

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

REDSHIFT GRAVITAZIONALE ASPETTI TEORICI E SPERIMENTALI

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Bruno Turati

Anno Accademico 2016/2017

ABSTRACT

Nella presente tesi si trattano gli aspetti teorici e sperimentali del Redshift Gravitazionale. Il primo passo è una breve introduzione alla teoria di Einstein, che inquadra il contesto nel quale si lavorerà. Nella parte teorica si forniscono due metodi per ricavare il Redshift gravitazionale, si introducono l'effetto Doppler relativistico e il problema di Keplero in Relatività Generale, concludendo con la quantificazione del Redshift e con un'applicazione speculativa ai buchi neri. Nella parte sperimentale si presenta l'esperimento di Pound e Rebka, passando poi allo studio delle Nane Bianche e alla determinazione mediante il Redshift del rapporto tra massa e raggio di questi corpi celesti, introducendo inoltre la problematica del disturbo dovuto all'effetto doppler e due metodologie per eliminarlo, una dinamica e una statistica.

Indice

1	Introduzione alla relatività generale	9
1.1	Principio di relatività generale	9
1.2	Principio di equivalenza	10
1.3	Principio di general covarianza	12
1.4	Equazioni di campo di Einstein	12
1.5	Lo spaziotempo di Schwarzschild	13
2	Aspetti Teorici	17
2.1	Redshift gravitazionale	17
2.1.1	Derivazione del redshift gravitazionale	18
2.1.2	Dilatazione gravitazionale dei tempi	21
2.2	Effetto Doppler relativistico	23
2.3	Problema di keplero	25
2.3.1	Problema di keplero in relatività generale	26
2.3.2	Soluzione perturbativa	29
2.4	Quantificare il redshift	32
2.5	Redshift e buchi neri	33
3	Aspetti sperimentali	37
3.1	Esperimento di Pound-Rebka	37
3.2	Nane bianche	39
3.2.1	Determinazione del rapporto tra massa e raggio	40
3.2.2	Sovrapposizione con l'effetto doppler	42

Introduzione

Il percorso seguito in queste pagine si propone di illustrare gli aspetti teorici e sperimentali del fenomeno del Redshift gravitazionale¹. Questo fenomeno è celebre in quanto rappresenta, assieme alla previsione teorica della precessione dell'orbita di mercurio e al fenomeno delle lenti gravitazionali, uno dei tre test classici della teoria della relatività generale.

Verrà dapprima presentata una breve introduzione alla relatività generale, volta ad inquadrare con precisione il contesto teorico nel quale verranno ricavate le previsioni riguardo ai fenomeni studiati. In questo contesto verrà inoltre presentata la soluzione di Schwarzschild per le equazioni di campo di Einstein, successivamente utilizzata nella trattazione riguardante il redshift gravitazionale. Va comunque precisato che l'utilizzo della metrica di Schwarzschild non è obbligatorio in quanto sarebbe sufficiente una generica metrica statica che soddisfi le equazioni di campo di Einstein. Comunque, data la sua relativa semplicità nonché la sua importanza storica², la scelta di utilizzare questa particolare soluzione è sostanzialmente quasi obbligata.

Nel secondo capitolo saranno delineati gli aspetti teorici alla base del fenomeno del redshift gravitazionale, congiuntamente ad altri aspetti utili nel

¹Al fine di alleggerire il testo ci si riferirà d'ora in poi al redshift gravitazionale semplicemente con il termine redshift, questo compatibilmente con la chiarezza del contesto.

²La soluzione di Schwarzschild fu la prima pubblicata, solo un anno dopo la pubblicazione da parte di Einstein delle equazioni di campo

seguito.

Dapprima sarà presentato un metodo geometrico, estremamente generico, per ricavare il fenomeno del redshift, seguito da uno più intuitivo ma meno rigoroso e con un ambito di validità maggiormente limitato.

Il primo metodo risulta di validità estremamente generale in quanto richiede solamente che la metrica sia statica, ossia che esista un vettore di Killing³ di tipo tempo⁴. Potremo allora scrivere un'equazione senza specificare in partenza la metrica, ma inserendola solo alla fine del procedimento.

Il secondo metodo richiederà invece di specificare da subito la metrica in cui si stia lavorando, permettendo però di sviluppare la trattazione in maniera maggiormente intuitiva. In realtà questo metodo ci permetterà di ricavare il redshift dalla dilatazione gravitazionale dei tempi, fornendoci direttamente una prova dell'intimo legame esistente tra questi due fenomeni. Questo legame fu utilizzato ai tempi in cui si cercava di ottenere delle prove sperimentali a sostegno della teoria Einsteiniana. Proprio Pound e Rebka, che nel 1959 misurarono lo spostamento verso il rosso delle linee spettrali fornendo un test della validità della Relatività Generale, idearono il loro esperimento come alternativa agli esperimenti che si stavano svolgendo in quel periodo che cercavano di confrontare orologi posti a diverse altitudini⁵. Ovviamente, il fatto che questi due fenomeni siano strettamente collegati è intuibile dal fatto che periodo e frequenza siano l'uno l'inverso dell'altro.

Andremo poi a sottolineare come assieme al fenomeno del Redshift sia be-

³Nell'ambito della geometria differenziale un vettore di Killing è definito come un'isometria, ossia come una legge di conservazione della metrica. Sostanzialmente si ha che la derivata covariante della metrica lungo un campo vettoriale di Killing si annulla.

⁴Se la derivata della metrica rispetto al tempo è nulla, risulta che la metrica sia descritta in una forma indipendente dal tempo i.e. statica

⁵Vedi articolo di Pound e Rebka

ne prendere in considerazione anche l'effetto Doppler relativistico⁶, in quanto anche questo agisce sulle frequenze e, in caso di un mescolamento tra i due effetti vedremo come si rendano necessari particolari accorgimenti o come talvolta l'effetto Doppler possa essere usato per misurare il redshift.

Per concludere il capitolo teorico, verrà preso in esame il problema di Keplero in Relatività Generale, per il quale verrà fornito un metodo risolutivo che, per altro, è proprio quello utilizzato per evidenziare la discrepanza tra le orbite classiche e quelle previste dalla Relatività Generale. La soluzione di tale problema sarà poi sfruttata nell'ambito dei sistemi binari.

Nell'ultimo capitolo tratteremo invece gli aspetti sperimentali del fenomeno considerato, presentando dapprima l'esperimento che fornì la conferma della validità di quanto ricavato teoricamente, per poi spostarci sull'utilizzo del redshift come strumento di indagine dell'universo che ci circonda.

Analizzando l'esperimento di Pound e Rebka si noterà come proprio l'effetto Doppler costituisca una sorta di tramite per misurare il redshift in termini di una quantità dinamica quale la velocità di un atomo.

Infine ci concentreremo sull'utilizzo della conoscenza teorica del Redshift gravitazionale per estrapolare informazioni dall'osservazione delle nane bianche, quali il rapporto tra massa e raggio dell'oggetto celeste. Saranno inoltre presentate le difficoltà dovute alla sovrapposizione dell'effetto doppler al redshift, con annesse soluzioni ideate per separare gli effetti dovuti all'uno e all'altro fenomeno.

⁶D'ora in avanti ci riferiremo solamente all'effetto Doppler relativistico, in quanto in una trattazione relativistica non ha alcun senso utilizzare il corrispondente classico

Capitolo 1

Introduzione alla relatività generale

Come prima cosa è necessario introdurre i fondamenti della teoria dalla quale emerge il fenomeno del Redshift Gravitazionale, ossia la celebre teoria della Relatività Generale, sviluppata dal fisico tedesco Albert Einstein agli inizi del '900 e pubblicata nel 1915.

