ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'APPRENDIMENTO DEI PRIMI CONCETTI DI ANALISI: UN'INDAGINE SU DUE GRUPPI DI STUDENTI

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
ANDREA CELESTE CAGNACCI

II Sessione
Anno Accademico 2016-2017

Ogni studente suona il suo strumento, non c'è niente da fare.
La cosa difficile è conoscere bene i nostri musicisti e trovare l'armonia.
Una buona classe non è un reggimento che marcia al passo,
è un'orchestra che prova la stessa sinfonia.

(Daniel Pennac)

Indice

Introduzione

L'*analisi matematica* costituisce il punto di arrivo del percorso che gli studenti si trovano ad affrontare nella scuola secondaria di secondo grado ed uno dei punti cardinali su cui si fonda il curriculum di un laureato in Matematica.
Le sue origini vanno ricercate nell'antica Grecia, ma è dall'inizio del XVII secolo che si delineano i suoi tratti distintivi e che acquista dignità tra le altre branche della matematica. Newton e Leibniz sono considerati i fondatori del calcolo infinitesimale: con metodi e notazioni diverse, entrambi preziosi strumenti didattici, dimostrarono il teorema fondamentale del calcolo integrale, da cui si dedurrà poi che la differenziazione e l'integrazione non sono altro che operazioni inverse l'una dell'altra.
Nel XVIII secolo vennero gettate le basi del *calcolo delle variazioni* ad opera di Jacques e Jean Bernoulli ed il concetto di funzione diventò di centrale rilievo nella nuova branca creata, grazie alla feconda opera di Eulero che si occupò delle funzioni trascendenti elementari di variabile reale. Purtroppo l'analisi che si faceva all'epoca era fin troppo intuitiva e molte erano le critiche che venivano mosse ai concetti di limite, infinitesimo, e funzione. Una prima spinta formalista nacque alla fine del XVIII secolo per dare rigore e dignità alle idee dell'analisi matematica e vide come principale rappresentante Lagrange, che si occupò dello studio di funzioni di variabile Reale. Questo lavoro fu ripreso e ampliato nel XIX secolo da Cauchy per poter essere applicato allo studio di funzioni di variabile complessa e in seguito da Weierstrass che ci donò la definizione odierna di limite, soddisfacente le nuove esigenze di formalità richieste per l'analisi.
Dell'aspetto storico relativo alla nascita dell'analisi si parlerà nel primo capitolo di questa tesi; lo studio della storia è infatti fondamentale per creare interesse e permette agli studenti di avere un'immagine del concetto matematico a più livelli. Inoltre, i richiami

storici sono fondamentali per mostrare come dietro ad un teorema o ad un concetto ci sono persone che nel corso degli anni si sono poste domande e problemi a cui hanno cercato soluzioni e spiegazioni, spesso trovandone di diverse e personali.
Nel secondo capitolo vengono fatte alcune riflessioni sull'insegnamento-apprendimento dell'analisi nella scuola secondaria di secondo grado e nel corso di Laurea in Matematica. A partire dallo studio delle Indicazioni Nazionali e della scheda del corso di Analisi I dell'università di Matematica di Bologna, si muoveranno le fila per alcune considerazioni più legate all'apprendimento che all'insegnamento dei concetti di analisi. In questo senso sarà utile presentare diverse tipologie di apprendimento catalogate in didattica della matematica, includendo il costrutto di *robustezza*.
Il terzo capitolo, parte centrale della tesi, contiene un'analisi dettagliata di un questionario sui primi concetti di analisi somministrato ai ragazzi dell'ultimo anno di scuola secondaria superiore ed agli studenti al secondo anno di Matematica. Questo è stato ideato al fine di poter indagare sull'apprendimento di questa importante branca della matematica.
Sono stati proposti sette quesiti riguardanti aspetti diversi del calcolo infinitesimale, con lo scopo di comprendere il livello di apprendimento conseguito tra gli studenti e di evidenziare eventuali differenze tra i due livelli di scolarizzazione indagati.
Le interviste che ho potuto svolgere con qualche studente partecipante al questionario a proposito di alcune risposte giudicate particolarmente interessanti mi hanno permesso di creare ipotesi sull'apprendimento sfruttando le lenti di didattica proposte nel capitolo due. Queste mostrano come limitarsi alla valutazione superficiale di un test scritto possa lasciare nascosti quei malesseri cognitivi specifici dello studente che dovrebbero portare gli insegnanti verso un'azione didattica individualizzata e personalizzata.

Capitolo 1

Breve introduzione storica: La nascita dell'analisi matematica

Sebbene sia pretenzioso pensare di poter presentare la complessità della storia dell'analisi, in questo capitolo, si cercherà di creare un setting introduttivo per permettere al lettore di entrare nel merito degli argomenti che gli studenti d'oggi si trovano a studiare nel quarto e quinto anno di scuola secondaria superiore, al fine di comprenderne l'origine e la profondità epistemologica.
Cos'è e di cosa si occupa l'analisi matematica? Per rispondere a questa domanda potremmo sfruttare le parole di S. Valenti in [14] e parlare di analisi come di quella disciplina che "si occupa di tutti quelli che sono i procedimenti infiniti e le questioni di continuità, concetti che molto spesso intervengono simultaneamente nei problemi di analisi." Così, sepppur tralasciando una parte di storia importante che potrebbe vedere come precursori dell'analisi Pitagora, Zenone o, più recentemente, Cartesio, si è deciso in questa sede di trattare la nascita dell'analisi matematica a partire dal XVII secolo ed in particolare dalla figura di Isaac Newton.

1.1 Newton e Leibniz: la nascita del calcolo differenziale

Le prime scoperte di Isaac Newton (1642-1727), risalenti al 1665 risultarono direttamente dall'intuizione che fosse possibile esprimere funzioni in termini di serie infinite. In quello che Newton chiamava "mio metodo", il problema degli sviluppi in serie si intreccia con quello della determinazione della velocità (*flussione*) con cui variano grandezze capaci di variare con continuità (*fluenti*), come lunghezze, aree, volumi, temperature. Lavorando al teorema del binomio, si aprirono a Newton le porte di un'analisi basata su serie infinite che avrà da quel momento la stessa legittimità dell'algebra che operava con quantità finite. Trattando di una funzione esplicita a un'unica variabile x riuscì a sfruttare la relazione inversa tra la pendenza e l'area sottesa ad una curva per determinare tale area.
La prima pubblicazione dell'analisi infinita di Newton si trova nel "*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*", pubblicato soltanto nel 1711, e contiene la prima esposizione sistematica del cosidetto *calcolo infinitesimale*. In quest'opera sono già contenute alcune delle regole di differenziazione di cui ci serviamo tuttora, anche se la notazione, modificata da Newton in un secondo momento, fu abbandonata nell'uso matematico. Nei primi lavori, infatti, Newton indicava con o un intervallo di tempo molto breve e con op ed oq piccoli incrementi per i quali x e y variano in tale intervallo. Pertanto, il rapporto $\frac{q}{p}$ rappresentava il rapporto fra i rapporti istantanei di variazione di y e di x; in altri termini, la pendenza della curva $f(x, y) = 0$. La pendenza della curva $y^n = x^m$, per esempio, si trovava a partire da $(y + oq)^n = (x + op)^m$, sviluppando entrambi i membri secondo la formula del binomio, dividendo tutto per o, e trascurando i termini che contenevano ancora o. Il risultato ottenuto era:

$$\frac{q}{p} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Nell'esposizione più conosciuta del calcolo infinitesimale di Newton, il "*Methodus fluxionum et serium infinitorum*", egli considerava x e y come le *fluenti*, di cui le quantità p e q erano le *flussioni*. In questa esposizione sostituì le lettere p e q con le lettere puntate $\dot{x}, \dot{y}$ e le quantità fluenti di cui x e y erano flussioni, furono indicate con X', Y'. Così,

aggiungendo sempre più puntini o lineette, si potevano rappresentare flussioni di flussioni o fluenti di fluenti.
Da un punto di vista storico, le obiezioni che furono mosse a questo nuovo procedimento fanno riferimento alla natura del rapporto tra quantità evanescenti: si obiettava infatti che l'ultimo rapporto di due quantità evanescenti doveva essere nullo, ma Newton ribatte che il rapporto delle quantità non è misurato né prima né dopo che siano svanite, ma nell'istante in cui svaniscono. Un'altra obiezione mossa a Newton fu la seguente: se è dato l'ultimo rapporto di quantità evanescenti, sono date anche le ultime grandezze di tali quantità; quindi ogni grandezza sarebbe costituita di quantità minime, sorta di indivisibili, al contrario di ciò che Euclide aveva dimostrato contro gli incommensurabili.
Nel 1676 Newton redasse una terza esposizione del suo calcolo infinitesimale, con il titolo "*De quadratura curvarum*", cercando questa volta di evitare sia le quantità infinitamente piccole sia le quantità fluenti, sostituendole con quello che egli chiamava "metodo delle prime e ultime ragioni". In questa nuova trattazione Newton si difende affermando che le *ultime ragioni* non sono rapporti di quantità determinate o indivisibili, ma i limiti a cui esse si avvicinano. Il concetto di limite posseduto da Newton è intuitivo e non formale e viene presentato più precisamente nel più ammirato trattato scientifico di tutti i tempi, il "*Philosophiae naturalis principia mathematica*", del 1687.
Da un punto di vista didattico è stato osservato che il metodo di Newton fa uso di uno strumento matematico che può risultare ostico per gli studenti: lo sviluppo in serie delle funzioni. Tuttavia questo metodo possiede grandi pregi se si desidera mostrare come uno stesso problema possa essere affrontato con una pluralità di strategie e introduce al pensiero matematico moderno. In effetti, nella prima edizione dei *Principia*, Newton ammetteva che Leibniz (1646-1716) aveva sviluppato un metodo simile, ma nella terza edizione questo riferimento fu eliminato, a causa dell'aspra diatriba per la paternità del nuovo calcolo.
Ma come arrivò Leibniz agli stessi risultati?
Meditando sull'andamento di una curva, Fermat (1601-1665) aveva osservato che la velocità di variazione di un fenomeno era praticamente nulla in prossimità di un massimo o di un minimo. Nel 1684 Leibniz pubblicò un articolo sotto il nome di "*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur*", nel

