Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

SERIE DI FOURIER REALI E APPLICAZIONE AL PROBLEMA DEL CALORE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
ANNAMARIA MONTANARI

Presentata da:
VIVIANA TARULLO

Sessione Unica
Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione

Gli oggetti di studio di questa tesi sono le serie di Fourier reali e la loro applicazione nella risoluzione del problema del calore.

La serie prende il nome dal matematico francese Joseph Fourier (1768-1830), il quale fu il primo a studiare tali serie infinite. In precedenza esse erano state oggetto di analisi da parte di Eulero, d'Alembert e Daniel Bernoulli. Fourier ha applicato tali serie alla soluzione dell'equazione del calore, pubblicando i suoi risultati iniziali nel 1807 e nel 1811. Dopo la metà del secolo Dirichlet e Riemann hanno riformulato i risultati di Fourier con maggiore rigore e precisione.

Il primo capitolo tratta inizialmente dei polinomi trigonometrici e delle loro proprietà, necessari per poter definire la nozione di serie di Fourier reale di una funzione f sommabile di periodo 2π. In relazione alle proprietà della funzione (f hölderiana, a variazione totale limitata, assolutamente continua) viene analizzata la sviluppabilità in serie di Fourier sulla base di formule di rappresentazione integrale, e sono dimostrati i relativi teoremi sulla convergenza puntuale, uniforme e in norma L^2.

Nel secondo capitolo, dopo aver introdotto l'equazione del calore e l'operatore del calore H, viene presentato il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore su una sbarra omogenea e la sua risoluzione nei casi in cui il dato iniziale di temperatura sia di classe C^1 o solo continuo.

Nel primo caso si segue il metodo di separazione delle variabili, usando poi la linearità dell'equazione del calore per trovare la soluzione corrispondente alle condizioni al contorno; risulterà cruciale la sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione C^1 e la convergenza di tale serie.
Nel secondo caso, dato che la sola continuità non assicura la sviluppabilità in serie di Fourier, viene formulata una soluzione in termini del nucleo di Green per l'equazione del calore. L'esistenza e l'unicità di tale soluzione sono assicurate dai rispettivi teoremi enunciati e dimostrati nel caso generale in dimensione n e poi ricondotti al caso particolare uno-dimensionale.

Capitolo 1

Serie di Fourier reali

1.1 Polinomi trigonometrici

Definizione 1.1 (Polinomio trigonometrico reale)**.** Un polinomio trigonometrico reale è una funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che possa scriversi nella maniera seguente

$$p(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.1}$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_o, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, t \in \mathbb{R}$.
Diremo che p ha grado n se i coefficienti a_n e b_n in (1.1) non sono entrambi nulli.
Indichiamo con T_n l'insieme dei polinomi trigonometrici reali di grado $\leq n$.

Si osserva che:

i) $T_n \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

ii) Se $p \in T_n$, allora $p(t + 2k\pi) = p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ (p è una funzione 2π-periodica);

iii) $T_n \subset L^2(]-\pi, \pi[)$.

Esempio 1.1. Una costante reale è un polinomio trigonometrico di grado 0. Le funzioni $\sin t$ e $\cos t$ sono polinomi trigonometrici di grado 1.

Le funzioni $\sin^2 t$ e $\cos^2 t$ sono polinomi trigonometrici di grado 2, infatti

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \qquad cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

per le formule di prostaferesi.

Proposizione 1.1.1. *Se $p \in T_n$, allora*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)dt \tag{1.2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\cos ktdt \quad \forall k \geq 1 \tag{1.3}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\sin ktdt \quad \forall k \geq 1 \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Ricordando la scrittura di p in (1.1) e integrando sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ si ottiene per linearità dell'integrale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin ktdt.$$

Ma le funzioni $\cos kt$ e $\sin kt$ hanno integrale nullo sullo stesso intervallo qualunque sia $k \geq 1$, così si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t)dt = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = \pi a_0$$

Allo stesso modo integrando la quantità $p(t)\cos kt$ su $[-\pi, \pi]$ si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\cos ktdt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt + \sum_{m=1}^{n} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos ktdt$$
$$+ \sum_{m=1}^{n} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cos ktdt.$$

Osservando che il primo integrale da contributo nullo e applicando le formule di prostaferesi si avrà

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\cos ktdt = \sum_{m=1}^{n} a_m (\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos{(m+k)t} + \cos{(m-k)t}}{2} dt) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n} b_m (\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(m+k)t} + \sin{(m-k)t}}{2} dt)$$
$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dt = a_k \pi$$

in quanto l'unico contributo non nullo è dato dalla prima sommatoria nel caso in cui $m = k$.
In modo analigo si dimostra l'identità per i b_k. $\square$

Proposizione 1.1.2. *T_n è uno spazio vettoriale di dimensione finita $2n + 1$ e $U := \{1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt\}$ è una sua base.*

Dimostrazione. Per definizione, $T_n \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e se $p_1, p_2 \in T_n$, si ottiene che $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in T_n$ $\forall \lambda_1, \lambda_2$ reali sommando i coefficienti nello sviluppo.
Così abbiamo che T_n è uno spazio vettoriale rispetto alla somma e al prodotto per scalare reale.
Osserviamo ora che se $p(t) \in T_n$, per definizione p è combinazione lineare degli elementi di U (vedi (1.1)). Dimostriamo quindi che sono linearmente indipendenti.
Siano dunque $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 0 \Longleftrightarrow p(t) = 0.$$

Allora per la Proposizione (1.1.1), $a_0 = a_k = b_k = 0$ per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$, e questo prova la lineare indipendenza degli elementi di U. $\square$

Definiamo ora un prodotto interno e quindi una norma in T_n:

Definizione 1.2 (Prodotto interno)**.** $\forall p, q \in T_n$,

$$< p, q > := < p, q >_{L^2(]-\pi,\pi[)} = \int_{-\pi}^{\pi} p(t)q(t)dt$$

Il prodotto interno gode delle seguenti proprietà:

i) $< p, p > \geq 0$ $\forall p \in T_n$, $< p, p > = 0 \Rightarrow p = 0$;

ii) $< p, q > = < q, p >$ $\forall p, q \in T_n$ (simmetria);

iii) $< \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, q > = \lambda_1 < p_1, q > + \lambda_2 < p_2, q >$ $\forall p_1, p_2, q \in T_n$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (linearità rispetto al primo argomento, quindi per ii) rispetto al secondo).

Definizione 1.3 (Norma in T_n)**.** $\|.\|: T_n \to \mathbb{R}$,

$$\|p\| = \sqrt{< p, p >} := \|p\|_{L^2(]\pi,\pi[)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |p(t)|^2 dt}$$

La norma gode delle seguenti proprietà:

i) $\|p\| \geq 0 \ \ \forall p \in T_n, \ \ \|p\| = 0 \Rightarrow p = 0$;

ii) $\|\lambda p\| = |\lambda| \|p\| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \forall p \in T_n$;

iii) $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\| \ \ \forall p, q \in T_n$ (disuguaglianza triangolare).

Proposizione 1.1.3. *$U = \{1, \cos kt, \sin kt, k = 1, \dots, n\}$ è una base ortogonale di T_n. Inoltre,*

$$U^* := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, k = 1, \dots, n \right\}$$

è una base ortonormale di T_n rispetto al prodotto interno $<,>_{L^2}$.

Dimostrazione. Applicando le formule di prostaferesi si dimostra facilmente che gli elementi di U^* sono a due a due ortogonali, e di norma unitaria. □

1.2 Polinomi di Fourier

Definizione 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. Si chiama *polinomio di Fourier di grado n di f* il polinomio trigonometrico

$$S_n(f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.5}$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \quad per\ k = 0, \dots, n \tag{1.6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \quad per\ k = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

I numeri reali a_k e b_k in (1.6) e (1.7) sono chiamati *coefficienti di Fourier* di f.

Osservazione 1. Per la Proposizione (1.1.1) se $p \in T_n$, $S_n(p) = p$ (ogni polinomio trigonometrico di grado n è il polinomio di Fourier di grado n di sè stesso).

