

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Tensore energia-impulso di un buco nero di Schwarzschild

Relatore:  
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:  
Daniele Rossi

Anno Accademico 2016/2017

Ai miei genitori

## Sommario

Il presente elaborato si occupa dello studio del tensore energia-impulso di un buco nero di Schwarzschild, ossia di un buco nero a simmetria sferica, non rotante e neutro. Solitamente, nei libri di testo (si veda ad esempio [4, 12]), la metrica di Schwarzschild viene presentata come una soluzione di vuoto dell'equazione di Einstein, la quale si ottiene imponendo l'annullamento del tensore energia-impulso all'esterno della sorgente gravitazionale. Inoltre, essendo il risultato indipendente dalle dimensioni della sorgente, quest'ultima viene assunta concentrata in una sfera di coordinata d'area nulla, la quale viene solitamente esclusa dallo spazio-tempo, poiché individua una singolarità reale della curvatura [4]. Procedendo in tal modo, tuttavia, non risulta del tutto chiara la ragione della curvatura della varietà di Schwarzschild. Lo scopo della tesi è quello di mostrare che, nel caso di una sorgente "puntiforme", non è possibile fornire un'espressione ben definita per il tensore energia-impulso, inteso come una distribuzione tensoriale (si veda [13]). Nel capitolo 1 vengono brevemente richiamate alcune nozioni fondamentali di Geometria Differenziale [5, 11] e di Teoria delle Distribuzioni [13]. Successivamente, nel capitolo 2, utilizzando le tecniche distribuzionali presentate nel capitolo 1, si dimostra che le componenti miste del tensore energia-impulso di un buco nero di Schwarzschild costituiscono le componenti distribuzionali di una distribuzione tensoriale ben definita: una delta di Dirac (con degli opportuni coefficienti moltiplicativi per motivi dimensionali) concentrata nella regione di coordinata d'area nulla [1]. Tuttavia, per una sorgente "puntiforme", non è possibile definire il tensore energia-impulso (in senso distribuzionale) con entrambi gli indici in basso (o in alto). Di conseguenza, è necessario concludere che il tensore energia-impulso di una sorgente "puntiforme" non risulta ben definito, nel senso di distribuzione tensoriale [7].

# Ringraziamenti

Ringrazio i miei genitori per avermi sempre supportato nel mio percorso di studi e per avermi sempre incitato a credere in me stesso.

Ringrazio il mio relatore per la sua disponibilità e per i preziosi consigli.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Geometria Differenziale e Teoria delle Distribuzioni</b>	<b>7</b>
1.1 Varietà differenziabili . . . . .	7
1.1.1 Definizione di varietà . . . . .	7
1.1.2 Vettori e 1-forme . . . . .	9
1.1.3 Campi tensoriali . . . . .	13
1.1.4 Tensore metrico . . . . .	14
1.1.5 Curvatura . . . . .	16
1.2 Distribuzioni . . . . .	17
1.2.1 Distribuzioni in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	17
1.2.2 Distribuzioni in una varietà differenziabile . . . . .	18
1.2.3 Distribuzioni tensoriali . . . . .	20
<b>2 Tensore energia-impulso di un buco nero di Schwarzschild</b>	<b>22</b>
2.1 Derivazione della metrica di Schwarzschild . . . . .	22
2.1.1 L'equazione di Einstein . . . . .	22
2.1.2 La metrica di Schwarzschild . . . . .	25
2.2 Reinterpretazione del tensore metrico in senso distribuzionale . . . . .	29
2.3 Tensore energia-impulso in senso distribuzionale . . . . .	32
2.3.1 Tensore di Ricci . . . . .	32
2.3.2 Limite distribuzionale . . . . .	34
<b>Conclusioni</b>	<b>39</b>
<b>A Calcolo del tensore di Ricci</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>

# Introduzione

I buchi neri sono indubbiamente alcuni tra gli oggetti più affascinanti ed estremi che esistono nell'universo. Essi sono caratterizzati da un'attrazione gravitazionale così intensa che nessun segnale, nemmeno la luce, può scappare da loro. Da un punto di vista formale, si definisce *buco nero* la regione di spazio-tempo interna ad un orizzonte degli eventi [12]. Un *orizzonte degli eventi* è il confine nello spazio-tempo tra eventi che possono comunicare con osservatori distanti ed eventi che non possono [12]. La precedente definizione di orizzonte degli eventi assume che osservatori distanti esistano e che lo spazio-tempo sia asintoticamente piatto, ossia, a grandi distanze dalla sorgente gravitazionale, il tensore metrico si riduce al tensore metrico di Minkowski. Il fenomeno di formazione di un orizzonte degli eventi è legato al collasso gravitazionale di materia in una regione dello spazio-tempo, tale da originare un'attrazione gravitazionale così intensa da intrappolare ogni cosa al suo interno.

Una tipologia di buco nero è fornita dai buchi neri di origine stellare (*stellar-mass black holes*), originati dal collasso gravitazionale di stelle massicce. Nel 1931, Chandrasekhar individuò una massa limite  $M_{\text{Ch}}^1$ , nota come *limite di Chandrasekhar*, oltre la quale una stella che collassa non produce una nana bianca stabile. L'attrazione gravitazionale risulterebbe, infatti, così intensa da prevalere sulla pressione di radiazione del gas degenere di elettroni, il quale, in condizioni di equilibrio, mantiene stabile la nana bianca stessa. Il collasso gravitazionale innesca la fusione di elettroni e protoni portando alla formazione di una *stella di neutroni*, tenuta in equilibrio dalla pressione quantomeccanica del gas degenere di neutroni [5]. Successivamente, nel 1939, Oppenheimer e Volkoff calcolarono, usando i risultati di Tolman, una massa limite  $M_{\text{TOV}}^2$ , nota come *Limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*, oltre la quale una stella di neutroni non risulta stabile. A questo punto non esiste alcuna forza (nota) in natura capace di prevenire il collasso gravitazionale della materia in un "punto" [5]. Tuttavia, un buco nero isolato, formato dal collasso di una stella massiccia, sarebbe molto difficile da identificare. Infatti, sebbene esso possa acquistare piccole quantità di gas muovendosi nel mezzo interstellare, tale gas non riuscirebbe ad emettere una quantità sufficiente di radiazione

---

<sup>1</sup>Stime risalenti al 2007 forniscono il valore  $M_{\text{Ch}} \approx 1.38M_{\odot}$ , dove si è indicata con  $M_{\odot}$  la massa del Sole [8].

<sup>2</sup>Stime risalenti al 1996 individuano  $M_{\text{TOV}}$  compresa tra 1.5 e  $3.0M_{\odot}$  [3].

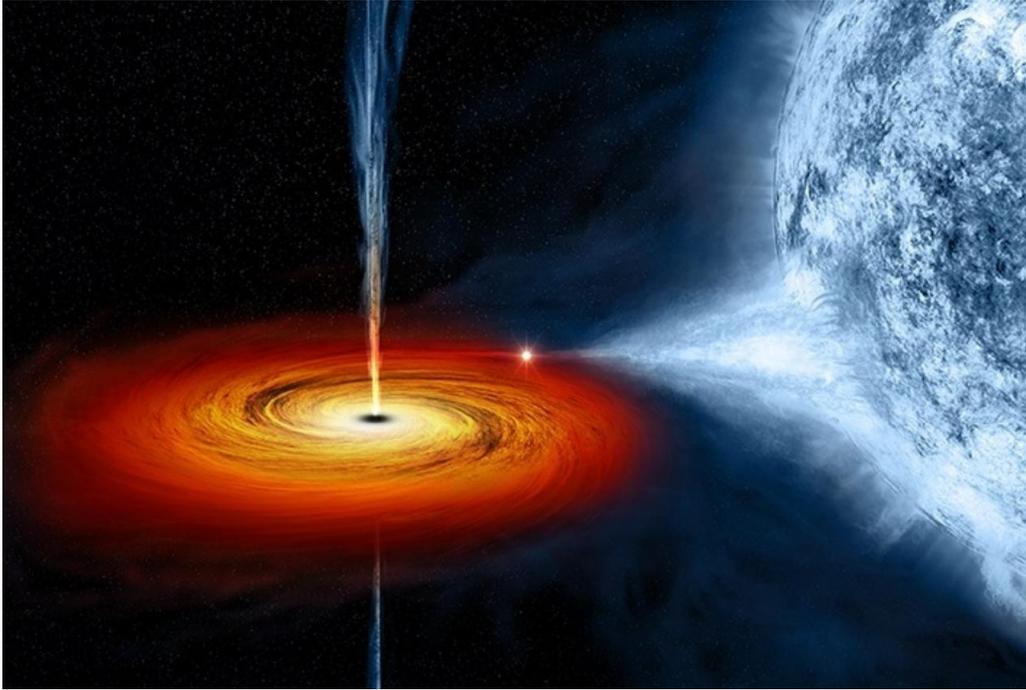


Figura 1: Rappresentazione artistica di un sistema binario costituito da un buco nero di origine stellare in coppia con una supergigante blu. Si noti il disco di accrescimento formato dal gas che fluisce dalla supergigante blu verso il buco nero. Sono riprodotti anche i getti di raggi X, emessi dal gas che spiraleggia cadendo nel buco nero. Crediti: NASA.

X tale da poter essere misurata, prima di essere inghiottito dal buco nero [12]. A prova di ciò, si consideri che tutti i buchi neri di origine stellare noti si trovano in sistemi binari, dove la stella compagna<sup>3</sup> è così grande che parte del suo gas nelle regioni esterne le viene sottratto dal buco nero. Poiché si trova in un sistema binario, il gas proveniente dalla stella compagna possiede momento angolare e forma un disco di accrescimento attorno al buco nero. La presenza di attrito, che può essere dovuta a turbolenze o alla presenza di campi magnetici, fa spiraleggiare il gas, il quale, cadendo nel buco nero, cede energia e momento angolare. Parte dell'energia viene convertita in energia interna del gas, che si riscalda fino a temperature dell'ordine di  $10^6 K$ , in modo tale che il suo spettro di emissione presenta un massimo alla lunghezza d'onda dei raggi X [12]. Una rappresentazione artistica di un sistema binario di questo tipo è riportata in figura 1. È proprio cercando sorgenti di raggi X nell'universo che gli astronomi identificano possibili candidati a ricoprire il ruolo di buco nero. Gli astronomi distinguono i buchi neri dalle stelle di neutroni (anch'esse spesso presenti in sistemi binari di questo tipo) misurandone, ad

---

<sup>3</sup>Solitamente una gigante rossa o una supergigante blu.

esempio, la massa. Se la massa è inferiore alla massa limite  $M_{TOV}$  l'oggetto è identificato come una stella di neutroni, altrimenti vi sono buone ragioni per ipotizzare che si tratti di un buco nero. La massa dell'oggetto compatto è stimata misurando la velocità e il raggio dell'orbita della stella compagna (sfruttando lo spostamento delle righe spettrali per effetto Doppler) e la massa di quest'ultima (sempre osservandone lo spettro, usando, ad esempio, la nota relazione massa-luminosità) [12]. Le masse dei buchi neri di origine stellare noti sono comprese tra un minimo di circa  $5M_{\odot}$  ed un massimo di circa  $70M_{\odot}$ <sup>4</sup> [12].

Un importante teorema valido in astrofisica è il teorema *no-hair*, il quale afferma che un buco nero stazionario è caratterizzato soltanto da tre parametri fisici: la massa  $M$ , il momento angolare  $J$  e la carica elettrica  $Q$ . Nel presente elaborato si tratteranno esclusivamente i buchi neri di Schwarzschild, ossia i buchi neri a simmetria sferica, non rotanti e neutri. Idealmente, un buco nero di questo tipo dovrebbe essere originato dal collasso perfettamente sferico di una sorgente isolata. Tuttavia, è facilmente intuibile che, in natura, una situazione tale è praticamente impossibile. Un processo di formazione più realistico dovrebbe tener conto del fatto che i buchi neri si originano da situazioni dinamiche ben più complicate e, anche una volta che si sono formati, continuano a partecipare alla dinamica: come membri di sistemi binari, come centri di accrescimento di gas e come sorgenti di radiazione gravitazionale [12]. La formazione di un orizzonte degli eventi da una situazione iniziale dove non c'è un buco nero mette in evidenza la natura dinamica dell'orizzonte stesso. Si consideri, ad esempio, il collasso gravitazionale di una stella sferica, statica e neutra in un buco nero. Durante il collasso si verifica una situazione intermedia, durante la quale l'orizzonte degli eventi cresce, passando da una coordinata d'area nulla al suo valore finale, il quale, nel caso di un buco nero di Schwarzschild, è pari al raggio di Schwarzschild  $r_H$  della sorgente, definito nella (2.19). Una rappresentazione (schematica) di quanto appena affermato è illustrata in figura 2. Man mano che la coordinata temporale  $t$  aumenta il suo valore<sup>5</sup>, la stella collassa e l'orizzonte degli eventi si sposta a valori di  $r$  via via maggiori. Le linee tratteggiate rappresentano fotoni emessi dal centro della stella che collassa ad istanti di tempo successivi. Il fotone (a) emerge dalla sorgente senza essere disturbato dal campo gravitazionale, ancora non sufficientemente intenso. Il fotone (b) subisce un certo ritardo. Infine, il fotone (c) è il fotone che rimane intrappolato sull'orizzonte degli eventi ed è quello che segna il confine nello spazio-tempo tra eventi intrappolati ed eventi liberi di comunicare con l'esterno. Il fotone (c) rappresenta dunque l'orizzonte degli eventi ad ogni istante di tempo, essendo quest'ultimo definito proprio come il confine nello spazio-tempo tra ciò che è intrappolato nel buco nero e ciò che non lo è. In una situazione dinamica più complicata in cui ulteriore gas cade (in maniera sferica, per semplicità) nel buco nero, aumentandone la massa, anche

---

<sup>4</sup>Si tratta di un buco nero che si trova nel sistema binario M33 X-7, nella galassia M33.

<sup>5</sup>Il significato fisico di questo "tempo" è discusso nel paragrafo 2.1.2.

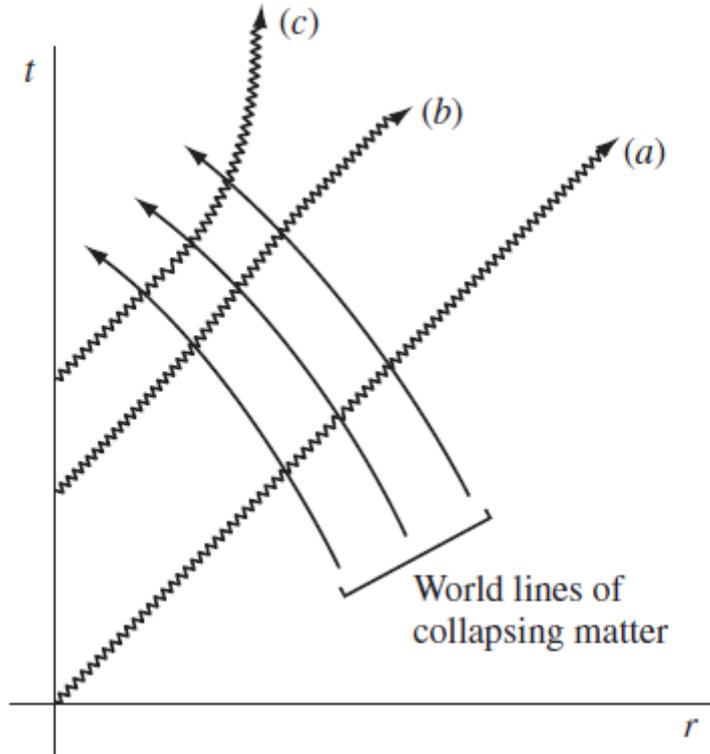


Figura 2: Rappresentazione schematica di un collasso sferico nello spazio-tempo. Il fotone (a) non è disturbato, il fotone (b) subisce un leggero ritardo e il fotone (c) rappresenta l'orizzonte degli eventi che cresce con continuità dal valore  $r = 0$  al valore  $r = r_H$ . Crediti: [12].

l'orizzonte degli eventi di quest'ultimo cresce a valori di  $r$  maggiori<sup>6</sup>. L'orizzonte degli eventi che si aveva prima dell'aggiunta di gas non era il reale orizzonte degli eventi dello spazio-tempo, ma solo una *superficie localmente intrappolante*, ossia una superficie per la quale, ad un certo istante di tempo, le geodetiche di tipo luce uscenti hanno espansione<sup>7</sup> nulla. Il precedente esempio illustra il fatto che l'orizzonte degli eventi non è un luogo nello spazio, ma un confine nello spazio-tempo. In particolare, per un corpo celeste che collassa (come una supernova) è necessario conoscere, in linea di principio, l'intero futuro dell'oggetto rimanente dopo l'esplosione iniziale al fine di determinare il vero orizzonte degli eventi dello spazio-tempo [5].

In quanto segue, si eviterà di discutere queste (assai più complicate) situazioni dina-

<sup>6</sup>Si noti dalla (2.19) che  $r_H$  è direttamente proporzionale alla massa della sorgente gravitazionale.