La Relatività Generale nasce sostanzialmente dalla necessità di una teoria della gravitazione compatibile con la Relatività Ristretta, la quale, pur permettendo di descrivere l'elettromagnetismo in forma covariante, porta come conseguenza la non covarianza della teoria della Gravitazione Universale di Newton. La Relatività Generale adotta un approccio completamente diverso rispetto a tutta la fisica sviluppata in precedenza, descrivendo la gravità come un ente di natura geometrica, definendo così il potenziale gravitazionale come la curvatura della metrica e adottando il formalismo della geometria differenziale.

1.1 Principio di relatività generale

Dal punto di vista matematico la Relatività Speciale è caratterizzata dall'esistenza di particolari sistemi di riferimento (ovvero quelli inerziali) connessi

tra loro da trasformazioni appartenenti al gruppo di Poincarè. Affermare che le leggi della Fisica siano le stesse in ogni sistema di riferimento inerziale implica dunque che queste debbano coinvolgere esclusivamente quantità rappresentate da tensori sotto il gruppo di Poincarè e operazioni tensoriali tra queste quantità.

Passare dalla Relatività Speciale a quella Generale significa sostanzialmente richiedere che le leggi della Fisica siano le stesse in tutti i sistemi di riferimento, inerziali e non¹, formulando dunque il Principio di Relatività Generale. Dal punto di vista matematico questo si traduce nel fatto che le leggi della Fisica siano descritte da quantità tensoriali proprie della geometria differenziale.

Praticamente la Relatività Generale risolve i problemi legati al concetto ambiguo di osservatore inerziale, dovuti all'irrealizzabilità di un tale sistema in un apparato di misura che copra tutto lo spaziotempo, descrivendo un osservatore come un apparato di misura di dimensioni finite che si muove lungo una traiettoria nella varietà spaziotemporale. Partendo da un tale osservatore è dunque possibile, per mezzo degli strumenti matematici forniti dalla geometria differenziale, definire un sistema di riferimento in senso matematico, che copra una porzione più grande della varietà spaziotemporale.

1.2 Principio di equivalenza

Di fondamentale importanza è il Principio di Equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale, enunciabile come segue

Per ogni oggetto fisico la carica gravitazionale eguaglia la massa inerziale.

L'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale fornisce sostanzialmente la definizione di sistema di riferimento in caduta libera, che in Relatività Generale si sostituisce al concetto di sistema di riferimento inerziale.

¹Questo enunciato è esattamente il principio di relatività generale

Sappiamo che un sistema di riferimento inerziale è tale se non è soggetto ad alcuna forza e che le interazioni nucleari e quella elettromagnetica sono governate da cariche di entrambi i segni, permettendo dunque di avere oggetti con carica totale nulla per i quali queste interazioni svaniscono. Questo non è possibile però per l'attrazione gravitazionale, in quanto è mediata dalla massa, che è una grandezza definita positiva. Tuttavia se l'attrazione gravitazionale tra due oggetti non può annullarsi è comunque possibile eliminarne gli effetti considerando un sistema di riferimento in caduta libera.

Il famoso esperimento mentale di Einstein, considerando un osservatore chiuso in un ascensore in caduta libera, mostra come questo non possa in nessun modo determinare se è immerso in un campo gravitazionale o meno. Inoltre lo stesso esperimento mentale mostra come lo stesso osservatore chiuso in un ascensore, non può distinguere gli effetti di un campo gravitazionale da quelli di un'accelerazione.

Dunque nel contesto della Relatività Generale, un sistema di riferimento inerziale è un sistema di riferimento in caduta libera, che non ha velocità costante, restando tuttavia non soggetto ad alcuna forza.

Il Principio di Equivalenza, dal punto di vista matematico, implica che gli osservatori in caduta libera siano i "veri" osservatori inerziali, per i quali la connessione metrica si annulla lungo direzioni ortogonali in un certo punto P e in un suo intorno². In questi sistemi dunque le leggi della Fisica saranno descritte da equazioni tensoriali nel senso del gruppo di Lorentz locale. In accordo con il Principio di Relatività generale, diversi osservatori non inerziali vedranno dunque le leggi della Relatività Speciale come equazioni tensoriali nel senso della geometria differenziale.

²Volendo essere precisi, dal punto di vista matematico questo è vero solamente esattamente nel punto P , ma dal punto di vista della fisica, la nozione di zero si sostituisce con quella di abbastanza piccolo da poter essere trascurato, permettendo di estendere la validità di quanto affermato in un certo intorno di P

1.3 Principio di general covarianza

Il Principio di General Covarianza enuncia che

Le leggi della Fisica in un generico sistema di riferimento si ottengono dalle leggi della Relatività Speciale, sostituendo le quantità tensoriali del gruppo di Lorentz con quelle della varietà spaziotemporale.

codificando quanto affermato nella sezione precedente e mostrando che la Relatività Generale, di fatto, estende la Relatività Speciale a un qualunque sistema di riferimento.

Il fatto che per un osservatore in caduta libera la connessione metrica si annulli come accade per gli effetti gravitazionali, rappresenta un chiaro suggerimento rispetto al fatto che la Relatività Generale andrà a descrivere la gravitazione in maniera puramente geometrica.

1.4 Equazioni di campo di Einstein

A codificare la gravità come un frutto della curvatura della varietà spaziotemporale sono le equazioni di campo di Einstein. Pubblicate il 25 novembre 1915, sono un set di 10 equazioni differenziali alle derivate parziali che legano la curvatura dello spaziotempo espressa dal tensore di Einstein, alla presenza di massa e energia espressa dal tensore energia impulso. Possiamo scrivere le equazioni di Einstein nella forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci-Curbastro, R è la curvatura scalare e $g_{\mu\nu}$ è la metrica.

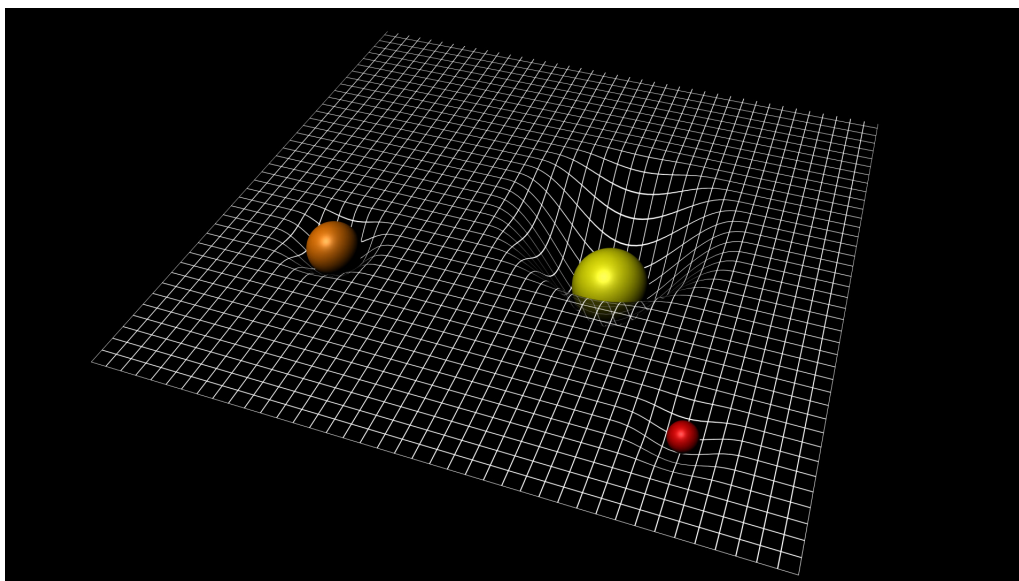


Figura 1.1: Una rappresentazione intuitiva dell'effetto della presenza di massa sulla curvatura della varietà spaziotemporale

Il membro sinistro dell'equazione è il tensore di Einstein ed è opportuno ricordare che tutte le quantità tensoriali del membro sinistro dell'equazione derivano dal tensore di curvatura di Riemann, il quale, a sua volta deriva dalla metrica, il che sostanzialmente implica che il membro sinistro possa essere espresso in soli termini della metrica, anche se risulterebbe decisamente complicato.