Osservazione 2. Se f è sommabile su $[-\pi, \pi[$, allora i coefficienti di Fourier a_k e b_k sono ben definiti, infatti considerando ad esempio gli a_k

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)\cos kt|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < +\infty$$

poichè $f \in L^1$ e stimando il coseno con 1.
Se $f \in L^2([-\pi, \pi[)$, i coefficienti sono ancora ben definiti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)\cos kt|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f|^2 + \cos^2 kt}{2} dt \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (|f|^2 + 1)dt < +\infty$$

considerando la disuguaglianza $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, e stimando ancora il coseno con 1.

Proposizione 1.2.1 (Disuguaglianza di Bessel)**.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* 2π*-periodica,* $f \in L^2([-\pi, \pi[)$*. Allora*

$$\|S_n(f)\|_{L^2([-\pi,\pi[)} \leq \|f\|_{L^2([-\pi,\pi[)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Scriviamo il polinomio di Fourier $S_n(f)$ in termini della base ortonormale U^* di T_n, denotando per brevità di notazioni gli elementi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}$ per $k = 1, \dots, n$ con e_k per $k = 0, \dots, 2n$.
Così

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n} < f, e_k > e_k.$$

Ricordando per le proprietà di una base ortonormale che

$$< e_k, e_h >= \begin{cases} 1 & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k \neq h \end{cases}$$

e per bilinearità del prodotto interno si ha:

$$\begin{aligned}\|S_n(f)\|^2_{L^2} &=< S_n(f), S_n(f) >=< \sum_{k=0}^{2n} < f, e_k > e_k, \sum_{m=0}^{2n} < f, e_m > e_m >= \\ &= \sum_{k=0}^{2n} < f, e_k >< e_k, \sum_{m=0}^{2n} < f, e_m > e_m >= \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{m=0}^{2n} < f, e_k >< f, e_m >< e_k, e_m >= \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (< f, e_k >)^2\end{aligned}$$

$$\|S_n(f)-f\|^2_{L^2} =< S_n(f)-f, S_n(f)-f >= \|S_n(f)\|^2_{L^2} -2 < S_n(f), f > + \|f\|^2_{L^2}$$

$$\begin{aligned}< S_n(f), f > &=< \sum_{k=0}^{2n} < f, e_k > e_k, f >= \sum_{k=0}^{n} < f, e_k >< e_k, f >= \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (< f, e_k >)^2 = \|S_n(f)\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

Cosi sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}\|S_n(f) - f\|^2_{L^2} &= \|S_n(f)\|^2_{L^2} - 2\|S_n(f)\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2} = \\ &= \|f\|^2_{L^2} - \|S_n(f)\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

Per le proprietà della norma si ha che $\|S_n(f) - f\|^2_{L^2} \geq 0$, così si ottiene che

$$\|S_n(f)\|^2_{L^2} \leq \|f\|^2_{L^2} \Longrightarrow \|S_n(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Corollario 1.2.2. *Se* $f \in L^2([-\pi, \pi[)$,

$$\|S_n(f)\|^2_{L^2} = \sum_{k=0}^{2n} (< f, e_k >)^2 \leq \|f\|^2_{L^2} < +\infty.$$

Quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (< f, e_k >)^2$ *converge, e condizione necessaria per la convrgenza è che*

$$\lim_{k \to +\infty} (< f, e_k >) = 0,$$

cioè i coefficienti di Fourier di una funzione di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$ *costituiscono una successione infinitesima.*

Proposizione 1.2.3. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* 2π*-periodica e di quadrato sommabile su* $[-\pi, \pi[$. *Allora* $\forall p \in T_n$,

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2} \leq \|p - f\|_{L^2}.$$

Dimostrazione. Per i calcoli nella dimostrazione della Disuguaglianza di Bessel (vedi (1.2.1)) si ha che

$$\|S_n(f) - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{2n} (< f, e_k >)^2. \quad (*)$$

Inoltre,

$$\|p - f\|^2 = \|p\|^2 - 2 < p, f > + \|f\|^2. \quad (**)$$

Sia $p \in T_n$, allora in termini della base ortonormale U^*, $p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k$. Calcoliamo $\|p\|^2$ e $< p, f >$:

$$\|p\|^2 = \|\sum_{k=0}^{2n} c_k e_k\|^2 =< \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k, \sum_{m=0}^{2n} c_m e_m >=$$
$$= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{m=0}^{2n} c_k c_m < e_k, e_m >= \sum_{k=0}^{2n} c_k^2$$

$$< p, f >=< \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k, f >= \sum_{k=0}^{2n} c_k < e_k, f >$$

Così da $(**)$,

$$\|p - f\|^2 = \sum_{k=0}^{2n} (c_k^2 - 2c_k < e_k, f >) + \|f\|^2$$

e confrontando con $(*)$ si ottiene

$$\|p - f\|^2 - \|S_n(f) - f\|^2 = \sum_{k=0}^{2n} (c_k^2 - 2c_k < e_k, f >) + \sum_{k=0}^{2n} (< f, e_k >)^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{2n} (c_k - < f, e_k >)^2 \geq 0 \text{ (somma di quadrati)}$$

$\Longrightarrow \|p - f\| \geq \|S_n(f) - f\|, \quad \forall p \in T_n.$ □

1.3 Serie di Fourier reali e loro convergenza puntuale

Definizione 1.5 (Serie di Fourier)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. La serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.8}$$

si chiama *serie di Fourier di* f se

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \quad \textit{per } k \geq 0 \tag{1.9}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \quad \textit{per } k \geq 1. \tag{1.10}$$

I numeri reali a_k e b_k vengono chiamati *coefficienti di Fourier di f.*
Si dice che f è *sviluppabile in serie di Fourier* nel punto $t \in \mathbb{R}$ se la sua serie di Fourier converge nel punto t e ha somma uguale a $f(t)$.

Osservazione 3. Dalla definizione si ha che f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto t se e solo se

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(t) = f(t).$$

Introduciamo ora i cosiddetti nuclei di Dirichlet che ci consentiranno di ottenere importanti rappresentazioni integrali dei polinomi di Fourier.

Definizione 1.6. Si chiama *nucleo di Dirichlet di grado n*, $n \in \mathbb{N}$, il polinomio trigonometrico

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

D_n è una funzione pari e 2π-periodica. Inoltre risulta che

$$\left(\int_0^{\pi} D_n(t)dt\right)\frac{2}{\pi} = 1.$$

Sull'intervallo $]0,\pi[$ il nucleo D_n si può scrivere in forma chiusa nel modo seguente:

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} \quad per\ 0 < t < \pi. \tag{1.12}$$

Infatti, moltiplicando per $\sin\frac{t}{2}$ entrambi i membri di (1.11) e utilizzando l'identità

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

valida per ogni $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\sin\frac{t}{2}D_n(t) &= \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\end{aligned}$$

applicando un cambio di variabile nella seconda sommatoria.