<sup>7</sup>Si intende il tasso di variazione dell'area del guscio di luce lungo la geodetica di tipo luce.

niche e ci si concentrerà su di un buco nero di Schwarzschild già formato, stazionario e nel vuoto, caratterizzato da un unico parametro fisico: la sua massa  $M$ , in accordo col teorema no-hair. Solitamente, nella letteratura [4, 12], la metrica di Schwarzschild viene ottenuta come soluzione dell'equazione di Einstein nel vuoto, dove il tensore energia-impulso è identicamente nullo. Sfruttando la staticità e la simmetria sferica della sorgente gravitazionale si ottiene un'espressione per la metrica dello spazio-tempo di Schwarzschild che non dipende dalle dimensioni della sorgente stessa. Per tal motivo, la sorgente può essere considerata completamente contenuta all'interno dell'orizzonte degli eventi del buco nero di Schwarzschild. In particolare, si può assumere che la sorgente sia interamente concentrata in una sfera di area nulla, caratterizzata dall'annullarsi della coordinata d'area di Schwarzschild [5]. Tuttavia, tale regione viene solitamente esclusa dallo spazio-tempo stesso, poiché rappresenta una singolarità reale dello spazio-tempo. All'annullarsi della coordinata d'area, infatti, le forze di marea descritte dal tensore di Riemann tramite lo scalare di Kretschmann divergono, come risulta evidente dalla (2.26). Sotto queste ipotesi ci si potrebbe, allora, chiedere quale sia la ragione della curvatura della varietà di Schwarzschild. Da un lato, la metrica di Schwarzschild è derivata sfruttando la condizione che il tensore energia-impulso sia nullo, proprio come accade nello spazio-tempo piatto di Minkowski. Dall'altro, la sorgente è concentrata in una regione esclusa dallo spazio-tempo, regione in cui la metrica stessa risulta singolare. In questo lavoro, si dimostra che è possibile identificare una sorgente (suppur non del tutto ben definita, nel senso che risulterà chiarito nel seguito) che giustifica la curvatura dello spazio-tempo di Schwarzschild. Per poter far ciò, è necessario reinterpretare il concetto di tensore, introducendo la nozione di distribuzione tensoriale su una varietà differenziabile. Il concetto di distribuzione tensoriale generalizza quello di distribuzione ed è fondamentale per la descrizione del tensore energia-impulso di un buco nero generico. Nel capitolo 1 dell'elaborato, si richiamano le nozioni fondamentali di Geometria Differenziale, necessarie per poter definire una distribuzione tensoriale. In particolare, si porrà l'attenzione sui concetti di vettore, 1-forma e tensore. Nel capitolo 2, sono invece trattati i buchi neri di Schwarzschild. Inizialmente, si descrive il risultato fondamentale della Relatività Generale, l'equazione di Einstein, e si definisce cosa si intende col termine "buco nero", andando ad esaminare le tipologie di soluzioni dell'equazione di Einstein che ne ammettono l'esistenza. Ci si concentrerà, in seguito, su di un buco nero di Schwarzschild, ponendosi come scopo ultimo quello di descriverne il tensore energia-impulso, nel caso di una sorgente "puntiforme". Dopo aver brevemente riportato le considerazioni che permettono di ottenere la metrica di Schwarzschild nel vuoto, si sfruttano le nozioni distribuzionali introdotte nel capitolo 1. A tale scopo, si introduce una adeguata regolarizzazione della metrica, tenendo presente che, alla fine dei calcoli, tale metrica dovrà essere fatta tendere alla metrica di Schwarzschild. Si ricavano, di seguito, il tensore di Ricci ed il tensore energia-impulso, corrispondenti alla metrica regolarizzata. Nell'ultimo paragrafo del capitolo 2, si attua il limite distribuzionale reinterpretando tali tensori (con un indice in alto ed uno in basso) come distribuzioni tensoriali. Si dimostra che le com-

ponenti miste del tensore energia-impulso di un buco nero di Schwarzschild costituiscono le componenti di una distribuzione tensoriale ben definita, anche includendo la regione di coordinata d'area nulla nella varietà. Tali componenti distribuzionali sono date da delle delta di Dirac con opportuni coefficienti dimensionali. Infine, si commentano i risultati ottenuti, discutendo possibili approcci alternativi al problema. In particolare, si pone l'attenzione sul fatto che il procedimento descritto nel capitolo 2, che considera la sorgente interamente concentrata in un "punto", non risulta del tutto soddisfacente, poiché esso permette di ricavare solo le componenti distribuzionali miste dei tensori energia-impulso e di Ricci. Infatti, sulla base della definizione di tensore data nel paragrafo 1.1.3, affinché un tensore sia ben definito, esso deve poter essere espresso non solo in funzione delle sue componenti miste, ma, indipendentemente, anche con gli indici tutti in basso (o in alto). Tale espressione non risulta, però, ben definita nel modello descritto, a causa della singolarità della metrica di Schwarzschild in  $r = 0$ . Si giunge quindi alla conclusione che, per una sorgente "puntiforme", il tensore energia-impulso non risulta ben definito, nel senso di distribuzione tensoriale, in accordo col risultato ottenuto da Geroch e Traschen nell'articolo [7]. Si conclude l'elaborato presentando brevemente un possibile approccio alternativo al problema: il *modello a shell*, nel quale la sorgente è identificata con un (sottile) guscio sferico di massa  $M$  centrato nella singolarità dello spazio-tempo, permettendo così di evitare la singolarità stessa in  $r = 0$  e di ottenere delle espressioni ben definite per i tensori metrico, di Ricci ed energia-impulso (in senso distribuzionale), descritti attraverso delle delta di Dirac con supporto sul guscio [6].

# Capitolo 1

## Geometria Differenziale e Teoria delle Distribuzioni

Nel primo capitolo si richiamano alcune nozioni fondamentali di Geometria Differenziale [5, 11] e di Teoria delle Distribuzioni [13]. In primo luogo, si fornisce la definizione di varietà differenziabile e si introducono alcune quantità fondamentali quali vettori, 1-forme e tensori. Successivamente, si tratta brevemente il concetto di distribuzione in  $\mathbb{R}^n$ . Infine, si estende il concetto di distribuzione ad una generica varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  e lo si generalizza attraverso la nozione di distribuzione tensoriale: oggetto fondamentale per la descrizione del tensore energia-impulso di un buco nero.

### 1.1 Varietà differenziabili

#### 1.1.1 Definizione di varietà

**Definizione 1.1** (di varietà (topologica)  $\mathcal{M}$ ).

Una *varietà (topologica)*  $\mathcal{M}$  è uno spazio topologico<sup>1</sup> di Hausdorff<sup>2</sup> (o separabile).

**Definizione 1.2** (di mappa).

Una *mappa* è un'applicazione continua<sup>3</sup> e invertibile

$$\phi: A \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad P \mapsto \phi(P) = (x^1(P), \dots, x^n(P)) \equiv x^i(P), \quad i = 1, \dots, n$$

con  $A$  aperto di  $\mathcal{M}$  e  $\phi(A)$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>Uno spazio topologico  $(\mathcal{M}, \{A_i\})$  è definito attraverso una famiglia di insiemi  $A_i$ , detti aperti, in maniera tale che l'insieme vuoto  $\emptyset$  e l'insieme  $\mathcal{M}$  stesso sono aperti, l'unione (finita o infinita) di aperti è un aperto e l'intersezione (finita) di aperti è un aperto [10].

<sup>2</sup>È uno spazio topologico, nel quale, presi due punti distinti qualsiasi, esistono intorni disgiunti dei due punti [10].

<sup>3</sup>La nozione di continuità è ben definita in uno spazio topologico: una mappa è continua se le retroimmagini di insiemi aperti del codominio sono insiemi aperti del dominio [10].

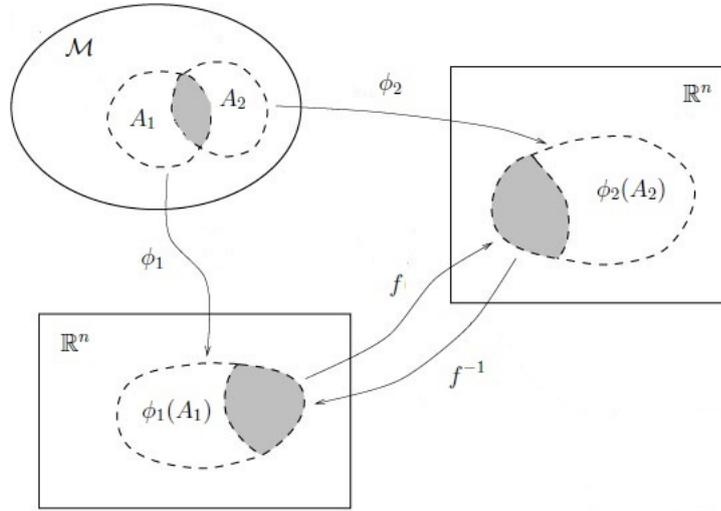


Figura 1.1: Compatibilità di due carte  $(A_1, \phi_1)$  e  $(A_2, \phi_2)$  sulla varietà  $\mathcal{M}$ . Crediti: [4].

Gli  $n$  numeri reali  $x^i(P)$  sono chiamati *coordinate* del punto  $P$  e si dice che la varietà  $\mathcal{M}$  ha *dimensione*  $n$  (o, equivalentemente, che è *n-dimensionale*). La coppia  $(A, \phi)$  è detta *carta*; essa individua un sistema di coordinate locali sull'aperto della varietà.

Un atlante  $\mathcal{A}$  è un insieme di carte che ricoprono la varietà.

**Definizione 1.3** (di atlante  $\mathcal{A}$ ).

$$\mathcal{A} := \{(A_i, \phi_i) : \cup_i A_i \supseteq \mathcal{M}\}$$

Carte diverse devono essere compatibili. Si considerino due carte  $(A_1, \phi_1)$  e  $(A_2, \phi_2)$  sulla varietà  $\mathcal{M}$ , con  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ , deve allora esistere una funzione  $f: \phi_1(A_1) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_2(A_2) \subseteq \mathbb{R}^n$  invertibile, tale che, se  $P \in A_1 \cap A_2$  :

$$f(\phi_1(P)) = \phi_2(P) \tag{1.1}$$

$$f^{-1}(\phi_2(P)) = \phi_1(P) \tag{1.2}$$

La funzione  $f$  rappresenta un cambio di coordinate per punti della varietà che si trovano nella regione di sovrapposizione delle due carte: individua dunque una *trasformazione di coordinate locale* sulla varietà (si veda la figura 1.1). Se tutte le funzioni  $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$  si dice che la varietà  $\mathcal{M}$  è una *varietà differenziabile* di classe  $\mathcal{C}^k$ . Nel seguito dell'elaborato si assumerà, per convenienza, di trattare esclusivamente varietà differenziabili di classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

## 1.1.2 Vettori e 1-forme

Per poter definire il concetto di vettore e di 1-forma è necessario introdurre le nozioni di curva e di funzione su di una varietà. Una *curva* è un'applicazione  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  (almeno) continua. Si noti che la curva è esattamente l'applicazione  $\gamma$  e non l'insieme di punti che essa mappa sulla varietà. Ciò significa che curve che mappano gli stessi punti ma che hanno domini diversi sono curve diverse. Introducendo un sistema di coordinate locali (si veda il paragrafo 1.1.1) in un intorno di un punto  $P = \gamma(\lambda)$ , con  $\lambda \in I$ , è possibile comporre la mappa  $\phi$  con l'applicazione  $\gamma$ , ottenendo l'applicazione:

$$\phi \circ \gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \lambda \mapsto (\phi \circ \gamma)(\lambda) \equiv (x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)) \equiv x^i(\lambda) \quad (1.3)$$

dove si è indicata la composizione di  $\phi$  con  $\gamma$  tramite le coordinate  $x^i = x^i(\lambda)$ , con  $i=1, \dots, n$ . Se le  $n$  funzioni  $x^i(\lambda)$  sono di classe  $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$  si dice che la curva  $\gamma$  è *p-differenziabile*.

Una *funzione* è un'applicazione  $f: D \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se si ricopre parte del dominio della funzione con una carta  $(A, \phi)$ , con  $A \subseteq D$ , è possibile comporre  $f$  con  $\phi^{-1}$ , ottenendo:

$$f \circ \phi^{-1}: \phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x^i \mapsto (f \circ \phi^{-1})(x^i) \equiv f(x^i) \quad (1.4)$$

dove si è indicata la funzione composta  $f \circ \phi^{-1}$  con la funzione  $f$  stessa. Si considereranno solo funzioni di classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ; ciò significa che  $f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n)$  per ogni generica carta  $(A, \phi)$  introdotta sulla varietà.

**Definizione 1.4** (di vettore).

Il *vettore*  $\vec{v}_\gamma$  associato ad una curva  $\gamma$  in un punto  $P = \gamma(\lambda_0) \in \mathcal{M}$  è un'applicazione che associa ad una qualunque funzione (differenziabile)  $f$  definita in un intorno di  $P$  la derivata della funzione (composta con  $\gamma$ ) lungo la curva:

$$\vec{v}_\gamma: f \mapsto \vec{v}_\gamma(f) := \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \in \mathbb{R}$$

dove si è usata la notazione  $f(\lambda) \equiv (f \circ \gamma)(\lambda)$ .

Si osservi, innanzitutto, che un vettore così definito è un funzionale lineare:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\gamma(af + bg) &= \left. \frac{d}{d\lambda}(af + bg) \right|_{\lambda=\lambda_0} = a \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} + b \left. \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \\ &= a \vec{v}_\gamma(f) + b \vec{v}_\gamma(g), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.5)$$

con  $f$  e  $g$  funzioni definite in un intorno di  $P$ . Se si ricopre parte del dominio  $D$  della funzione con una carta  $(A, \phi)$ , con  $P \in A \subseteq D$ , si può scrivere il vettore  $\vec{v}_\gamma$  come:

$$\begin{aligned}\vec{v}_\gamma(f) &= \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \left. \frac{d}{d\lambda} (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma) \right|_{\lambda=\lambda_0} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} (f(x^i) \circ x^i(\lambda)) \right|_{\lambda=\lambda_0} = \left. \frac{d}{d\lambda} (f(x^i(\lambda))) \right|_{\lambda=\lambda_0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \left. \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \frac{\partial f}{\partial x^i}\end{aligned}\quad (1.6)$$

dove nella terza uguaglianza della (1.6) si sono sfruttate le notazioni introdotte nelle (1.3) e (1.4), mentre nell'ultima uguaglianza si è introdotta la notazione di Einstein secondo la quale indici ripetuti sono sommati. Poiché la funzione  $f$  è arbitraria, la si può omettere, cosicché, considerando un generico punto  $\gamma(\lambda)$  della curva, si ha:

$$\vec{v}_\gamma := \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \vec{e}_i \quad (1.7)$$

dove  $\{v^i = \frac{dx^i}{d\lambda}\}$  sono chiamate *componenti* del vettore e  $\{\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$  sono detti *vettori coordinati di base*; il significato di questa dicitura sarà chiarito alla fine del paragrafo. Si noti, in primo luogo, che la definizione così data di vettore non dipende dalle coordinate scelte, dal momento che componenti e vettori coordinati di base si trasformano l'uno con la matrice inversa dell'altro. Infatti, operando un generico cambio di coordinate locale (come descritto alla fine del paragrafo 1.1.1) in un intorno di un punto della curva,  $x^i \mapsto y^{j'} = y^{j'}(x^i)$  con  $i, j' = 1, \dots, n$ , si ha<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v^i \vec{e}_i = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \frac{dy^{j'}}{d\lambda} \right) \left( \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^{k'}} \right) = (\Lambda^i_{j'} v^{j'}) (\Lambda^{k'}_i \vec{e}_{k'}) \\ &= \lambda^{k'}_i \lambda^i_{j'} v^{j'} \vec{e}_{k'} = \delta^{k'}_{j'} v^{j'} \vec{e}_{k'} = v^{j'} \vec{e}_{j'} = v^{i'} \vec{e}_{i'}\end{aligned}\quad (1.8)$$

dove si sono indicate con  $\Lambda^{k'}_i$  le componenti della matrice  $\Lambda$  e con  $\Lambda^i_{j'}$  quelle di  $\Lambda^{-1}$ , ossia valgono:

$$\begin{aligned}\Lambda^i_{k'} \Lambda^{k'}_j &= \delta^i_j \\ \Lambda^{i'}_k \Lambda^k_{j'} &= \delta^{i'}_{j'}\end{aligned}\quad (1.9)$$

Nello spazio euclideo  $\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i$  sono le componenti di un vettore tangente alla curva  $\gamma$  in un qualche suo punto. Perciò, se si interpretano  $\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  come vettori coordinati di base si ha che il vettore  $\vec{v}_\gamma = \frac{d}{d\lambda}$  può essere identificato come il vettore tangente alla curva

---

<sup>4</sup>D'ora in avanti si ometterà per comodità di notazione il pedice associato alla curva alla quale un vettore è associato.