1.5 Lo spaziotempo di Schwarzschild

A solo un anno di distanza dalla pubblicazione da parte di Einstein delle equazioni di campo, il fisico tedesco Karl Schwarzschild pubblicò una soluzione, valida per un corpo a simmetria sferica, non rotante e con carica elettrica nulla. Questa soluzione, seppur rudimentale, permette di testare in maniera molto accurata la teoria della relatività generale, tanto che i tre test classici della teoria furono effettuati utilizzando nei calcoli proprio questa soluzione. Il ricavare matematicamente la soluzione di Schwarzschild esula dagli intenti

di questa tesi, e per questo ci si limiterà a presentare la soluzione facendo poi qualche considerazione in merito ad essa. Oltretutto sarà proprio questa la soluzione che utilizzeremo per studiare il fenomeno del redshift gravitazionale nel capitolo successivo.

Presentiamo allora la soluzione di Schwarzschild in forma di elemento di linea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.2)$$

La quantità $R_H = 2G_N M$ ha le dimensioni di una lunghezza, e per questo viene definita raggio di Schwarzschild. Si noti che per $r = R_H$ la metrica è singolare, mentre per $r < R_H$ la coordinata temporale diviene di tipo spazio, mentre quella radiale di tipo tempo. Un'ulteriore singolarità si ha per $r = 0$, e la sostanziale differenza tra le due è che la prima è eliminabile mediante un cambio di coordinate, mentre la seconda non lo è. Introducendo la coordinata radiale di Reggi-Weeler $r^* = r + 2G_N M \log\left(\frac{r}{2G_N M} - 1\right)$ per $r > 2G_N M$ la metrica si scrive

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) (-dt^2 + (dr^*)^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.3)$$

E successivamente introducendo la coordinata entrante nulla di Eddington-Finkelstein $v = t + r^*$ la metrica si scrive nella forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.4)$$

per la quale, a causa del termine misto, si può facilmente verificare la regolarità per $r = R_H$, il che mostra effettivamente il fatto che la singolarità sia eliminabile.

Capitolo 2

Aspetti Teorici

In questo capitolo concentreremo l'attenzione sugli aspetti teorici relativi al fenomeno del Redshift Gravitazionale.

Vedremo inizialmente come ricavare questo effetto nel contesto della Relatività Generale, utilizzando un metodo geometrico per ricavarlo in maniera indipendente dalla particolare scelta della metrica¹

Verificheremo inoltre come il Redshift Gravitazionale abbia una controparte nella Dilatazione Gravitazionale dei Tempi, ossia il fenomeno per cui all'aumentare dell'intensità del campo gravitazionale aumenti la frequenza degli orologi. Ricaveremo anche un effetto dovuto alla teoria della Relatività Speciale, ossia l'effetto Doppler relativistico, che servirà nel capitolo successivo per spiegare la procedura utilizzata nell'esperimento di Pound-Rebka, nonché per lo studio delle Nane Bianche.

2.1 Redshift gravitazionale

Il Redshift Gravitazionale è un fenomeno previsto dalla teoria della Relatività Generale, secondo cui la frequenza di un fotone è influenzata dalla curvatura dello spaziotempo, risultando spostata verso il rosso nel caso in cui il fotone si

¹come già detto sarà sufficiente una qualsiasi metrica statica

muova cercando di "risalire" un campo gravitazionale, e verso il blu qualora si muova in direzione opposta.

Va precisato che, per quanto il fenomeno vada storicamente sotto il nome di Redshift, lo spostamento delle frequenze può andare sia verso il rosso che verso il blu; l'utilizzo del termine Redshift è dovuto al fatto che la principale possibilità di osservazione di tale effetto si ha per la luce proveniente da una stella, che deve "risalire" un forte campo gravitazionale, risultando dunque spostata verso il rosso.

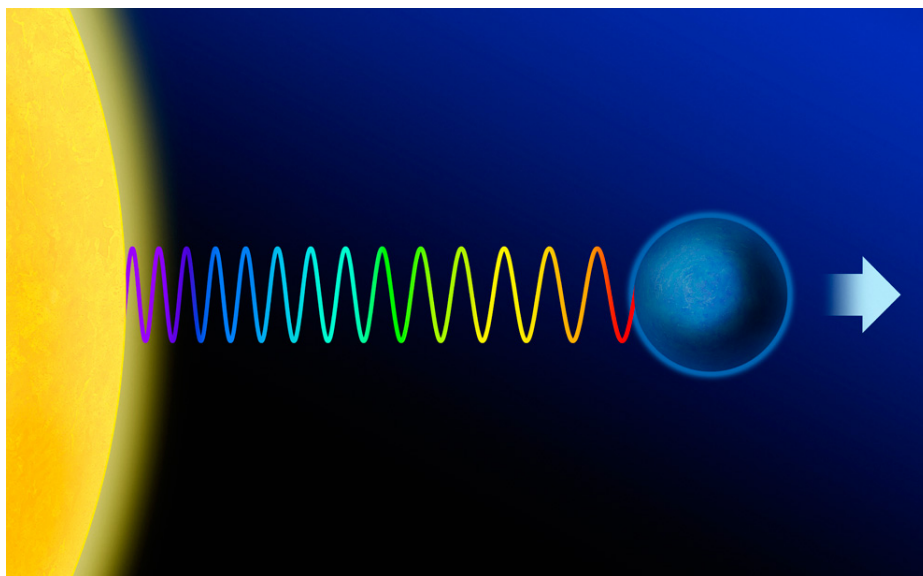


Figura 2.1: Una rappresentazione del Redshift Gravitazionale sperimentato dalla luce emessa dalla superficie di una stella