quale è implicito un richiamo proprio ad un trattato di Fermat, rimasto inedito durante la sua vita, intitolato "*Methodus ad disquierendam maximam et minimam*". Il metodo che Fermat aveva elaborato, espresso con una notazione moderna, che, come vedremo, è postuma, partiva dalla seguente osservazione iniziale: confrontando il valore di f in un certo punto x, con il valore in $(x+E)$, generalmente si ottengono valori diversi; invece nel punto di massimo o di minimo di una curva continua la differenza sarà quasi impercettibile. Pertanto, al fine di trovare i punti di massimo e di minimo, Fermat considerò la pseudo-uguaglianza $f(x) \approx f(x+E)$, la quale è tanto più vicina ad una vera uguaglianza, quanto più piccolo è l'intervallo E tra i due punti. Successivamente, dopo aver diviso il tutto per E, pose $E = 0$. I risultati così ottenuti gli diedero le ascisse dei punti di massimo e di minimo della curva algebrica. Ci si accorge subito che il metodo proposto da Fermat era efficace soltanto in alcuni casi particolari (ad esempio per funzioni polinomiali) e che i limiti di tale metodo sono la mancanza di una solida sistemazione teorica e di generalità, in quanto ad esempio diviene inefficace se nella funzione compaiono quantità fratte o irrazionali. Facendo uso di una terminologia moderna, possiamo dire che il metodo di Fermat arriva a determinare correttamente il rapporto incrementale e, nei casi più semplici, a calcolare il

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

per poi porlo uguale a zero. Ovviamente, Fermat non possedeva minimamente il concetto di limite; proprio per questo il messaggio da trasmettere agli studenti è quello di una scienza che evolve per conquiste graduali, difficoltose e in ogni modo innovative, malgrado nella trattazione didattica odierna non si utilizzi una narrazione cronologica.
Il punto di svolta di Leibniz rispetto ai risultati di Fermat, presente anche nella teoria di Newton, è il riconoscimento della derivazione come operazione sulle funzioni. La volontà di Leibniz, infatti, fu quella di sottolineare il carattere innovativo e la potenza della nuova tecnica in grado di risolvere problemi che prima creavano difficoltà insormontabili. Come per Newton, anche per Leibniz le serie infinite servirono a guidarlo nella scoperta del calcolo differenziale ma, diversamente dal primo, quest'ultimo aveva sempre avvertito l'importanza di una buona notazione come utile strumento per il pensiero, e la sua scelta nel caso specifico fu particolarmente felice. Dopo vari tentativi, indicò con dx e dy le minime differenze possibili (differenziali) di x e y, sebbene inizialmente avesse utilizzato

una notazione della forma $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$. È nell'articolo precedentemente citato che Leibniz presenta le formule

$$dxy = xdy + ydx,$$

$$d(\frac{x}{y}) = \frac{(ydx - xdy)}{y^2},$$

$$dx^n = nx^{n-1}dx,$$

che otteneva trascurando gli infinitesimi di ordine superiore.
I legami tra calcolo delle tangenti e quello delle quadrature furono evidenti anche a Leibniz a cui dobbiamo i nomi di *calculus differentialis*, per il calcolo differenziale, e *calculus sommatorius* o *integralis*, per il procedimento inverso. In un seguente articolo pubblicato negli *Acta Eruditorum*, Leibniz pubblicò una spiegazione del calcolo integrale nella quale le quadrature venivano presentate come casi particolari del metodo inverso delle tangenti ed introdusse nella sua trattazione curve non-algebriche, escluse dalla geometria di Cartesio.
Di più, come abile inventore di notazioni, dobbiamo a Leibniz la simbologia utilizzata tuttora nell'integrazione, da una prima notazione della forma omn.y (i.e. tutte le y) al moderno simbolo $\int$ ad indicare l'ingrandimento della lettera "s" di somma.
Sia a Newton, sia a Leibniz bisogna attribuire il merito di aver visto nel calcolo infinitesimale un nuovo metodo generale applicabile a molti tipi di funzioni, termine per la prima volta coniato da Leibniz. Dopo di loro, il calcolo infinitesimale non fu mai più una semplice appendice o un estensione della geometria greca, ma una scienza indipendente capace di affrontare una gamma molto estesa di problemi. Entrambi aritmetizzarono il calcolo, cioè lo edificarono su concetti algebrici e aprirono la strada per la nascita di una più grande branca della matematica: l'analisi.

1.2 Dall'epoca dei Bernoulli a Lagrange

A partire dalle idee di Leibniz poté nascere un nuovo tipo di calcolo, detto *calcolo delle variazioni*, studiato da due fratelli svizzeri, Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean

Bernoulli (1667-1748), entrambi illustri matematici. Questi, attraverso la fitta corrispondenza con altri matematici del tempo, vennero a conoscenza dei problemi allora discussi, molti dei quali risolsero autonomamente. Fra questi, i Bernoulli si interessarono ai problemi di trovare l'equazione della catenaria, della trattrice e dell'isocrona, curve già studiate da Huygens e Leibniz. Fu in relazione a problemi di questo genere che i due fratelli scoprirono le potenzialità del calcolo infinitesimale, e proprio grazie a Jacques Bernoulli, Leibniz sostituì il termine *calculus sommatorius* con il termine tuttora in uso *calculus integralis*, nel 1690. È noto che Leibniz e i Bernoulli in quegli anni erano implicati nel problema della brachistocrona, che si potrebbe tradurre nella ricerca di quella curva lungo la quale una particella cadrebbe nel tempo più breve da un punto dato a un secondo punto dato, posto più in basso, ma non direttamente al di sotto del primo. Jean, mediante una dimostrazione errata, aveva trovato che la curva doveva essere una cicloide e sfidò il fratello a scoprire a sua volta la curva in questione. Jacques riuscì a ricavare in maniera corretta la risoluzione del problema e Jean, accortosi della fallacità della propria dimostrazione, cercò di sostituirla con quella del fratello. In questo tipo di problema molto simile alla ricerca del minimo o del massimo relativo di una funzione risolto da Newton, si sposta l'attenzione dai punti alle funzioni; determinando la nascita del *calcolo delle variazioni*, altra grandissima componente dell'analisi matematica.
Mentre Jean soggiornava a Parigi nel 1692, insegnò a un giovane marchese francese, G.F.A. de l'Hôpital (1661-1704), le nuove scoperte di Leibniz e la nuova matematica del tempo. Tra i due fu stipulato un contratto in base al quale, dietro il compenso di un salario regolare, il maestro si impegnava a comunicare a de l'Hôpital tutte le sue scoperte matematiche, lasciando al marchese libertà di farne l'uso che desiderasse, inclusa la loro pubblicazione. A causa di questo contratto uno dei principali contributi di Jean, risalente al 1694, porta oggi il nome di *regola di De l'Hôpital sulle forme indeterminate*. Secondo tale regola, se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni differenziabili in $x = a$ tali che $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$, e se

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, allora

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Questa regola, oggi molto nota, fu incorporata da De l'Hôpital nel primo manuale di calcolo differenziale che sia mai stato stampato, l' "*Analyse des infiniment petits*", pubblicato a Parigi nel 1696. Questo libro si basava su due postulati:

1. si possono considerare uguali due quantità che differiscono soltanto di una quantità infinitamente piccola;

2. una curva può essere considerata come formata da segmenti rettilinei infinitamente piccoli che determinano, mediante degli angoli che formano l'uno con l'altro, la curvatura della curva.

Nello stesso trattato vengono presentati i procedimenti di Leibniz per trovare le formule differenziali fondamentali delle funzioni algebriche le quali vengono applicate a problemi relativi alle tangenti, ai massimi e minimi, ai punti di flesso, alla curvatura, e alle forme indeterminate. Malgrado l'*Analyse* peccasse di originalità, aveva come pregio qualità didattiche che gli diedero grande successo.
Grandissimo maestro del nuovo calcolo iniziato dai Bernoulli sarà Leonhard Euler (1707-1783), italianizzato in Eulero, definito da Arago l'"incarnazione dell'analisi". La biografia degli scritti di Eulero comprende 886 titoli tramite i quali poté dare contributi a quasi ogni branca della matematica pura e applicata, nei quali un'attenzione particolare va rivolta alle notazioni rivoluzionarie per l'epoca. Si devono infatti ad Eulero l'utilizzo della lettera "e" per la base dei logaritmi neperiani, quello della lettera greca "π" per indicare il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio e del simbolo "i" per indicare $\sqrt{-1}$. Eulero unì questi tre simboli nell'uguaglianza $e^{\pi i} + 1 = 0$, che oggi porta il suo nome, pubblicata nell' "*Introductio in Analysin infinitorum*" del 1748. Tra le tante, potremmo considerare come più importante notazione introdotta da Eulero l'attuale simbologia "$f(x)$" ad indicare una funzione nella variabile x.
L'*Introductio* di Eulero può essere considerato la chiave di volta dell'analisi poiché tratta il calcolo differenziale e il metodo delle flussioni come parti di una branca più generale della matematica e che riguarda lo studio dei procedimenti infiniti. Da allora in poi il concetto di funzione diventò il concetto fondamentale dell'analisi, includendo le funzioni trascendenti elementari - trigonometriche, logaritmiche, trigonometriche inverse ed esponenziali - che venivano scritte e concepite da Eulero nella stessa forma in cui sono