$\gamma$  in un qualche punto  $\gamma(\lambda)$ . Si può infatti dimostrare che i vettori  $\{\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$  sono un insieme di vettori coordinati di base verificando che essi sono linearmente indipendenti e che un generico vettore in un punto  $P$  della varietà  $\mathcal{M}$  può essere espresso come loro combinazione lineare. L'insieme dei vettori tangenti alla varietà in un punto  $P$  definisce uno spazio vettoriale  $\mathcal{T}_P$ ; se la varietà è  $n$ -dimensionale allora  $\mathcal{T}_P = \mathbb{R}^n$ .

Fino a questo punto si sono trattati vettori definiti in un punto della varietà. Tale concetto può essere esteso introducendo la nozione di campo vettoriale su di un aperto  $U \subseteq \mathcal{M}$ .

**Definizione 1.5** (di campo vettoriale  $\vec{v}$ ).

$$\vec{v}: U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_P, \quad P \mapsto \vec{v}(P)$$

Se si ricopre parte del dominio del campo vettoriale con una carta  $(A, \phi)$ , con  $A \subseteq U$ , si può comporre  $\vec{v}$  con  $\phi^{-1}$ , ottenendo l'applicazione:

$$\vec{v} \circ \phi^{-1}: \phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_P, \quad x^i \mapsto (\vec{v} \circ \phi^{-1})(x^i) \equiv \vec{v}(x^i) \quad (1.10)$$

dove si è indicata la composizione di  $\vec{v}$  con  $\phi^{-1}$  tramite  $\vec{v}$  stesso. In particolare, poiché le coordinate  $\phi = x^i$  sono definite su degli aperti, la precedente definizione di vettori coordinati di base può essere estesa in modo naturale per definire un campo vettoriale di base nel dominio di  $\phi$ .

Esiste un'altra classe di oggetti definibili su di una varietà differenziabile: le 1-forme. Dato un punto  $P$  di una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$ , una 1-forma  $\tilde{\omega}$  è un funzionale lineare che agisce sullo spazio  $\mathcal{T}_P$  tangente alla varietà in  $P$ .

**Definizione 1.6** (di 1-forma).

$$\tilde{\omega}: \mathcal{T}_P \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{v} \mapsto \tilde{\omega}(\vec{v}), \quad \text{lineare.}$$

Definendo la somma di 1-forme e la moltiplicazione di una 1-forma per uno scalare come:

$$(a\tilde{\omega} + b\tilde{\sigma})(\vec{v}) = a\tilde{\omega}(\vec{v}) + b\tilde{\sigma}(\vec{v}), \quad \forall \tilde{\omega}, \tilde{\sigma} \text{ 1-forme}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

si ha che l'insieme delle 1-forme che agiscono sullo stesso  $\mathcal{T}_P$  formano uno spazio vettoriale  $\mathcal{T}_P^*$ , duale di  $\mathcal{T}_P$ . La dualità tra vettori e 1-forme può essere messa in evidenza riscrivendo la (1.11) come:

$$\vec{v}(a\tilde{\omega} + b\tilde{\sigma}) = a\vec{v}(\tilde{\omega}) + b\vec{v}(\tilde{\sigma}) \quad (1.12)$$

Ne segue che l'azione di una 1-forma su di un vettore e l'azione dello stesso vettore sulla stessa 1-forma produce il medesimo risultato<sup>5</sup>:

$$\tilde{\omega}(\vec{v}) = \vec{v}(\tilde{\omega}) \quad (1.13)$$

---

<sup>5</sup>Esistono varie notazioni per questa operazione che prende in generale il nome di *contrazione* di  $\tilde{\omega}$  con  $\vec{v}$ .

Si osservi che la linearità di  $\tilde{\omega}$  implica che la sua azione su di un generico vettore  $\vec{v} \in \mathcal{T}_P$  è definita univocamente dalla sua azione su di una base di  $\mathcal{T}_P$ :

$$\tilde{\omega}(\vec{v}) = \tilde{\omega}(v^i \vec{e}_i) = v^i \tilde{\omega}(\vec{e}_i) \quad (1.14)$$

È quindi conveniente utilizzare per  $\mathcal{T}_P^*$  una base duale  $\{\tilde{e}^i \equiv \tilde{d}x^{i6}\}$ , con  $i = 1, \dots, n$ , definita dalla condizione:

$$\tilde{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i \quad (1.15)$$

Così facendo si ha che l' $i$ -esima 1-forma della base duale,  $\tilde{e}^i$ , associa ad un vettore  $\vec{v}$  la sua  $i$ -esima componente  $v^i$ :

$$\tilde{e}^i(\vec{v}) = \tilde{e}^i(v^j \vec{e}_j) = v^j \tilde{e}^i(\vec{e}_j) = v^j \delta_j^i = v^i \quad (1.16)$$

Fissata una base duale in  $\mathcal{T}_P^*$  si ha che la contrazione di una generica 1-forma  $\tilde{\omega}$  con un generico vettore  $\vec{v}$  diventa:

$$\tilde{\omega}(\vec{v})(\equiv \vec{v}(\tilde{\omega})) = (\omega_i \tilde{e}^i)(v^j \vec{e}_j) = \omega_i v^j \tilde{e}^i(\vec{e}_j) = \omega_i v^j \delta_j^i = \omega_i v^i \quad (1.17)$$

dove  $\omega_i$  sono le componenti dell'1-forma  $\tilde{\omega}$  e  $v^i$  sono le componenti del vettore  $\vec{v}$ .

Così come i vettori, anche le 1-forme non dipendono dalle coordinate scelte per descrivere la varietà. Si consideri una base duale in  $\mathcal{T}_P^*$  ed un cambio di base in  $\mathcal{T}_P$ ,  $\{\vec{e}_i\} \mapsto \{\vec{e}_{j'}\}$ , con  $i, j' = 1, \dots, n$ , rappresentato da una matrice  $n \times n$  invertibile  $\Lambda^{-1}$  secondo l'equazione:

$$\vec{e}_{i'} = \Lambda_{i'}^j \vec{e}_j \quad (1.18)$$

Affinché la base duale, definita dalla (1.15), mantenga tale proprietà, è necessario che si trasformi secondo la seguente legge:

$$\tilde{e}^{i'} = \Lambda^{i'}_j \tilde{e}^j \quad (1.19)$$

In tal modo, la relazione di dualità (1.15) è preservata, infatti:

$$\tilde{e}^{i'}(\vec{e}_{j'}) = (\Lambda^{i'}_l \tilde{e}^l)(\Lambda^k_{j'} \vec{e}_k) = \Lambda^{i'}_l \Lambda^k_{j'} \tilde{e}^l(\vec{e}_k) = \Lambda^{i'}_l \Lambda^k_{j'} \delta_k^l = \Lambda^{i'}_l \Lambda^l_{j'} = \delta_{j'}^{i'} \quad (1.20)$$

dove nella prima uguaglianza si sono sfruttate le leggi di trasformazione (1.18) e (1.19), mentre nell'ultima si è usata la (1.9). Si noti, inoltre, che mentre i membri della base duale si trasformano per mezzo della matrice  $\Lambda$ , le componenti di una 1-forma si trasformano attraverso  $\Lambda^{-1}$  in modo tale che l'1-forma stessa resta invariata. La verifica è del tutto analoga a quella effettuata per un vettore nella (1.8); l'unica differenza è che in questo caso le componenti si trasformano con  $\Lambda^{-1}$  mentre la base con  $\Lambda$  contrariamente a quanto avveniva per un vettore.

---

<sup>6</sup>Nel corso dell'elaborato si utilizzerà spesso anche questa seconda notazione.

È importante sottolineare che il cambio di base descritto dalla (1.18) è strettamente valido solo nello spazio tangente  $\mathcal{T}_P$  di un punto  $P \in \mathcal{M}$ . Affinché il cambio di base definito dalla (1.18) corrisponda ad un cambio di coordinate locale su tutto un intorno di  $P$  deve essere soddisfatta la seguente condizione necessaria<sup>7</sup>:

$$\frac{\partial \Lambda_j^{k'}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda_i^{k'}}{\partial x^j} \quad (1.21)$$

### 1.1.3 Campi tensoriali

Un tensore di rango  $(n, m)$  in un punto  $P \in \mathcal{M}$  è definito come un funzionale lineare  $T$  che agisce su  $n$  1-forme e  $m$  vettori.

**Definizione 1.7** (di tensore (di rango)  $(n, m)$ ).

$$T: (\mathcal{T}_P^*)^n \times (\mathcal{T}_P)^m \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\tilde{\omega}_{(1)}, \dots, \tilde{\omega}_{(n)}, \vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(m)}) \mapsto T(\tilde{\omega}_{(1)}, \dots, \tilde{\omega}_{(n)}, \vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(m)})$$

lineare su tutti gli argomenti.

Il metodo più semplice per costruire un tensore di rango  $(n, m)$  è quello di utilizzare il prodotto esterno “ $\otimes$ ” di vettori e 1-forme; per cui un tensore  $T$  di rango  $(n, m)$  è dato semplicemente dal prodotto esterno di  $n$  vettori e  $m$  1-forme:

$$T = \vec{v}^{(1)} \otimes \vec{v}^{(2)} \otimes \dots \otimes \vec{v}^{(n)} \otimes \tilde{\omega}_{(1)} \otimes \tilde{\omega}_{(2)} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}_{(m)} \quad (1.22)$$

Risulta quindi immediato osservare che un vettore è un tensore di rango  $(1, 0)$  e una 1-forma è un tensore di rango  $(0, 1)$ . Se si considera una base duale in  $\mathcal{T}_P^*$ , definita dalla (1.15), un tensore  $T$  di rango  $(n, m)$  si esprime in funzione delle sue componenti come:

$$T = T_{j_1, \dots, j_m}^{i_1, \dots, i_n} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_n} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_m} \quad (1.23)$$

dove le componenti sono date da:

$$T_{j_1, \dots, j_m}^{i_1, \dots, i_n} = T(\tilde{e}^{i_1}, \dots, \tilde{e}^{i_n}, \vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_m}) \quad (1.24)$$

Si possono definire le seguenti operazioni tensoriali:

- combinazione lineare:

$$aT^{(n,m)} + bS^{(n,m)} = Q^{(n,m)} \quad (1.25)$$

- prodotto esterno:

$$T^{(n,m)} \otimes S^{(n',m')} = Q^{(n+n', m+m')} \quad (1.26)$$

---

<sup>7</sup>Tale condizione impone un vincolo sulle matrici  $\Lambda$ .

- contrazione con una 1-forma:

$$T^{(n,m)}(\dots, \tilde{\omega}, \dots) = \bar{T}^{(n-1,m)} \quad (1.27)$$

- contrazione con un vettore:

$$T^{(n,m)}(\dots, \vec{v}, \dots) = \bar{T}^{(n,m-1)} \quad (1.28)$$

dove si è indicato esplicitamente, per chiarezza, il rango di ciascun tensore. Le due operazioni di saturazione, (1.27) e (1.28), possono essere composte per saturare gli indici di un tensore di rango  $(n, m)$  con quelli di un tensore di rango  $(p, q)$  ottenendo un tensore di rango  $(n - q, m - p)$ , posti  $n \geq q$  e  $m \geq p$ .

La nozione di tensore può essere estesa a tutto un aperto  $U \subseteq \mathcal{M}$  introducendo il concetto di campo tensoriale.

**Definizione 1.8** (di campo tensoriale di rango  $(n, m)$ ).

$$T^{(n,m)}: U \subseteq \mathcal{M} \ni P \mapsto T^{(n,m)}(P), \quad \text{tensore di rango } (n, m).$$

Se si ricopre parte del dominio del campo tensoriale con una carta  $(A, \phi)$ , con  $A \subseteq U$ , si può comporre  $T^{(n,m)}$  con  $\phi^{-1}$ , ottenendo l'applicazione:

$$T^{(n,m)} \circ \phi^{-1}: \phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n \ni x^i \mapsto (T^{(n,m)} \circ \phi^{-1})(x^i) \equiv T^{(n,m)}(x^i) \quad (1.29)$$

dove si è indicata la composizione di  $T^{(n,m)}$  con  $\phi^{-1}$  tramite  $T^{(n,m)}$  stesso, così da generalizzare la (1.10), ottenibile ponendo  $n = 1$  e  $m = 0$  nella (1.29).

### 1.1.4 Tensore metrico

**Definizione 1.9** (di tensore metrico  $g$ ).

Un *tensore metrico*  $g$  in un punto  $P \in \mathcal{M}$  è un tensore di rango  $(0,2)$ :

$$g: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto g(\vec{v}, \vec{w}), \quad \text{lineare e tale che:}$$

1. è simmetrico:

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = g(\vec{w}, \vec{v}) \quad (1.30)$$

2. è non degenere:

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w} \in T_P \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (1.31)$$

Fissata una base duale in  $\mathcal{T}_P^*$ ,  $g$  si scrive in funzione delle componenti come:

$$g = g_{ij} \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j \quad (1.32)$$

dove le componenti sono date da:

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad (1.33)$$

Ad un tensore metrico può dunque essere associata una matrice reale  $n \times n$  simmetrica e non degenere, con le proprietà (1.30) e (1.31) che si traducono in:

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (1.34)$$

$$\det[g_{ij}] \neq 0 \quad (1.35)$$

Poiché in date coordinate  $\{x^i\}$  si ha che  $[g_{ij}]$  è una matrice simmetrica, essa può essere sempre diagonalizzata. Esiste quindi un opportuno cambio di base in  $\mathcal{T}_P$ , tale che, nella nuova base  $\{\vec{e}_{i'}\}$ , il tensore metrico è espresso in forma canonica nel punto  $P$ , ossia:

$$g_{i'j'} = g(\vec{e}_{i'}, \vec{e}_{j'}) = \pm \delta_{i'j'} \quad (1.36)$$

L'importanza del tensore metrico è che esso permette di definire un prodotto scalare “ $\cdot$ ” tra due vettori  $\vec{w}, \vec{z} \in \mathcal{T}_P$  ed il modulo quadro  $v^2$  di un vettore  $\vec{v} \in \mathcal{T}_P$ , rispettivamente come:

$$\vec{w} \cdot \vec{z} := g(\vec{w}, \vec{z}) = g_{ij} w^i z^j \quad (1.37)$$

$$v^2 := g(\vec{v}, \vec{v}) = g_{ij} v^i v^j \quad (1.38)$$

dove l'ultima uguaglianza nelle equazioni (1.37) e (1.38) vale solo se si è scelta una base duale in  $\mathcal{T}_P^*$ .

La metrica è inoltre utilizzata per mappare vettori in covettori e viceversa, attraverso le relazioni:

$$v_i = g_{ij} v^j \quad (1.39)$$

$$v^i = g^{ij} v_j \quad (1.40)$$

dove nella (1.40) si sono indicate con  $g^{ij}$  le componenti della matrice inversa della metrica, ossia vale:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (1.41)$$

In maniera del tutto analoga a quanto descritto nella fine del paragrafo 1.1.3 si può definire un campo tensoriale metrico sulla varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  come un'applicazione che associa ad ogni punto  $P \in \mathcal{M}$  un tensore metrico  $g(P)$ . Una varietà differenziabile in cui un campo tensoriale metrico è definito ovunque viene chiamata *varietà metrica*. Introducendo una carta  $(A, \phi)$  in un intorno di  $P$  si può comporre  $g$  con  $\phi^{-1}$  ottenendo l'applicazione:

$$g \circ \phi^{-1}: \phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n \ni x^i \mapsto (g \circ \phi^{-1})(x^i) \equiv g(x^i) \quad (1.42)$$

dove si è indicata l'applicazione composta  $g \circ \phi^{-1}$  con  $g$  stessa. Ad ogni punto di  $A$  viene dunque associata una matrice  $n \times n$  simmetrica e non degenere  $[g_{ij}(x^k)]$ .

Applicando un cambio di base nello spazio tangente  $\mathcal{T}_P$ ,  $\{\vec{e}_i\} \mapsto \{\vec{e}_{j'}\}$  secondo la (1.18), in modo tale che il tensore metrico si scriva in forma canonica in  $P$  come descritto dalla (1.36) ed estendendo la trasformazione  $\Lambda$  in tutto un intorno di  $P$  in modo tale che soddisfi la (1.21), si hanno abbastanza gradi di libertà per poter imporre l'annullamento delle derivate prime della metrica in  $P$ . Così facendo, si può espandere in serie di Taylor la metrica in un intorno di  $P$ , cosicché nel punto  $x^{k'} = x_P^{k'} + \delta x^{k'}$  la metrica risulta:

$$g_{i'j'}(x^{k'}) = \pm \delta_{i'j'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{i'j'}}{\partial x^{l'} \partial x^{m'}} \Big|_{x_P^{k'}} \delta x^{l'} \delta x^{m'} + \dots \quad (1.43)$$

che viene detta *forma localmente canonica* del tensore metrico. Ciò significa, equivalentemente, che è sempre possibile scegliere delle coordinate localmente ortonormali in un punto  $P$  della varietà. Tuttavia, in generale, le stesse coordinate non saranno ortonormali ovunque, dato che non è possibile, in generale, mettere il tensore metrico in forma canonica in ogni punto della varietà.