Teorema 1.3.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica sommbile sull'intervallo $[-\pi,\pi[$. Allora*

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} D_n(s)ds \tag{1.13}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Enunciamo un lemma che verrà di seguito applicato nei calcoli:

Lemma 1.3.2. *Sia $f \in L^1([-\pi,\pi[)$ e 2π-periodica. Allora $f \in L^1([a-\pi, a+\pi[)$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Inoltre*

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

Sia $t \in \mathbb{R}$. Sostituendo (1.6) e (1.7) in (1.5), per linearità dell'integrale si ottiene

$$S_n(f)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos ks\cos kt + \sin ks \sin kt)\right) ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_n(t-s)ds = (\text{ponendo } s-t=\tau \text{ e per la parità di } D_n(\sigma))$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(\tau+t)D_n(\tau)d\tau = (\text{Lemma } (1.3.2))$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau+t)D_n(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) f(\tau+t)D_n(\tau)d\tau =$$

$$= (\text{con } s=-\tau \text{ nel primo integrale}) \ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(f(t+s)+f(t-s)\right) D_n(s)ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} D_n(s)ds$$

□

Corollario 1.3.3. *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Dal precedente Teorema segue che*

$$S_n(f)(t) - \lambda \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \iff \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - \lambda)D_n(s)ds \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Per lo studio della convergenza della serie di Fourier risulta cruciale il seguente lemma:

Lemma 1.3.4 (di Riemann-Lebesgue)**.** *Per ogni funzione sommabile*

$$g :]a,b[\to \mathbb{R}, \quad -\infty \le a < b \le +\infty$$

risulta

$$\lim_{|M|\to+\infty} \int_a^b g(t)\cos(Mt)dt = 0 \tag{1.14}$$

e analogamente

$$\lim_{|M|\to+\infty} \int_a^b g(t)\sin(Mt)dt = 0. \tag{1.15}$$

Dimostrazione. Sfruttiamo la densità di $C_0^\infty(]a,b[)$ in $L^1(]a,b[)$, ossia se $g \in L^1(]a,b[)$ allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\varphi \in C_0^\infty(]a,b[)$ tale che $\|g-\varphi\|_{L^1} < \varepsilon$.

$$\int_a^b g(t)\cos(Mt)dt = \int_a^b (g(t)-\varphi(t))\cos(Mt)dt + \int_a^b \varphi(t)\cos(Mt)dt = I_1 + I_2$$

Ora
$$|I_1| \leq \int_a^b |g(t) - \varphi(t)|dt < \varepsilon$$
stimando il coseno con 1 e sfruttando il risultato di densità, e con una integrazione per parti si ottiene
$$I_2 = \left[\varphi(t)\frac{\sin(Mt)}{M}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \varphi'(t)\frac{\sin(Mt)}{M}dt$$
$$|I_2| \leq \frac{1}{|M|}\int_a^b |\varphi'(t)|dt \xrightarrow{|M|\to+\infty} 0$$
Così
$$\left|\int_a^b g(t)\cos(Mt)dt\right| \leq |I_1| + |I_2| \xrightarrow{|M|\to+\infty} \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0,$$
e da questa segue la (1.14).
Nello stesso modo si dimostra la (1.15). □

Osservazione 4. Abbiamo osservato nel Corollario (1.2.2) che se $f \in Ł^2([-\pi,\pi[)$, 2π-periodica, allora dalla disuguaglianza di Bessel
$$\|S_n(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) < +\infty \Longrightarrow a_k, b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$
Ora possiamo concludere che se $f \in Ł^1([-\pi,\pi[)$, per il Lemma di Riemann Lebesgue
$$a_k, b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$
data la definizione dei coefficienti di Fourier di f in (1.9) e (1.10).

Dal Teorema seguente dedurremo tutti i criteri di convergenza delle serie di Fourier che dimostreremo in seguito.

Teorema 1.3.5 (di localizzazione di Riemann)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, sommabile su $[-\pi,\pi[$. Siano poi $t, \lambda \in \mathbb{R}$. Le affermazioni seguenti sono allora equivalenti:*

(i) $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(t) = \lambda$;

(ii) esiste $c > 0, \ c \in]0, \pi[$ *tale che*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})s}}{s} ds = 0.$$

Dimostrazione.

$$(i) \Longleftrightarrow \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})s}}{2\sin\frac{s}{2}} ds \ \ (*) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

per il Corollario (1.3.3).

Per ragioni di brevità, poniamo

$$m_f(t,s) := \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2}.$$

$\forall c \in]0, \pi[$,

$$(*) = \left(\int_0^c + \int_c^\pi \right) \left[(m_f(t,s) - \lambda) \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})s}}{2\sin\frac{s}{2}} ds \right].$$

Poichè la funzione $s \mapsto (m_f(t,s) - \lambda)\frac{1}{2\sin(\frac{s}{2})}$ è sommabile su $[c, \pi]$ qualunque sia $c \in]0, \pi[$, per il Lemma di Riemann-Lebesgue vale l'equivalenza

$$(i) \Longleftrightarrow \int_0^c (m_f(t,s) - \lambda) \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})s}}{2\sin\frac{s}{2}} ds \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

D'altra parte, poichè

$$s \mapsto \left(\frac{1}{2\sin\frac{s}{2}} - \frac{1}{s} \right)$$

è continua e limitata su $]0, c[$, la funzione

$$s \mapsto (m_f(t,s) - \lambda) \left(\frac{1}{2\sin\frac{s}{2}} - \frac{1}{s} \right)$$

è sommabile sullo stesso intervallo, e quindi per il Lemma di Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^c (m_f(t,s) - \lambda) \left(\frac{1}{2\sin\frac{s}{2}} - \frac{1}{s} \right) \sin((n + \frac{1}{2})s) ds = 0.$$

Ne viene che (i) è equivalente a trovare un $c \in]0, \pi[$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^c (m_f(t,s) - \lambda) \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})s}}{s} ds = 0,$$

ossia $(i) \Leftrightarrow (ii)$. $\square$

Dal Teorema di localizzazione di Riemann deduciamo ora alcuni criteri di convergenza.

Teorema 1.3.6 (di Dini)**.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periodica e sommabile su* $[-\pi, \pi[$*. Se nel punto* $t \in \mathbb{R}$ *esiste finito*

$$f^*(t) := \lim_{s \to 0+} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \tag{1.16}$$

e se la funzione

$$s \mapsto \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s} \tag{1.17}$$

è sommabile su $]0, c[$ *per un opportuno* $c \in]0, \pi[$*, allora la serie di Fourier di* f *converge nel punto* t *e la sua somma è* $f^*(t)$*.*
Inoltre se f *è continua in* t*, allora* $f^*(t) = f(t)$ *e quindi, se la condizione di Dini è soddisfatta,* f *è sviluppabile in serie di Fourier nel punto* t*.*

Dimostrazione. Poichè la funzione in (1.17) è sommabile, per il Lemma di Riemann-Lebesgue risulta

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right)}{s} ds = 0.$$

La tesi del Toerema discende quindi dal Teorema di localozzazione di Riemann (1.3.5). $\square$

Una condizione che garantisce l'esistenza del limite (1.16) e la sommabilità della funzione (1.17) è contenuta nel Corollario seguente.

Corollario 1.3.7 (criterio di Hölder)**.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* 2π*-periodica, sommabile sull'intervallo* $[-\pi, \pi[$*, e sia* $t \in \mathbb{R}$*.*
Supponiamo che esistano $M, c > 0$ *e* $\alpha \in]0, 1]$ *tali che*

$$|f(t+s) - f(t+\sigma)| \le M|s - \sigma|^\alpha \tag{1.18}$$

per ogni $s, \sigma \in]0, c[$ *e per ogni* $s, \sigma \in] - c, 0[$*, allora:*

(i) esistono reali

$$f(t+) := \lim_{s\to 0+} f(t+s), \qquad f(t-) := \lim_{s\to 0+} f(t-s);$$

(ii) la serie di Fourier di f converge nel punto t e

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = f^*(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}.$$

Dimostrazione. I limiti in (i) esistono e sono finiti in quanto per la (1.18)

$$\lim_{s,\sigma\to 0+}(f(t+s)-f(t+\sigma)) = \lim_{s,\sigma\to 0-}(f(t+s)-f(t+\sigma)) = 0.$$

Esiste allora $f^*(t)$ e risulta uguale a $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Ora

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(t+s)+f(t-s)-2f^*(t)|}{s} = \lim_{\sigma\to 0+}\frac{1}{s}|f(t+s)-f(t+\sigma)+f(t-s)-f(t-\sigma)|\\
&\le \lim_{\sigma\to 0+}\frac{1}{s}\left(|f(t+s)-f(t+\sigma)|+|f(t-s)-f(t-\sigma)|\right)\\
&\le \text{(Hölderianità)} \lim_{\sigma\to 0+}\frac{M}{s}(|s-\sigma|^\alpha+|s-\sigma|^\alpha)\\
&= 2Ms^{\alpha-1} \quad \text{per } \ 0<s<c
\end{aligned}$$

La tesi segue allora dal Teorema di Dini poichè, essendo $\alpha \in]0,1]$, la funzione

$$s \mapsto s^{\alpha-1}$$

è sommabile su $]0,c[$. $\square$

Un ulteriore uso del Teorema di localizzazione di Riemann consente di dimostrare un altro risultato di convergenza della serie di Fourier.

