d^4k_2 \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} m^2 e^{ix(k_1+k_2)} \phi(k_1)\phi(k_2) = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int d^4k_2 \underbrace{(-k_{1\mu}k_2^\mu) \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2)} \phi(k_1)\phi(k_2)}_{\delta^{(4)}(k_1+k_2)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int d^4k_2 \underbrace{\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} m^2 e^{ix(k_1+k_2)} \phi(k_1)\phi(k_2)}_{m^2\delta^{(4)}(k_1+k_2)} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 \phi(k)\phi(-k) - \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} m^2 \phi(k)\phi(-k) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

utilizzando ora la condizione di campo reale, possiamo porre $\phi(-k) = \phi^*(k)$ ottenendo:

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi^*(k)(k^2 + m^2)\phi(k) \quad (3.2.3)$$

Notiamo quindi che nello spazio degli impulsi i termini quadratici del campo individuano una matrice diagonale. Il propagatore è identificato dall'inverso di questa matrice con il fattore di normalizzazione $1/2i$. Nel caso precedente la matrice è individuata dagli elementi $-\frac{1}{2}(k^2 + m^2)$ e il propagatore diventa:

$$\Delta(k) = \frac{1}{i(k^2 + m^2)} \quad (3.2.4)$$

dove possiamo eventualmente aggiungere al dividendo il termine $-i\epsilon$ per rendere esplicite le prescrizioni di Feynman-Stueckelberg, ottenendo un'espressione equivalente a quella ricavata nella (2.2.11). Possiamo generalizzare questa nozione anche ai campi complessi, modificando opportunamente il coefficiente di normalizzazione. La variazione del coefficiente di normalizzazione è causato dalla diversa espressione della densità di lagrangiana. Infatti:

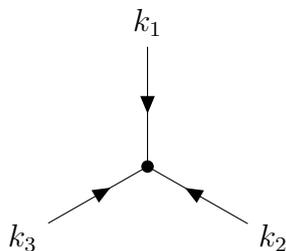
$$\mathcal{S} = - \int d^4x [(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) + m^2 \phi \phi^*] = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi^*(k)(k^2 + m^2)\phi(k) \quad (3.2.5)$$

e il propagatore è definito come i volte l'inverso di $-(k^2 + m^2)$.

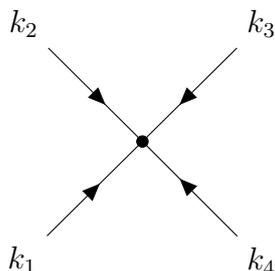
3.2.2 Vertici

Ai termini non quadratici nell'azione, ma che sono presenti come potenza di grado n possiamo associare un vertice con n linee. Naturalmente se il campo è quadratico nell'azione allora a questo termine corrisponderà un vertice a due linee (che appunto è il propagatore del campo, come indicato precedentemente). I termini di autointerazione sono i termini che compaiono alla terza o quarta potenza nella lagrangiana: a questi termini corrispondono vertici a tre o quattro linee (infatti questo tipo di vertici non possono essere ottenuti con campi non auto-interagenti). Il vertice è caratterizzato da una costante di accoppiamento g (il fattore moltiplicativo davanti alla potenza n del campo che entra nella lagrangiana). Inoltre la conservazione del quadri-momento implica che la somma di tutti i processi deve essere eseguita solo sui vertici in cui $\sum_i k_i = 0$.

Ad esempio, al termine $g\phi^3$ della lagrangiana di un campo auto-interagente corrisponde il diagramma di Feynman:



mentre al termine $g'\phi^4$ corrisponde un vertice del tipo



Osservando l'espressione (3.1.8), possiamo notare come il vertice di interazione induca anche un fattore moltiplicativo di $(2\pi)^4$. Possiamo quindi dire, seguendo le richieste precedenti, che a ogni vertice corrisponde un'espressione analitica nella forma

$$vertice = (2\pi)^4 ig \delta^{(4)}(\Sigma_i k_i). \quad (3.2.6)$$

Se il campo ϕ entra nella lagrangiana non tramite una sua diretta potenza, ma tramite la potenza di una sua derivata, come ad esempio nella lagrangiana