### 1.1.5 Curvatura

La curvatura di una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  è descritta del *tensore di Riemann*, le cui componenti, in un sistema di coordinate generico, sono date da:

$$R_{\gamma\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(g_{\gamma\nu;\mu\beta} - g_{\gamma\beta;\mu\nu} + g_{\mu\beta;\gamma\nu} - g_{\mu\nu;\gamma\beta}) \quad (1.44)$$

dove “;” indica l'operazione di derivata covariante, che si riduce alla derivata parziale “,” in un sistema di riferimento *Gaussiano normale*<sup>8</sup>. Laddove il tensore di Riemann è diverso da zero, un vettore trasportato parallelamente<sup>9</sup> lungo un percorso chiuso non torna su se stesso e si dice che la varietà è curva.

Dal tensore di Riemann è possibile definire anche il *tensore di Ricci*, le cui componenti sono ottenute da quelle del tensore di Riemann come:

$$R_{\mu\nu} := R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\gamma} R_{\gamma\mu\alpha\nu} \quad (1.45)$$

Si noti che, poiché il tensore di Riemann è simmetrico “a blocchi”, il tensore di Ricci risulta simmetrico:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (1.46)$$

---

<sup>8</sup>Dal punto di vista della Relatività Generale è un sistema di riferimento *localmente in caduta libera*, il quale, grazie al *Principio di Equivalenza*, risulta equivalente ad un sistema di riferimento localmente inerziale, nel quale valgono le leggi della Relatività Ristretta [4, 5, 12].

<sup>9</sup>Un vettore  $\vec{w}$  è trasportato parallelamente lungo una curva integrale di un campo vettoriale  $\vec{v}$  se  $w^k_{;i} = 0$  [4].

Risulta spesso comodo (si veda [9]) esprimere il tensore di Ricci in funzione dei *simboli di Christoffel*  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ , come:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu,\beta}^{\beta} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \quad (1.47)$$

dove  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  sono dati da<sup>10</sup>:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (1.48)$$

Per  $\mu$  fissato i simboli di Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  sono matrici  $n \times n$  simmetriche:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (1.49)$$

La traccia  $R$  del tensore di Ricci viene chiamata *curvatura scalare*:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\alpha}R_{\alpha\mu} = g^{\mu\alpha}R_{\mu\alpha} \quad (1.50)$$

Si può infine introdurre il *tensore di Einstein*, le cui componenti  $G_{\mu\nu}$  sono definite come:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.51)$$

Esso soddisfa le seguenti proprietà:

- è simmetrico:

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \quad (1.52)$$

- verifica l'identità di Bianchi:

$$G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (1.53)$$

## 1.2 Distribuzioni

### 1.2.1 Distribuzioni in $\mathbb{R}^n$

Per poter definire il concetto di distribuzione è necessario introdurre la nozione di spazio di prova. Si può identificare tale spazio, ad esempio, con l'insieme delle funzioni  $\varphi$  di classe  $\mathcal{C}^{\infty}(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  con supporto compatto<sup>11</sup>. Si indicherà tale spazio di prova con la notazione  $\mathcal{C}_0^{\infty}$ .

**Definizione 1.10** (di  $\mathcal{C}_0^{\infty}$ ).

$$\mathcal{C}_0^{\infty} := \{\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \exists K \subseteq U \text{ compatto con } \varphi(\vec{x}) = 0 \text{ se } \vec{x} \in U \text{ e } \vec{x} \notin K\}$$

<sup>10</sup>Si è qui assunta una *connessione metrica* che permette di definire la nozione di trasporto parallelo in maniera tale che esso preservi le lunghezze e gli angoli definiti attraverso la metrica [5].

<sup>11</sup>Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato [10].

Una distribuzione  $\mathcal{D}$  è un funzionale lineare che agisce su di una funzione di prova  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ .

**Definizione 1.11** (di distribuzione (in  $\mathbb{R}^n$ )).

$$\mathcal{D}: \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \langle \mathcal{D}, \varphi \rangle, \quad \text{lineare.}$$

Data una funzione  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrabile<sup>12</sup>, si può associare ad essa una distribuzione  $\mathcal{D}_f$  definita come:

$$\langle \mathcal{D}_f, \varphi \rangle \equiv \langle f, \varphi \rangle := \int_U d^n x f(\vec{x}) \varphi(\vec{x}), \quad \text{con } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty \quad (1.54)$$

dove nella (1.54) si è indicato il funzionale associato alla funzione  $f$  con  $f$  stessa.

## 1.2.2 Distribuzioni in una varietà differenziabile

Per poter estendere il concetto di distribuzione ad una generica varietà differenziabile  $\mathcal{M}$   $n$ -dimensionale è necessario introdurre un'ulteriore nozione di Geometria Differenziale: le  $n$ -forme<sup>13</sup>.

**Definizione 1.12** (di  $n$ -forma  $\tilde{\varphi}$ ).

$$\tilde{\varphi}: (\mathcal{T}_P)^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \mapsto \tilde{\varphi}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n), \quad \text{lineare ed antisimmetrica.}$$

Introducendo una base duale in  $\mathcal{T}_P^*$  e indicando il prodotto esterno antisimmetrico di 1-forme con “ $\wedge$ ”, una generica  $n$ -forma  $\tilde{\varphi}$  si scrive come:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{n!} \varphi_{i_1, \dots, i_n} \tilde{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_n} \quad (1.55)$$

dove il prodotto esterno antisimmetrico delle 1-forme della base duale è definito da:

$$\tilde{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_n} := (\tilde{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{i_n} + \text{permutazioni}) \quad (1.56)$$

con le permutazioni pari che entrano con il segno “+”, mentre quelle dispari con il segno “-”. Esprimendo  $\tilde{\varphi}$  in funzione delle componenti, la (1.55) risulta equivalente a:

$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi})_{i_1, \dots, i_n} \tilde{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{i_n} \quad (1.57)$$

<sup>12</sup>Si intende una funzione integrabile in ogni sottoinsieme compatto del dominio di definizione.

<sup>13</sup>In generale, in una varietà  $n$ -dimensionale, si possono definire  $p$ -forme per  $p$  intero positivo e  $p \leq n$  [11].

dove le componenti sono date da:

$$(\tilde{\varphi})_{i_1, \dots, i_n} = \tilde{\varphi}(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n}) = \frac{1}{n!}(\varphi_{i_1, \dots, i_n} + \text{permutazioni}) \quad (1.58)$$

con la stessa convenzione sulle permutazioni della (1.56).

Si consideri come spazio di prova l'insieme  $\Omega_0^n$  delle  $n$ -forme  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(U \subseteq \mathcal{M})$  con supporto compatto<sup>14</sup>. Una distribuzione  $\mathcal{D}$  è un funzionale lineare che agisce su di una  $n$ -forma di prova  $\tilde{\varphi} \in \Omega_0^n$  [1, 13].

**Definizione 1.13** (di distribuzione (in una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$ )).

$$\mathcal{D}: \Omega_0^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\varphi} \mapsto \langle \mathcal{D}, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \text{lineare.}$$

Data una funzione  $f: U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrabile, le si può associare una distribuzione  $\mathcal{D}_f$  definita come:

$$\langle \mathcal{D}_f, \tilde{\varphi} \rangle \equiv \langle f, \tilde{\varphi} \rangle := \int_{U \subseteq \mathcal{M}} f \tilde{\varphi}, \quad \text{con } \tilde{\varphi} \in \Omega_0^n \quad (1.59)$$

dove nella (1.59) si è indicato il funzionale associato alla funzione  $f$  con  $f$  stessa.

Si osservi ora che le  $n$ -forme in un punto  $P \in \mathcal{M}$  formano uno spazio vettoriale di dimensione unitaria<sup>15</sup>, per cui esse sono proporzionali tra loro. Se si introducono delle coordinate locali  $(U, \phi = x^i)$ , una generica  $n$ -forma  $\tilde{\varphi}$  si scrive come:

$$\tilde{\varphi} = \varphi(x^i) \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n \quad (1.60)$$

dove si sono indicate con  $\tilde{\varphi}$  e con  $\varphi$  rispettivamente le composizioni  $\tilde{\varphi} \circ \phi^{-1}$  e  $\varphi \circ \phi^{-1}$ . Dalla (1.60) si vede che ogni  $n$ -forma  $\tilde{\varphi}$  definisce una funzione  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n)$ , per cui la (1.59) diventa:

$$\begin{aligned} \langle f, \tilde{\varphi} \rangle &:= \int_{U \subseteq \mathcal{M}} f \tilde{\varphi} = \int_{\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n} f(x^i) \varphi(x^i) \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n \left( dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, dx^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= \int_{\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n} f(x^i) \varphi(x^i) dx^1 \dots dx^n = \int_{\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.61)$$

dove gli  $n$  vettori  $\Delta \vec{x}_k = dx^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  (dove non c'è somma sull'indice  $k$ ) sono  $n$  vettori linearmente indipendenti che, per un "poliedro" infinitesimo, possono essere pensati appartenenti allo stesso spazio vettoriale tangente e dove si è indicata con  $f$  la funzione

<sup>14</sup>Un sottoinsieme di uno spazio topologico generico è detto compatto se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito [10].

<sup>15</sup>In generale l'insieme delle  $p$ -forme in un punto  $P \in \mathcal{M}$  forma un sottospazio vettoriale dello spazio  $(\mathcal{T}_P^*)^p$  dei tensori di rango  $(0, p)$  la cui dimensione è  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$  [11].

composta  $f \circ \phi^{-1}$  in maniera analoga a quanto fatto per  $\varphi$ . Si noti che nella terza uguaglianza della (1.61) si è assunta una base duale, ossia vale la condizione:

$$\tilde{d}x^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i \quad (1.62)$$

Si osservi che l'espressione finale ottenuta nella (1.61) risulta essere esattamente analoga alla (1.54), a riprova del fatto che il concetto di distribuzione in una varietà differenziabile estende ed ingloba al suo interno quello di distribuzione in  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.2.3 Distribuzioni tensoriali

È possibile generalizzare la nozione (1.59) di distribuzione associata ad una funzione definita sulla varietà  $\mathcal{M}$  introducendo il concetto di distribuzione tensoriale associata ad un campo tensoriale definito su un aperto della varietà. Si consideri come spazio di prova l'insieme delle  $n$ -forme a valori tensoriali di rango  $(l, m)$  con supporto compatto; dove una  $n$ -forma a valori tensoriali di rango  $(l, m)$ ,  $\tilde{\varphi}^{(l,m)}$ , è definita come un'applicazione lineare ed antisimmetrica che associa ad  $n$  vettori  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathcal{T}_P$  un tensore  $T^{(l,m)}$  di rango  $(l, m)$ :

$$\tilde{\varphi}^{(l,m)}: (\mathcal{T}_P)^n \ni (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \mapsto \tilde{\varphi}^{(l,m)}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \varphi^{(l,m)} \quad (1.63)$$

Dato un campo tensoriale  $T^{(m,l)}$  di rango  $(m, l)$  (si veda il paragrafo 1.1.3) definito in un aperto  $U \subseteq \mathcal{M}$ , è possibile associargli una *distribuzione tensoriale* definita come un funzionale lineare che agisce su una  $n$ -forma a valori tensoriali di rango  $(l, m)$  di prova [1, 13]:

$$\langle T^{(m,l)}, \tilde{\varphi}^{(l,m)} \rangle := \int_{U \subseteq \mathcal{M}} T^{(m,l)} \tilde{\varphi}^{(l,m)} \quad (1.64)$$

dove, analogamente a quanto fatto nella (1.59), si è indicata la distribuzione associata a  $T^{(m,l)}$  con  $T^{(m,l)}$  stesso. La definizione (1.64) di distribuzione tensoriale è manifestamente indipendente da qualsiasi scelta di coordinate sulla varietà ed è anche indipendente da un'eventuale struttura metrica di  $\mathcal{M}$ .

Se si introducono delle coordinate locali  $(U, \phi = x^i)$  si può esprimere  $\tilde{\varphi}^{(l,m)}$  in maniera esplicita in funzione delle componenti come:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(l,m)} &= \varphi(x^i) \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n \varphi_{j_1, \dots, j_m}^{(l,m) k_1, \dots, k_l}(x^i) \vec{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{k_l} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_m} \\ &= \varphi_{j_1, \dots, j_m}^{k_1, \dots, k_l}(x^i) \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n \vec{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{k_l} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_m} \end{aligned} \quad (1.65)$$

dove si sono utilizzate la (1.60) e la (1.23) e si sono indicate con  $\varphi$  e  $\varphi^{(l,m)}$  rispettivamente le composizioni  $\varphi \circ \phi^{-1}$  e  $\varphi^{(l,m)} \circ \phi^{-1}$ . Dalla (1.65) si vede che ogni  $n$ -forma a valori

tensoriali di rango  $(l, m)$ ,  $\tilde{\varphi}^{(l,m)}$ , definisce  $n^{(l+m)}$  ( $k_i, j_i = 1, \dots, n$ ) funzioni  $\varphi_{j_1, \dots, j_m}^{k_1, \dots, k_l} \in \mathcal{C}_0^\infty(\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n)$ <sup>16</sup>, per cui la (1.64) si può scrivere come:

$$\langle T^{(m,l)}, \tilde{\varphi}^{(l,m)} \rangle := \int_{U \subseteq \mathcal{M}} T^{(m,l)} \tilde{\varphi}^{(l,m)} = \int_{\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n} T_{k_1, \dots, k_l}^{j_1, \dots, j_m}(x^i) \varphi_{j_1, \dots, j_m}^{k_1, \dots, k_l}(x^i) dx^1 \dots dx^n \quad (1.66)$$

dove, in maniera analoga alla (1.61), si sono indicate con  $T_{k_1, \dots, k_l}^{j_1, \dots, j_m}$  le componenti di  $T^{(m,l)}$  composte con  $\phi^{-1}$  e si è assunta valida la (1.62)<sup>17</sup>.

---

<sup>16</sup>Si è ommesso il primato presente nell'ultima uguaglianza della (1.65) per comodità di notazione.

<sup>17</sup>Altro non è che la (1.15) espressa in una notazione equivalente.

## Capitolo 2

# Tensore energia-impulso di un buco nero di Schwarzschild

In questo secondo capitolo vengono affrontati i buchi neri di Schwarzschild. In particolare, si propone un possibile metodo per descriverne il tensore energia-impulso in senso distribuzionale, analizzando pregi e limitazioni del risultato ottenuto.

### 2.1 Derivazione della metrica di Schwarzschild

In questa prima parte del capitolo si ricava, sfruttando le simmetrie del sistema in esame, la metrica di Schwarzschild come soluzione di vuoto dell'equazione di Einstein, all'esterno di una sorgente a simmetria sferica, non rotante e neutra [4, 5, 12]. Prima di fare ciò, si ritiene opportuno richiamare il risultato fondamentale della Relatività Generale: l'equazione di Einstein.

#### 2.1.1 L'equazione di Einstein

La Relatività Generale è una teoria fisica formulata dal fisico Albert Einstein e pubblicata nel 1915. Essa rinnova completamente la descrizione dell'interazione gravitazionale rispetto alla formulazione newtoniana. Mentre Newton prevedeva che la gravità agisse come azione a distanza fra corpi massivi, Einstein descrive l'interazione gravitazionale legando la curvatura dello spazio-tempo alla distribuzione di massa e di energia in esso presenti. Il risultato fondamentale della Relatività Generale è espresso dall'*equazione (di campo) di Einstein* [4, 5, 12]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

in cui:

- $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$  (si veda il paragrafo 1.1.5 per le sue proprietà);
- $R_{\mu\nu}$  è il tensore di curvatura di Ricci;
- $R$  è la curvatura scalare (traccia del tensore di Ricci);
- $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico (si veda il paragrafo 1.1.4 per le sue proprietà);
- $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso;
- $c$  è la velocità della luce nel vuoto;
- $G_N$  è la costante di gravitazione universale.

L'equazione di Einstein (2.1) è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare, per la quale non esiste una formula risolutiva generale.