Definizione 1.7. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\sigma = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ una partizione dell'intervallo $[a,b]$ con $t_k \le t_{k+1}$. Ponendo

$$v(f,\sigma) := \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|,$$

f si dice *a variazione totale limitata* su $[a,b]$ se

$$\sup_\sigma v(f,\sigma) < +\infty.$$

Teorema 1.3.8 (di Jordan)**.** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione totale limitata $\Longleftrightarrow f = \varphi - \psi$ con φ, ψ monotone crescenti.*

Per la dimostrazione si rimanda a [4], Cap. 4, Teorema 1.9.

Teorema 1.3.9 (di Jordan per le serie di Fourier)**.** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione 2π-periodica e a variazione totale limitata su $[-\pi, \pi]$ allora esiste $f^*(t)$ in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ e*

$$S_n(f)(t) \xrightarrow{n\to+\infty} f^*(t).$$

Dimostrazione. Ricordando che le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann e che ogni funzione Riemann integrabile su un compatto è sommabile secondo Lebesgue, si ha che f è sommabile su $[-\pi, \pi]$.
Per il teorema di rappresentazione di Jordan (1.3.8) i limiti $f(t+)$ e $f(t-)$ esistono in ogni punto $t \in [-\pi, \pi[$. La 2π-periodicità di f assicura poi l'esistenza di $f(t+)$ e $f(t-)$ in ogni punto $t \in \mathbb{R}$, quindi l'esistenza di $f^*(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ in ogni punto.
Fissiamo $t \in \mathbb{R}$. Per le considerazioni fatte basta dimostrare il Teorema per funzioni monotone crescenti, quindi supponiamo f monotona crescente in un intorno opportuno $[t-c, t+c]$ del punto t. Definiamo

$$\varphi : [0,c] \to \mathbb{R}, \ \ \varphi(s) = f(t+s) - f(t+)$$
$$\psi : [0,c] \to \mathbb{R}, \ \ \psi(s) = f(t-s) - f(t-).$$

Dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \varphi(s) \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0 \tag{1.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \psi(s) \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0, \tag{1.20}$$

così la tesi seguirà per il Teorema di localizzazione (1.3.5).
Consideriamo la (1.19). Si osserva che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

è convergente secondo Riemann, così per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x} dx\right| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \ \ \alpha, \beta \geq n_\varepsilon.$$

Ora

$$\int_0^c \varphi(s) \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = (\text{ponendo } (n+\frac{1}{2})s = \tau) \int_0^{(n+\frac{1}{2})c} \varphi\left(\frac{\tau}{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin\tau}{\frac{\tau}{n+\frac{1}{2}}} \frac{d\tau}{n+\frac{1}{2}}$$
$$= \int_0^{n_\varepsilon} (\cdot) + \int_{n_\varepsilon}^{(n+\frac{1}{2})c} (\cdot) = I_1 + I_2, \quad \text{con } n_\varepsilon < (n+\frac{1}{2})c.$$

Poichè φ è monotona crescente e $\left|\frac{\sin\tau}{\tau}\right| \leq 1$ per ogni $\tau > 0$,

$$|I_1| \leq n_\varepsilon. \varphi\left(\frac{n_\varepsilon}{n+\frac{1}{2}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \text{ in quanto } \varphi(s) \to 0 \text{ per } s \to 0+.$$

Per stimare I_2 applichiamo il Teorema della media integrale che è riportato senza dimostrazione:

Teorema 1.3.10. *Date due funzioni $h, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, con h monotona crescente e g continua, allora esiste un punto $\alpha \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b h(t)g(t)dt = h(a) \int_a^\alpha g(t)dt + h(b) \int_\alpha^b g(t)dt.$$

Così con $h(\tau) = \varphi(\tau)$ e $g(\tau) = \frac{\sin\tau}{\tau}$ si ottiene applicando il Teorema che

$$I_2 = \varphi\left(\frac{n_\varepsilon}{n+\frac{1}{2}}\right) \int_{n_\varepsilon}^\alpha \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau + \varphi(c) \int_\alpha^{(n+\frac{1}{2})c} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$$

con $\alpha \in]n_\varepsilon, (n+\frac{1}{2})c[$.
Quindi per la monotonia di φ e le stime precedenti si ha che

$$|I_2| \leq 2\varphi(c)\varepsilon.$$

La (1.20) si dimostra allo stesso modo. □

1.4 Integrazione termine a termine delle serie di Fourier

In questa sezione si dimostrerà che qualunque serie di Fourier può essere integrata termine a termine su ogni intervallo compatto della retta reale.

Teorema 1.4.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, sommabile su $[-\pi, \pi[$, e sia*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.21}$$

la sua serie di Fourier. Sia inoltre

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{-\pi}^{x} f(t)dt.$$

Allora:

i) F è a variazione totale limitata su $[-\pi, \pi]$ e continua in $\mathbb{R}$;

ii) la funzione

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(x) := \int_{-\pi}^{x} (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$$

è 2π-periodica e la sua serie di Fourier è

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) \tag{1.22}$$

dove

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{b_k}{k}, \quad A_k = -\frac{b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k}. \tag{1.23}$$

Osservazione 5. $G(x) = F(x) - \frac{a_0}{2}(x + \pi)$, quindi per le proprietà di F risulta che G è continua in ogni punto ed è a variazione totale limitata su $[-\pi, \pi]$. Così per il Teorema di Jordan (1.3.9) G è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto. Dalla (1.22) e dalla (1.23) si ottiene che

$$F(x) = \frac{a_0}{2}(x + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(a_k \sin kx + b_k((-1)^k - \cos kx)),$$

dove la serie al secondo membro si ottiene integrando termine a termine la serie di Fourier di f su $[-\pi, x]$.

Dimostrazione. Scomponendo f in parte positiva e negativa,

$$f = f^+ - f^- \quad \text{con} \quad f^+(x) = max\{f(x), 0\}, \;\; f^-(x) = max\{-f(x), 0\}$$

risulta

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f^+(t)dt - \int_{-\pi}^{x} f^-(t)dt =: \varphi(x) - \psi(x).$$

Dimostrando che φ, ψ sono funzioni monotone crescenti, per il Teorema di Jordan (1.3.8) possiamo concludere che F è a variazione totale limitata su $[-\pi, \pi]$. Siano $-\pi \leq x \leq y$,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \int_{-\pi}^{x} (\cdot) - \int_{-\pi}^{y} (\cdot) = - \int_{x}^{y} f^+(t)dt \leq 0 \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \Rightarrow \varphi \nearrow .$$

In modo analogo, $\psi \nearrow$. Ora

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\chi_{[x_0,x]}(t)dt \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

applicando il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata, da cui segue la continuità di F in ogni punto.
Proviamo ora il punto *ii*).

$$G(x+2\pi) = \int_{-\pi}^{x+2\pi} (f(t) - \frac{a_0}{2})dt = \left(\int_{-\pi}^{x} (\cdot) + \int_{x}^{x+2\pi} (\cdot) \right) = G(x) + \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$$

applicando il Lemma (1.3.2) al secondo integrale.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \frac{a_0}{2})dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \frac{a_0}{2}.2\pi = 0 \;\; \text{(per def. di } a_0 \text{ in (1.9))}$$

$\Longrightarrow G(x + 2\pi) = G(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Per ogni $k = 1, \ldots, n$, per definizione di coefficienti di Fourier si ha

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (G(x) \cos kx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{x} (f(t) - \frac{a_0}{2})dt \right) \cos kxdx = \\ &= \text{(cambiando l'ordine di integrazione)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \frac{a_0}{2}) \left(\int_{t}^{\pi} \cos kxdx \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \frac{a_0}{2})(-\frac{\sin kt}{k})dt = -\frac{1}{k}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt = -\frac{1}{k} b_k \end{aligned}$$