studiate oggi.
Nel campo dei logaritmi il contributo di Eulero consiste non solo nell'averli definiti in termini di esponenti, come è ancora oggi in uso, ma anche nell'aver avuto il concetto esatto del significato dei logaritmi di numeri negativi lavorando nell'ambiente complesso.
In quegli stessi anni nasceva in Francia il nuovo sistema degli studi, con la distinzione tra École Normale ed École Polytecnique, il quale richiedeva la pubblicazione di appunti o dispense che riassumessero il contenuto delle lezioni ivi tenute. Lagrange (1736-1813) fu particolarmente fecondo in queste pubblicazioni; in particolare per gli studenti dell' École polytecnique tenne lezioni di analisi e preparò un testo che da allora è sempre stato considerato un classico della matematica: la sua "*Théorie des fonctions analytiques*", del 1797, anno che segna l'inizio dell'età del rigore in matematica. Lagrange era spinto dalla ricerca di rigorosità logica per il calcolo differenziale e si mosse abbandonando il concetto di differenziale e la relativa notazione, a favore della *funzione derivata* di Lagrange, termine da cui trae origine la nostra odierna "derivata". A quest'opera di Lagrange dobbiamo oggi la notazione comunemente usata per indicare derivate di ordine diverso, $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^n(x)$, ... Lagrange credeva di avere eliminato, mediante l'uso di questo dispositivo, la necessità di ricorrere al concetto di limite o di infinitesimo, anche se continuò a usare questi ultimi accanto alle sue funzioni derivate. Purtroppo, però, il suo nuovo metodo presentava dei difetti e il concetto di limite si rivelava ancora indispensabile per la trattazione della convergenza delle serie infinite. Tuttavia, l'opera di Lagrange servì a dare rigore alla teoria delle funzioni a una variabile reale, aprendo la strada per quella delle funzioni a variabile complessa, cui capofila fu Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).
Sebbene già a questo livello della trattazione storico-cronologica ci possa sembrare di avere già raggiunto gran parte delle basi dell'odierna analisi, questa, come sosteneva Berkeley nel suo "*The Analyst*", era basata su una serie di proprietà, definizioni, teoremi e proposizioni giustificati soltanto dall'intuizione. Quindi, i matematici, scossi da tali accuse, si dedicarono fortissimamente a mostrare che l'analisi aveva delle solide fondamenta, raggiungendo notevoli risultati a partire dalla seconda metà del XVIII secolo.

1.3 Il XIX secolo

La sistematicità, l'eleganza della forma ed il rigore delle dimostrazioni, furono per la prima volta raggiunti in matematica, nella forma che conosciamo oggi, proprio con la figura di Cauchy. Sulla linea dei primi insegnanti dell'École Polytecnique, anche questi seguì la tradizione didattica nello scrivere tre libri: "*Cours d'analyse de l' École Polytecnique*", "*Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*" e "*Leçons sur le calcul différentiel*". In questi, Cauchy rifiutava il metodo di Lagrange, riprendendo il concetto di limite come fondamentale, e donandogli per primo un rigore formale. Cauchy riprese la definizione di limite che d'Alembert (1717-1783) aveva formulato nel 1765 per donarle rigore e utilizzarla nel proprio corso di analisi dell'École Polytecnique. La definizione che egli propose, riporta:

> "Quando i valori successivi attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, quest'ultimo viene detto il limite di tutti gli altri."

Inoltre, mentre molti matematici avevano definito un infinitesimo come un numero fisso molto piccolo, Cauchy ricorre alla seguente definizione:

> "Si dice che una quantità variabile diventa infinitamente piccola quando il suo valore numerico decresce indefinitamente in maniera da convergere verso il limite zero".

Nell'analisi di Cauchy concetti come funzione e limite di una funzione erano fondamentali; nel definire la derivata di $y = f(x)$ rispetto ad x, egli assegnava alla variabile x un incremento $\Delta x = i$ e formava il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Il limite di questo rapporto degli incrementi al tendere di i a zero veniva da lui definito come la derivata $f'(x)$ di y rispetto ad x. Il differenziale veniva ormai relegato a un ruolo sussidiario: se dx è una quantità finita, il differenziale dy di $y = f(x)$ viene definito semplicemente come $f'(x)dx$. Cauchy aveva inoltre sviluppato una definizione soddisfacente di funzione continua:

> "La funzione $f(x)$ è continua entro limiti fissati se nell'intervallo compreso tra questi limiti un incremento infinitamente piccolo i della variabile x produce sempre un incremento infinitamente piccolo $f(x+i) - f(x)$ della funzione stessa."

Tale definizione di continuità corrisponde a quella moderna se teniamo presente la definizione di Cauchy di quantità infinitamente piccole in termini di limite.
Per tutto il XVIII secolo il concetto di integrazione era stato affrontato come l'inverso del concetto di differenziazione ma Cauchy decise di improntare la propria trattazione in maniera diversa. La definizione di derivata di Cauchy fa vedere chiaramente che non esisterà nessuna derivata in un punto per il quale la funzione è discontinua; l'integrale, invece, non presenta alcuna difficoltà. Anche curve discontinue possono creare un'area ben definita. Pertanto Cauchy preferì definire l'integrale definito come limite di una somma. In simboli, posto

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

se la larghezza degli intervalli $x_i - x_{i-1}$ decresce indefinitamente, il limite S di S_n è l'integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo che va da $x = x_0$ a $x = X$. È dalla definizione di integrale come limite di una somma, e non dal concetto di integrale come l'inverso della derivata, che sono scaturite le molteplici, feconde generalizzazioni dell'analisi moderna e la definizione postuma data da Riemann, ancora in uso.
Da questa impostazione fu necessario per Cauchy dimostrare la nota relazione esistente tra l'integrale e l'antiderivata, e a tal fine sfruttò il noto "Teorema del valor medio", secondo cui se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e differenziabile nell'intervallo aperto (a, b), esisterà sempre qualche valore x_0 tale che $a < x_0 < b$ e $f(b) - f(a) = (b-a)f'(x_0)$. Ai tempi era già noto da un secolo il teorema di Rolle, e questo ne era una generalizzazione abbastanza ovvia anche se non era mai stato seriamente preso

in considerazione prima di allora. Una formula ancor più generale

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

con opportune condizioni imposte a $f(x)$ e $g(x)$, è nota come "Teorema di Cauchy" ed è oggi parte integrante del programma di analisi dell'ultimo anno di scuola secondaria superiore.

Più in generale, Cauchy fu implicato nella cosidetta *aritmetizzazione dell'analisi*, espressione coniata da Klein nel 1895, che cercava di mostrare che l'analisi aveva delle solide basi da ricondurre all'aritmetica. Il metodo seguito fu quello di riferire i concetti matematici alle proprietà dei numeri naturali, sulle quali si riteneva non doverci essere nulla da discutere. Le conseguenze furono che i concetti ricondotti con inferenze logiche ai numeri naturali erano da considerarsi certi ed evidenti. Il massimo esponente di tale procedimento è, senza dubbio, Cantor con la sua costruzione dei numeri reali a partire dai naturali, della seconda metà del XIX secolo. Infatti, oltre all'insoddisfazione generata dal carattere prettamente intuitivo dell'analisi, era presente la ricerca di una definizione precisa di "numero reale", al centro del programma di aritmetizzazione. Non tratteremo oltre questa spinta caratteristica del XIX secolo, cercando di mantenere la trattazione legata ai concetti dell'analisi che viene insegnata nella scuola secondaria, o al primo anno di università.

È inevitabile allora parlare di un altro grande matematico: Karl Weierstrass (1815-1897). Fra i contributi di Weierstrass all'aritmetizzazione dell'analisi vi fu non solo una definizione soddisfacente di numero reale, ma anche un perfezionamento della definizione del concetto di limite. La definizione di Cauchy faceva uso di espressioni come "valori successivi" o "avvicinarsi indefinitamente" che, per quanto suggestive, peccavano in precisione matematica. Pertanto nelle sue lezioni Weierstrass usava utilizzare la seguente definizione:

> "Se data una qualsiasi grandezza ϵ, esiste una η_0 tale che per $0 < \eta < \eta_0$ la differenza $f(x_0 \pm \eta) - L$ è minore di ϵ in valore assoluto, allora L è il limite di $f(x)$ per $x = x_0$."

Di più, ignaro del lavoro del matematico boemo Bernard Bolzano, del 1817, Weierstrass fornì una nuova dimostrazione di quello che oggi porta il nome di *teorema di Bolzano-Weierstrass*, secondo il quale un insieme limitato S contenente infiniti elementi ammette almeno un punto limite o punto di accumulazione. Un altro teorema, più importante nella formazione scolastica secondaria, deve il nome a Weierstrass ed afferma che se $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è un intervallo chiuso e limitato non vuoto e $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ammette (almeno) un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intervallo $[a,b]$. Già dalla definizione di limite sopra data si nota come Weierstrass utilizzasse semplicemente i numeri reali, le operazioni di addizione (e la sua reciproca) e la relazione "minore di" per fornire quel rigore che segna l'inizio di un'età nella quale non c'era più spazio per quantità infinitesime fisse. Gli sforzi dell'aritmetizzazione dell'analisi hanno portato ad una nuova maturità e consapevolezza del potere di questa branca che acquisiva, con il rigore ed il formalismo, i tratti che conosciamo oggi e che si studiano nei corsi di analisi I e nella scuola secondaria di secondo grado. In particolare, per le considerazioni riguardanti l'apprendimento delle prime basi dell'analisi negli alunni, non occorrerà spingersi oltre nella trattazione storica, al costo di tralasciare in questa sede l'avvento del formalismo e dell'analisi non standard, e con essi, tutta la matematica del XX secolo.