Tra le tipologie di spazio-tempo descritte dalla (2.1) ci sono anche i cosiddetti buchi neri. Un *buco nero* è la regione di spazio-tempo che si trova all'interno di un orizzonte degli eventi. Un *orizzonte degli eventi* è un confine nello spazio-tempo tra eventi che possono comunicare con osservatori distanti ed eventi che non possono. Si noti che nella precedente definizione si è assunto che osservatori distanti esistano e che lo spazio-tempo sia asintoticamente piatto, ossia, a grandi distanze dalla sorgente gravitazionale, il tensore metrico si riduce al tensore metrico di Minkowski [12]. Man mano che essa si avvicina all'orizzonte degli eventi di un buco nero, il cono di luce di una particella in caduta libera lungo una geodetica radiale si inclina sempre di più verso la sorgente gravitazionale, fino a che l'espansione<sup>1</sup> della sfera di luce uscente si annulla in corrispondenza dell'orizzonte (si veda la figura 2.1 dove viene mostrato il caso dello spazio-tempo di Schwarzschild). Un buco nero viene quindi così chiamato perchè nessun segnale, nemmeno la luce, può scappare da esso. Un importante teorema valido in Astrofisica è il teorema *no-hair*, il quale afferma che un buco nero stazionario è caratterizzato soltanto da tre parametri fisici: la massa  $M$ , il momento angolare  $J$  e la carica elettrica  $Q$  [12]. Esistono solo quattro soluzioni dell'equazione di Einstein che prevedono l'esistenza di uno (o più) orizzonti degli eventi, avvicinandosi ai quali le frequenze dei fotoni emessi sono red-shiftate gravitazionalmente a zero [5]. Tali soluzioni sono:

- la metrica di Schwarzschild (scoperta nel 1916), che descrive lo spazio-tempo all'esterno di una sorgente a simmetria sferica, non rotante e neutra;
- la metrica di Reissner-Nordström (scoperta nel 1916-18) che descrive lo spazio-tempo all'esterno di una sorgente a simmetria sferica, non rotante e carica;

---

<sup>1</sup>Si intende il tasso di variazione dell'area del guscio di luce lungo la geodetica di tipo luce.

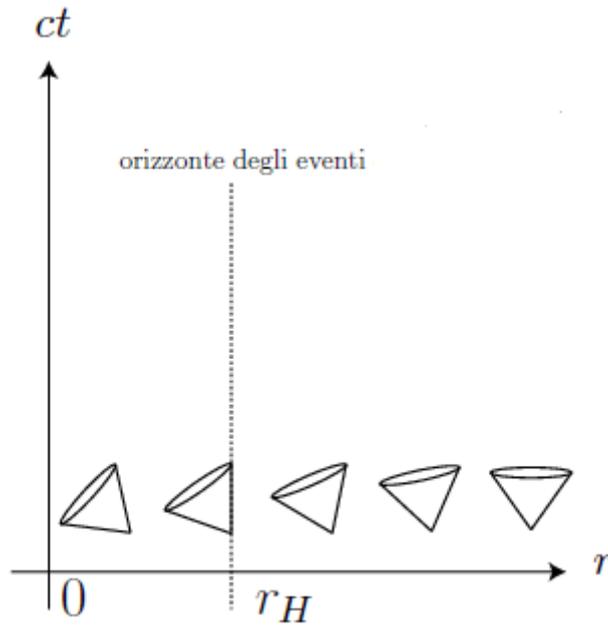


Figura 2.1: Inclinazione del cono di luce di una particella, all'avvicinarsi di quest'ultima all'orizzonte degli eventi di un buco nero. Nella figura viene mostrato il caso particolare di un buco nero di Schwarzschild, per il quale l'orizzonte degli eventi si verifica in corrispondenza del raggio di Schwarzschild  $r_H$ , definito nella (2.19). Si noti come, per  $r \gg r_H$ , i coni di luce tendano a quelli dello spazio-tempo di Minkowski, a riprova del fatto che lo spazio-tempo in esame è asintoticamente piatto. Avvicinandosi all'orizzonte degli eventi i coni di luce si inclinano verso la sorgente, fino a che, per  $r = r_H$ , la geodetica di tipo luce uscente ha espansione nulla. Infine, per  $r < r_H$ , entrambe le geodetiche di tipo luce, sia quella entrante che quella uscente, sono obbligate a proseguire verso la singolarità centrale. Si noti, infine, che, poichè ogni particella massiva si muove a velocità inferiore a quella della luce (nel vuoto), dall'orizzonte degli eventi nessun segnale fisico riesce ad emergere. Crediti: <https://inspirehep.net>.

- la metrica di Kerr (scoperta nel 1963) che descrive lo spazio-tempo all'esterno di una sorgente a simmetria assiale, rotante e neutra;
- la metrica di Kerr-Newmann (scoperta nel 1965) che descrive lo spazio-tempo all'esterno di una sorgente a simmetria assiale, rotante e carica.

È fondamentale osservare che le soluzioni sopra citate costituiscono tutte delle soluzioni dell'equazione di Einstein nel vuoto; questo procedimento risulterà chiarito nel seguente paragrafo 2.1.2.

## 2.1.2 La metrica di Schwarzschild

La metrica di Schwarzschild (scoperta dal fisico Karl Schwarzschild nel 1916) è la metrica che descrive lo spazio-tempo all'esterno di una sorgente a simmetria sferica, non rotante e neutra, caratterizzata da una massa  $M$ . Come anticipato alla fine del paragrafo 2.1.1, la metrica di Schwarzschild è una soluzione di vuoto dell'equazione di Einstein. All'esterno della sorgente il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$  si annulla, essendo lo spazio-tempo vuoto, ossia vale:

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2)$$

Sostituendo nella (2.1), si ha che anche il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$  si annulla:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (2.3)$$

Estraendone la traccia si ha:

$$0 = g^{\nu\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) = R^\nu{}_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\nu{}_\nu = R - \frac{1}{2}R4 = -R \implies R = 0 \quad (2.4)$$

da cui si ottiene che all'esterno della sorgente la curvatura scalare  $R$  è identicamente nulla, proprio come il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ . Sostituendo la (2.2) e la (2.4) nella (2.1) si ottiene l'equazione di Einstein nel vuoto [4, 5, 12]:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.5)$$

La soluzione<sup>2</sup> della (2.5) può essere ottenuta sfruttando le simmetrie del sistema in esame. Se si assume che la metrica sia statica, allora esiste un'opportuna coordinata temporale  $t$ , il cui vettore coordinato di base associato  $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$  costituisce un vettore di Killing di tipo tempo  $\vec{K}_t$ :

$$\vec{K}_t = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \quad (2.6)$$

Il fatto che sia un vettore di Killing significa, per definizione [4, 5, 11], che la derivata di Lie del tensore metrico  $g$  lungo  $\vec{K}_t$  si annulla:

$$\mathcal{L}_{\vec{K}_t}g := 0 \quad (2.7)$$

Dal momento che la derivata di Lie nella direzione di un vettore coordinato di base si riduce alla derivata parziale rispetto alla coordinata corrispondente [5], ne segue che una metrica statica non dipende dalla coordinata temporale  $t$ , si ha infatti:

$$0 = (\mathcal{L}_{\vec{K}_t}g)_{\mu\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \implies g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t) \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Risolvere l'equazione di Einstein significa non solo ricavare il tensore metrico ma anche la varietà metrica sulla quale è definito. Nel caso in esame quest'ultima viene anche chiamata *spazio-tempo di Schwarzschild* [5].

Inoltre, poiché la sorgente è a simmetria sferica, esistono tre vettori di Killing di tipo spazio,  $\vec{K}_i$ , associati alle rotazioni attorno ai tre assi spaziali centrati nella sorgente:

$$\vec{K}_i = \frac{d}{d\varphi_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

dove  $\varphi_i \in [0, 2\pi[$  rappresenta l'angolo di rotazione attorno all'asse  $i$ -esimo. Essendo vettori di Killing si ha che:

$$\mathcal{L}_{\vec{K}_i} g := 0 \quad (2.10)$$

Poiché la sorgente è statica, i tre vettori di Killing associati alle rotazioni devono essere conservati nel tempo. Ciò implica che devono commutare con il vettore di Killing di tipo tempo:

$$[\vec{K}_t, \vec{K}_i] = 0 \quad (2.11)$$

Essi possono dunque essere presi ortogonali a  $\vec{K}_t$ , proprio come accade nello spazio-tempo di Minkowski  $\mathbb{R}^{3+1}$ . Di conseguenza, si può assumere di utilizzare l'analogo delle coordinate polari in superfici di  $t$  costante. La forma generale dell'elemento di linea  $ds^2$  di una metrica statica e a simmetria sferica risulta quindi pari a [5]:

$$\begin{aligned} ds^2 &:= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A(r)c^2 dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ &= -A(r)c^2 dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove  $A(r), B(r), C(r)$  sono funzioni della coordinata  $r$  e nella terza uguaglianza si è sfruttata la possibilità di riscalarare  $r$  così da porre  $C(r) = r^2$ . L'ipotesi di metrica statica implica che l'elemento di linea (2.12) è invariante per inversione temporale, per cui la coordinata temporale  $t$  ha dominio di definizione:

$$t \in ] -\infty, +\infty[ \quad (2.13)$$

Per quanto riguarda, invece, le coordinate  $\theta$  e  $\varphi$ , esse rappresentano gli angoli delle coordinate polari ed assumono i valori standard:

$$\theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[ \quad (2.14)$$

La scelta  $C(r) = r^2$  determina che superfici definite da  $t$  ed  $r$  costanti hanno la metrica  $ds_{S^2}^2$  di una 2-sfera, definita da:

$$ds_{S^2}^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.15)$$

ottenuta semplicemente ponendo  $dt = dr = 0$  nella (2.12). Ne segue che una sfera con centro nel centro della sorgente e coordinata  $r$  fissata ha area di superficie pari a  $4\pi r^2$ , infatti:

$$\mathcal{A}(r) = \iint \sqrt{|det[g_{(2)ij}]|} d\theta d\varphi = r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 \quad (2.16)$$

dove la metrica  $[g_{(2)ij}] = \text{diag}(r^2, r^2 \sin^2 \theta)$  si legge direttamente dalla (2.15). Per questo motivo, la coordinata  $r$  viene solitamente chiamata *coordinata d'area*. Tuttavia, bisogna precisare che  $r$  non deve essere intesa come il “raggio” classico. Si considerino, ad esempio, due gusci sferici concentrici, centrati nella sorgente ed esterni ad essa di aree di superficie rispettivamente pari a  $4\pi R_1^2$  e  $4\pi R_2^2$ , con  $4\pi R_2^2 > 4\pi R_1^2 > 4\pi r_S^2$ , dove si è indicata con  $r_S$  la coordinata d'area della sorgente. Si ha allora che la distanza propria tra i due gusci sferici è, in generale, diversa da  $R_2 - R_1$ , ma risulta, invece, data da [5]:

$$\Delta R = \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{g_{rr}} dr = \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{B(r)} dr \begin{cases} \neq R_2 - R_1 & \text{in generale} \\ = R_2 - R_1 & \Leftrightarrow B(r) = 1, r \in [R_1, R_2] \end{cases} \quad (2.17)$$

dove la condizione  $B(r) = 1$ ,  $r \in [R_1, R_2]$  si verifica solo se lo spazio-tempo è localmente piatto in quella regione. Detto questo, si può assumere che la coordinata  $r$  assume valori fino all'infinito spaziale, dove ci si aspetta che la metrica si riduca a quella di Minkowski.

Sostituendo la metrica (2.12) nella (2.5) si ottengono due equazioni indipendenti, una per  $A$  ed una per  $B$ :

$$A(r) = 1 - \frac{k}{r}, \quad B(r) = A(r)^{-1} \quad (2.18)$$

dove  $k \geq 0$  è una costante di integrazione con le dimensioni di una lunghezza. Dallo studio del limite di campo debole<sup>3</sup> si ricava che  $k$  coincide con il *raggio di Schwarzschild*  $r_H$  della sorgente:

$$k \equiv r_H = \frac{2G_N M}{c^2} \quad (2.19)$$

Sostituendo le (2.18) e (2.19) nella (2.12) si ottiene la *metrica di Schwarzschild*, il cui elemento di linea  $ds^2$  è definito da:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_H}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.20)$$

Si noti, innanzitutto, che, come precedentemente anticipato, lo spazio-tempo di Schwarzschild è asintoticamente piatto, ossia, per  $r \rightarrow \infty$  la metrica di Schwarzschild (2.20) tende a quella di Minkowski<sup>4</sup>, il cui elemento di linea  $ds_{\text{Minkowski}}^2$  è dato da:

$$ds_{\text{Minkowski}}^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.21)$$

Dalla (2.20) si può ricavare il tempo proprio  $\tau$  di un osservatore statico a  $r, \theta$  e  $\varphi$  costanti, definito come:

$$d\tau^2 = \frac{-ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 \quad (2.22)$$

<sup>3</sup>Si intende il limite nel quale la sorgente del campo gravitazionale è sufficientemente debole da far discostare il tensore metrico  $g$  dal tensore metrico di Minkowski solo di una “piccola” quantità perturbativa [4].

<sup>4</sup>Naturalmente, la metrica di Minkowski si ottiene da quella di Schwarzschild anche nel limite  $M \rightarrow 0$ .

dove nella seconda uguaglianza si è imposto  $dr = d\theta = d\varphi = 0$ . Dalla (2.22) si ottiene:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{r_H}{r}}} \quad (2.23)$$

da cui si vede che  $dt \xrightarrow{r \rightarrow \infty} d\tau$ , ossia la coordinata temporale  $t$  può essere interpretata come il tempo proprio di un osservatore statico all'infinito spaziale.

Il significato delle coordinate  $\theta$  e  $\varphi$  è già stato discusso nella (2.14), mentre quello della coordinata d'area  $r$  nella (2.17), dove, nel caso della metrica di Schwarzschild, si ha  $B(r) = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1}$ .

Dal momento che la metrica (2.20) non contiene più alcuna dipendenza dalle dimensioni della sorgente sferica che la genera, si può assumere che la coordinata d'area della sorgente  $r_S \ll r_H$ : idealmente si può pensare la sorgente interamente concentrata nella regione  $r = 0$  [5].

Come affermato nel paragrafo 2.1.1, lo spazio-tempo di Schwarzschild è una delle quattro possibili soluzioni dell'equazione di Einstein (nel vuoto) che prevedono l'esistenza di uno (o più) orizzonti degli eventi. In particolare, nel caso dello spazio-tempo di Schwarzschild, l'orizzonte degli eventi è unico e si verifica in corrispondenza del raggio di Schwarzschild  $r_H$  della sorgente (si veda la figura 2.1 del paragrafo 2.1.1). Si noti che per tale valore della coordinata  $r$  la componente  $g_{rr}$  della metrica risulta infatti singolare. Tuttavia, per dimostrare completamente che l'orizzonte degli eventi si verifica in corrispondenza di  $r_H$ , bisognerebbe verificare, studiando le geodetiche radiali, che nessun segnale fisico può uscire dalla regione dello spazio-tempo interna ad  $r_H$ , la quale viene così denominata buco nero (di Schwarzschild), sebbene sia possibile entrare dentro tale regione da valori di  $r$  superiori a  $r_H$ . Quest'ultima osservazione è particolarmente importante. Infatti, osservando la metrica (2.20) si vede che:

$$r \rightarrow r_H^\pm \quad \Rightarrow \quad g_{tt} \rightarrow 0, \quad g_{rr} \rightarrow \pm\infty \quad (2.24)$$

Inoltre, mentre per  $r > r_H$  la segnatura della metrica è “- + + +”, per  $r < r_H$  il segno di  $g_{tt}$  e di  $g_{rr}$  si inverte e la segnatura diventa “+ - + +”, ciò significa che  $ct$  diviene una coordinata spaziale ed  $r$  diviene una coordinata temporale<sup>5</sup>. Tale osservazione porta a descrivere la varietà di Schwarzschild con due carte, entrambe definite dalle stesse coordinate di Schwarzschild  $\{ct, r, \theta, \varphi\}$ , ma con domini diversi:  $\mathcal{M}_-$ , con  $0 < r < r_H$ , per descrivere la geometria interna e  $\mathcal{M}_+$ , con  $r > r_H$ , per descrivere quella esterna. Come precedentemente osservato, lo studio delle geodetiche radiali dimostra che una particella di prova che si avvicina a  $r_H$  dall'infinito può superare il raggio di Schwarzschild e proseguire con continuità da  $\mathcal{M}_+$  a  $\mathcal{M}_-$  [5, 12]. Ciò porta a concludere, da un punto di vista fisico, che  $\mathcal{M}_+$  e  $\mathcal{M}_-$  sono di fatto due aperti della stessa varietà e non di varietà diverse.

<sup>5</sup>Va comunque osservato che, mentre  $\vec{K}_t = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  è un vettore di Killing associato a  $ct$  ovunque, non c'è nessun vettore di Killing associato a  $r$  da nessuna parte.

A questo punto, è fondamentale sottolineare che l'orizzonte degli eventi, che nel caso dello spazio-tempo di Schwarzschild si verifica per  $r = r_H$ , rappresenta una *singolarità delle coordinate*, pertanto rimovibile da un opportuno cambio di coordinate. La *singolarità reale*, ossia il luogo dei punti dello spazio-tempo dove le forze di marea descritte dal tensore di Riemann divergono si verifica per  $r = 0^6$ . Per poter parlare di una singolarità della curvatura bisogna riferirsi a quantità scalari costruite a partire dal tensore di Riemann [4] (si veda il paragrafo 1.1.5). Se un oggetto così costruito diverge in un sistema di riferimento, allora esso diverge in ogni altro sistema di riferimento (essendo indipendente dalle coordinate): rappresenta, quindi, una quantità ben definita per descrivere le singolarità reali dello spazio-tempo in esame. Lo scalare più semplice costruibile a partire dal tensore di Riemann (1.44) è la curvatura scalare  $R$ , data dalla (1.50), che, tuttavia, nel vuoto si annulla, come visto nella (2.4). Si possono allora costruire quantità scalari di ordine più alto come lo scalare di Kretschmann  $K$ , definito come:

$$K := R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.25)$$

Nel caso della metrica di Schwarzschild, si può calcolare esplicitamente  $K$  attraverso un calcolo diretto, ottenendo [4]:

$$K = \frac{48G_N^2 M^2}{c^4 r^6} \quad (2.26)$$

Dalla (2.26) risulta evidente che  $K$  diverge per  $r = 0$ , che viene quindi identificata come l'unica reale singolarità dello spazio-tempo di Schwarzschild.