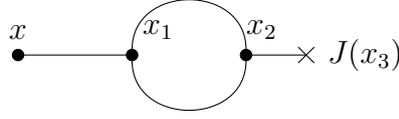
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - g\phi(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + J\phi \quad (3.2.7)$$

possiamo calcolare il nuovo contributo di questo vertice. In tal caso avremo un fattore moltiplicativo di ik_i aggiuntivo per ogni derivazione. Si può dimostrare che per esempio al termine $g\phi(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$ corrisponde un vertice con due coefficienti, ik e ik' che si moltiplicano e inducono un vertice nella forma

$$vertice = (2\pi)^4 ig(-k \cdot k') \delta^{(4)}(\Sigma_i k_i) \quad (3.2.8)$$

3.2.3 Loop chiusi

Per una trattazione completa della teoria quantistica occorre considerare anche i così detti *loop*. Questi processi emergono in modo spontaneo nella teoria dei campi quantistici, effettuando quindi la procedura di quantizzazione del campo. Possiamo tuttavia descrivere questi processi anche all'interno di una teoria di campo relativistica classica. Iniziamo notando che un loop chiuso può essere rappresentato come somma di vertici e propagatori. Ad esempio il diagramma:



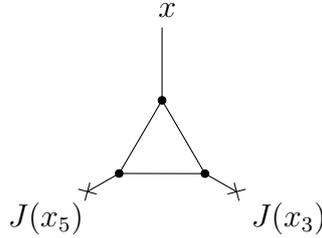
è la somma di due propagatori e due vertici a tre linee disposti in maniera alternata.

Le considerazioni su vertici e propagatori elencate nelle regole di Feynman ci permettono di associare un'espressione analitica ai diagrammi a loop. Per il diagramma precedente, che contiene una sorgente J , un loop chiuso e due propagatori possiamo scrivere l'espressione dell'interazione come:

$$\begin{aligned} \gamma \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1) \int d^4x_2 i\Delta(x_1-x_2)i\Delta(x_2-x_1) \times \\ \times \int d^4x_3 i\Delta(x_2-x_3)J(x_3) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

dove $\gamma = 18g^2$ è la costante di combinazione del processo che tiene conto del coefficiente di accoppiamento g associato ad ogni vertice e del numero di modi in cui tale diagramma può essere ottenuto attaccando i propagatori in modo diverso ad ogni vertice.

Il diagramma precedente è un diagramma a loop con due linee. Possiamo immaginare anche ad un diagramma a loop con tre linee del tipo

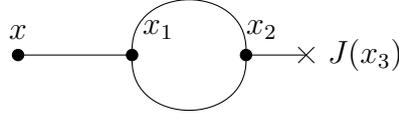


A tale diagramma corrisponderà l'espressione

$$\begin{aligned} \gamma' \int d^4x_1 i\Delta(x-x_1) \int d^4x_2 i\Delta(x_1-x_2) \int d^4x_3 i\Delta(x_2-x_3)J(x_3) \\ \int d^4x_4 i\Delta(x_2-x_4)i\Delta(x_1-x_4) \int d^4x_5 i\Delta(x_4-x_5)J(x_5) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

dove $\gamma' = -216g^3$ per le stesse motivazioni illustrate precedentemente. Per creare loop chiusi quindi occorre che i propagatori siano "circolari" sulle loro variabili, ossia che l'ultimo propagatore che appare all'interno dell'integrale colleghi la sua linea all'estremo di un propagatore precedente.

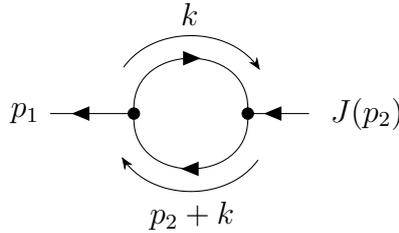
Può essere fornita in alternativa una rappresentazione sullo spazio dei momenti di questi diagrammi a loop. Ad esempio, prendendo il diagramma