Capitolo 2

Insegnamento e apprendimento dei primi elementi di analisi

2.1 Le Indicazioni Nazionali riguardo il *sapere da insegnare*

Nell'insegnamento di tutte le materie e, in particolare, in quello della matematica, la progettazione e la gestione dei momenti didattici non può avvenire casualmente o essere dettata solo dallo scopo di "fare qualcosa per imposizione dall'alto". Seguendo la definizione proposta in [1] da G. Bolondi e M. I. Fandiño Pinilla potremmo dire che la didattica della matematica è una "disciplina teoricamente consolidata sulla base delle problematiche sollevate dalle situazioni d'aula, specifiche per la matematica, i cui risultati permettono, a chi si trova quotidianamente sul campo, di comprendere ed analizzare i processi di insegnamento-apprendimento, di intervenire sulla propria azione didattica per favorire un apprendimento corretto da parte degli studenti."

Quando si parla di didattica della matematica, facciamo riferimento a due tipologie:

- didattica A;
- didattica B.

La didattica A, come divulgazione di idee, ha come obiettivo quello di progettare situazioni ideali per l'insegnamento; la didattica B, come ricerca empirica, si concentra sul processo di apprendimento della materia. Guy Brousseau pone l'accento sulla relazione "sapere", che lega insegnate e allievo all'interno di un *milieu*, mezzo, ambiente, nel quale essi si trovano a operare. Per mettere in evidenza l'importanza del legame che questi hanno in didattica della matematica, riportiamo come modello didattico il Triangolo di Yves Chevallard (figura 2.1), che colloca questi tre soggetti ai vertici di un triangolo, i cui lati rappresentano i rapporti che si instaurano tra di loro.

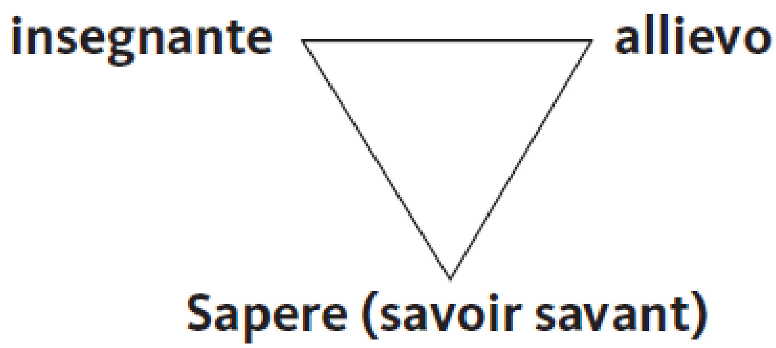


Figura 2.1: Triangolo della didattica

Con il termine "sapere" lo studioso francese intende in realtà quello che si usa chiamare *savoir savant*, ovvero il sapere matematico accademico. Questo tipo di sapere è però sostanzialmente estraneo ai processi di insegnamento-apprendimento che legano l'insegnante e l'allievo. L'insegnante, che si pone tra sapere e allievo, deve scegliere ed adattare il *savoir savant* in prospettiva didattica (passaggio dal sapere da insegnare al sapere insegnato) al fine di rendere possibile un corretto apprendimento degli allievi. Questo processo compiuto dall'insegnante viene chiamato *trasposizione didattica* e viene inevitabilmente influenzato da diversi aspetti: il luogo, la classe e gli intenti didattici che ci si pone; l'insegnante infatti deve tenere conto del sistema didattico e dell'ambiente socio-culturale in cui si trova e non ha quindi piena libertà.
Riguardo al sapere da insegnare, i docenti devono sicuramente creare le unità didattiche in relazione al loro ambiente classe, ma anche attenersi a quanto scritto nelle Indicazioni Nazionali riguardo le linee generali e competenze e gli obiettivi specifici di apprendimento. Facendo riferimento alle Indicazioni Nazionali pubblicate nel 2010 possiamo osservare che, per quanto riguarda i primi elementi di analisi e il calcolo differenziale, gli obiettivi

specifici di apprendimento sono gli stessi per tutti i licei. Troviamo infatti tra gli obiettivi specifici di apprendimento alla voce Relazioni e Funzioni del quinto anno:

> "[...] Lo studente acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici. Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale - in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità - anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici."

Si osserva subito che non vengono date indicazioni precise o vincolanti relative alla modalità di trattazione dell'argomento, inoltre l'attenzione sembra focalizzarsi sull'obiettivo di saper inquadrare la nascita del calcolo differenziale nel contesto storico e rispetto alle sue applicazioni piuttosto che sul raggiungimento della dimestichezza e familiarità nel calcolo e nella risoluzione dei problemi. Inoltre, nelle Indicazioni Nazionali, non è specificato l'ordine ed il modo in cui introdurre questi concetti elencati, delegando al docente tali scelte. La storia della matematica potrà essere d'aiuto come guida a tali scelte e ricoprirà un ruolo fondamentale al fine di identificare alcuni ostacoli che si manifestano tramite errori ricorrenti nel processo di apprendimento degli alunni.
Un esempio di programma per la classe quinta liceo che segua queste indicazioni per l'introduzione al percorso di analisi potrebbe essere il seguente:

- Limiti di funzioni reali di variabile reale: Teorema dell'unicità del limite, Teorema della permanenza del segno e Teorema del confronto. Il calcolo dei limiti e le forme indeterminate. I limiti notevoli. Gli infiniti e il loro confronto.

- Le funzioni continue: punti di discontinuità e loro classificazione, le proprietà delle funzioni continue ed il metodo di bisezione. Asintoti e grafico probabile di una funzione.

- La derivata di una funzione: derivate delle funzioni elementari, algebra delle derivate e teoremi relativi. La derivata di una funzione composta. La derivata della funzione inversa, le derivate di ordine superiore al primo, classificazione e studio dei punti di non derivabilità. Applicazioni geometriche e alle scienze del concetto di derivata.

- Teoremi sulle fuzioni derivabili: I teoremi di Fermat, di Rolle e di Lagrange. Le funzioni crescenti e decrescenti e criteri per l'analisi dei punti stazionari. Problemi di ottimizzazione. Funzioni concave, convesse e punti di flesso. I teoremi di Cauchy e di De l'Hopital.

- Lo studio di funzione: funzioni algebriche, funzioni trascendenti, funzioni con valori assoluti. Grafici deducibili. Applicazioni dello studio di funzione alle equazioni: il metodo di Newton e l'approssimazione delle radici di un'equazione.

Al fine di confrontare queste indicazioni per la scuola secondaria di secondo grado con ciò che viene studiato al primo anno di Matematica in un corso di Analisi I, abbiamo analizzato la scheda del corso di Analisi matematica 1 di Bologna, aa 2015/2016. In tale scheda, abbiamo riscontrato nella sezione "Conoscenze e abilità da conseguire" elementi del tutto simili a quelli appena citati dalle indicazioni nazionali:

> "[...]Al termine del corso, lo studente ha le conoscenze di base dell'analisi matematica, individuandola come scienza centrale utile e creativa. Ha la conoscenza dei concetti di limite, di continuità, di derivabilità e di integrabilità per le funzioni reali di variabile reale. In particolare, lo studente sa applicare tali conoscenze alla soluzione di semplici problemi pratici, posti dalle scienze pure ed applicate."

Se si osserva la voce "Programma/Contenuti" ci si accorge che l'impostazione del curricolo non è molto diversa dall'esempio che abbiamo dato per scuola secondaria, si legge infatti:

> [...]Insiemi ordinati. Introduzione assiomatica dei numeri reali. Radici n-esime aritmetiche. Funzione esponenziale in $\mathbb{Q}$. Successioni di numeri reali. Successioni di Cauchy. Successioni monotone. Le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche. Numeri complessi e funzioni circolari. Limiti per funzioni reali di una variabile reale. Funzioni continue. Derivata. Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor. Funzioni convesse. Massimi e minimi relativi. Integrale di Riemann. Integrale generalizzato. Serie numeriche. Successioni e serie di funzioni. Convergenza uniforme di successioni e serie di funzioni. Sviluppabilità in serie di Taylor. Serie di potenze. Spazi metrici. Limiti e continuità per funzioni di più variabili reali.

Avendo fatto chiarezza su quali siano le indicazioni riguardanti il "sapere da insegnare" ai vari livelli di scolarizzazione per il caso considerato, possiamo andare ora ad approfondire costrutti di didattica della matematica che ci permettano di analizzare l'apprendimento degli allievi in relazione alle clausole del cosidetto "contratto didattico".

2.2 Il contratto didattico

Il rapporto tra l'insegnante e l'allievo, come si è visto, è argomento d'interesse centrale in didattica poiché determina un insieme di atteggiamenti, richieste, aspettative, fasi e momenti caratteristici di quello che può essere chiamato "contratto didattico". Storicamente è Brousseau a definire rigorosamente il contratto didattico attraverso la seguente immagine:

> "In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo e i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico (Brousseau in [4])."