## 2.2 Reinterpretazione del tensore metrico in senso distribuzionale

La soluzione di vuoto (2.20) dell'equazione di Einstein ricavata nella sezione 2.1.2 non è del tutto soddisfacente per due motivi [1]:

1. la metrica di Schwarzschild è ottenuta imponendo l'annullamento del tensore energia-impulso (2.2), perciò la ragione della curvatura dello spazio-tempo di Schwarzschild non risulta del tutto chiara<sup>7</sup>;
2. la sorgente che genera la curvatura della varietà di Schwarzschild è concentrata nella regione  $r = 0$ , esclusa dallo spazio-tempo<sup>8</sup>.

---

<sup>6</sup>Si ricordi che  $r = 0$  è da intendere più precisamente nel senso di sfera di area nulla, piuttosto che nel senso classico di raggio nullo

<sup>7</sup>Ci si aspetterebbe, in linea di principio, di ottenere lo spazio-tempo piatto di Minkowski da un tensore energia-impulso identicamente nullo ovunque.

<sup>8</sup>Come osservato alla fine del paragrafo 2.1.2 tale regione rappresenta una singolarità reale della curvatura.

Si vorrebbe poter includere la regione  $r = 0$  nella varietà di Schwarzschild interpretando il tensore metrico come una distribuzione tensoriale, la quale risulterebbe ben definita anche includendo l'origine delle coordinate di Schwarzschild nello spazio-tempo [1]. A tale scopo, si assumerà di restringere il supporto compatto delle funzioni di prova alla regione  $r < r_H$ ; senza perdita di generalità, essendo lo spazio delle funzioni di prova arbitrario. Come già osservato nel paragrafo 2.1.2, nella regione interna  $\mathcal{M}_-$  della varietà di Schwarzschild<sup>9</sup> la coordinata  $ct$  diventa spaziale, mentre  $r$  diventa temporale.

Si consideri la seguente regolarizzazione della metrica definita nella (2.20):

$$ds_{\text{reg}}^2 = h(r)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{h(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.27)$$

con:

$$h(r) = -1 + \frac{r_H}{r} f(r) \quad (2.28)$$

dove  $f(r)$  è una funzione di regolarizzazione arbitraria dipendente solo da  $r$ , la quale, nel limite distribuzionale che si opererà nel paragrafo 2.3.2, verrà fatta tendere a 1, in modo tale che la (2.27) si riduca alla (2.20). In queste coordinate, la metrica  $[g_{\mu\nu}]$  è quindi una matrice 4x4 diagonale data da:

$$[g_{\mu\nu}] = \text{diag}(g_{tt}, g_{rr}, g_{\theta\theta}, g_{\varphi\varphi}) \quad (2.29)$$

le cui componenti sono date da:

$$g_{tt} = h(r) \quad (2.30a)$$

$$g_{rr} = -\frac{1}{h(r)} \quad (2.30b)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad (2.30c)$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (2.30d)$$

Inoltre, come ci si aspetta dalle simmetrie del sistema, le componenti della metrica dipendono solo dalle coordinate  $r$  e  $\theta$ :

$$g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t, \varphi) \quad (2.31)$$

Come osservato nella (1.35) la metrica  $[g_{\mu\nu}]$  risulta invertibile e la sua inversa, indicata con  $[g^{\mu\nu}]$ , è data da:

$$[g^{\mu\nu}] = \text{diag}(g^{tt}, g^{rr}, g^{\theta\theta}, g^{\varphi\varphi}) \quad (2.32)$$

---

<sup>9</sup>Questa regione dello spazio-tempo interna all'orizzonte degli eventi è quella che, strettamente parlando, viene chiamata buco nero di Schwarzschild.

le cui componenti sono date da:

$$g^{tt} = \frac{1}{h(r)} \quad (2.33a)$$

$$g^{rr} = -h(r) \quad (2.33b)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (2.33c)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.33d)$$

Si può scrivere una base di quattro vettori ortonormali<sup>10</sup>, di cui uno di tipo tempo e tre di tipo spazio. Tale base prende il nome di *tetrade canonica* ed è data da:

$$\vec{e}_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{h(r)}} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{1}{\sqrt{h(r)}}, 0, 0, 0 \right) \quad (2.34a)$$

$$\vec{e}_{(r)} = \sqrt{h(r)} \frac{\partial}{\partial r} = \left( 0, \sqrt{h(r)}, 0, 0 \right) \quad (2.34b)$$

$$\vec{e}_{(\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \left( 0, 0, \frac{1}{r}, 0 \right) \quad (2.34c)$$

$$\vec{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \left( 0, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta} \right) \quad (2.34d)$$

È immediato verificare che i quattro vettori delle (2.34) costituiscono una base ortonormale, ossia:

$$\vec{e}_{(\mu)} \cdot \vec{e}_{(\nu)} = \pm \delta_{\nu}^{\mu} \quad (2.35)$$

Si noti che, dato che in  $\mathcal{M}_-$  la segnatura della metrica è “+ - + +”, il vettore di tipo tempo è  $\vec{e}_{(r)}$ .

Il tensore metrico  $g$  si esprime in funzione della base duale di 1-forme (1.62) come:

$$\begin{aligned} g &= g_{\mu\nu} \tilde{d}x^{\mu} \otimes \tilde{d}x^{\nu} = g_{tt} \tilde{c}dt \otimes \tilde{c}dt + g_{rr} \tilde{d}r \otimes \tilde{d}r + g_{\theta\theta} \tilde{d}\theta \otimes \tilde{d}\theta + g_{\varphi\varphi} \tilde{d}\varphi \otimes \tilde{d}\varphi \\ &= h(r) \tilde{c}dt \otimes \tilde{c}dt - \frac{1}{h(r)} \tilde{d}r \otimes \tilde{d}r + r^2 \tilde{d}\theta \otimes \tilde{d}\theta + r^2 \sin^2 \theta \tilde{d}\varphi \otimes \tilde{d}\varphi \end{aligned} \quad (2.36)$$

dove si sono utilizzate le (1.32), (2.29) e (1.42). Dalla (2.36) si può ricavare la *co-tetrade canonica* (base duale della tetrade canonica):

$$\tilde{e}^{(t)} = \sqrt{h(r)} \tilde{c}dt \quad (2.37a)$$

$$\tilde{e}^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{h(r)}} \tilde{d}r \quad (2.37b)$$

$$\tilde{e}^{(\theta)} = r \tilde{d}\theta \quad (2.37c)$$

$$\tilde{e}^{(\varphi)} = r \sin \theta \tilde{d}\varphi \quad (2.37d)$$

---

<sup>10</sup>Dove l'ortonormalità è riferita al prodotto scalare indotto da  $g$  come in (1.37).

È immediato verificare che i quattro vettori delle (2.37) costituiscono una base duale della tetrad canonica, ossia:

$$\tilde{e}^{(\mu)}(\tilde{e}_{(\nu)}) = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (2.38)$$

Reinterpretare il tensore metrico in senso distribuzionale significa, in linea di principio, associare al tensore  $g$  dato dalla (2.36) una distribuzione tensoriale<sup>11</sup>  $g(\vec{x})$ :

$$g(\vec{x}) = g_{tt}(\vec{x})\tilde{c}dt \otimes \tilde{c}dt + g_{rr}(\vec{x})\tilde{d}r \otimes \tilde{d}r + g_{\theta\theta}(\vec{x})\tilde{d}\theta \otimes \tilde{d}\theta + g_{\varphi\varphi}(\vec{x})\tilde{d}\varphi \otimes \tilde{d}\varphi \quad (2.39)$$

che agisce su una 3-forma a valori tensoriali di rango (2,0),  $\tilde{\phi}^{(2,0)}$ , come:

$$\langle g, \tilde{\phi}^{(2,0)} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x g_{\mu\nu}(\vec{x})\phi^{\mu\nu}(\vec{x}) \quad (2.40)$$

dove si è utilizzata la (1.66) con  $m = 0$  e  $l = 2$  e dove  $\phi^{\mu\nu} \in \mathcal{C}_0^\infty$ . In particolare, ciascuna componente di  $g$  nella (2.39) rappresenta una distribuzione in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\langle g_{\mu\mu}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x g_{\mu\mu}(\vec{x})\phi(\vec{x}), \quad \mu = t, r, \theta, \varphi \quad (2.41)$$

con  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$  funzione di prova.

Tuttavia, come si evince dai risultati ottenuti alla fine di questo secondo capitolo, la limitazione principale di questo approccio alla descrizione del tensore energia-impulso di un buco nero di Schwarzschild è proprio il fatto che esso permette di ricavare le componenti (in senso distribuzionale) dei tensori energia-impulso e di Ricci esclusivamente con un indice in alto ed uno in basso<sup>12</sup>, ma non con entrambi gli indici in basso (o in alto) non permettendo così di ricavare le componenti distribuzionali del tensore metrico<sup>13</sup>.

## 2.3 Tensore energia-impulso in senso distribuzionale

### 2.3.1 Tensore di Ricci

Esprimendo il tensore di Ricci in funzione dei simboli di Christoffel come in (1.47) è possibile calcolarne esplicitamente le componenti corrispondenti alla metrica regolarizzata definita nella (2.27). Dal calcolo (riportato in appendice A) si ottiene che al tensore di Ricci è associata una matrice  $[R_{\mu\nu}]$  4x4 diagonale:

$$[R_{\mu\nu}] = \text{diag}(R_{tt}, R_{rr}, R_{\theta\theta}, R_{\varphi\varphi}) \quad (2.42)$$

<sup>11</sup>Si veda il paragrafo 1.2.3.

<sup>12</sup>Tali componenti sono anche chiamate *componenti miste*.

<sup>13</sup>Si veda il capitolo finale relativo alle conclusioni per una discussione approfondita sul significato fisico di questi risultati.

le cui componenti sono date da:

$$R_{tt} = h(r) \left( \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right) \quad (2.43a)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{h(r)} \left( -\frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right) \quad (2.43b)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2 \left( \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) \quad (2.43c)$$

$$R_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) \quad (2.43d)$$

In queste coordinate, il tensore di Ricci, che si indicherà con  $Ric$ , si esprime quindi come:

$$Ric = R_{\mu\nu} \tilde{d}x^\mu \otimes \tilde{d}x^\nu = R_{tt} c \tilde{d}t \otimes c \tilde{d}t + R_{rr} \tilde{d}r \otimes \tilde{d}r + R_{\theta\theta} \tilde{d}\theta \otimes \tilde{d}\theta + R_{\varphi\varphi} \tilde{d}\varphi \otimes \tilde{d}\varphi \quad (2.44)$$

con le componenti date dalle (2.43).

Attraverso la metrica (la sua inversa per la precisione)<sup>14</sup> è possibile alzare il primo indice del tensore di Ricci, ottenendo un tensore di rango (1,1), che si indicherà con  $\overline{Ric}$  per distinguerlo dal tensore di Ricci con entrambi gli indici in basso, le cui componenti sono date da:

$$R^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu} = g^{\mu\mu} R_{\mu\nu} \quad (2.45)$$

dove nella seconda uguaglianza si è usata la (2.32). Dal momento che  $[R_{\mu\nu}]$  è diagonale (2.42), si ha che la (2.45) è diversa da 0 solo per  $\nu = \mu$ ; perciò anche  $[R^\mu{}_\nu]$  è diagonale:

$$[R^\mu{}_\nu] = \text{diag} (R^t{}_t, R^r{}_r, R^\theta{}_\theta, R^\varphi{}_\varphi) \quad (2.46)$$

le cui componenti sono date da:

$$R^t{}_t = g^{tt} R_{tt} = \frac{1}{h(r)} h(r) \left( \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right) = \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \quad (2.47a)$$

$$R^r{}_r = g^{rr} R_{rr} = -h(r) \frac{1}{h(r)} \left( -\frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right) = \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \quad (2.47b)$$

$$R^\theta{}_\theta = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} r^2 \left( \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) = \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \quad (2.47c)$$

$$R^\varphi{}_\varphi = g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) = \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \quad (2.47d)$$

Il tensore  $\overline{Ric}$ , nelle coordinate scelte, si scrive come:

$$\overline{Ric} = R^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \tilde{d}x^\nu = R^t{}_t \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \otimes c \tilde{d}t + R^r{}_r \frac{\partial}{\partial r} \otimes \tilde{d}r + R^\theta{}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes \tilde{d}\theta + R^\varphi{}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \tilde{d}\varphi \quad (2.48)$$

---

<sup>14</sup>Si veda il paragrafo 1.1.4.

con le componenti date dalle (2.47).

La curvatura scalare  $R$ , traccia del tensore di Ricci, può essere allora calcolata utilizzando la (1.50) e risulta pari a:

$$\begin{aligned} R &= R^\mu{}_\mu = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} = R^t{}_t + R^r{}_r + R^\theta{}_\theta + R^\varphi{}_\varphi \\ &= \frac{r_H}{r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \end{aligned} \quad (2.49)$$

### 2.3.2 Limite distribuzionale

È possibile reinterpretare la curvatura scalare  $R$  della (2.49) come una distribuzione in  $\mathbb{R}^3$  (che si indicherà sempre con  $R$ ). L'azione della distribuzione  $R(\vec{x})$  su una funzione di prova  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$  è definita come:

$$\langle R, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x R(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \quad (2.50)$$

Come anticipato nel paragrafo 2.2, si può assumere di restringere il supporto compatto delle funzioni di prova alla regione  $r < r_H$ , essendo lo spazio delle funzioni di prova arbitrario. Inoltre, poiché il risultato è indipendente dalla funzione di regolarizzazione  $f$  scelta, si può svolgere l'integrale (2.50) mantenendo una funzione  $f$  arbitraria, supponendo che  $f \in \mathcal{C}^\infty$  e che abbia uno zero nell'origine<sup>15</sup>, e considerando il limite  $f \rightarrow 1$  solo alla fine [1]. Esprimendo l'integrale (2.50) in coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} \langle R, \phi \rangle &= \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi [R(r) \phi(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)] \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 R(r) S_\phi(r) \end{aligned} \quad (2.51)$$

dove si è posto:

$$S_\phi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \phi(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad (2.52)$$

---

<sup>15</sup>Un possibile esempio potrebbe essere  $f(r) = \frac{r^2}{r^2+a^2}$ ,  $a \rightarrow 0$ .

Sostituendo la (2.49)<sup>16</sup> ed integrando per parti, la (2.51) diventa:

$$\begin{aligned}
\langle R, \phi \rangle &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left( \frac{r_H}{r} f''(r) + \frac{2r_H}{r^2} f'(r) \right) S_\phi(r) \\
&= 4\pi r_H \int_0^\infty dr (r f''(r) + 2f'(r)) S_\phi(r) \\
&= 4\pi r_H [(r f'(r) + f(r)) S_\phi(r)]_0^\infty - 4\pi r_H \int_0^\infty dr (r f'(r) + f(r)) S'_\phi(r) \\
&= 4\pi r_H [r f'(r) S_\phi(r) + f(r) S_\phi(r) - r f(r) S'_\phi(r)]_0^\infty + 4\pi r_H \int_0^\infty dr r f(r) S''_\phi(r) \\
&= 4\pi r_H \int_0^\infty dr r f(r) S''_\phi(r)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

dove nell'ultima uguaglianza, nella valutazione dei termini di bordo, si sono usati lo zero di  $f(r)$  in  $r = 0$  ed il fatto che il supporto compatto di  $\phi$  è ristretto a  $r < r_H$ . Operando il limite  $f \rightarrow 1$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
\langle R, \phi \rangle &= 4\pi r_H \int_0^\infty dr r S''_\phi(r) = 4\pi r_H [r S'_\phi(r)]_0^\infty - 4\pi r_H \int_0^\infty dr S'_\phi(r) \\
&= -4\pi r_H [S_\phi(r)]_0^\infty = 4\pi r_H S_\phi(0) = 4\pi r_H \phi(\vec{0})
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Ne segue che la (2.50) diventa:

$$\langle R, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x R(\vec{x}) \phi(\vec{x}) = 4\pi r_H \phi(\vec{0}) \tag{2.55}$$

per cui:

$$R(\vec{x}) = 4\pi r_H \delta^{(3)}(\vec{x}) \tag{2.56}$$

dove  $\delta^{(3)}(\vec{x})$  rappresenta la distribuzione delta di Dirac in  $\mathbb{R}^3$ .