questo avrà una rappresentazione del tipo

$$\begin{aligned} \gamma \int d^4 p_1 \frac{e^{ip_1 x}}{p_1^2 + m^2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 + m^2} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_2^2 + m^2} \delta(-p_1 + k_1 - k_2) \\ \times \int d^4 p_2 \frac{1}{p_2^2 + m^2} \delta(k_2 - k_1 + p_2) J(p_2) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

secondo le regole di Feynman per la rappresentazione di vertici e propagatori, in analogia anche con la (3.1.8). Notiamo che la (3.2.11) implica che tutti i processi integrati rispettino la relazione $k_1 - k_2 = p_1$ e $-k_1 + k_2 = -p_2$ e quindi che $p_1 = p_2$ (ossia che una particella che si propaga e autointeragisce secondo il diagramma precedente conservi il suo quadri-impulso). Nello spazio dei momenti il diagramma quindi assume la forma:



3.2.4 Scattering Pione-Pione

Applichiamo quanto visto prima ad un processo di diffusione pione-pione. I pioni presenti in natura posso avere o non avere carica elettrica: parleremo di particelle $\pi^{(\pm)}$ o di particelle $\pi^{(0)}$ rispettivamente. Come detto precedentemente, i campi associati a particelle cariche sono campi di natura complessa e dal momento che $\pi^{(+)}$ ha carica opposta a $\pi^{(-)}$ possiamo rappresentare queste particelle con un campo complesso ϕ e il suo coniugato ϕ^* , mentre $\pi^{(0)}$ con un campo scalare reale:

$$\begin{aligned} \pi^{(+)} &\mapsto \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \pi^{(-)} &\mapsto \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \pi^{(0)} &\mapsto \phi_3 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

dove ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 sono campo reali.

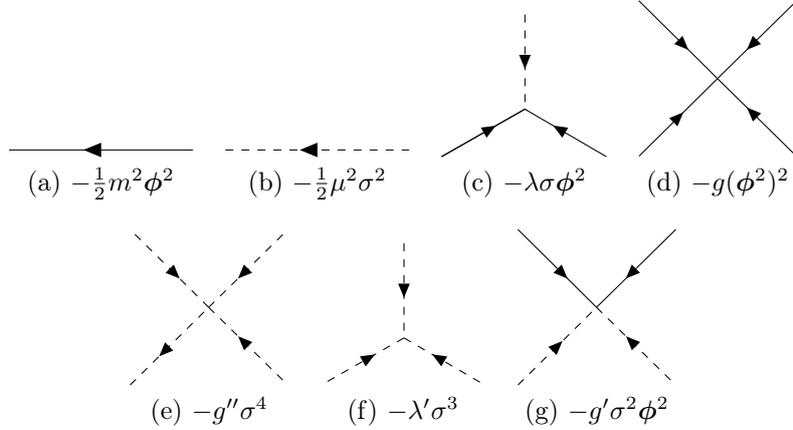


Figura 3.2: Diagrammi di Feynman associati alla lagrangiana (3.2.15)

Dal momento che $\pi^{(\pm)}$ e $\pi^{(0)}$ hanno massa quasi coincidente, possiamo pensare di organizzare i tre campi in un vettore a tre componenti:

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad (3.2.13)$$

applicare delle rotazioni a questo vettore significa effettuare le così dette *trasformazioni di isospin*. Ovviamente l'interazione elettromagnetica è sensibile a trasformazioni di questo tipo. Se infatti trasformiamo mediante una rotazione il vettore $\boldsymbol{\phi}$ in questo modo

$$(\phi_1, \phi_2, 0) \mapsto (0, 0, \phi_3) \quad (3.2.14)$$

questo equivale alla trasformazione $\pi^{(\pm)} \mapsto \pi^{(0)}$ che cambia l'interazione del caso di potenziali elettromagnetici¹. Assumendo che l'interazione pione-pione possa essere mediata da un campo σ possiamo scrivere la più generale lagrangiana del sistema come:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\phi})(\partial^\mu \boldsymbol{\phi}) - \frac{1}{2}m^2 \boldsymbol{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2}\mu^2 \sigma^2 \\ & - \lambda \sigma \boldsymbol{\phi}^2 - g(\boldsymbol{\phi}^2)^2 - g' \sigma^2 \boldsymbol{\phi}^2 - g'' \sigma^4 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