2.1.1 Derivazione del redshift gravitazionale

In questa sezione si andrà a ricavare una descrizione del Redshift Gravitazionale in maniera molto generale. L'unica condizione posta per questo metodo, di tipo geometrico, è l'esistenza di un vettore di Killing di tipo tempo, il che corrisponde alla richiesta che la metrica sia statica. Consideriamo una sorgente e un osservatore qualunque, collegati fra loro dalla traiettoria di un

fotone. Dalla staticità della metrica, e dunque dall'esistenza di un vettore di Killing di tipo tempo, possiamo definire l'energia di killing:

$$E = -K^\mu u_\mu \quad (2.1)$$

dove u^μ è la quadrivelocità del fotone. Dalle proprietà del vettore di Killing, risulta che, lungo la traiettoria del fotone, la quantità appena definita si conservi, ossia:

$$\frac{dE}{d\lambda} = 0 \quad (2.2)$$

Bisogna comunque notare che l'energia di Killing non risulta dimensionalmente un'energia. La chiamiamo così solo per convenzione e per il fatto che, alla stregua dell'energia, è una quantità conservata. A questo punto poniamo una restrizione sui sistemi di riferimento di sorgente e osservatore, richiedendo che siano statici. Questa condizione si traduce nel fatto che la quadrivelocità di un sistema di riferimento statico deve essere proporzionale al vettore di Killing (questo è proprio il modo di definire un osservatore statico in relatività generale). Risulta comunque che, per un qualsiasi osservatore statico, $U^\mu U_\mu = -1$, mentre il vettore di Killing non è normalizzato. possiamo allora scrivere:

$$U^\mu = \frac{K^\mu}{\sqrt{K^\mu K_\mu}} \quad (2.3)$$

che risulta valida sia per la sorgente che per l'osservatore. A questo punto possiamo scrivere l'energia² vista dalla sorgente come:

$$\nu_S = -U^\mu_S u_\mu = -\frac{K^\mu u_\mu}{\sqrt{K^\mu K_\mu}} = \frac{E}{\sqrt{K^\mu K_\mu}} \quad (2.4)$$

E analogamente possiamo scrivere l'energia vista dall'osservatore come:

$$\nu_O = -U^\mu_O u_\mu = -\frac{K^\mu u_\mu}{\sqrt{K^\mu K_\mu}} = \frac{E}{\sqrt{K^\mu K_\mu}} \quad (2.5)$$

Si noti che il fattore di normalizzazione di K in realtà contiene una metrica, che può dipendere dalla posizione sulla varietà spaziotemporale. Infatti si ha

$$K^\mu K_\mu = g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = g_{tt} \quad (2.6)$$

A questo punto possiamo considerare il rapporto tra l'energia vista dall'osservatore e quella vista dalla sorgente, ottenendo:

$$\nu_O \nu_S = \sqrt{\frac{(K^\mu K_\mu)_S}{(K^\mu K_\mu)_O}} \quad (2.7)$$

²qua si parla di un energia nel senso proprio del termine

Possiamo quindi scrivere un'espressione estremamente generale per il Redshift Gravitazionale, avendo richiesto solamente la staticità della metrica e dei sistemi di riferimento.

$$\nu_O = \nu_S \sqrt{\frac{g_{ttS}}{g_{ttO}}} \quad (2.8)$$

Che, utilizzando la metrica di Schwarzschild diventa

$$\nu_O = \nu_S \sqrt{\frac{1 - \frac{R_H}{r_s}}{1 - \frac{R_H}{r_o}}} \quad (2.9)$$

Mentre, nel caso della metrica piatta di Minkovski risulta assente il fenomeno del Redshift Gravitazionale

$$\nu_O = \nu_S \quad (2.10)$$

2.1.2 Dilatazione gravitazionale dei tempi

Un fenomeno che avviene in concomitanza con il Redshift Gravitazionale è la Dilatazione Gravitazionale dei Tempi. In questa sezione ricaveremo questo fenomeno, per poi utilizzarlo al fine di ottenere nuovamente il Redshift Gravitazionale. Il procedimento seguito sarà però meno generale di quello utilizzato in precedenza, in quanto richiede direttamente che sia data una metrica, nel nostro caso quella di Schwarzschild.

Supponiamo di avere una sorgente e un osservatore statici, questo significa

che nella metrica si annullano tutti gli elementi tranne quello temporale, possiamo allora scrivere:

$$d\tau_s = \sqrt{1 - \frac{R_H}{r_s}} dt \quad (2.11)$$

$$d\tau_o = \sqrt{1 - \frac{R_H}{r_o}} dt \quad (2.12)$$

Possiamo quindi ricavare dt dall'equazione della sorgente, notando comunque che questo rappresenta solamente una coordinata, non il tempo di un osservatore. Abbiamo dunque:

$$dt = \frac{d\tau_s}{\sqrt{1 - \frac{R_H}{r_s}}} \quad (2.13)$$

A questo punto sostituiamo dt nell'equazione dell'osservatore ottenendo:

$$d\tau_o = d\tau_s \sqrt{\frac{1 - \frac{R_H}{r_o}}{1 - \frac{R_H}{r_s}}} \quad (2.14)$$

Ora, supponendo che un fenomeno accada con periodo τ_s per la sorgente, risulta che lo stesso fenomeno abbia un periodo osservato τ_o per l'osservatore. Possiamo facilmente passare alla frequenza prendendo il reciproco, riottenendo la formula per il Redshift Gravitazionale.

Questo secondo procedimento risulta sicuramente meno astratto, ma sicuramente, da solo, non chiarisce se la presenza del Redshift sia un fenomeno dovuto alla particolare metrica utilizzata o un fenomeno più generico, che

dipende sia dalla particolare forma della metrica, ma si può ricavare a prescindere dal fatto che questa sia fornita o meno. Sicuramente per una trattazione maggiormente formale serve il primo metodo, infatti il secondo è stato presentato per rendere maggiormente intuitiva la trattazione ma va considerato più come una precisazione, che peraltro ci ha permesso di collegare il Redshift alla Dilatazione Gravitazionale dei Tempi.

2.2 Effetto Doppler relativistico

Come già detto, sarà necessario ricavare un effetto dovuto alla relatività speciale, utile in quanto l'esperimento di Pound-Rebka, che tratteremo nel secondo capitolo, lo sfrutta al fine di misurare l'entità dello spostamento delle frequenze creando delle condizioni in cui questo fenomeno vada ad annullare gli effetti del Redshift. Inoltre, come vedremo, sarà importante anche nello studio delle Nane Bianche, in quanto il suo "mescolamento" con il Redshift ne renderà necessaria la conoscenza al fine di separare una sorta di "rumore" dagli spostamenti in frequenza dovuti alla gravità.

Il fenomeno in questione è l'effetto Doppler (relativistico) che sostanzialmente ci indica che il moto relativo tra sorgente e osservatore modifica la frequenza percepita di un'onda. Per il fatto che questo va a "disturbare" la stessa grandezza su cui agisce il Redshift Gravitazionale è evidente come la conoscenza di questo fenomeno sia fondamentale al fine di evitare errori nella misurazione.

Consideriamo dunque un raggio luminoso di frequenza ν emesso con un angolo θ rispetto all'asse x nel sistema di riferimento a riposo con la sorgente. Specifichiamo per chiarezza che la direzione di propagazione giace nel piano xy .