In maniera analoga alla (2.39), si può associare una distribuzione tensoriale  $\overline{Ric}(\vec{x})$  al tensore di Ricci (2.48):

$$\overline{Ric}(\vec{x}) = R^t_t(\vec{x}) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \otimes \tilde{c} dt + R^r_r(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \otimes \tilde{d}r + R^\theta_\theta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes \tilde{d}\theta + R^\varphi_\varphi(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \tilde{d}\varphi \tag{2.57}$$

Similmente a quanto fatto per la traccia nelle (2.50-2.56) è possibile ricavare le componenti distribuzionali della (2.57) ottenendo:

$$R^t_t(\vec{x}) = R^r_r(\vec{x}) = -\frac{1}{2} R(\vec{x}) \tag{2.58a}$$

$$R^\theta_\theta(\vec{x}) = R^\varphi_\varphi(\vec{x}) = R(\vec{x}) \tag{2.58b}$$

---

<sup>16</sup>Si indicheranno le derivate prime e seconde con la notazione primata per comodità di notazione.

dove  $R(\vec{x})$  è data dalla (2.56).

Sostituendo le (2.58) e la (2.56) nella (2.57) si ottiene l'espressione per la distribuzione tensoriale associata al tensore di Ricci con il primo indice in alto ed il secondo in basso:

$$\overline{Ric}(\vec{x}) = 4\pi r_H \delta^{(3)}(\vec{x}) \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \otimes \tilde{c}dt - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \otimes \tilde{d}r + \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes \tilde{d}\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \tilde{d}\varphi \right) \quad (2.59)$$

Completata la trattazione del tensore di Ricci, è possibile rivolgersi allo studio del tensore energia-impulso. Dall'equazione di Einstein (2.1) risulta:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G_N} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \quad (2.60)$$

Poiché  $[g_{\mu\nu}]$  e  $[R_{\mu\nu}]$  sono diagonali, anche  $[T_{\mu\nu}]$  risulta diagonale:

$$[T_{\mu\nu}] = \text{diag} (T_{tt}, T_{rr}, T_{\theta\theta}, T_{\varphi\varphi}) \quad (2.61)$$

dove le componenti possono essere calcolate dalla (2.60) come:

$$T_{tt} = \frac{c^4}{8\pi G_N} \left( R_{tt} - \frac{1}{2} R g_{tt} \right) = -\frac{c^4}{8\pi G_N} h(r) \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \quad (2.62a)$$

$$T_{rr} = \frac{c^4}{8\pi G_N} \left( R_{rr} - \frac{1}{2} R g_{rr} \right) = \frac{c^4}{8\pi G_N} \frac{1}{h(r)} \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \quad (2.62b)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{c^4}{8\pi G_N} \left( R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} R g_{\theta\theta} \right) = -\frac{c^4}{8\pi G_N} r^2 \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \quad (2.62c)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{c^4}{8\pi G_N} \left( R_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} R g_{\varphi\varphi} \right) = -\frac{c^4}{8\pi G_N} r^2 \sin^2 \theta \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \quad (2.62d)$$

$$(2.62e)$$

dove si sono utilizzate le componenti di  $[g_{\mu\nu}]$  e di  $[R_{\mu\nu}]$  date rispettivamente dalle (2.30) e (2.43) e la curvatura scalare data dalla (2.49).

In queste coordinate, il tensore energia-impulso  $T$ , si esprime quindi come:

$$T = T_{\mu\nu} \tilde{d}x^\mu \otimes \tilde{d}x^\nu = T_{tt} \tilde{c}dt \otimes \tilde{c}dt + T_{rr} \tilde{d}r \otimes \tilde{d}r + T_{\theta\theta} \tilde{d}\theta \otimes \tilde{d}\theta + T_{\varphi\varphi} \tilde{d}\varphi \otimes \tilde{d}\varphi \quad (2.63)$$

con le componenti date dalle (2.62).

In maniera del tutto analoga a quanto fatto per il tensore di Ricci nel paragrafo 2.3.1, è possibile alzare il primo indice del tensore energia-impulso ottenendo il tensore  $\overline{T}$  di rango (1,1), a cui è associata la matrice 4x4 diagonale  $[T^\mu_\nu]$ :

$$[T^\mu_\nu] = \text{diag} (T^t_t, T^r_r, T^\theta_\theta, T^\varphi_\varphi) \quad (2.64)$$

le cui componenti sono date da:

$$T^t_t = g^{tt}T_{tt} = \frac{1}{h(r)} \left( -\frac{c^4}{8\pi G_N} h(r) \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) = -\frac{c^4}{8\pi G_N} \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \quad (2.65a)$$

$$T^r_r = g^{rr}T_{rr} = -h(r) \frac{c^4}{8\pi G_N} \frac{1}{h(r)} \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} = -\frac{c^4}{8\pi G_N} \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \quad (2.65b)$$

$$T^\theta_\theta = g^{\theta\theta}T_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} r^2 \left( -\frac{c^4}{8\pi G_N} r^2 \frac{r_H}{2r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} \right) = -\frac{c^4}{8\pi G_N} \frac{r_H}{2r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} \quad (2.65c)$$

$$T^\varphi_\varphi = g^{\varphi\varphi}T_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( -\frac{c^4}{8\pi G_N} r^2 \sin^2 \theta \frac{r_H}{2r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} \right) = -\frac{c^4}{8\pi G_N} \frac{r_H}{2r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} \quad (2.65d)$$

Il tensore  $\bar{T}$ , nelle coordinate scelte, si scrive come:

$$\bar{T} = T^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \tilde{d}x^\nu = T^t_t \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \otimes c\tilde{d}t + T^r_r \frac{\partial}{\partial r} \otimes \tilde{d}r + T^\theta_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes \tilde{d}\theta + T^\varphi_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \tilde{d}\varphi \quad (2.66)$$

con le componenti date dalle (2.65).

La traccia  $\mathcal{T}$  del tensore energia-impulso risulta pari a<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = T^\mu_\mu &= g^{tt}T_{tt} + g^{rr}T_{rr} + g^{\theta\theta}T_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}T_{\varphi\varphi} = T^t_t + T^r_r + T^\theta_\theta + T^\varphi_\varphi \\ &= -\frac{c^4}{8\pi G_N} \left( \frac{r_H}{r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} + \frac{2r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) \equiv -\frac{c^4}{8\pi G_N} R \end{aligned} \quad (2.67)$$

Reinterpretando la traccia  $\mathcal{T}$  in senso distribuzionale nello stesso senso della (2.50), si ha:

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = -\frac{c^4}{8\pi G_N} R(\vec{x}) = -\frac{c^4 r_H}{2G_N} \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (2.68)$$

ottenuta direttamente dalla (2.67) sostituendovi la (2.56).

Proprio come per la (2.57), si può associare una distribuzione tensoriale  $\bar{T}(\vec{x})$  al tensore energia-impulso  $\bar{T}$ :

$$\bar{T}(\vec{x}) = T^t_t(\vec{x}) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \otimes c\tilde{d}t + T^r_r(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \otimes \tilde{d}r + T^\theta_\theta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes \tilde{d}\theta + T^\varphi_\varphi(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \tilde{d}\varphi \quad (2.69)$$

Da un calcolo del tutto analogo a quello che si può effettuare per le (2.58), è possibile ricavare le componenti distribuzionali della (2.69) ottenendo:

$$T^t_t(\vec{x}) = T^r_r(\vec{x}) = \mathcal{T}(\vec{x}) \quad (2.70a)$$

$$T^\theta_\theta(\vec{x}) = T^\varphi_\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \mathcal{T}(\vec{x}) \quad (2.70b)$$

<sup>17</sup>La si può ricavare anche estraendo la traccia da ambo i membri dell'equazione di Einstein.

dove  $\mathcal{T}(\vec{x})$  è data dalla (2.68).

Sostituendo le (2.70) e la (2.68) nella (2.69) si ottiene l'espressione per la distribuzione tensoriale associata al tensore energia-impulso con il primo indice in alto ed il secondo in basso dello spazio-tempo di Schwarzschild [1]:

$$\bar{T}(\vec{x}) = -\frac{c^4 r_H}{2G_N} \delta^{(3)}(\vec{x}) \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \otimes \tilde{c}dt + \frac{\partial}{\partial r} \otimes \tilde{d}r - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes \tilde{d}\theta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes \tilde{d}\varphi \right) \quad (2.71)$$

Dal punto di vista fisico, la distribuzione tensoriale (2.71) rappresenta la sorgente del campo gravitazionale che si manifesta nella metrica di Schwarzschild. Si noti che, come ci si aspetta,  $\bar{T}(\vec{x})$  si annulla nel limite  $M \rightarrow 0$ . Il risultato ottenuto nella (2.71) permette di individuare una possibile soluzione ai problemi 1. e 2. esposti all'inizio del paragrafo 2.2. Viene, infatti, introdotta una (seppur non del tutto ben definita<sup>18</sup>) sorgente della curvatura della varietà di Schwarzschild, distinguendo così quest'ultima dallo spazio-tempo piatto di Minkowski. Tale sorgente è costituita da una distribuzione tensoriale, le cui componenti miste sono ben definite, concentrata nella regione  $r = 0$  dello spazio-tempo [1]. Si osserva, inoltre, che le tecniche distribuzionali presentate in questo capitolo, possono essere applicate anche al più generico modello di buco nero di Kerr-Newmann, la cui descrizione estende quella trattata in questo capitolo [2].

---

<sup>18</sup>Si veda il capitolo successivo, relativo alle conclusioni, per approfondimenti in merito.

# Conclusioni

Alla luce dei risultati ottenuti grazie al metodo esposto nei paragrafi 2.2 e 2.3, è doveroso osservare quanto segue. Il procedimento descritto permette di ottenere esclusivamente le componenti distribuzionali miste del tensore di Ricci (2.58) e del tensore energia-impulso (2.70), ma non le componenti con entrambi gli indici in basso (o in alto). Ciò è dovuto, in definitiva, al comportamento singolare della metrica di Schwarzschild nella regione  $r = 0$ . Tale comportamento singolare non permette di ricavare un'espressione ben definita per la distribuzione tensoriale associata al tensore metrico di Schwarzschild, come osservato alla fine del paragrafo 2.2. Questa limitazione sembrerebbe suggerire che l'approccio alla descrizione di un buco nero di Schwarzschild descritta nel capitolo 2 non sia del tutto soddisfacente. Ad esempio, se si pensa ad un buco nero originato per collasso gravitazionale di una stella massiccia<sup>19</sup>, non risulta chiaro il motivo per cui, dal tensore energia-impulso ben definito dell'oggetto stellare, si ottengono solo le componenti distribuzionali miste del tensore energia-impulso del buco nero risultante dal collasso. Come appare evidente dalla definizione di tensore data nel paragrafo 1.1.3, affinché un tensore sia ben definito, quest'ultimo deve essere esprimibile non solo attraverso le sue componenti miste, ma anche con i suoi indici in basso (o in alto). Il fatto che non si riesca a definire le componenti (in senso distribuzionale) con entrambi gli indici in basso (o in alto) del tensore energia-impulso della sorgente gravitazionale concentrata nella sfera di area nulla definita da  $r = 0$ , può quindi significare che la sorgente della curvatura della varietà di Schwarzschild non sia una sorgente "puntiforme", ma sia distribuita in una sottovarietà di dimensione maggiore. Si è quindi confermato il risultato ottenuto da Geroch e Traschen nell'articolo [7], dove si dimostra che, in una varietà 4-dimensionale, sorgenti "puntiformi" non hanno un tensore energia-impulso ben definito, come distribuzione. Tuttavia, si può dimostrare che il tensore energia-impulso è ben definito, in senso distribuzionale, per una sorgente rappresentata da una sottovarietà 3-dimensionale, come un (sottile) guscio sferico<sup>20</sup>. Un approccio alternativo al problema è, infatti, rintracciabile nel cosiddetto *modello a shell*, secondo il quale la sorgente gravitazionale consiste in un

---

<sup>19</sup>Il limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff individua una massa limite, approssimativamente compresa tra 1.5 e 3.0 masse solari, oltre la quale una stella di neutroni non risulterebbe stabile e collasserebbe in un buco nero di origine stellare [3].

<sup>20</sup>Si veda [7].

(sottile) guscio sferico di massa  $M$  centrato nella singolarità. Tale modello permette di evitare la singolarità della curvatura che si verifica in  $r = 0$  e di ottenere delle espressioni ben definite per i tensori metrico, di Ricci ed energia-impulso (come distribuzioni), descritti attraverso delle delta di Dirac con supporto sul guscio [6].

# Appendice A

## Calcolo del tensore di Ricci

In questa appendice viene calcolato il tensore di Ricci definito nella (1.45) corrispondente alla metrica di Schwarzschild regolarizzata (2.27). Il metodo di calcolo seguito si basa sull'espressione (1.47) del tensore di Ricci in funzione dei simboli di Christoffel, definiti nella (1.48) ed è guidato dal procedimento presentato nel riferimento bibliografico [9].

Si procede, innanzitutto, al calcolo dei simboli di Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ , notando che, per  $\mu$  fissato, che può assumere i valori  $t, r, \theta, \varphi$ , essi costituiscono quattro matrici 4x4 simmetriche (una per ciascun valore assumibile da  $\mu$ ), come osservato nella (1.49). Per la semplificazione delle espressioni si terrà conto del fatto che le componenti non nulle della metrica  $[g_{\mu\nu}]$  e della sua inversa  $[g^{\mu\nu}]$  sono date dalle (2.30) e (2.33). Si ricorda, inoltre, che la metrica non dipende dalle coordinate  $t$  e  $\varphi$  (2.31).

- $\mu = t$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^t = \frac{1}{2}g^{t\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{t\alpha,\beta} + g_{t\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{t\alpha,\beta} + g_{t\beta,\alpha}) \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,t} + g_{tt,t}) = 0 \quad (\text{A.2a})$$

$$\Gamma_{ti}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,i} + g_{ti,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,i}, \quad i = r, \theta, \varphi \quad (\text{A.2b})$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,r} = \frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \quad (\text{A.2c})$$

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,\theta} = 0 \quad (\text{A.2d})$$

$$\Gamma_{t\varphi}^t = \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,\varphi} = 0 \quad (\text{A.2e})$$

$$\Gamma_{ij}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{ti,j} + g_{tj,i}) = 0, \quad i, j = r, \theta, \varphi \quad (\text{A.2f})$$

In notazione matriciale:

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^t] = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{tr}^t & 0 & 0 \\ \Gamma_{tr}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

dove le componenti non nulle sono date dalla (A.2c).

- $\mu = r$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^r = \frac{1}{2}g^{r\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{r\alpha,\beta} + g_{r\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,r}) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rt,t} + g_{rt,t} - g_{tt,r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{tt,r} = -\frac{1}{2}(-h(r))\frac{dh(r)}{dr} \\ &= \frac{1}{2}h(r)\frac{dh(r)}{dr} \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

$$\Gamma_{ti}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rt,i} + g_{ri,t} - g_{ti,r}) = 0, \quad i = r, \theta, \varphi \quad (\text{A.5b})$$

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{ri,j} + g_{rj,i} - g_{ij,r}) = 0, \quad i \neq j \quad (\text{A.5c})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r} = \frac{1}{2}(-h(r))\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{h(r)}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{h(r)}\frac{dh(r)}{dr} \end{aligned} \quad (\text{A.5d})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{r\theta,\theta} + g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\theta\theta,r} = -\frac{1}{2}(-h(r))\frac{d(r^2)}{dr} = rh(r) \quad (\text{A.5e})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{r\varphi,\varphi} + g_{r\varphi,\varphi} - g_{\varphi\varphi,r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\varphi\varphi,r} = -\frac{1}{2}(-h(r))\frac{d(r^2 \sin^2 \theta)}{dr} \\ &= rh(r) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{A.5f})$$

In notazione matriciale:

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^r] = \begin{pmatrix} \Gamma_{tt}^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{rr}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{\theta\theta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{\varphi\varphi}^r \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

dove le componenti non nulle sono date dalle (A.5a), (A.5d), (A.5e) e (A.5f).

- $\mu = \theta$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta\alpha,\beta} + g_{\theta\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\theta}) \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{tt}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta t,t} + g_{\theta t,t} - g_{tt,\theta}) = 0 \quad (\text{A.8a})$$

$$\Gamma_{ti}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta i,i} + g_{\theta i,t} - g_{ti,\theta}) = 0, \quad i = r, \theta, \varphi \quad (\text{A.8b})$$

$$\Gamma_{ii}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta i,i} + g_{\theta i,i} - g_{ii,\theta}) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{ii,\theta}, \quad i = r, \theta, \varphi \quad (\text{A.8c})$$

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{rr,\theta} = 0 \quad (\text{A.8d})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,\theta} = 0 \quad (\text{A.8e})$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\varphi\varphi,\theta} = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 \sin^2 \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.8f})$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta\theta,r} - g_{r\theta,\theta}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2)}{dr} = \frac{1}{r} \quad (\text{A.8g})$$

$$\Gamma_{r\varphi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta r,\varphi} + g_{\theta\varphi,r} - g_{r\varphi,\theta}) = 0 \quad (\text{A.8h})$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\varphi} + g_{\theta\varphi,\theta} - g_{\theta\varphi,\theta}) = 0 \quad (\text{A.8i})$$

In notazione matriciale:

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{r\theta}^{\theta} & 0 \\ 0 & \Gamma_{r\theta}^{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

dove le componenti non nulle sono date dalle (A.8f) e (A.8g).