In modo analogo

$$
\begin{aligned}
B_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-\frac{a_0}{2})\left(\int_t^{\pi}\sin kx dx\right)dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-\frac{a_0}{2})\left(\frac{(-1)^k-\cos kt}{k}\right)dt = \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^k}{k}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt-2\pi\cdot\frac{a_0}{2}\right)-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-\frac{a_0}{2})\cos ktdt\right] = \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt = \frac{a_k}{k}.
\end{aligned}
$$

Nel punto $x=-\pi$,

$$
0 = G(-\pi) = \frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(-1)^k = \frac{A_0}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{b_k}{k} \Longrightarrow \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{b_k}{k}.
$$

□

1.5 Un criterio di convergenza uniforme per le serie di Fourier

Dal Teorema (1.4.1) segue un risultato di uniforme convergenza della serie di Fourier. Diamo quindi una nuova definizione:

Definizione 1.8 (continuità assoluta)**.** Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* se f è derivabile quasi dappertutto in $[a,b]$, la derivata f' è sommabile su $[a,b]$ e risulta

$$
\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a) \quad \forall x\in[a,b].
$$

Teorema 1.5.1. *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, assolutamente continua in $[-\pi,\pi]$. Supponiamo anche che f' sia di quadrato sommabile su $[-\pi,\pi]$. Allora f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto e la sua serie di Fourier converge uniformemente su $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi fatte su f risulta che f' è 2π-periodica e sommabile su $[-\pi,\pi]$, inoltre

$$
f(x) = f(-\pi)+\int_{-\pi}^{x}f'(t)dt \quad \forall x\in\mathbb{R}.
$$

Scomponendo f' in parte positiva e negativa otteniamo che f si scrive come differenza di funzioni monotone crescenti, quindi per il Teorema (1.3.8) f è a variazione totale limitata su $[-\pi, \pi]$, e per il Teorema di Jordan (1.3.9)

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

con A_0, A_k, B_k coefficienti di Fourier di f. Siano ora a_k, b_k i coefficienti di Fourier di f'. Per il Teorema (1.4.1), integrando termine a termine la serie di Fourier di f' risulta che

$$A_k = -\frac{b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k} \quad \forall k \geq 1.$$

Per la disuguaglianza di Bessel (Corollario (1.2.2)), essendo f' di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$, si ha che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < +\infty$. Così

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |A_k \cos kx + B_k \sin kx| \leq \text{(stimando seno e coseno con 1)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}(|A_k| + |B_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(k|A_k| + k|B_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(|a_k| + |b_k|) \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty.
\end{aligned}$$

Questo dimostra la convergenza totale, e quindi uniforme, della serie di Fourier di f. □

1.6 Convergenza in norma L^2 delle serie di Fourier

Teorema 1.6.1 (di Fisher-Riesz). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e di quadrato sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. Allora*

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dimostrazione. Se f è di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$, per la densità di $C_0^\infty([-\pi, \pi[)$ in $L^2([-\pi, \pi[)$ risulta che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in C_0^\infty([-\pi, \pi[) \ \text{tale che} \ \|f - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Così

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_{L^2} &= \|(S_n(f) - S_n(\varphi)) + (S_n(\varphi) - \varphi) + (\varphi - f)\|_{L^2} \\ &\leq \|S_n(f) - S_n(\varphi)\|_{L^2} + \|S_n(\varphi) - \varphi\|_{L^2} + \underbrace{\|\varphi - f\|_{L^2}}_{< \varepsilon} \quad (*) \end{aligned}$$

Per linearità dei polinomi di Fourier, $S_n(f) - S_n(\varphi) = S_n(f - \varphi)$, così per la disuguaglianza di Bessel (1.2.1)

$$\|S_n(f) - S_n(\varphi)\|_{L^2} = \|S_n(f - \varphi)\|_{L^2} \leq \|f - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$$

per la scelta di φ.
Ora in quanto $\varphi \in C^\infty$, risulta che φ è assolutamente continua con derivata prima di classe C^∞ su $[-\pi, \pi[$. Così per il Teorema (1.5.1) sulla convergenza uniforme della serie di Fourier, $S_n(\varphi) \rightrightarrows \varphi$ per $n \to +\infty$, e

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(\varphi) - \varphi\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} |S_n(\varphi) - \varphi|^2} = 0$$

passando al limite sotto il segno di integrale.
In particolare si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|S_n(\varphi) - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Sostituendo in $(*)$ si ottiene che

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2} \leq 3\varepsilon \ \forall n > n_\varepsilon \Longrightarrow \text{per } n \to \infty \text{ il limite è } 0.$$

□

Corollario 1.6.2 (Identità di Parseval). *Dal Teorema precedente e dall'identità* $\|S_n(f) - f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|S_n(f)\|_{L^2}^2$ *ricavata dimostrando la disuguaglianza di Bessel* (1.2.1) *otteniamo che*

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|S_n(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Capitolo 2

Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore

In questo capitolo studieremo un'applicazione della teoria sulle serie di Fourier reali nella risoluzione del problema del calore uno-dimensionale, differenziando i casi in cui si assume al bordo un dato iniziale C^1 o C^0.

Interpretiamo u come temperatura di una sbarra cilindrica omogenea, isolata termicamente ai lati. Nel modello unidimensionale indentifichiamo così la sbarra con un segmento del tipo $0 \leq x \leq \pi$. Avremo allora la funzione

$$u(x, t)$$

dove t varia in un intervallo temporale $0 \leq t \leq T$.
Per studiare l'evoluzione della temperatura occorre precisare la distribuzione iniziale. Assegnamo dunque il dato iniziale

$$u(x, 0) = g(x),$$

dove g è una funzione nota con una certa regolarità, e interpretiamo l'isolamento termico ai bordi assegnando i cosiddetti *dati di Dirichlet*

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \ \text{ per } t \geq 0.$$

Definizione 2.1. L'*equazione di diffusione* o del *calore* per una funzione $u = u(x,t)$, x variabile reale spaziale, t variabile temporale, ha la forma

$$\partial_t u - D\partial^2_{xx} u = f \tag{2.1}$$

dove D è una costante positiva che prende il nome di *coefficiente di diffusione*.
Se $f \equiv 0$, l'equazione si dice *omogenea* e vale il principio di sovrapposizione: se u e v sono soluzioni e a,b scalari reali o complessi, anche $au+bv$ è soluzione.

Per semplicità, nel nostro modello assumiamo come coefficiente di diffusione D la costante 1.
Indichiamo ora con

$$H := \partial^2_{xx} - \partial_t \tag{2.2}$$

l'*operatore del calore*. H è un operatore alle derivate parziali del II ordine di tipo parabolico ed è lineare, sono quindi soddisfatte

$$H(u+v) = Hu + Hv, \quad H(\lambda u) = \lambda Hu \text{ con } \lambda \text{ scalare.}$$

Con questa notazione, l'equazione del calore omogenea assume la forma

$$Hu(x,t) = 0.$$

2.1 (PCD) con dato iniziale C^1

Data $g \in C^1([0,\pi])$, $g(0) = g(\pi) = 0$ la funzione che descrive la distribuzione iniziale di temperatura, si vuole determinare $u = u(x,t)$ soluzione di

$$\text{(PCD)} \begin{cases} Hu(x,t) = 0 \quad \text{in un rettangolo } R =]0,\pi[\times]0,T[\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in]0,\pi[\text{ (isolamento termico al bordo)} \\ u(x,0) = g(x) \quad \forall x \in]0,\pi[\text{ (temperatura iniziale nota).} \end{cases}$$

Tale problema prende il nome di **problema di Cauchy-Dirichlet** per l'equazione del calore.

Precisiamo cosa si intende per soluzione di (PCD), per dimostrarne poi l'esistenza e l'unicità.

Definizione 2.2 (soluzione classica)**.** Una *soluzione classica* di (PCD) è una funzione $u :]0,\pi[\times]0,T[\to \mathbb{R}$ continua in $R \cup \partial_P R$ che soddisfa il sistema (PCD) e tale che le derivate $\partial^2_{xx}u, \partial_t u$ esistono continue in R, dove

$$\partial_P R := [0,\pi] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,T] \cup \{\pi\} \times [0,T]$$

è il bordo parabolico di R.