Consideriamo ora un secondo sistema di riferimento in moto rispetto al primo con velocità v diretta lungo l'asse x , dato che la fase di un'onda è relativisticamente invariante (ossia uno scalare sotto trasformazioni di Lorentz)

possiamo scrivere:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \theta + y \sin \theta - \lambda \nu t) = \frac{2\pi}{\lambda'} (x' \cos \theta' + y' \sin \theta' - \lambda' \nu' t') \quad (2.15)$$

Ora, possiamo usare le trasformazioni di Lorentz per scrivere le coordinate primare in termini di quelle non primare, ottenendo:

$$\frac{x \cos \theta}{\lambda} + \frac{y \sin \theta}{\lambda} - \nu t = \frac{x - vt}{\lambda' \sqrt{1 - \beta^2}} \cos \theta' + \frac{y \sin \theta'}{\lambda'} - \nu' \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.16)$$

Dove le lunghezze d'onda sono state portate all'interno delle parentesi. Raccogliendo a destra per t e x e utilizzando la relazione $\nu = \frac{c}{\lambda}$ si ottiene:

$$\frac{x \cos \theta}{\lambda} + \frac{y \sin \theta}{\lambda} - \nu t = \frac{x \cos \theta' + \beta}{\lambda' \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{y \sin \theta'}{\lambda'} - \nu' t \frac{1 + \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.17)$$

Per fare sì che il membro destro dell'equazione sia uguale al membro sinistro è sufficiente imporre che siano uguali i coefficienti di x, y e t. Per quanto ci riguarda, l'effetto doppler relativistico si ottiene dal termine in t, che contiene la frequenza, imponendo l'uguaglianza sopra citata si avrà

$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.18)$$

È evidente che, nel caso relativistico, l'effetto Doppler non dipenda solamente dalla componente longitudinale del moto relativo tra sorgente e osservatore, bensì interviene una componente trasversale. Possiamo allora separare i due casi, ottenendo per $\theta' = 0$ o $\theta' = \pi$ l'effetto Doppler longitudinale

$$\nu_L = \nu' \frac{1 \pm \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \quad (2.19)$$

nel caso in cui $\theta' = \pm \frac{\pi}{2}$ si ha invece l'effetto Doppler trasversale

$$\nu_T = \frac{\nu'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.20)$$

2.3 Problema di keplero

Lo scopo di questa sezione è quello di fornire la soluzione del problema di Keplero in Relatività Generale. Questa soluzione, sarà utilizzata nel secondo capitolo in relazione alla misurazione del Redshift Gravitazionale per nane bianche facenti parte di sistemi binari. Vedremo che la conoscenza del problema di Keplero porterà a poter separare gli spostamenti di frequenze dovuti al moto della stella da quelli dovuti al Redshift Gravitazionale.

Va specificato che, dato che si vuole risolvere il problema per descrivere dei sistemi binari in cui i due corpi hanno masse simili, bisognerà utilizzare la massa ridotta per il corpo di cui si vuole ricavare l'orbita. Dunque le orbite ricavate saranno attorno al centro di massa del sistema binario.

2.3.1 Problema di keplero in relatività generale

Per un corpo in relatività generale possiamo scrivere la Lagrangiana nella forma

$$L = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.21)$$

dove il punto indica la derivazione rispetto al tempo proprio τ . Le equazioni del moto saranno date allora dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (2.22)$$

Analogamente al caso Newtoniano, in conseguenza della conservazione del momento angolare, il piano dell'orbita rimane costante³. In particolare il piano sarà individuato dalla velocità iniziale e dalla congiungente tra i centri di massa dei due corpi. Notiamo a questo punto che, volendo utilizzare la soluzione di Schwarzschild, per risolvere il problema di Keplero, una scelta opportuna di θ come inclinazione del piano dell'orbita, porterà a semplificare notevolmente la trattazione. Ovviamente l'arbitrarietà nella scelta dell'inclinazione è data dall'isotropia dello spazio, che rende ininfluyente dunque la particolare scelta fatta. In particolare sceglieremo $\theta = \pi/2$, per il quale risulta $g_{\phi\phi} = r^2$.

Fatte queste considerazioni possiamo scrivere la lagrangiana nella forma

$$L = - \left(1 - \frac{R_H}{r} \right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{R_H}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = -c^2 \quad (2.23)$$

³questo implica il fatto che $d\theta = 0$

L'ultima eguaglianza risulta giustificata dalla 2.21, notando che $ds = cd\tau$.

Se la Lagrangiana di un sistema $L(q, \dot{q})$ non dipende da una particolare coordinata generalizzata⁴ q_i il teorema di Noether afferma che si ha una legge di conservazione per la quantità $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Infatti, sotto queste condizioni, le equazioni di Eulero Lagrange 2.22 si scrivono come

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \quad (2.24)$$

La Lagrangiana 2.21 in particolare non dipende dalle coordinate t e ϕ , il che ci fornisce i due integrali primi del moto:

$$\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2r^2 \dot{\phi} \quad (2.25)$$

$$-2c^2\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -2 \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 \quad (2.26)$$

Moltiplicando la 2.21 per $m/2(1 - R_H/r)$ si ottiene l'equazione

$$-\frac{m}{2} \left(1 - \frac{R_H}{r}\right)^2 c^2 \dot{t}^2 + \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{2} \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) = -\frac{mc^2}{2} \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) \quad (2.27)$$

⁴cosicchè si abbia $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$

Utilizzando poi le espressioni 2.25 e 2.26 per sostituire $\dot{\phi}$ e \dot{t} con gli integrali primi del moto otteniamo

$$\frac{m\alpha^2}{8r^2} \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) + \frac{mr^{\dot{2}}}{2} - \frac{mc^2\beta}{2} = -\frac{mc^2}{2} \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) \quad (2.28)$$

Ora, rinominando le costanti come $\frac{\alpha^2}{4} = \frac{l^2}{m^2}$ e $\frac{\beta-1}{2} = \frac{\kappa}{mc}$ otteniamo la forma

$$\frac{mr^{\dot{2}}}{2} + \left(1 - \frac{R_H}{r}\right) \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{G_N m M}{r} = \kappa \quad (2.29)$$

Possiamo facilmente vedere che, a meno del fattore $\left(1 - \frac{R_H}{r}\right)$ la 2.29 non è altro che il bilancio energetico di un sistema non relativistico. Il termine che causa la differenza dalla situazione classica può essere interpretato come una correzione all'energia potenziale dovuta ad una forza con andamento inverso della quarta potenza di r .

A questo punto vediamo che la 2.29 è un'equazione differenziale che, risolta fornirebbe $r(\tau)$, ma per scrivere l'equazione dell'orbita siamo interessati a ottenere $r(\phi)$. A questo proposito possiamo vedere che dalla 2.25, rinominando la costante come fatto nell'equazione precedente, possiamo ottenere proprio un'espressione che lega $d\phi$ e $d\tau$

$$2r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{2l}{m} \Rightarrow d\tau = \frac{mr^2}{l} d\phi \quad (2.30)$$

Sostituendo dunque la 2.30 nella 2.29 otteniamo

$$\frac{l}{2r^2} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \left(1 - \frac{R_H}{r} \right) \frac{l^2}{2mr} - \frac{G_N m M}{r} = \kappa \quad (2.31)$$

A questo punto può essere utile effettuare la sostituzione $r = 1/u$ $\frac{dr}{d\phi} = \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}$ che porta a scrivere l'equazione come

$$u'^2 + u^2 - 2\chi u - R_H u^3 = C \quad (2.32)$$

Dove si è posto $\chi = \frac{G_N M m^2}{l^2}$ e $C = \frac{2m\kappa}{l^2}$. Ora è la 2.32 l'equazione da risolvere per ottenere l'orbita.