- $\mu = \varphi$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi\alpha,\beta} + g_{\varphi\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\varphi}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi\alpha,\beta} + g_{\varphi\beta,\alpha}) \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{tt}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi t,t} + g_{\varphi t,t}) = 0 \quad (\text{A.11a})$$

$$\Gamma_{ii}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi t,i} + g_{\varphi i,t}) = 0, \quad i = r, \theta, \varphi \quad (\text{A.11b})$$

$$\Gamma_{ii}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi i,i} + g_{\varphi i,i}) = 0, \quad i = r, \theta, \varphi \quad (\text{A.11c})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi r,\theta} + g_{\varphi\theta,r}) = 0 \quad (\text{A.11d})$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi r,\varphi} + g_{\varphi\varphi,r}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi,r} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d(r^2 \sin^2 \theta)}{dr} = \frac{1}{r} \quad (\text{A.11e})$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(g_{\varphi\theta,\varphi} + g_{\varphi\varphi,\theta}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi,\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d(r^2 \sin^2 \theta)}{d\theta} = \cot \theta \quad (\text{A.11f})$$

In notazione matriciale:

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{r\varphi}^\varphi \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \\ 0 & \Gamma_{r\varphi}^\varphi & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

dove le componenti non nulle sono date dalle (A.11e) e (A.11f).

Prima di passare al calcolo del tensore di Ricci, si ricorda che la funzione  $h(r)$  che compare in alcuni dei simboli di Christoffel non nulli è data dalla (2.28), le cui derivate prima e seconda sono:

$$\frac{dh(r)}{dr} = -\frac{r_H}{r^2}f(r) + \frac{r_H}{r} \frac{df(r)}{dr} \quad (\text{A.13a})$$

$$\frac{d^2h(r)}{dr^2} = 2\frac{r_H}{r^3}f(r) - 2\frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} + \frac{r_H}{r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} \quad (\text{A.13b})$$

A questo punto, è possibile calcolare le componenti  $R_{\mu\nu}$  del tensore di Ricci utilizzando la (1.47), la quale, grazie alle (A.2), (A.5), (A.8) e (A.11) si semplifica come:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\nu\mu,\beta}^\beta - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\beta + \Gamma_{\beta\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \\ &= \Gamma_{\nu\mu,t}^t + \Gamma_{\nu\mu,r}^r + \Gamma_{\nu\mu,\theta}^\theta + \Gamma_{\nu\mu,\varphi}^\varphi - \Gamma_{t\mu,\nu}^t - \Gamma_{r\mu,\nu}^r - \Gamma_{\theta\mu,\nu}^\theta - \Gamma_{\varphi\mu,\nu}^\varphi + \Gamma_{t\alpha}^t \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \Gamma_{r\alpha}^r \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \\ &\quad + \Gamma_{\theta\alpha}^\theta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \Gamma_{\varphi\alpha}^\varphi \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^t \Gamma_{t\mu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^r \Gamma_{r\mu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\theta \Gamma_{\theta\mu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\varphi \Gamma_{\varphi\mu}^\alpha \\ &= \Gamma_{\nu\mu,r}^r + \Gamma_{\nu\mu,\theta}^\theta - \Gamma_{t\mu,\nu}^t - \Gamma_{r\mu,\nu}^r - \Gamma_{\theta\mu,\nu}^\theta - \Gamma_{\varphi\mu,\nu}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\nu\mu}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\nu\mu}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\nu\mu}^r \\ &\quad + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\nu\mu}^r + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\nu\mu}^\theta - \Gamma_{\nu t}^t \Gamma_{t\mu}^t - \Gamma_{\nu r}^r \Gamma_{r\mu}^r - \Gamma_{\nu t}^r \Gamma_{r\mu}^t - \Gamma_{\nu r}^r \Gamma_{r\mu}^r - \Gamma_{\nu\theta}^r \Gamma_{\theta\mu}^\theta - \Gamma_{\nu\varphi}^r \Gamma_{\varphi\mu}^\varphi \\ &\quad - \Gamma_{\nu r}^\theta \Gamma_{\theta\mu}^r - \Gamma_{\nu\theta}^\theta \Gamma_{\theta\mu}^\theta - \Gamma_{\nu\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\mu}^\varphi - \Gamma_{\nu r}^\varphi \Gamma_{\varphi\mu}^r - \Gamma_{\nu\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi\mu}^\theta - \Gamma_{\nu\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\mu}^\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

dove nella seconda uguaglianza si è sfruttato il fatto che  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \neq \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(t, \varphi)$  e nella terza si sono omessi i simboli di Christoffel nulli. I termini fuori dalla diagonale principale sono dati da:

- $R_{ti}, i = r, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned}
R_{ti} &= \Gamma_{it,r}^r + \Gamma_{it,\theta}^\theta - \Gamma_{tt,i}^t - \Gamma_{rt,i}^r - \Gamma_{\theta t,i}^\theta - \Gamma_{\varphi t,i}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{it}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{it}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{it}^r + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{it}^r \\
&\quad + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{it}^\theta - \Gamma_{it}^t \Gamma_{tt}^t - \Gamma_{ir}^t \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{it}^t \Gamma_{rt}^r - \Gamma_{ir}^r \Gamma_{rt}^r - \Gamma_{i\theta}^r \Gamma_{rt}^\theta - \Gamma_{i\varphi}^r \Gamma_{rt}^\varphi - \Gamma_{ir}^\theta \Gamma_{\theta t}^r \\
&\quad - \Gamma_{i\theta}^\theta \Gamma_{\theta t}^\theta - \Gamma_{i\varphi}^\theta \Gamma_{\theta t}^\varphi - \Gamma_{ir}^\varphi \Gamma_{\varphi t}^r - \Gamma_{i\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi t}^\theta - \Gamma_{i\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi t}^\varphi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.15}$$

- $R_{ij}, i, j = r, \theta, \varphi$  e  $i \neq j$

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \Gamma_{ji,r}^r + \Gamma_{ji,\theta}^\theta - \Gamma_{ti,j}^t - \Gamma_{ri,j}^r - \Gamma_{\theta i,j}^\theta - \Gamma_{\varphi i,j}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{ji}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{ji}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{ji}^r + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{ji}^r \\
&\quad + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{ji}^\theta - \Gamma_{jt}^t \Gamma_{ti}^t - \Gamma_{jr}^t \Gamma_{ti}^r - \Gamma_{jt}^t \Gamma_{ri}^r - \Gamma_{jr}^r \Gamma_{ri}^r - \Gamma_{j\theta}^r \Gamma_{ri}^\theta - \Gamma_{j\varphi}^r \Gamma_{ri}^\varphi - \Gamma_{jr}^\theta \Gamma_{\theta i}^r \\
&\quad - \Gamma_{j\theta}^\theta \Gamma_{\theta i}^\theta - \Gamma_{j\varphi}^\theta \Gamma_{\theta i}^\varphi - \Gamma_{jr}^\varphi \Gamma_{\varphi i}^r - \Gamma_{j\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi i}^\theta - \Gamma_{j\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi i}^\varphi \\
&= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{ji}^\theta - \Gamma_{j\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi i}^\varphi
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$R_{r\theta} = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\theta\varphi}^\theta \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \cot \theta \frac{1}{r} - \cot \theta \frac{1}{r} = 0 \tag{A.17a}$$

$$R_{r\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^\theta - \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^\varphi = 0 \tag{A.17b}$$

$$R_{\theta\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi\theta}^\theta - \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = 0 \tag{A.17c}$$

Dalle (A.15) e (A.17), sfruttando la simmetria (1.46), si vede che  $[R_{\mu\nu}]$  non ha termini al di fuori della diagonale principale, per cui:

$$[R_{\mu\nu}] = \text{diag}(R_{tt}, R_{rr}, R_{\theta\theta}, R_{\varphi\varphi}) \tag{A.18}$$

che coincide con la (2.42).

Non resta che calcolare i termini sulla diagonale principale:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \Gamma_{tt,r}^r + \Gamma_{tt,\theta}^\theta - \Gamma_{tt,t}^t - \Gamma_{rt,t}^r - \Gamma_{\theta t,t}^\theta - \Gamma_{\varphi t,t}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{tt}^r \\
&\quad + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{tt}^\theta - \Gamma_{tt}^t \Gamma_{tt}^t - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rt}^t - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{rt}^r - \Gamma_{t\theta}^r \Gamma_{rt}^\theta - \Gamma_{t\varphi}^r \Gamma_{rt}^\varphi - \Gamma_{tr}^\theta \Gamma_{\theta t}^r \\
&\quad - \Gamma_{t\theta}^\theta \Gamma_{\theta t}^\theta - \Gamma_{t\varphi}^\theta \Gamma_{\theta t}^\varphi - \Gamma_{tr}^\varphi \Gamma_{\varphi t}^r - \Gamma_{t\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi t}^\theta - \Gamma_{t\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi t}^\varphi \\
&= \Gamma_{tt,r}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{tt}^t \Gamma_{rt}^t \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} h(r) \frac{dh(r)}{dr} \right) + \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) \left( \frac{1}{2} h(r) \frac{dh(r)}{dr} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{2} h(r) \frac{dh(r)}{dr} \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{2} h(r) \frac{dh(r)}{dr} \right) - \left( \frac{1}{2} h(r) \frac{dh(r)}{dr} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{dh(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} h(r) \frac{d^2 h(r)}{dr^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{dh(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{h(r)}{r} \frac{dh(r)}{dr} - \frac{1}{4} \left( \frac{dh(r)}{dr} \right)^2 \\
&= h(r) \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 h(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh(r)}{dr} \right) \\
&= h(r) \left( \frac{r_H}{r^3} f(r) - \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} + \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{r_H}{r^3} f(r) + \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) \\
&= h(r) \left( \frac{r_H}{2r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= \Gamma_{rr,r}^r + \Gamma_{rr,\theta}^\theta - \Gamma_{tr,r}^t - \Gamma_{rr,r}^r - \Gamma_{\theta r,r}^\theta - \Gamma_{\varphi r,r}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{rr}^r \\
&\quad + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{rr}^\theta - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tr}^r - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tr}^r - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{rr}^t - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{rr}^\theta - \Gamma_{r\varphi}^r \Gamma_{rr}^\varphi - \Gamma_{rr}^\theta \Gamma_{\theta r}^r \\
&\quad - \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{r\varphi}^\theta \Gamma_{\theta r}^\varphi - \Gamma_{rr}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^r - \Gamma_{r\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^\theta - \Gamma_{r\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^\varphi \\
&= -\Gamma_{tr,r}^t - \Gamma_{\theta r,r}^\theta - \Gamma_{\varphi r,r}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tr}^r - \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{\theta r}^r - \Gamma_{r\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^r \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} \right) - \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \right) - \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{h^2(r)} \left( \frac{dh(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{d^2h(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{h^2(r)} \left( \frac{dh(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{rh(r)} \frac{dh(r)}{dr} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{rh(r)} \frac{dh(r)}{dr} - \frac{1}{4} \frac{1}{h^2(r)} \left( \frac{dh(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{1}{h(r)} \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2h(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dh(r)}{dr} \right) \\
&= \frac{1}{h(r)} \left( -\frac{r_H}{r^3} f(r) + \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} - \frac{r_H}{2r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} + \frac{r_H}{r^3} f(r) - \frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \right) \\
&= \frac{1}{h(r)} \left( -\frac{r_H}{2r} \frac{d^2f(r)}{dr^2} \right)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= \Gamma_{\theta\theta,r}^r + \Gamma_{\theta\theta,\theta}^\theta - \Gamma_{t\theta,\theta}^t - \Gamma_{r\theta,\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta,\theta}^\theta - \Gamma_{\varphi\theta,\theta}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r \\
&\quad + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{\theta t}^t \Gamma_{t\theta}^t - \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{t\theta}^r - \Gamma_{\theta t}^r \Gamma_{r\theta}^t - \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta - \Gamma_{\theta\varphi}^r \Gamma_{r\theta}^\varphi \\
&\quad - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{\theta\varphi}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\varphi - \Gamma_{\theta r}^\varphi \Gamma_{\varphi\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi\theta}^\theta - \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \\
&= \Gamma_{\theta\theta,r}^r - \Gamma_{\varphi\theta,\theta}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(rh(r)) - \frac{\partial}{\partial\theta}(\cot\theta) + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr}\right)(rh(r)) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr}\right)(rh(r)) + \left(\frac{1}{r}\right)(rh(r)) - \left(\frac{1}{r}\right)(rh(r)) - (\cot\theta)(\cot\theta) \\
&= h(r) + r \frac{dh(r)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\theta} - \cot^2\theta \\
&= -1 + \frac{r_H}{r} f(r) - \frac{r_H}{r} f(r) + r_H \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\theta} - \cot^2\theta \\
&= r^2 \left(\frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr}\right) - 1 + \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
&= r^2 \left(\frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr}\right)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\varphi} &= \Gamma_{\varphi\varphi,r}^r + \Gamma_{\varphi\varphi,\theta}^\theta - \Gamma_{t\varphi,\varphi}^t - \Gamma_{r\varphi,\varphi}^r - \Gamma_{\theta\varphi,\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi\varphi,\varphi}^\varphi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\varphi\varphi}^r \\
&\quad + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi t}^t \Gamma_{t\varphi}^t - \Gamma_{\varphi r}^r \Gamma_{t\varphi}^r - \Gamma_{\varphi t}^r \Gamma_{r\varphi}^t - \Gamma_{\varphi r}^r \Gamma_{r\varphi}^r - \Gamma_{\varphi\theta}^r \Gamma_{r\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi\varphi}^r \Gamma_{r\varphi}^\varphi \\
&\quad - \Gamma_{\varphi r}^\theta \Gamma_{\theta\varphi}^r - \Gamma_{\varphi\theta}^\theta \Gamma_{\theta\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi - \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r - \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \\
&= \Gamma_{\varphi\varphi,r}^r + \Gamma_{\varphi\varphi,\theta}^\theta + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\varphi\varphi}^r - \Gamma_{\varphi r}^r \Gamma_{r\varphi}^\varphi - \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(rh(r) \sin^2\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin\theta \cos\theta) + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr}\right)(rh(r) \sin^2\theta) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr}\right)(rh(r) \sin^2\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)(rh(r) \sin^2\theta) - (rh(r) \sin^2\theta) \left(\frac{1}{r}\right) \\
&\quad - (-\sin\theta \cos\theta)(\cot\theta) \\
&= h(r) \sin^2\theta + r \frac{dh(r)}{dr} \sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta \\
&= -\sin^2\theta + \frac{r_H}{r} f(r) \sin^2\theta - \frac{r_H}{r} f(r) \sin^2\theta + r_H \frac{df(r)}{dr} \sin^2\theta + \sin^2\theta \\
&= r^2 \sin^2\theta \left(\frac{r_H}{r^2} \frac{df(r)}{dr}\right)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Risultano così dimostrate le (2.43).

# Bibliografia

- [1] Herbert Balasin and Herbert Nachbagauer. The energy-momentum tensor of a black hole, or what curves the Schwarzschild geometry? *Classical and Quantum Gravity*, 10(11):2271–2278, 1993.
- [2] Herbert Balasin and Herbert Nachbagauer. Distributional energy–momentum tensor of the Kerr–Newman spacetime family. *Classical and Quantum Gravity*, 11(6):1456–1461, 1994.
- [3] Ignazio Bombaci. The maximum mass of a neutron star. *Astronomy and Astrophysics*, 305:871, 1996.
- [4] Sean Carrol. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.
- [5] Roberto Casadio. Elements of relativity. <http://campus.unibo.it/287977/1/ElTeoRel.pdf>. [Online; ultimo accesso 13/06/2017].
- [6] Roberto Casadio. Charged shells and elementary particles. *International Journal of Modern Physics A*, 28(18):1350088, 2013.
- [7] Robert Geroch and Jennie Traschen. Strings and other distributional sources in general relativity. *Phys. Rev. D*, 36:1017–1031, 1987.
- [8] Paolo A. Mazzali, Friedrich K. Röpke, Stefano Benetti, and Wolfgang Hillebrandt. A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae. *Science*, 315(5813):825–828, 2007.
- [9] Gary Oas. Full derivation of the Schwarzschild solution. <https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf>. [Online; ultimo accesso 08/07/2014].
- [10] Fabio Ortolani. Appunti di metodi matematici. <http://campus.unibo.it/155878/1/MetodiMatematici.pdf>. [Online; ultimo accesso 29/09/2014].

- [11] Bernard Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge Univ. Press, 1982.
- [12] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.
- [13] James Vickers. Distributional geometry in general relativity. *Journal of Geometry and Physics*, 62:692–705, 2012.