Spesso questo rapporto si basa su regole non scritte, non dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola, dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma su convenzioni implicite dettate dalla concezione della scuola, della matematica, e dalla ripetizione di modalità nel tempo. Queste norme di comportamento nascoste risultano perfettamente conosciute sia dagli studenti che dall'insegnante, come se costituissero veramente una sorta di contratto vincolante in ambito scolastico. Si nota che la metafora di Brousseau si mostra perfettamente attinente alla descrizione delle dinamiche scolastiche ed ha portato la didattica della matematica ad indagare, a partire da questo costrutto, comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o all'età immatura.
Analizzando alcune clausole del contratto didattico note in ricerca, troviamo quella relativa alla *concezione della matematica* che comprende tutte quelle pratiche che spingono lo studente a ritenere che in matematica ogni problema abbia un'unica soluzione e che per trovarla sia necessario fare calcoli. Questa clausola, strettamente collegata a quella di *esigenza di giustificazione formale* (D'Amore, Sandri in [7]), che porta lo studente a ricercare calcoli, teoremi, regole conosciuti per concludere un esercizio, può provocare un defocus dell'attenzione dalla conclusione corretta inibendo le capacità critiche di controllo della risoluzione dello studente. Lo studente inoltre si trova spesso involontariamente implicato nella cosidetta *delega formale* secondo la quale:

> "Si instaura quella clausola che disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico" (Bolondi, Fandiño Pinilla in [1]).

Come cause della difficoltosa *devoluzione* dello studente, termine che indica l'azione in base alla quale l'allievo dovrebbe farsi carico dell'obiettivo cognitivo con un trasferimento di responsabilità da parte dell'insegnante, D'Amore classifica, fra le tante, quella della mancata *implicazione*. La nascita dell' *implicazione* dello studente, ovvero di quella fase nella quale lo studente accetta la responsabilità di occuparsi personalmente di un problema senza guida ossessiva dell'insegnante, è un passaggio fondamentale per l'apprendimento perché serve a creare nello studente la predisposizione ad acquisire nuovi concetti e a rielaborarli, producendo così nuove abilità e conoscenza. In questa lente creata dalla didattica della matematica per le situazioni di insegnamento-apprendimento, emerge un'idea quasi paradossale della devoluzione che può essere espressa nella forma:

> "Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos'è sapere, abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione" (Clanché in [5]).

Secondo questa massima, il compito dell'allievo è quello di prendere l'apprendimento come rischio personale, accettando la relazione didattica ma al tempo stesso sforzandosi di rigettarla, sfuggendo così alla scolarizzazione del sapere.

2.3 L'apprendimento della matematica

Ciò che si intende per apprendimento della matematica è un fattore ricco di aspetti, la cui combinazione porta al di là della semplice costruzione di un concetto. Nel processo di apprendimento di un concetto sono necessarie le capacità di effettuare calcoli o dare risposta a esercizi, la sua combinazione con altri concetti e con strategie opportune per risolvere problemi, e la capacità di sapere riproporre a sé stessi e agli altri il concetto costruito e la strategia seguita facendo uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di passare da una rappresentazione all'altra. Tutte queste componenti dell'apprendimento non sono indipendenti, né separabili e solo la loro unione può portare a quello che in seguito chiameremo *apprendimento robusto*. Cercheremo in questa sezione di presentare un'analisi di questi apprendimenti, come fossero indipendenti e separati, consapevoli che non lo sono nella prassi scolastica. Questo tipo di analisi serve per dare delle lenti agli insegnanti che si trovano di fronte ad un "mancato apprendimento", non per catalogarlo in maniera fredda e abitudinaria, bensì per ricavare qual è stata la causa che ha prodotto quell'errore, che cosa non ha funzionato nel processo di insegnamento-apprendimento. La scelta che in quest'ottica un'insegnante dovrà attuare sarà non sull'errore, ma sulla causa che lo ha generato. Se l'allievo ha fallito in un test di matematica, è auspicabile riconoscere quale delle precedenti componenti dell'apprendimento è venuta a mancare: lo studente non ha capito il concetto che avrebbe dovuto usare? non ha capito il processo algoritmico che si auspicava da lui? E così via.

Si possono dunque catalogare le tipologie di apprendimento in matematica nella seguente modalità, anche se non del tutto prive di sovrapposizioni:

- apprendimento concettuale (noetica);
- apprendimento algoritmico (calcolare, operare,...);
- apprendimento strategico (risolvere, congetturare,...);
- apprendimento comunicativo (dire, argomentare, validare, dimostrare,...);
- apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (di trattamento e di conversione).

Questa suddivisione, riesce a fornire un valido strumento per l'interpretazione degli errori, per porre rimedio al malessere cognitivo dello studente in maniera soddisfacente.
Il primo tipo di apprendimento catalogato è quello concettuale, che, ingenuamente, è spesso considerato il più importante tra i sopra riportati. Sicuramente in matematica è importante costruire concetti, ma questi non vanno confusi con gli oggetti, che sono il tema dell'azione didattica. Un concetto può dirsi costruito se l'allievo è in grado di identificare proprietà di quel concetto, di rappresentarlo, di trasformare tale rappresentazione, di usarla in modo opportuno. Come verificare che uno studente abbia raggiunto l'apprendimento concettuale? Un esempio di tecnica attuabile è quella delle TEP, le cosidette produzioni testuali autonome degli allievi presentate da D'Amore e Maier in [6]. Queste consistono in dei testi elaborati in modo autonomo dagli studenti ed aventi come soggetto questioni matematiche. Tali produzioni non devono essere associate ad altri testi scritti dagli studenti in modo non autonomo e soggetti ai vincoli del contratto didattico (compiti in classe, appunti, descrizioni di procedimenti...) ma piuttosto a libere espressioni dello studente messo nella condizione di voler comunicare in modo comprensibile e con linguaggio personale, le proprie idee legate ad un concetto e in generale alla matematica.

Proseguendo con l'analisi della classificazione sopra riportata, si incontra l'apprendimento algoritmico che è in stretta relazione con l'abilità di dare risposte mediante operazioni e calcoli, con l'applicazione di formule o tramite il disegno di figure opportune. Valutare questo tipo di apprendimento non è banale e bisogna distinguerlo dalle abilità puramente meccaniche, dettate dall'abitudine scolastica favorita dagli esercizi proposti dai libri di testo. In questo tipo di apprendimento si coinvolgono abilità che riguardano la capacità di ragionare prima di procedere ad eseguire calcoli, che permettono di decidere quali operazioni fare, che eliminano i calcoli non necessari. Per verificare questo apprendimento è quindi necessario formulare test mirati al riconoscimento della capacità gestionale dell'algoritmo.
L'apprendimento strategico, come suggerisce il nome, riguarda la scelta delle strategie che si usano quando si risolve un problema, nucleo fondamentale per la risoluzione dello stesso. Questo tipo di apprendimento è indispensabile al fine della valutazione della "qualità" della risoluzione proposta da uno studente, per evitare di focalizzare l'attenzione sul risultato e non sul processo. Così, nel dare valore ai processi, possiamo valutare le differenti strategie che usano gli allievi per risolvere un problema; possiamo conoscere il grado di comprensione chiedendo loro che spieghino il proprio ragionamento per iscritto o oralmente, e confrontando il proprio processo con quello di un compagno. Ciò permette di unire l'aspetto strategico con quello comunicativo, ma per permettere il formarsi di opinioni e strategie diverse è indispensabile che l'insegnante predisponga situazioni non vincolate dal contratto didattico; in cui si possano individuare diverse modalità possibili per arrivare alla risoluzione. A partire da queste modalità di verifica dell'apprendimento strategico si può quindi testare un altro tipo di apprendimento, quello comunicativo. Questo aspetto dell'apprendimento matematico, che spesso non viene propriamente valutato, cerca di mettere in evidenza la capacità di esprimersi correttamente con un linguaggio formale. Lo studente deve essere in grado di comunicare concetti giustificando, argomentando, dimostrando (in forme adatte allo studente e al grado di istruzione) e rappresentando in modo visivo in maniera efficace. Purtroppo, esistono studenti che, pur avendo costruito cognitivamente oggetti della matematica, non hanno però la maturità, la capacità di comunicare quello che hanno costruito in forma compiuta, e di questo deve essere tenuto conto nella valutazione, ai fini di guidare lo studente nella capacità

espressiva.
Infine, l'ultima componente dell'apprendimento è quella di tipo semiotica, strettamente implicata in ogni altra componente precedentemente citata. Questo apprendimento, consiste nel:

- saper scegliere i tratti distintivi per rappresentare un oggetto matematico cognitivamente costruito o in via di costruzione;
- scegliere il registro -o i registri- semiotici che si reputano adatti a tale rappresentazione;
- saper trattare con la rappresentazione semiotica trasformandola in un'altra dello stesso registro (trattamento) o di un altro (conversione) in modo opportuno, senza perdere di vista il significato dell'oggetto di partenza.

Come si è detto, tutte le precedenti componenti di apprendimento, sono condizionate dall'apprendimento semiotico e ciò delinea ed evidenzia l'assoluta necessità di prendersi cura di questo apprendimento, così centrale nella matematica. Essendo nella quotidianità della pratica matematica spesso utilizzata la scrittura, il disegno e la schematizzazione, si capisce bene come la semiotica sia componente trasversale irrinunciabile dell'apprendimento concettuale e strategico ed essendo spesso la risoluzione dei problemi in grande misura un trattamento o una conversione da una rappresentazione ad un'altra facente utilizzo di metodi comunicativi efficienti, sarà impossibile non convenire con la celebre espressione ideata da Duval "non c'è noetica senza semiotica".