2.3.2 Soluzione perturbativa

L'equazione 2.32 può essere risolta separando $u = u_0 + u_r e l$ con u_0 dato dall'equazione 2.32 senza il termine in u^3

$$u_0'^2 + u_0^2 - 2\chi u_0 = C \quad (2.33)$$

Che, differenziando rispetto a ϕ e dividendo per $2u_0'$ si riconduce all'equazione di un oscillatore armonico

$$u_0'' + u_0 = \chi^{-1} \quad (2.34)$$

In particolare abbiamo a che fare con un oscillatore armonico di variabile $u_0 - \chi^{-1}$ con frequenza angolare pari all'unità. La soluzione per il moto di un oscillatore armonico è

$$u_0 - \chi^{-1} = \frac{e}{\chi} \cos(\phi) \quad (2.35)$$

Avendo scelto l'ampiezza in modo che, tornando ad r la soluzione si possa scrivere come

$$r = \frac{\chi}{1 + e \cos(\phi)} \quad (2.36)$$

Se adesso si sostituisce $u = u_0 + u_1$ nella 2.32

$$(u_0 + u_1)'^2 + (u_0 + u_1)^2 - 2\chi(u_0 + u_1) - R_H(u_0 + u_1)^3 = C \quad (2.37)$$

e si considera che, dato che u_0 è grande rispetto a u_1 , si può fare l'approssimazione $(u_0 + u_1)^3 \simeq u_0^3$. Allora possiamo scrivere l'equazione

$$\left(u_0'{}^2 + u_0^2 - \frac{2}{\chi}u_0 - C \right) + \left(2u_0'u_1 + 2u_0u_1 - \frac{2}{\chi}u_1 - R_Hu_0^3 \right) = 0 \quad (2.38)$$

Dalla 2.33 segue che il contenuto delle prime parentesi si annulla, lasciando dunque

$$2u'_0u'_1 + 2u_0u_1 - \frac{2}{\chi}u_1 = R_H u_0^3 \quad (2.39)$$

Dove u_0 e u'_0 sono dati dalla soluzione imperturbata 2.35. Dunque l'equazione per u_1 è data da

$$-e \sin(\phi) \frac{du_1}{d\phi} + e \cos(\phi) u_1 = \frac{R_H (1 + e \cos(\phi))^3}{2\chi^2} \quad (2.40)$$

La cui soluzione è data da

$$u_1 = \frac{R_H}{2\chi^2} \left[(3 + 2e^2) \frac{1 + 3e^2}{e} \cos(\phi) - e^2 \cos(\phi)^2 + 3e\phi \sin(\phi) \right] \quad (2.41)$$

Della quale è significativo solamente l'ultimo termine, il che, tornando ad r fornisce per le orbite l'equazione

$$r = \frac{\chi}{1 + e \cos(\phi) + \epsilon e \phi \sin(\phi)} \quad (2.42)$$

Abbiamo così ottenuto la soluzione al problema di Keplero in relatività generale, il che ci porta a chiudere l'omonima sezione.

2.4 Quantificare il redshift

Pur avendo studiato il fenomeno del Redshift, non abbiamo ancora dato un metodo per quantificarlo, questo è molto semplice, basterà infatti definire la quantità di Redshift come

$$\Delta\nu = \nu_o - \nu_s = \nu_s \left(\sqrt{1 - \frac{R_H}{r_s}} - 1 \right) \quad (2.43)$$

Dove nel secondo passaggio è stata usata la 3.2. La quantità di Redshift così definita ha le dimensioni di una frequenza e non è altro che la differenza tra la frequenza osservata e quella emessa. Possiamo facilmente definire anche una quantità relativa di Redshift, dividendo la quantità di Redshift 2.43 per la frequenza di emissione, e ottenendo

$$z = \frac{\Delta\nu}{\nu_s} = \frac{\nu_o - \nu_s}{\nu_s} = \sqrt{1 - \frac{R_H}{r_s}} - 1 \quad (2.44)$$

Il vantaggio di questo metodo è quello di eliminare la dipendenza dalla frequenza che si aveva in 2.43. Un uso comune nell'ambito dell'astronomia è quello di fornire la quantità di Redshift dando la velocità che l'astro studiato dovrebbe avere affinché l'effetto Doppler produca un analogo spostamento di frequenza. Questo corrisponde sostanzialmente a definire lo spostamento in frequenza dovuto ad un ipotetico effetto Doppler⁵

⁵i segni sono dati dalla scelta di $\theta' = 0$

$$\Delta\nu_{Doppler} = \nu_s \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \right) \quad (2.45)$$

A questo punto basterà eguagliare lo spostamento Doppler ipotetico a quello ottenuto dall'osservazione del Redshift e risolvere per β

$$\beta = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2} \quad (2.46)$$

Infine, ricordando che $\beta = v/c$ possiamo scrivere

$$v = c \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2} \quad (2.47)$$

2.5 Redshift e buchi neri

Dalla teoria della Relatività Generale, emerge la possibilità di oggetti dai quali nemmeno la luce possa sfuggire, appunto per questa proprietà questi oggetti vengono chiamati buchi neri⁶. In questa sezione si vuole analizzare brevemente come si possa di fatto ammettere la possibilità dell'esistenza di un oggetto con le caratteristiche di un buco nero, basandosi esclusivamente su considerazioni riguardanti il Redshift Gravitazionale.

Dal momento che la frequenza di un fotone che risale un campo gravitazionale diminuisce, sorge spontaneo chiedersi cosa possa determinare uno

⁶il termine "buco nero" fu coniato dal fisico statunitense John Archibald Wheeler nel 1967

spostamento tale da annullare completamente la frequenza del fotone emesso. Consideriamo all'ora l'espressione per la frequenza osservata 2.9 e poniamo quest'ultima uguale a zero

$$\omega_O = \omega_S \sqrt{\frac{1 - \frac{R_H}{r_s}}{1 - \frac{R_H}{r_o}}} = 0 \quad (2.48)$$

è immediato vedere che, se la frequenza emessa non è nulla, caso che non presenta alcun aspetto interessante in quanto rappresenta solamente l'assenza di emissione, si deve annullare la quantità sotto radice

$$\frac{1 - \frac{R_H}{r_s}}{1 - \frac{R_H}{r_o}} = 0 \quad (2.49)$$

dove si è elevato al quadrato, senza modificare assolutamente nulla. A questo punto, basterà che si annulli il numeratore, ossia che si abbia

$$r_s = R_H \quad (2.50)$$

Quello che possiamo dire rispetto al risultato ottenuto è che, qualora esista un oggetto avente raggio pari (o inferiore, anche se questo non è evidenziato da questo metodo) al suo raggio di Schwarzschild, non si potrebbe in alcun modo osservare la luce emessa da esso. Infatti, la frequenza di osservazione sarebbe nulla per qualunque distanza di osservazione. L'indipendenza dalla distanza di osservazione deriva semplicemente dal fatto che il denominatore della 2.49 non gioca nessun ruolo, fatta eccezione per un eventuale valo-

re pari al raggio di Schwarzschild, per il quale però il procedimento svolto risulterebbe quantomeno poco sensato.

Possiamo dunque affermare che un oggetto che soddisfi alla condizione appena ricavata sia a tutti gli effetti un buco nero, anche se è necessario notare che questi argomenti non dimostrano assolutamente l'ammissibilità dell'esistenza di un siffatto oggetto. Semplicemente si può affermare che, qualora l'esistenza di un buco nero sia ammissibile, il che è questione riguardante la fisica della materia degenere, le sue dimensioni dovranno essere legate al suo raggio di Schwarzschild.

Capitolo 3

Aspetti sperimentali

Dopo aver analizzato gli aspetti teorici del Redshift Gravitazionale sposteremo ora l'attenzione su quelli sperimentali. Vedremo come l'esperimento di Pound-Rebka misurò lo spostamento verso il blu di un fotone discendente radialmente nel campo gravitazionale terrestre, fornendo così una delle tre prove della Relatività Generale. Vedremo poi come si possono sfruttare le conoscenze ottenute per indagare l'universo che ci circonda. In particolare ci concentreremo sullo studio delle nane bianche, stelle per le quali il Redshift Gravitazionale risulta particolarmente accentuato.