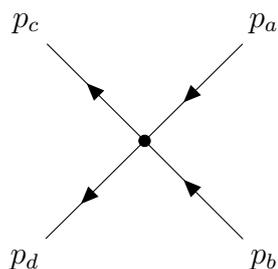
dove λ , g , g' , g'' sono costanti di accoppiamento e μ e m sono le masse dei mesoni σ e dei pioni rispettivamente. Grazie alle regole di Feynman possiamo già intuire dalla lagrangiana i diagrammi generati e questi sono stati riportati nella figura 3.2. Per trattare la diffusione pione-pione dobbiamo sottolineare che sono possibili due processi durante lo

¹Inizialmente la leggera differenza di massa tra i pioni era giustificata proprio con il diverso modo di accoppiarsi con il campo elettrico. Si pensava infatti che l'accoppiamento non banale con il campo elettrico era causa della leggera differenza di peso tra i pioni mediante la relazione massa-energia $E = mc^2$.

scattering: un'interazione *diretta*, rappresentata dal diagramma (d), o un'interazione *indiretta* mediata dal campo σ , generata dal vertice (c). Per questo processo considereremo due pioni entranti e due pioni uscendi dalla regione di interazione.

- *interazione diretta*

Questo tipo di interazione è associata al termine $g(\phi^2)^2$ e può essere rappresentata dal diagramma



con a, b, c e d indici di isospin. Al vertice di interazione è associato un coefficiente $8g$. Infatti ci sono 4 modi per collegare il primo propagatore (ad esempio quello associato all'indice a) e dopo aver scelto se collegare il secondo propagatore (ad esempio quello associato a b) con il primo o con uno dei due mancanti, vi sono altri due modi per collegare i restanti così che il coefficiente di accoppiamento contiene un termine aggiuntivo di $4 \times 2 = 8$ che esprime il *peso* di questo diagramma, calcolato come conteggi dei modi in cui questo può essere ottenuto². Il diagramma precedente quindi viene rappresentato con l'espressione seguente:

$$\text{vertice} = (2\pi)^4 i (-8g) \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d) [\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{db} + \delta_{ad}\delta_{bc}] \quad (3.2.16)$$

dove è stata usata la delta di Kronecker per indicare che una volta scelti gli indici di isospin per particelle entranti e uscendi il processo possibile è solo quello. Notiamo che sommando su tutti i valori dell'indice di isospin otteniamo un fattore di combinazione pari a 24, che è proprio il numero di modi di organizzare 4 propagatori in un vertice a 4 linee, ossia $4!$.

- *interazione tramite mesone σ*

L'interazione indiretta viene mediata dal campo σ . I tre tipi di diagrammi che possono essere ottenuti sono riportati nella Figura 3.3. Dato che in ogni vertice convergono tre linee, due associate al campo dei pioni e una associata al campo σ ,

²Dal momento che integriamo i vertici su tutti i punti dello spazio-tempo, al conteggio del peso del diagramma di Feynman non entreranno a far parte tutti i diagrammi che differiscono solo per la posizione dei vertici, ma solo quelli che differiscono nel modo in cui le linee dei propagatori vengono collegate sul vertice stesso.

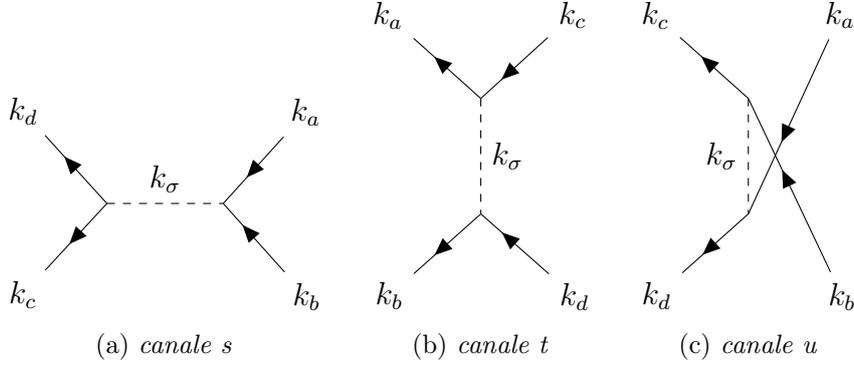


Figura 3.3: Diagrammi di Feynman associati alla diffusione pione-pione mediata da mesoni σ .