2.3.1 Un ostacolo dell'apprendimento: le convinzioni degli studenti

Secondo la teoria *costruttivista* dell'apprendimento studiata nel dettaglio da Gardner in [15], l'alunno non è un contenitore vuoto da riempire di conoscenza, ma un soggetto attivo che interpreta la realtà, che mette in relazione i fatti osservati con le esperienze precedenti, che costruisce schemi interpretativi alla luce dei quali anticipa le esperienze future. Il concetto di *convinzione* è di centrale rilievo in questa teoria in quanto le convinzioni (o credenze) sono il frutto di un processo di interpretazione in atto in ogni

alunno continuativamente. In generale ognuno di noi possiede/costruisce convinzioni su ogni aspetto della realtà e basandosi su di esse si avvicina al mondo e alla società. Purtroppo, nel campo delle difficoltà d'apprendimento in matematica, le convinzioni possono giocare un ruolo negativo se si tratta, ad esempio, di credenze che un allievo ha sulla matematica e sul proprio apprendimento.
Nel formarsi delle convinzioni si intrecciano due sfere strettamente legate: la sfera cognitiva e quella affettiva, generando credenze di tipo metacognitivo o dipendenti dall'idea che l'alunno ha di sé.
Le convinzioni cognitive scorrette riguardanti un contenuto matematico, dette anche *misconcezioni*, sono responsabili di errori sistematici di cui l'allievo non è consapevole. Queste sono presenti ad ogni livello di scolarizzazione a partire da quelle legate all'apprendimento dei primi concetti matematici (ad esempio la convinzione che "moltiplicando due numeri il risultato sarà maggiore di entrambi") fino a quelle di livello superiore ("un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica compare esplicitamente il segno -").
Anche le convinzioni sulla matematica come disciplina nel suo complesso giocano un ruolo determinante nell'implicazione degli studenti e nella decisione di attivare o meno le risorse cognitive necessarie per l'apprendimento. Apparentemente queste convinzioni possono sembrare meno legate ai classici errori di carattere cognitivo ma in realtà la loro importanza risiede nella capacità che esse hanno di inibire l'utilizzazione delle conoscenze possedute dagli studenti. Esempi di convinzioni di questo tipo molto diffuse possono essere:

- solo pochi studenti possono "capire" la matematica;
- le regole matematiche, le dimostrazioni, i teoremi, vanno imparati e non serve capirli;
- per fare gli esercizi di matematica non serve studiare la teoria;
- un problema o lo capisci subito o non lo capisci più.

A partire da queste credenze nascono, con una forte componente affettiva, le convinzioni relative alla percezione che un soggetto ha di sé, esprimibili dalla formula "non importa

quanto mi impegni, non riuscirò in matematica". Tutte queste convinzioni possono essere determinanti nell'inibire l'azione dello studente nel contesto classe, ma anche nelle attività di consolidamento lasciate per casa. Molti studenti con difficoltà costruiscono, dall'interpretazione delle proprie esperienze scolastiche in confronto a quelle dei compagni, convinzioni su di sé talmente negative da determinare la rinuncia a priori perfino di provare a pensare, a risolvere problemi. I processi decisionali di un individuo sono così totalmente assoggettati alle convinzioni che quando esse si legano tra loro portano a comportamenti rischiosi per l'apprendimento. Ad esempio la convinzione secondo la quale per riuscire in matematica bisogna essere portati è attualmente condivisa non solo da studenti (o ex-studenti) con difficoltà, ma anche da studenti (o ex-studenti) che riescono, e da alcuni professori. Ovviamente, a seconda del caso, cambia la convinzione su di sé che si crea nello studente: in un caso "io non sono portato", nell'altro "io sono portato".
L'attenzione dell'insegnante deve quindi focalizzarsi sulla ricerca dei *sistemi di convinzioni* di un singolo soggetto. Tali sistemi non vanno confusi con i cosiddetti *sistemi di conoscenze* in quanto questi presentano come caratteristiche peculiari:

- una struttura quasi-logica;
- la centralità psicologica;
- una"struttura a grappolo".

In effetti le convinzioni sono organizzate in relazione a come il soggetto vede le connessioni fra esse, con alcune convinzioni primarie ed altre che ne derivano logicamente, chiamate derivate. A causa della mancanza di una vera e propria struttura logica in senso matematico, però, alcune convinzioni possono anche essere in contraddizione con altre mentre nei sistemi di conoscenza non devono esservi contraddizioni. Inoltre, la forza psicologica delle convinzioni distingue convinzioni centrali, più consolidate, da convinzioni periferiche. Anche questa dimensione è assente nei sistemi di conoscenza in quanto non si può dire che qualcuno conosce un certo argomento in maniera intensa. Infine, le convinzioni sono strutturate in settori relativamente isolati e questo fa sì che un individuo possa avere contemporaneamente convinzioni apparentemente contradditorie.

Individuare il sistema di convinzioni di un alunno può essere importante per la loro modifica, per assestare i processi decisionali dell'alunno al fine di favorire la devoluzione e l'apprendimento attivo. Per modificare una convinzione secondaria appare più efficace intervenire sulla convinzione primaria da cui deriva anche se questa azione risulta spesso difficile perché l'organizzazione delle convinzioni è personale e varia da persona a persona. Questo significa che lo studio delle convinzioni deve essere individualizzato e ad hoc per ogni alunno, anche se attività preventive delle principali misconcezioni possono essere svolte su tutta la classe nei momenti didattici e ancor di più in quelli a-didattici. In effetti il lavoro di prevenzione dell'insegnante può prescindere dai fallimenti dei singoli allievi, ed avere una prospettiva autonoma ad ampio raggio.
Nella formazione delle convinzioni di tipo affettivo di un allievo hanno un grosso peso un insegnamento poco incoraggiante e personalizzato, la tendenza ad associare la valutazione del compito alla persona, la difficoltà a rivedere i giudizi inizialmente dati di fronte a un miglioramento. Questi elementi favoriscono nello studente in difficoltà un'immagine di sé come individuo poco capace, attaccando la sicurezza dell'alunno e la sua autostima. Inoltre, le convinzioni scorrette riguardanti la matematica possono essere il frutto delle pratiche d'insegnamento radicate nel nostro sistema, ma anche delle convinzioni diffuse a livello extrascolastico riguardanti la stessa. Così la convinzione che la matematica è fatta di prodotti più che di processi è spesso il risultato di un insegnamento standard che privilegia e valuta prodotti e non processi, in cui si fanno memorizzare molte formule senza lasciare che gli studenti ne colgano il vero senso o le applicazioni. Gli esercizi proposti per il consolidamento di un concetto, spesso, favoriscono convinzioni errate e creano veri propri stereotipi di convinzioni come ad esempio:

- i problemi di matematica hanno sempre una e una sola soluzione, similare ad una già vista in classe;
- un problema si deve risolvere in 10 minuti;
- nei problemi vanno applicate soltanto le conoscenze appena studiate.

In questo senso il problem solving può essere utilizzato come ambiente favorevole allo sviluppo delle capacità metacognitive, stimolando il soggetto ad assumersi la responsabilità

delle proprie scelte, vedendolo coinvolto con un buon grado di implicazione. Questo rappresenta un contesto ideale ed auspicabile per favorire nell'allievo la nascita di emozioni positive e per insegnargli a gestire eventuali emozioni negative, altrettanto necessarie nel processo di formazione dell'individuo. Dualmente, attraverso il problem solving, si possono portare alla luce le convinzioni scorrette o comunque debilitanti sulla matematica e su di sé presenti in ogni alunno, favorendone quindi la rimozione.
Fino a questo momento si è parlato delle convinzioni degli studenti e dell'importanza che esse giocano nei processi decisionali; a questo punto bisogna estendere l'analisi anche agli insegnanti che, involontariamente, improntano le loro scelte didattiche su credenze radicate. Alcune di queste convinzioni possono impedire all'insegnante di investire nella progettazione degli interventi di recupero tutte le risorse necessarie e, in particolare, di scacciare stereotipi come i seguenti:

- le lacune di base presenti in studenti di una certa età non sono più recuperabili;
- il successo in matematica è dovuto all'intelligenza;
- l'intelligenza è una dote naturale non modificabile.

Si può capire a questo punto l'importanza di un lavoro dell'insegnante sulle proprie convinzioni, a partire dalla consapevolezza della loro esistenza al fine di produrre un cambiamento di atteggiamento nei confronti del problema e del recupero. Solo così l'insegnante potrà realmente vedere con nuovi occhi la sua classe e spostare l'attenzione dall'errore all'allievo che fa l'errore, abbandonando inutili metodologie curative al favore di attività diagnostiche molto più efficienti.

2.4 Il problema della valutazione: l'apprendimento robusto

Nella precedente sezione abbiamo approfondito quali tipi di apprendimento possono essere riconosciuti in uno studente e come favorirli. Tra i metodi diagnostici del mancato apprendimento individuiamo la valutazione scolastica, che costituisce un momento

fondamentale del processo di formazione in quanto può fornire agli insegnati dati e informazioni decisive per personalizzare/individualizzare l'insegnamento sulla base delle caratteristiche cognitive, affettive e motivazionali di ogni alunno.
Ampiamente discussa in didattica della matematica è la cosiddetta *valutazione sommativa*, ovvero quella valutazione espressa in decimi che si utilizza alla fine di un'unità didattica per valutare le conoscenze dell'alunno. Per rendere la valutazione più utile ed efficace è necessario che nella scuola siano implementate varie forme di valutazione, e che a quella sommativa venga affiancata una valutazione costante di tipo *formativo*, volta alla verifica delle competenze dell'alunno. Nel tentativo di azzardare una definizione di *competenza*, la si potrebbe descrivere -sfruttando le parole di Rogiers in [17]- come:

> "La possibilità, per un individuo, di mobilitare in modo interiorizzato un insieme integrato di risorse allo scopo di risolvere una situazione significativa (di carattere disciplinare) appartenente a una famiglia data di situazioni-problema."