Dimostriamo in primo luogo l'*unicità* della soluzione classica di (PCD) seguendo un metodo detto *dell'energia*.

Lemma 2.1.1. *Sia $u :]0,\pi[\times]0,T[\to \mathbb{R}$ soluzione classica di*

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0 & su\ R \\ u(x,t) \equiv 0 & su\ \partial_P R. \end{cases}$$

Allora $u \equiv 0$ su R.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che u non sia identicamente nulla su R. Per ipotesi u soddisfa $Hu = 0$ su R, quindi

$$0 = Hu \cdot u = (\partial^2_{xx}u - \partial_t u)u \quad \text{su } R.$$

Integrando rispetto ad x sull'intervallo $[0,\pi]$ si trova che

$$0 = \int_0^\pi Hu(x,t)\cdot u(x,t)dx = \int_0^\pi \left[(\partial^2_{xx}u(x,t))u(x,t) - \underbrace{(\partial_t u(x,t))u(x,t)}_{\partial_t(\frac{u(x,t)^2}{2})}\right] dx \quad (*)$$

per ogni $t \in [0, T]$.
Integrando per parti e portando fuori la derivata temporale si ottiene che

$$(*) = \cancel{\Big[\partial_x u(x,t) u(x,t)\Big]_{x=0}^{x=\pi}} - \int_0^\pi \partial_x u(x,t)\partial_x u(x,t)dx - \partial_t\left(\int_0^\pi \frac{u(x,t)^2}{2}dx\right)$$

precisando che il primo contributo è nullo in quanto $u = 0$ sul $\partial_P R$.
Introduciamo la funzione non negativa

$$E(t) := \int_0^\pi \frac{u(x,t)^2}{2}dx.$$

Si ha che

$$E'(t) \overset{(*)}{=} -\int_0^\pi (\partial_x u(x,t))^2 dx \leq 0$$

$\Longrightarrow E$ è monotona decrescente in $[0, T]$, quindi $E(t) \leq E(0) = 0$.
Così

$$0 \leq E(t) = \int_0^\pi \frac{u(x,t)^2}{2}dx \leq 0 \Longrightarrow E(t) \equiv 0 \;\; \forall t \in [0,T]$$

$\Longrightarrow u(x,t)^2 = 0$ per q.o. $x \in [0, \pi]$ e per ogni $t \in [0, T]$.
Ma u è continua $\Longrightarrow u \equiv 0$ su $\overline{R}$, giungendo così all'assurdo. □

Siano così $u, v :]0, \pi[\times]0, T[\to \mathbb{R}$ due soluzioni classiche di (PCD). Allora

$$Hu = Hv = 0 \text{ su } R \Longrightarrow H(u - v) = 0 \text{ su } R$$

per linearità dell'operatore del calore. Inoltre per le condizioni al contorno e osservando che $u(x,0) - v(x,0) = g(x) - g(x) = 0$ per ogni $x \in]0, \pi[$, vale che

$$u - v \equiv 0 \text{ sul } \partial_P R.$$

Abbiamo così ottenuto che la funzione $w := u - v$ è soluzione classica di

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0 & \text{su } R \\ u(x,t) \equiv 0 & \text{su } \partial_P R \end{cases} \Longrightarrow \text{(Lemma (2.1.1))}\;\; w \equiv 0 \text{ su R} \Longrightarrow u = v \text{ su } R,$$

da cui l'unicità della soluzione di (PCD).

Dimostriamo ora l'*esistenza* di una soluzione classica di (PCD) cercando formalmente una soluzione esplicita. Seguiremo il metodo di *separazione delle variabili*, ossia cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x,t) = \chi(x) \cdot \varphi(t)$$

con χ, φ funzioni non banali.
Dato che $\partial^2_{xx} u - \partial_t u = \chi''(x)\varphi(t) - \chi(x)\varphi'(t)$, sostutuendo in $Hu = 0$ si ottiene

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \quad \forall x \in]0,\pi[, \forall t \in]0,T[.$$

Ora, il primo membro non dipende dalla variabile t mentre il secondo non dipende dalla variabile x. L'uguaglianza è pertanto possibile unicamente nel caso in cui entrambi i membri sono uguali alla medesima costante $\lambda \in \mathbb{R}$. Abbiamo, quindi

$$\chi''(x) - \lambda\chi(x) = 0 \quad \forall x \in]0,\pi[\tag{2.3}$$

$$\varphi'(t) - \lambda\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in]0,T[. \tag{2.4}$$

I dati di Dirichlet impongono che

$$\chi(0)\varphi(t) = u(0,t) = u(\pi,t) = \chi(\pi)\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in]0,T[,$$

e dato che abbiamo richiesto φ non identicamente nulla, si ha l'ulteriore condizione

$$\chi(0) = \chi(\pi) = 0. \tag{2.5}$$

Abbiamo ottenuto che la funzione $\chi(x)$ deve soddisfare l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine data da (2.3) con condizioni iniziali (2.5). Scrivendo il polinomio caratteristico

$$p(\tau) = \tau^2 - \lambda$$

si ha che al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ vi sono tre possibili forme dell'integrale generale di (2.3):

i) se $\lambda > 0$, p ha due radici reali distinte $\tau = \pm\sqrt{\lambda}$, quindi la soluzione generale è $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Dalle condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} X(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ X(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0;$$

ii) se $\lambda = 0$ si ottiene la soluzione $X(x) = c_1 + c_2 x$, con condizioni iniziali

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(\pi) = c_1 + c_2\pi = 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0;$$

iii) se infine $\lambda = -\alpha^2 < 0$, le radici di p sono i complessi $\tau = \pm i\alpha$, così $X(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x$. Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(\pi) = \cancel{c_1 \cos\alpha\pi} + c_2 \sin\alpha\pi = 0 \end{cases}$$

da cui $c_1 = c_2 = 0$, oppure c_2 arbitrario, $\alpha\pi = n\pi$ con $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$.

Solo il terzo caso produce quindi soluzioni non nulle date da

$$X_n(x) = C \sin nx, \quad n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}, C \in \mathbb{R}$$

e con i valori corrispondenti di $\lambda = -n^2$ si ottiene l'integrale generale di (2.4)

$$\varphi(t) = Be^{-n^2 t}, \quad B \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo così ottenuto soluzioni della forma

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin nx, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

che soddisfano le condizioni al bordo $u_n(0,t) = u_n(\pi,t) = 0$.

L'idea ora è quella di sfruttare la linearità dell'equazione del calore omogenea e costruire la soluzione che si cerca sovrapponendo le infinite soluzioni u_n e cercando di determinare i coefficienti della sovrapposizione in modo tale che anche la condizione iniziale di temperatura sia soddisfatta. Questo risulterà possibile proprio grazie alla sviluppabilità di una funzione in serie di Fourier e alle proprietà studiate nel capitolo precedente.

Poniamo così come candidata soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx \tag{2.6}$$

imponendo che

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = g(x). \tag{2.7}$$

Osserviamo che $u(x,0)$ si presenta come una serie di Fourier di soli seni. Essendo g di classe $C^1([0,\pi])$ e annullandosi agli estremi, il suo prolungamento dispari sull'intervallo $[-\pi,\pi]$

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0,\pi] \\ -g(-x) & \text{se } x \in [-\pi,0] \end{cases}$$

è continua e derivabile nell'origine, quindi di classe $C^1([-\pi,\pi])$. Dunque è sviluppabile in serie di Fourier di soli seni (in particolare per il Teorema (1.5.1) in quanto ogni funzione continua e C^1 a tratti è assolutamente continua), e la sua serie di Fourier converge a $\tilde{g}$ in ogni punto:

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \sin nx \quad \text{con} \quad \tilde{g}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x) \sin nx dx. \tag{2.8}$$

Abbiamo quindi ottenuto da (2.7) e (2.8) che

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx \tag{2.9}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Verifichiamo ora che la candidata soluzione nella forma (2.6) con coefficienti di sovrapposizione dati da (2.9) è effettivamente soluzione classica del (PCD).