dobbiamo includere nell'espressione anche il propagatore di quest'ultimo che ha il compito di mediare l'interazione trasportando un quadri-momento k_σ . Ad esempio nel primo diagramma (a) il quadri-momento trasportato è $k_\sigma = k_a + k_b$, nel secondo diagramma (b) è $k_\sigma = k_a - k_c$ e nel terzo diagramma (c) è $k_\sigma = k_a - k_d$. Il quadri-momento trasportato viene assorbito nell'altro vertice e da luogo a diversi processi a seconda che nel vertice stesso entrambe le linee siano entranti o una entrante e una uscente: nel primo caso il quadri-momento scambiato tramite il campo σ darà origine ad una coppia di particelle uscenti dal vertice con quadri-impulso totale $k_{tot} = k_a + k_b$, mentre nel secondo caso il 4-impulso verrà assorbito dal pione entrante che modificherà il suo stato dando origine allo scattering. Il primo caso si riferisce al diagramma (a) (chiamato comunemente *canale s*) mentre il secondo ai diagrammi (b) e (c) (chiamati *canale t* e *canale u*).

Possiamo sintetizzare questi processi mediante l'espressione esplicita del diagramma

$$(2\pi)^4 i \delta(p_a + p_b - p_c - p_d) (4\lambda^2) \times \left[\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{(p_a + p_b)^2 + \mu^2} + \frac{\delta_{ac}\delta_{bd}}{(p_a - p_c)^2 + \mu^2} + \frac{\delta_{ad}\delta_{bc}}{(p_a - p_d)^2 + \mu^2} \right] \quad (3.2.17)$$

Il coefficiente $(4\lambda^2)$ deriva dal fatto che ad ogni vertice i due pioni possono essere collegati in due modi differenti. Per semplificare la (3.2.17) possiamo introdurre le variabili

$$\begin{aligned} - (p_a + p_b)^2 &= s \\ - (p_a - p_c)^2 &= t \\ - (p_a - p_d)^2 &= u \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

chiamate *variabili di Mandelstam*. Possiamo riscrivere la (3.2.17) come:

$$(2\pi)^4 i \delta(p_a + p_b - p_c - p_d) (4\lambda^2) \left[\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{\mu^2 - s} + \frac{\delta_{ac}\delta_{bd}}{\mu^2 - t} + \frac{\delta_{ad}\delta_{bc}}{\mu^2 - u} \right]. \quad (3.2.19)$$

Sott'intendendo che i processi siano compatibili con la conservazione del 4-impulso, possiamo non considerare nelle espressioni precedenti la funzione delta di Dirac e definire l'ampiezza invariante di scattering pione-pione come somma di processi diretti e indiretti, rappresentati dalla (3.2.19) e dalla (3.2.16):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi_a + \pi_b \mapsto \pi_c + \pi_d) = 4\lambda^2 \left[\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{\mu^2 - s} + \frac{\delta_{ac}\delta_{bd}}{\mu^2 - t} + \frac{\delta_{ad}\delta_{cb}}{\mu^2 - u} \right] \\ - 8g [\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{cb}] \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Concludiamo dicendo che come potevamo intuire sin dall'inizio, le ampiezze di scattering dipendono dai coefficienti di accoppiamento λ e g : se si tiene presente che questi ultimi infatti esprimono l'intensità dell'interazione $\pi - \sigma$ o dell'auto-interazione $\pi - \pi$ appare naturale che il primo entri con la potenza di secondo grado (per i canali s , t e u infatti si devono verificare due vertici) e il secondo con la potenza di primo grado (per l'auto-interazione è sufficiente un solo vertice).

Bibliografia

- [1] B. de Wit, J. Smith, *Field Theory in Particle Physics*, North-Holland Personal Library.
- [2] D. Tong, *Quantum Field Theory*, University of Cambridge.
- [3] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Benjamin /Cummings.
- [4] L.D. Landau, E.M.Lifsits, *Teoria dei campi*, Editori Riuniti.