3.1 Esperimento di Pound-Rebka

Una volta ottenuta la previsione teorica di un effetto è necessario provvedere a fornire una verifica sperimentale a sostegno della teoria. L'esperimento di Pound e Rebka, i cui risultati furono pubblicati il 15 ottobre 1959, fornì una prova sperimentale di quanto previsto dalla teoria di Einstein.

Al tempo si lavorava ad esperimenti riguardo alla Dilatazione Gravitazionale dei Tempi, che è come abbiamo visto, la controparte del Redshift Gravitazionale. Per questi esperimenti si cercava di confrontare le frequenze di orologi sulla superficie terrestre e su aeroplani in quota. Pound e Rebka

pensarono però che sarebbe stato più semplice misurare il Redshift tra due punti fissi a differenti altitudini.



Figura 3.1: Pound

Praticamente l'esperimento proposto consisteva nell'emissione di raggi gamma da una certa altezza h verso il basso. I raggi gamma emessi avrebbero avuto frequenza pari a quella necessaria per una transizione in un atomo bersaglio. Dal punto di vista qualitativo si poteva verificare la presenza di Redshift (anche se in realtà si dovrebbe parlare più propriamente di blueshift) semplicemente dal fatto che non si verificasse alcuna transizione. Questo indicherebbe infatti che qualcosa ha modificato la frequenza del fotone emesso all'altezza h che, una volta raggiunto il bersaglio non si trova più in risonanza con esso.

Un passo ulteriore può essere fatto muovendo il bersaglio verso la sorgente con una velocità variabile, a questo punto si avrà un effetto doppler che contrasta il Redshift, e, quando l'effetto doppler pareggia il Redshift, ossia vale:

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c} \frac{1 - \frac{2G_N M}{(R+h)c^2}}{1 + \frac{v}{c} \frac{2G_N M}{Rc^2}}}{1 + \frac{v}{c} \frac{2G_N M}{Rc^2}}} = 1 \quad (3.1)$$



Figura 3.2: Rebka

si potrà calcolare facilmente il Redshift conoscendo la velocità del bersaglio. Con questa metodologia Pound e Rebka furono in grado dunque di fornire una prova sperimentale della validità della teoria della Relatività Generale di Einstein che, storicamente, rientra nei tre test classici della Relatività Generale.

3.2 Nane bianche

Dopo aver ricavato il fenomeno del Redshift Gravitazionale dalla teoria della Relatività Generale e aver visto come questo è stato confermato sperimentalmente da Pound e Rebka, passiamo a studiare l'applicazione della conoscenza di questo fenomeno. Risulterà che le nane bianche sono una categoria di corpi celesti favorevole all'osservazione del Redshift gravitazionale e il proposito di questa sezione è proprio quello di mostrarne il motivo.

Vedremo dapprima come l'entità del Redshift è influenzata dal rapporto tra massa e raggio di un corpo celeste, mostrando poi come si possa utilizzare lo studio del Redshift Gravitazionale per ottenere questo rapporto.

Analizzeremo inoltre la problematica della sovrapposizione dell'effetto Doppler al Redshift gravitazionale, fornendo successivamente due diversi metodi per affrontare il problema. Uno dei metodi sarà dinamico, mentre l'altro avrà un carattere puramente statistico.

3.2.1 Determinazione del rapporto tra massa e raggio

Il problema che ci poniamo inizialmente è quello di trovare una situazione in cui il Redshift Gravitazionale risulti abbastanza intenso da produrre effetti apprezzabili, e dunque relativamente semplici da osservare. Si può facilmente dimostrare che l'intensità del Redshift che subisce la luce emessa da un oggetto massivo che raggiunge un osservatore distante è proporzionale al rapporto tra la massa dell'oggetto e il raggio dello stesso. Possiamo infatti sfruttare il fatto che la metrica di Schwarzschild sia asintoticamente piatta, ossia che per $r \rightarrow \infty$ risulta $g_{tt} \rightarrow 1$. Nell'approssimazione in cui la distanza dell'oggetto osservato sia grande rispetto al suo raggio di Schwarzschild possiamo dunque scrivere l'espressione del Redshift Gravitazionale come

$$\nu_o = \nu_s \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_s}} \quad (3.2)$$

rendendo evidente la proporzionalità sopra citata. Tra le varie tipologie di corpi celesti le Nane Bianche risultano favorevoli all'osservazione, dato che hanno masse simili a quella del Sole, ma dimensioni simili a quelle della Terra. Una Nana Bianca è sostanzialmente l'ultima fase dell'evoluzione di una stella di dimensioni piccole o medio piccole, per intenderci, ha una massa vicina a quella del sole. Una volta finite le reazioni nucleari una stella di questa massa è soggetta al collasso gravitazionale e, dato che la massa non è sufficiente ad innescare reazioni nucleari da parte dei costituenti, la forza gravitazionale viene compensata solo dalla pressione degli elettroni degeneri.

La fisica della materia degenera impone che la massa limite per avere una Nana Bianca sia di 1,44 masse solari (limite di Chandrasekar), al di sopra del quale si avrà una Nova o una Supernova. Una Nana Bianca ha dunque una massa simile a quella del Sole e un raggio simile a quello della Terra, questo significa che è un oggetto molto denso e con una gravità superficiale molto forte.

Oggi il Redshift Gravitazionale è utilizzato per indagare la struttura interna di queste stelle, consentendo dunque una verifica delle nostre conoscenze a riguardo. Il Redshift Gravitazionale fornisce informazioni riguardo al rapporto tra massa e raggio dell'astro, il che, assieme a misure relative agli spettri di emissione, permette di conoscere separatamente massa e raggio dell'oggetto studiato. Le misure spettroscopiche permettono infatti di ottenere informazioni riguardo al rapporto tra massa e quadrato del raggio, va da se che, conoscendo questi due rapporti si ha un sistema di due equazioni in due incognite che può essere risolto con della banalissima aritmetica.

Possiamo mostrare come lo studio del Redshift Gravitazionale fornisca informazioni riguardo al rapporto tra massa e raggio della stella studiata, a questo proposito, considerando l'equazione 3.2, possiamo elevare a quadrato e isolare il rapporto ottenendo:

$$\frac{M}{r} = \frac{1}{2G} \sqrt{1 - \frac{\nu_o^2}{\nu_s^2}} \quad (3.3)$$

Abbiamo così mostrato come lo studio del Redshift Gravitazionale possa fornire interessanti informazioni riguardo ai corpi celesti osservati, anche se dobbiamo analizzare ancora le problematiche che possono sorgere dall'osservazione

3.2.2 Sovrapposizione con l'effetto doppler

Un problema non insignificante sorge dal disturbo dovuto al moto del corpo celeste che si desidera studiare; infatti questo moto produrrà un effetto Doppler che, sovrapponendosi al Redshift, renderebbe impossibile distinguere con esattezza tra lo spostamento in frequenza dovuto all'uno o all'altro effetto. Fortunatamente, per sistemi binari di stelle, è possibile ottenere le informazioni dinamiche necessarie ad eliminare il "disturbo Doppler", mentre negli altri casi è possibile procedere con metodi statistici. Ipotizzando infatti di osservare diverse nane bianche succederà che mediamente il disturbo dovuto all'effetto Doppler si annulli, lasciando solo il Redshift. Cerchiamo allora di vedere più nel dettaglio ciascuno dei due casi.