Questa definizione è particolarmente indicata perché lascia trasparire che il termine competenza indica qualche cosa di più che una conoscenza o un saper fare in un dato contesto; ed implica anche un voler fare, dunque chiama immediatamente in causa fatti affettivi, come volizione e atteggiamento.
In questa tesi non entreremo nel merito delle varie metodologie didattiche che dovrebbero permettere all'allievo di raggiungere una determinata competenza in analisi ma cercheremo di studiare il tema altrettanto tedioso della valutazione della competenza e, più specificatamente, della determinazione del livello di competenza raggiunto da un singolo allievo.
Attualmente nelle scuole che conosciamo la prassi più diffusa per la valutazione scolastica è quella del test scritto, che rimane, affiancato da colloqui orali, sicuramente il più importante strumento valutativo usato. Legati a questo tipo di valutazione superficiale sorgono alcune problematiche che possono essere espresse dai seguenti interrogativi: se un allievo ha concluso correttamente il test scritto e, di conseguenza, riceve il massimo voto, si può affermare che abbia realmente raggiunto la robustezza tale da portarlo allo sviluppo delle competenze al riguardo? Come paragonare il raggiungimento della com-

petenza di questo alunno con quello di un altro che non ha risposto correttamente a tutte le domande? Si può dire che il secondo alunno non vi sia arrivato?
Il problema è stato ampiamente discusso nel corso di ricerche in didattica della matematica grazie a dei colloqui clinici con gli studenti che avevano risolto correttamente un test scritto. In tali colloqui una parte rilevante di allievi, spinti dalle obiezioni mosse appositamente dal ricercatore, aveva cambiato la risposta data nel test nonostante questa fosse corretta. Questa constatazione, in gran parte inaspettata per i ricercatori, ha dato origine e fondatezza al concetto di *robustezza degli apprendimenti*. L'idea di fondo che svilupperemo in seguito è quella che:

- se un allievo risolve correttamente un quesito di un test scritto, non è detto che abbia veramente appreso la materia oggetto di valutazione, o che sia arrivato allo sviluppo delle competenze;

- un allievo che ha superato il test scritto e che, nel corso di un colloquio orale volto a insinuare il dubbio della veridicità di queste risposte, le sa difendere e ampliare, ha acquisito un apprendimento robusto.

L'aggettivo robusto verrà quindi utilizzato per qualificare un "apprendimento che il soggetto ha costruito fino ad assumere piena convinzione della sua correttezza, ciò che gli conferisce atteggiamento e capacità di controbattere a obiezioni avanzate da una terza persona autorevole (insegnante, ricercatore,...)", in linea con la proposta di G. Arrigo trattata nel dettaglio in [9]. In questo senso i test per la verifica della robustezza di un apprendimento si offrono come un interessante strumento per la valutazione della competenza.

Capitolo 3

Il questionario

3.1 La scelta dei quesiti

L'obiettivo principale di questa tesi è verificare il livello di conoscenza del calcolo differenziale e dei primi elementi di analisi negli studenti del 5° anno della Scuola Secondaria di secondo grado e in quelli iscritti al secondo anno del corso di studi in Matematica.
Abbiamo deciso di rivolgerci ai matematici frequentanti il secondo anno, e non il primo, per cercare negli studenti una rielaborazione personale dei concetti che andasse oltre la preparazione ai fini dell'esame di Analisi 1 e che mostrasse l'avvenuto raggiungimento di concetti e competenze. La scelta di somministrare il test a queste diverse tipologie di studenti è stata dettata dall'interesse nell'osservare i gap che mostrano la maturità acquisita dagli studenti di matematica, rispetto ai liceali, e le difficoltà che invece permangono in entrambi i livelli d'istruzione. Già nel progettare il questionario vi era in noi la convinzione che il confronto fra le risoluzioni dei ragazzi del liceo, che avevano appena introdotto questi nuovi concetti a livelli basilari, e i matematici, che avevano deciso di indirizzare il loro percorso di studi in relazione a questa disciplina, mostrando una predisposizione nell'apprendimento della stessa, avrebbe potuto portare a delle interessanti considerazioni sull'apprendimento, al fine di poter valutare anche l'insegnamento impartito.
I costrutti ideati grazie alla ricerca in didattica della matematica sono stati utilizzati per evidenziare comportamenti studiabili e riconoscibili degli studenti nella risoluzione

dei quesiti e una particolare lente, quella dell'*apprendimento robusto* è stata testata sulle risoluzioni migliori per verificare il reale grado di apprendimento degli studenti.
È stato realizzato con queste intenzioni il questionario formato dai seguenti esercizi:

1. Considerare la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$
È derivabile in 0? Motivare la risposta.

2. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$
si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

3. Sia $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

4. Sia
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$
Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$
Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

6. Si dica se esiste, eventualmente calcolandone il valore,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)}.$$
7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

Il questionario è stato somministrato ai seguenti studenti:

- 50 studenti del quinto anno del liceo Scientifico "Città di Piero" di Sansepolcro(Arezzo);
- 83 studenti iscritti al secondo anno del Corso di Laurea in Matematica presso l'università di Bologna.

A tutti gli studenti coinvolti era già stato impartito, nei rispettivi corsi, l'insegnamento degli argomenti oggetto del questionario.
I matematici in particolare, avevano tutti i requisiti necessari allo svolgimento corretto di ogni quesito, data la loro scelta di dedicarsi all'apprendimento della matematica e data l'impostazione ad hoc del corso di studi per rispondere alle esigenze di questo tipo di scelta. Tutte le domande sono state poste in modo da chiedere ai ragazzi una motivazione alle loro risposte, per cercare di capire meglio il tipo di ragionamento utilizzato.
Il tempo assegnato per svolgere il questionario è di 1 ora. Abbiamo deciso di chiedere agli studenti di lasciare un contatto e-mail per poter discutere insieme di particolari e interessanti risposte nel questionario, senza tuttavia obbligare gli studenti a farlo.
La scelta degli esercizi sopra riportati è avvenuta ipotizzando che:

- nel primo esercizio gli studenti più affrettati potrebbero fare soltanto i limiti della derivata della funzione in zero senza aver prima studiato la sua continuità, credendo così la funzione derivabile e contraddicendo una delle nozioni di base dell'analisi secondo la quale derivabilità implica continuità.
- nel secondo esercizio molti potrebbero confondere derivabilità e continuità della derivata; in effetti la funzione proposta è derivabile anche se la sua derivata non è continua.

- nel terzo esercizio è citato il teorema di Weierstrass; la funzione e il dominio proposti non soddisfano le ipotesi di detto teorema; quindi, semplicemente, non è applicabile. La risposta desiderabile sarebbe stata "f ha minimo ma non ha massimo nel dominio assegnato, ciò non ha alcun riferimento col teorema di Weierstrass, non essendo soddisfatte alcune ipotesi".

- nel quarto esercizio gli studenti potrebbero far affidamento alla regola secondo la quale se una funzione ha derivata nulla, allora deve essere costante, non facendo attenzione al dominio della stessa. Questo tipo di errore era già stato commesso alcuni anni fa dagli estensori della seconda prova dell'esame, che in seguito riporteremo.

- nel quinto esercizio gli studenti del secondo anno di Matematica potrebbero concludere che l'insieme sopra definito contenga una sola funzione affidandosi al teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy, facendo poca attenzione al testo.

- nel sesto esercizio gli studenti del liceo che spesso utilizzano la regola di De l'Hopital senza verificarne le ipotesi potrebbero trovare difficoltà nella risoluzione del limite.

- nel settimo esercizio la profondità delle giustificazioni degli studenti mostrerà diversi gradi di rielaborazione personale e la risoluzione prediletta sarà di tipo grafico, pur non essendo questo una risoluzione accettabile. Dato che questo esercizio prevede l'applicazione di regole e teoremi noti, nonché la scelta di una strategia risolutiva ottimale fra le molteplici possibili, si presta più di altri ad un'analisi qualitativa dei diversi tipi di apprendimento descritti nel precedente capitolo.

Analizzeremo ora le risposte degli studenti, quesito per quesito, cercando di individuare eventuali errori ricorrenti e verificando se coincidono con quelli ipotizzati. Sarà anche nostro interesse studiare le risposte che evidenziano particolari abilità di ragionamento e che mostrano che il programma di analisi svolto è stato acquisito in maniera robusta.

3.2 Quesito 1

Il questionario si apre con il seguente quesito:
Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases} .$$

È derivabile in 0? Motivare la risposta.
In questo quesito si chiede ai ragazzi di conoscere il legame tra continuità e derivabilità di una funzione. I ragazzi che risolvono l'esercizio imponendo che valgano le relazioni

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0)$$

non riconoscono la continuità come condizione necessaria per la derivabilità. Dalle risposte di questo quesito si vede che nonostante le relazioni tra continuità e derivabilità vengano più volte sottolineate sia al liceo che all'università, queste restano per gli studenti nozioni "teoriche" e non applicabili negli esercizi.

3.2.1 Il quesito 1 e i matematici

Abbiamo classificato le risposte nelle seguenti tipologie:

- corrette;
- parzialmente corrette;
- errate, che possiamo suddividere in:
  - * chi ha impostato il calcolo dei limiti e della derivata prima di f valutata in zero per dimostrare la derivabilità in zero;
  - * altri tipi di errori "atipici" che vedremo nel dettaglio.