Precisiamo in precedenza che:

- Si osserva che con una integrazione per parti e con l'ipotesi $g(0) = g(\pi) = 0$ si ha
$$\int_0^\pi g(x)\sin nx dx = \int_0^\pi g'(x)\frac{\cos nx}{n}dx.$$
Posto
$$\bar{b_n} := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g'(x)\cos nx dx = n \cdot b_n,$$
essendo $g \in C^1([0,\pi])$, per la disuguaglianza di Bessel (1.2.1) vale che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{b_n}^2 \leq \int_0^\pi g'(x)^2 dx < +\infty$$
e quindi, per la disuguaglianza di Schwarz sulle serie,
$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\bar{b_n}^2} < +\infty. \tag{2.10}$$
Ne risulta che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è assolutamente convergente;

- Ricordando che i coefficienti di Fourier sono infinitesimi, quindi limitati (vedi l'osservazione (4)), esiste $M > 0$ tale che $|b_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si ha così che $\forall t \geq \varepsilon > 0$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{(x,t)\in[0,\pi]\times[\varepsilon,T[} \left| b_n e^{-n^2 t}\sin nx \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\varepsilon} < +\infty$$
in quanto la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k e^{-n^2\varepsilon}$ è convergente se $\varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. La serie (2.6) risulta dunque totalmente convergente, quindi uniformemente (e puntualmente) convergente in $[0,\pi]\times[\varepsilon,T[$, $\forall\varepsilon > 0$.
Considerando la serie delle derivate parziali rispetto a x, vale che
$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\partial}{\partial x}(\sin nx)e^{-n^2 t} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n\cos nx e^{-n^2 t}$$
e
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{(x,t)\in[0,\pi]\times[\varepsilon,T[} \left| b_n n\cos nx e^{-n^2 t} \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2\varepsilon} < +\infty$$

analogamente alla serie precedente. Risulta così che la serie delle derivate prime rispetto a x è totalmente, quindi uniformemente (e puntualmente) covergente su $[0,\pi] \times [\varepsilon, T[$, e per la convergenza puntuale di (2.6)

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n \cos nx e^{-n^2 t}$$

è continua su $[0,\pi] \times [\varepsilon, T]$.
In modo del tutto analogo si dimostra che $u_{xx}(x,t)$ è continua e uguale a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(-n^2) \sin nx e^{-n^2 t} \quad (*)$$

e che $u_t(x,t)$ è continua e anch'essa uguale a $(*)$.
Abbiamo ottenuto che $u(x,t)$ soddisfa il (PCD) ed è derivabile infinite volte sia rispetto a x sia rispetto a t in $[0,\pi] \times [\varepsilon, T[$ $\forall \varepsilon > 0$, quindi $u \in C^\infty([0,\pi] \times (0,T))$.

Manca da verificare che $u \in C(R \cup \partial_P R)$ per ottenere che u è soluzione classica del (PCD).
Si ha che $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ $\forall t > 0$ data la scrittura di u in serie di soli seni. Così fissiamo $x_0 \in [0,\pi]$ e dimostriamo che

$$u(x,t) \xrightarrow{(x,t)\to(x_0,0)} u(x_0,0).$$

Sfruttiamo la convergenza assoluta della serie $\sum b_n$:

$$u(x,t) - u(x_0,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(e^{-n^2 t} \sin nx - \sin nx_0). \quad (**)$$

Dato che $e^{-n^2 t} \sin nx - \sin nx_0 \xrightarrow{(x,t)\to(x_0,0)} 0$, dimostriamo la convergenza totale, quindi uniforme, della serie $(**)$ per poter passare al limite sotto il segno di serie e ottenere la tesi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{[0,\pi]\times[0,T]} \Big(|b_n||e^{-n^2 t} \sin nx - \sin nx_0|\Big) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(|b_n|(|e^{-n^2 t}| + 1)\Big) \le 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty.$$

Possiamo così considerare conclusa la dimostrazione di esistenza e unicità della soluzione classica di (PCD) con dato iniziale C^1.

2.2 (PCD) con dato iniziale C^0

Presentiamo ora la risoluzione del (PCD) con dato al bordo $g \in C^0([0,\pi])$. La sola continuità del dato iniziale non assicura la sviluppabilità in serie di Fourier risultata cruciale per lo studio di u nella sezione precedente. Formuliamo così la soluzione in termini del *nucleo di Green* per l'equazione del calore. Enunceremo e dimostreremo in precedenza i teoremi di esistenza e unicità della soluzione nel caso generale n-dimensionale, per poi ridurci al caso particolare in cui $n = 1$ che più ci interessa.

2.2.1 In dimensione n

Consideriamo la funzione

$$u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}+)$$

e l'equazione del calore

$$\Delta_x u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+.$$

Risolviamo il Problema di Cauchy

$$(PC) \begin{cases} \Delta_x u(x,t) - u_t(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Definizione 2.3. La funzione

$$K(x,y,t) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} exp\left\{ -\frac{|x-y|^2}{4t} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.11}$$

rappresenta il *nucleo di Green per l'equazione del calore.*

$K(x,y,t)$ assume valori in $\mathbb{R}_+$, e gode delle seguenti proprietà:

(i) $K \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) K(x,y,t) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+;$$

(ii) Per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ vale che
$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)dy = 1;$$

(iii) Per ogni $\delta > 0$ il seguente integrale converge uniformemente
$$\int_{|y-x|>\delta} K(x,y,t)dy \xrightarrow{t\to 0+} 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(per la dimostrazione di tali proprietà si rimanda a [3], Cap. 6, Sez. 3, Proposizione 1).

Teorema 2.2.1. *Sia $f = f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ una funzione continua e limitata. Definiamo*
$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)f(y)dy = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy, \tag{2.12}$$
con $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.
Allora valgono le seguenti proprietà:

(i) Ponendo $\mathbb{C}_+ := \{t = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}, \sigma > 0\}$, allora esiste una funzione olomorfa $U : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ tale che
$$u(x,t) = U(x,t) \quad \textit{per ogni } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+.$$
In particolare, ciò implica che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$;

(ii) La funzione u soddisfa l'equazione del calore
$$\Delta_x u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0 \quad \textit{in} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+;$$

(iii) $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ e soddisfa la condizione iniziale
$$u(x,0) = f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

(iv) Vale la disuguaglianza
$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n} f(y) \le u(x,t) \le \sup_{y\in\mathbb{R}^n} f(y) \quad \textit{per ogni} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$
(in particolare, u è limitata).

Dimostrazione. (i) Si rimanda a [3], Cap. 6, Sez. 3, Teorema 2 dati i richiami di analisi complessa presenti nella dimostrazione.
(ii) L'equazione del calore per $u(x,t)$ può essere derivata per la proprietà (i) del nucleo di Green dalla definizione (2.12), data la regolarità di $u(x,t)$.
(iii) Ora mostriamo che il dato iniziale è assunto con continuità.
Fissiamo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Allora per la continuità di f esiste un $\delta = \delta(\xi, \varepsilon) > 0$ tale che

$$|f(y) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad |y - \xi| < 2\delta.$$

Poniamo

$$M := \sup\{|f(y)|, y \in \mathbb{R}^n\} < +\infty,$$

e per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ tali che $|x - \xi| < \delta$ e $0 < t < \vartheta$ otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}|u(x,t) - f(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)(f(y) - f(\xi))dy \right| \\ &\leq \int_{|y-x|\leq\delta} K(x,y,t)|f(y) - f(\xi)|dy + \int_{|y-x|\geq\delta} K(x,y,t)|f(y) - f(\xi)|dy.\end{aligned}$$

Ora $|y - \xi| = |y - x + x - \xi| \leq |y - x| + |x - \xi| \leq 2\delta$ se $|y - x| \leq \delta$, così

$$\begin{aligned}|u(x,t) - f(\xi)| &\leq \int_{|y-\xi|\leq 2\delta} K(x,y,t)|f(y) - f(\xi)|dy + 2M \int_{|y-x|\geq\delta} K(x,y,t)dy \\ &\leq \varepsilon + 2M\varepsilon\end{aligned}$$

applicando le proprietà (ii) e (iii) del nucleo di Green e scegliendo $\vartheta > 0$ sufficientemente piccolo.
Così otteniamo la relazione desiderata

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(iv) La limitatezza di u segue direttamente dalla rappresentazione integrale di u (2.12) e dalla proprietà (ii) del nucleo di Green. □

Osservazione 6. Dai punti $(i) - (iii)$ del Teorema precedente otteniamo che $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)f(y)dy$ è soluzione del (PC), ossia $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$, u soddisfa l'equazione del calore in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ e la condizione iniziale $u(x,0) = f(x)$ è soddisfatta.