Sistemi binari

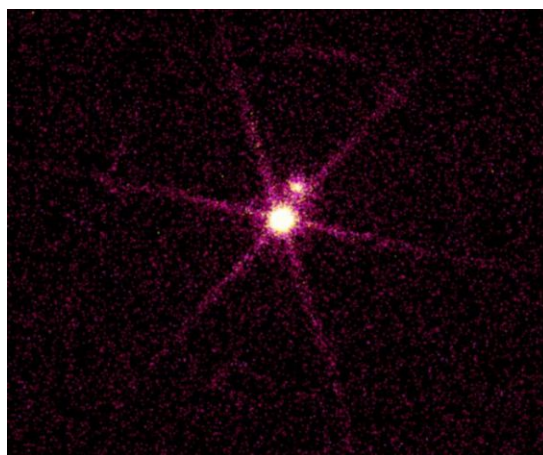


Figura 3.3: Il sistema binario composto da Sirio A e dalla nana bianca Sirio B

Prendiamo in esame una Nana Bianca facente parte di un sistema binario di stelle. Quello che vogliamo fare è sfruttare la soluzione del problema di Keplero al fine di determinare la velocità di spostamento dell'oggetto osservato rispetto all'osservatore. Volendo semplificare la trattazione, il problema

può considerarsi risolto determinando un modo di calcolare la velocità tangenziale del corpo osservato, conoscendo questo dato, la determinazione della effettiva velocità di spostamento rispetto all'osservatore si riconduce a pure questioni geometriche riguardanti principalmente l'inclinazione dell'orbita osservata rispetto alla direzione di osservazione. Determinare la velocità relativa tra l'osservatore e l'astro, corrisponde esattamente a determinare β e, grazie a questa informazione risulterà possibile tenere conto dell'effetto Doppler nella determinazione del rapporto tra massa e raggio della Nana Bianca studiata. Per fare ciò dovremo prendere la (3.1) e invertirla al fine di ottenere il rapporto tra massa e raggio

$$\frac{M}{r} = (2G)^{-1} \left(\frac{\nu_o^2}{\nu_s^2} \frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta} - 1 \right) \quad (3.4)$$

l'espressione così ottenuta permette dunque di "eliminare" il disturbo dovuto all'effetto Doppler. Ovviamente il problema che sarebbe sorto usando la (3.3) invece della (3.4) sarebbe stato quello di sovrastimare o sottostimare il Redshift a seconda che la sorgente studiata si stesse avvicinando o allontanando.

Distribuzioni aleatorie

Per quanto riguarda invece le Nane Bianche non facenti parte di un sistema binario, non è possibile ottenere le informazioni dinamiche necessarie a distinguere lo spostamento dovuto all'effetto Doppler da quello dovuto al Redshift Gravitazionale. Questo problema è tuttavia aggirabile se si decide di considerare un grande numero di oggetti con caratteristiche simili, il che, dato l'elevato numero di stelle nel cielo, è sempre possibile. Così facendo risulterà che le velocità saranno distribuite con media nulla, in modo che i numeri di oggetti in allontanamento e in avvicinamento si bilancino. Avendo

considerato una moltitudine di oggetti simili risulterà allora possibile ricavare il rapporto medio tra massa e raggio dei corpi celesti.

Vediamo ora come è possibile ottenere il risultato appena descritto. Ipotizziamo di aver osservato un grande numero di oggetti simili, per ciascuno di essi varrà sicuramente la (3.1), alla quale aggiungeremo degli indici che si riferiscano all'oggetto studiato.

$$\nu_{oi}^2 = \nu_{si}^2 \frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta} \left[1 - 2G \left(\frac{M}{r} \right)_i \right] \quad (3.5)$$

Questa equazione può essere facilmente riscritta nella forma

$$\left(\frac{M}{r} \right)_i = \frac{1}{2G} \left(1 - \frac{\nu_{oi}^2}{\nu_{si}^2} \frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta} \right) \quad (3.6)$$

A questo punto, se vale ciascuna delle relazioni, sarà certamente valida la loro somma, moltiplicata per il fattore $\frac{1}{N}$ dove N è il numero di oggetti presi in esame:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \left(\frac{M}{r} \right)_i = \frac{1}{2NG} \sum_{i=0}^N \left(1 - \frac{\nu_{oi}^2}{\nu_{si}^2} \frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta} \right) \quad (3.7)$$

Il membro sinistro dell'equazione altro non è che la media del rapporto tra massa e raggio fatta sul campione di oggetti studiati, possiamo allora scrivere:

$$\left\langle \frac{M}{r} \right\rangle = \frac{1}{2G} \left(\frac{\sum_{i=0}^N 1}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\nu_{oi}^2}{\nu_{si}^2} \frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta} \right) = \frac{1}{2G} \left(1 - \left\langle \frac{\nu_o^2}{\nu_s^2} \right\rangle \right) \quad (3.8)$$

Dove nel secondo passaggio è stato trascurato il termine dovuto all'effetto Doppler, supponendo che questo si annulli per un numero abbastanza elevato di oggetti. Questo è possibile in quanto il termine dovuto all'effetto Doppler e il rapporto tra i quadrati delle frequenze presenti nella somma non sono correlati; in tali condizioni risulta che la media del prodotto è pari al prodotto delle medie, e, data la distribuzione che si è ipotizzata per β risulta $\langle\beta\rangle = 0$, da cui il termine risulta ininfluenza. Siamo dunque riusciti a ricavare un'espressione valida per le medie, che permette di annullare il disturbo dovuto all'effetto Doppler semplicemente studiando al posto che un singolo oggetto, un numero sufficientemente elevato di oggetti abbastanza simili tra di loro.

Commenti finali

Nel presente testo si è cercato di delineare con chiarezza un percorso illustrativo di un fenomeno dall'aspetto esotico, inquadrato nel contesto di una teoria tanto affascinante quanto spesso poco intuitiva.

L'intento è stato quello di rendere la trattazione il più possibile auto-consistente e chiara nelle sue parti; realizzato partendo da un'introduzione alla teoria della Relatività Generale e separando poi gli aspetti teorici del fenomeno del Redshift Gravitazionale da quelli sperimentali, facendo sempre in modo di trattare nel capitolo teorico le premesse necessarie a quanto poi presentato nel capitolo sperimentale.

Oltre alla comprensione del modo in cui un particolare fenomeno emerge da un contesto teorico è necessario capire come poterne verificare la validità, fornendo appunto una verifica di una teoria inizialmente concepita per piegare altro. Andando ancora oltre, si può pensare a come la descrizione di un particolare fenomeno possa rappresentare uno strumento di indagine rispetto a ciò che ci circonda e, nel fare questo, occorre riflettere bene a dove guardare per dare alle nostre conoscenze un valore aggiunto, trasformandole in una sorta di nuovo strumento attraverso il quale scrutare qualcosa che prima, pur essendo sotto gli occhi di tutti, risultava invisibile.

Quanto appena detto rappresenta il percorso seguito, mosso dalla volontà di delineare l'evoluzione della conoscenza del Redshift Gravitazionale, da frutto di una teoria formulata per spiegare altro a verifica della teoria stessa e, infine, a strumento di indagine dell'universo, capace di porci di fronte nuove scoperte e nuovi interrogativi: capace di mostrarci il fascino e l'eleganza della Fisica.

Bibliografia

- [1] Ta-Pei Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology: A basic introduction*
- [2] R. V. Pound and G. A. Rebka, *Gravitational redshift in nuclear resonance*(1959)
- [3] Casadio Roberto, *Dispense del corso di Elementi di Teoria della Relatività*
- [4] . L. Greenstein and V. L. Trimble, *The Einstein redshift in white dwarfs*