Provata l'esistenza, verifichiamo quindi l'*unicità* della soluzione del (PC). Si andrà ora ad enunciare un principio di massimo per equazioni differenziali di tipo parabolico che risulterà rilevante per tale dimostrazione.

Definizione 2.4. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato, il *cilindro parabolico* di altezza $T \in \mathbb{R}_+$ associato a Ω denota l'insieme

$$\Omega_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : x \in \Omega, t \in (0, T]\}.$$

Il *bordo parabolico* relativo a Ω_T sarà l'insieme

$$\Delta\Omega_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) : (x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})\}.$$

Teorema 2.2.2 (Principio del massimo-minimo parabolico)**.** *Sia* $u = u(x, t) \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\Omega_T \cup \Delta\Omega_T)$ *soluzione dell'equazione del calore*

$$\Delta_x u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T.$$

Allora vale che

$$\min_{(\xi,\tau)\in\Delta\Omega_T} u(\xi, \tau) =: m \leq u(x, t) \leq M := \max_{(\xi,\tau)\in\Delta\Omega_T} u(\xi, \tau), \quad (x, t) \in \Omega_T$$

(per la dimostrazione si rimanda a [3], Cap. 6, Sez. 3, Teorema 3).

Teorema 2.2.3 (Unicità per l'equazione del calore)**.** *Sia* $f = f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *una funzione continua e limitata. Allora esiste una e una sola soluzione limitata* u *del problema ai valori iniziali per l'equazione del calore associata alla funzione* f*, ossia*

$$\begin{aligned}
&u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty), \mathbb{R}),\\
&\Delta_x u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,\\
&u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,\\
&\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |u(x, t)| < +\infty.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dimostrazione. Siano $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ due soluzioni di (2.13), e poniamo

$$M := \sup_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |u(x,t)| + \sup_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} |v(x,t)| \in [0,+\infty).$$

Per la funzione

$$w(x,t) := u(x,t) - v(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \mathbb{R})$$

si ha che

$$\begin{aligned} &\Delta_x w(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ &w(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ &|w(x,t)| \leq M \quad \text{per ogni } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ora fissiamo le costanti $T \in \mathbb{R}_+$ e $R \in \mathbb{R}_+$ e definiamo la palla $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ a cui associamo il cilindro parabolico

$$B_{R,T} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : x \in B_R, t \in (0,T]\}$$

con bordo parabolico

$$\Delta B_{R,T} := \{(x,t) \in \overline{B_R} \times [0,T] : x \in \partial B_R \;\text{ o }\; t = 0\}.$$

Sul dominio $B_{R,T}$ consideriamo sia $w(x,t)$ soluzione di (2.14) sia la funzione

$$W(x,t) := \frac{2nM}{R^2}\left(\frac{|x|^2}{2n} + t\right).$$

Si ha che W soddisfa l'equazione differenziale

$$(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t})W(x,t) = \frac{2nM}{R^2}(1-1) = 0, \quad (x,t) \in B_{R,T},$$

e risulta vero che

$$|w(x,t)| \leq W(x,t), \quad (x,t) \in \Delta B_{R,T}.$$

Applicando ora il principio del massimo-minimo parabolico (2.2.2) si ottiene che

$$|w(x,t)| \leq W(x,t) = \frac{2nM}{R^2}\left(\frac{|x|^2}{2n} + t\right), \quad (x,t) \in B_{R,T},$$

e per $R \to +\infty$ si ha che

$$w(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T]$$

con T reale positivo arbitrario.
Di conseguenza, otteniamo che $w(x,t) \equiv 0 \implies u(x,t) = v(x,t)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. □

Osservazione 7. Abbiamo osservato in (6) che esiste una soluzione del problema ai valori iniziali (PC) per l'equazione del calore associata a f (sotto le ipotesi di continuità e limitatezza di f) della forma

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t) f(y) dy,$$

e tale u è limitata. Così per il Teorema precedente di unicità possiamo concludere che u è unica.

2.2.2 In dimensione 1

Consideriamo ora il problema in una dimensione con dato iniziale $g \in C^0([0,\pi])$, $g(0) = g(\pi) = 0$. Vogliamo una soluzione $v = v(x,t)$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, dell'equazione del calore

$$v_{xx}(x,t) - v_t(x,t) = 0, \quad x \in (0,\pi), t \in (0,+\infty),$$

con condizioni agli estremi

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,+\infty)$$

e dato iniziale di temperatura

$$v(x,0) = g(x), \quad x \in (0,\pi) \qquad \text{(PCD)}.$$

Costruiamo tale soluzione utilizzando un metodo di riflessione.
Essendo continua su un compatto, g è una funzione limitata. Riflettiamo g

nei punti $x = 0$ e $x = \pi$, estendendola in maniera continua come funzione dispari e 2π-periodica nel modo seguente

$$g(-x) = -g(x), \quad g(\pi + (\pi - x)) = -g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rimane limitata. Così per i Teoremi di esistenza e unicità otteniamo la soluzione globale

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)g(y)dy.$$

Le funzioni $u(x,t) + u(-x,t)$ e $u(x,t) + u(2\pi - x,t)$ sono soluzioni dell'equazione del calore in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ con condizioni iniziali omogenee, infatti

$$\begin{aligned}
u(x,0) + u(-x,0) &= g(x) + g(-x) = g(x) - g(x) = 0 \\
u(x,0) + u(2\pi - x,0) &= g(x) + g(2\pi - x) = g(x) - g(x) = 0
\end{aligned}$$

per la disparità e la periodicità di g. Ma allora per il Teorema di unicità della soluzione (2.2.3) deve valere che

$$u(x,t) + u(-x,t) \equiv 0 \equiv u(x,t) + u(2\pi - x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Sostituendo ancora $x = 0$ nella prima e $x = \pi$ nella seconda relazione si ottiene che

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Di conseguenza, $v(x,t) := u(x,t)$ con $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,+\infty)$ risolve il problema ai valori iniziali (PCD) per l'equazione del calore uno-dimensionale associato al dato g continuo, ed è unica e di classe $C^\infty((0,\pi) \times (0,+\infty))$.

Bibliografia

[1] Lanconelli Ermanno, *Lezioni di Analisi Matematica 2. Seconda Parte*, Pitagora Editrice Bologna, 1997.

[2] Salsa Sandro, *Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*, Springer, 2004.

[3] Sauvigny Friedrich, *Partial Differential Equations 1. Foundations and Integral Representations*, Springer, 2006.

[4] Lanconelli Ermanno, *Lezioni di Analisi Matematica 2. Prima Parte*, Pitagora Editrice Bologna, 1995.

[5] Montanari Annamaria, Note del corso di Complementi di Analisi Matematica, Università di Bologna, A.A. 2016/17.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare in primo luogo la professoressa Annamaria Montanari per la disponibilità e la gentilezza mostrata durante la stesura della tesi.

Ma il Grazie più grande va a mia madre, mio padre, mio fratello e tutta la mia famiglia, a Lorenzo e ai miei amici, sempre pronti a incoraggiarmi in ogni mia scelta e a sostenermi nei momenti di sconforto anche da lontano. Grazie a ognuno di voi per aver condiviso con me ansie e soddisfazioni in questi 3 anni.