I risultati del quesito 1 sono stati i seguenti:

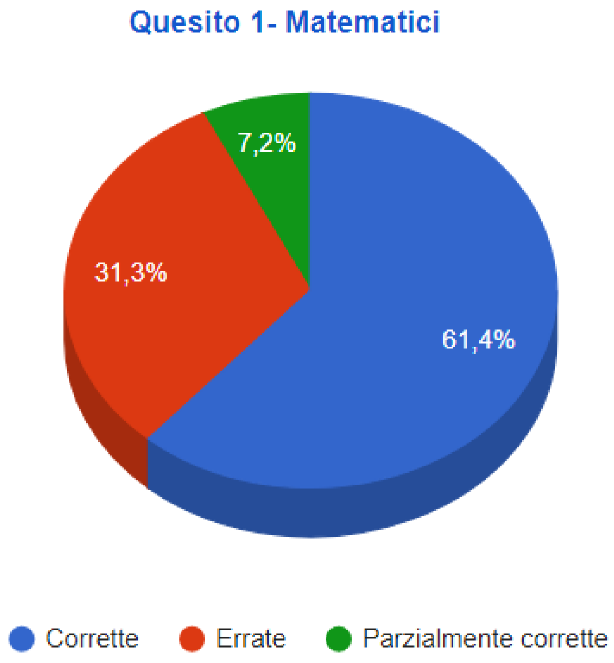
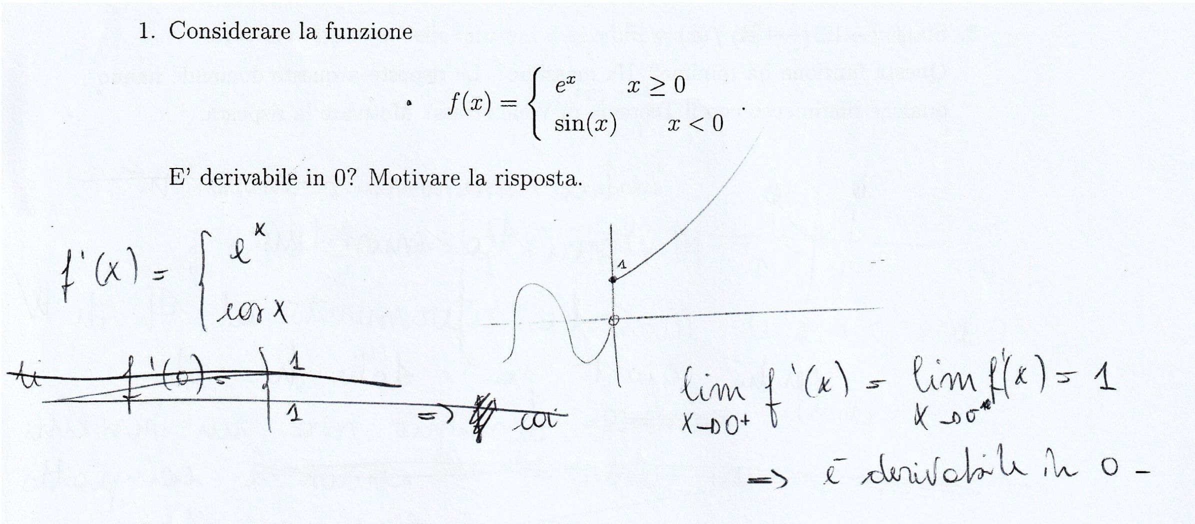


Figura 3.1: Risposte Quesito 1

Sono stati 22 gli studenti che hanno commesso l'errore "standard" di ritenere che basti trovare i limiti della derivata prima in zero e verificare che siano uguali a $f'(0)$ per garantire la derivabilità. Tra questi vorrei riportare lo svolgimento in figura 3.2 di un ragazzo che mi ha gentilmente lasciato la sua e-mail, e che ho potuto contattare.



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x \\ \cos x \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$$

$\Rightarrow$ è derivabile in 0.

Figura 3.2: esempio particolare di risposta errata

Questo svolgimento mi ha colpito perché il ragazzo, nonostante abbia fatto un grafico corretto dell'andamento della funzione e abbia mostrato la presenza di un salto in zero conclude che la funzione è ivi derivabile. Ho trovato questo piuttosto sconcertante perché, come emerso dalla corrispondenza via e-mail, nasconde il fatto che per lo studente universitario una funzione non continua può essere derivabile. Quando ho contattato il ragazzo per chiedergli se fosse stata solo una svista, o se realmente credeva che quella funzione con quel grafico potesse essere derivabile, questi mi ha risposto: "sinceramente ho pensato che fosse sensato...siccome lim dx e lim sx della funzione derivata coincidono in 0 allora la funzione è derivabile"; per poi aggiungere, riguardo al grafico disegnato: "l'ho fatto sì per abitudine, ma comunque l'ho tenuto in considerazione e in quel momento mi sembrava davvero ragionevole pensare che una funzione potesse essere derivabile e non continua."

Ho voluto sottolineare in questo caso la presenza di 4 errori "atipici".

1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

le funzioni continue sono derivabili
f(x) non è continua $\Rightarrow$ non è derivabile.

Figura 3.3: Esempio particolare di risposta errata "atipica"

1. Considerare la funzione

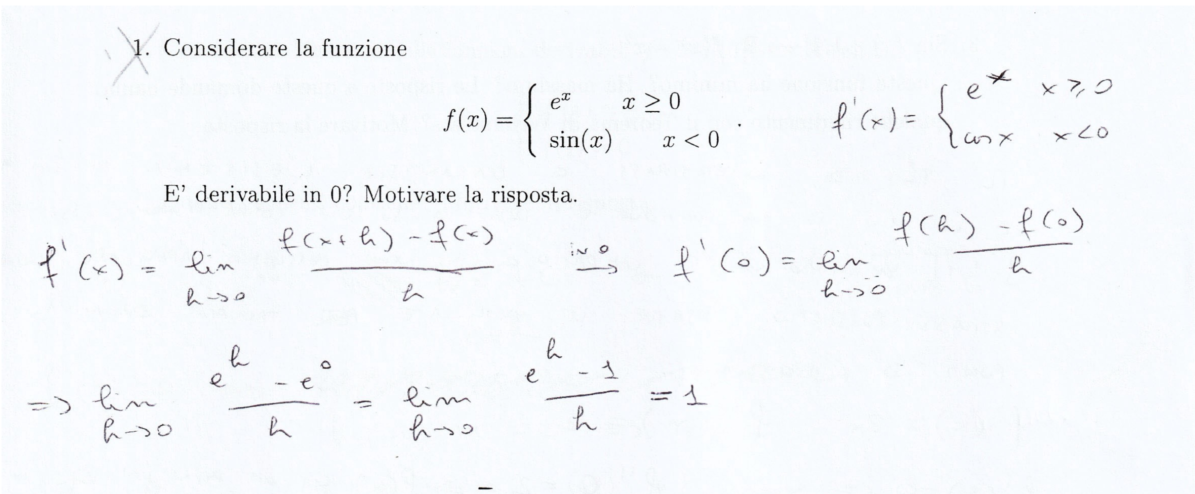
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

È DERIVABILE PERCHÈ LA FUNZIONE È CONTINUA

Figura 3.4: Esempio particolare di risposta errata "atipica"

Il primo che esaminiamo (figura 3.3) presenta la credenza che una funzione continua sia anche derivabile anche se poi, applicando l'implicazione nel senso corretto, riesce a concludere l'esercizio. Anche nella figura 3.4 si manifesta la stessa credenza errata, aggravata dall'aver sostenuto in questo caso che la funzione fosse addirittura continua. Il colloquio con la studentessa in questione ha fatto emergere delle gravi lacune della stessa nelle basi di analisi 1, questa infatti avvalorava ciò scritto in questo modo: " Io avrei detto che era continua per il fatto che...ok cambia la funzione, ma prende tutto l'intervallo". Questo tipo di ragionamento non era stato ipotizzato né per studenti di matematica, né per i liceali, poiché nasconde un apprendimento molto debole delle prime nozioni di continuità, sul quale non si può costruire un apprendimento di livello superiore dei concetti più complessi. In questo caso l'analisi della risposta della studentessa è servita per evidenziare problematiche non ipotizzate in partenza, ma anche per guidare la ragazza nella consapevolezza dei propri errori, ricavando insieme la corretta risoluzione di tutto il questionario.


1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}. \qquad f'(x) = \begin{cases} e^{x} & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

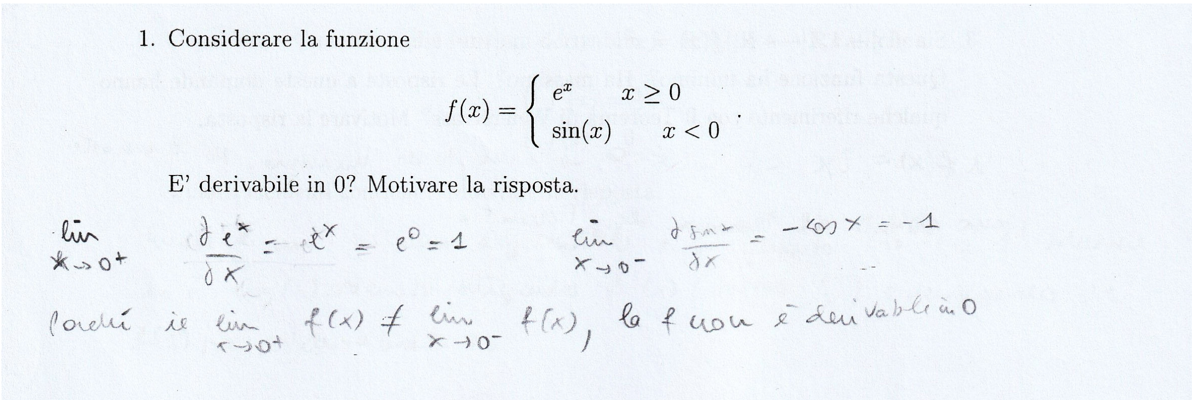
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{\text{in } 0} f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Figura 3.5: Esempio particolare di risposta errata "atipica"

Un terzo errore da me catalogato come "atipico" è quello in cui lo studente si cimenta nel limite del rapporto incrementale e impone che sia uguale a uno, cioè al valore della derivata in zero. Questo ragionamento però non viene portato a termine e manca di una conclusione formale. (figura 3.5)

Infine, l'ultimo errore "atipico" che vediamo in figura 3.6 presenta la stessa impostazione degli errori standard ma ha in più un errore di derivazione di funzione elementare, non ipotizzato nel caso di studenti universitari.



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

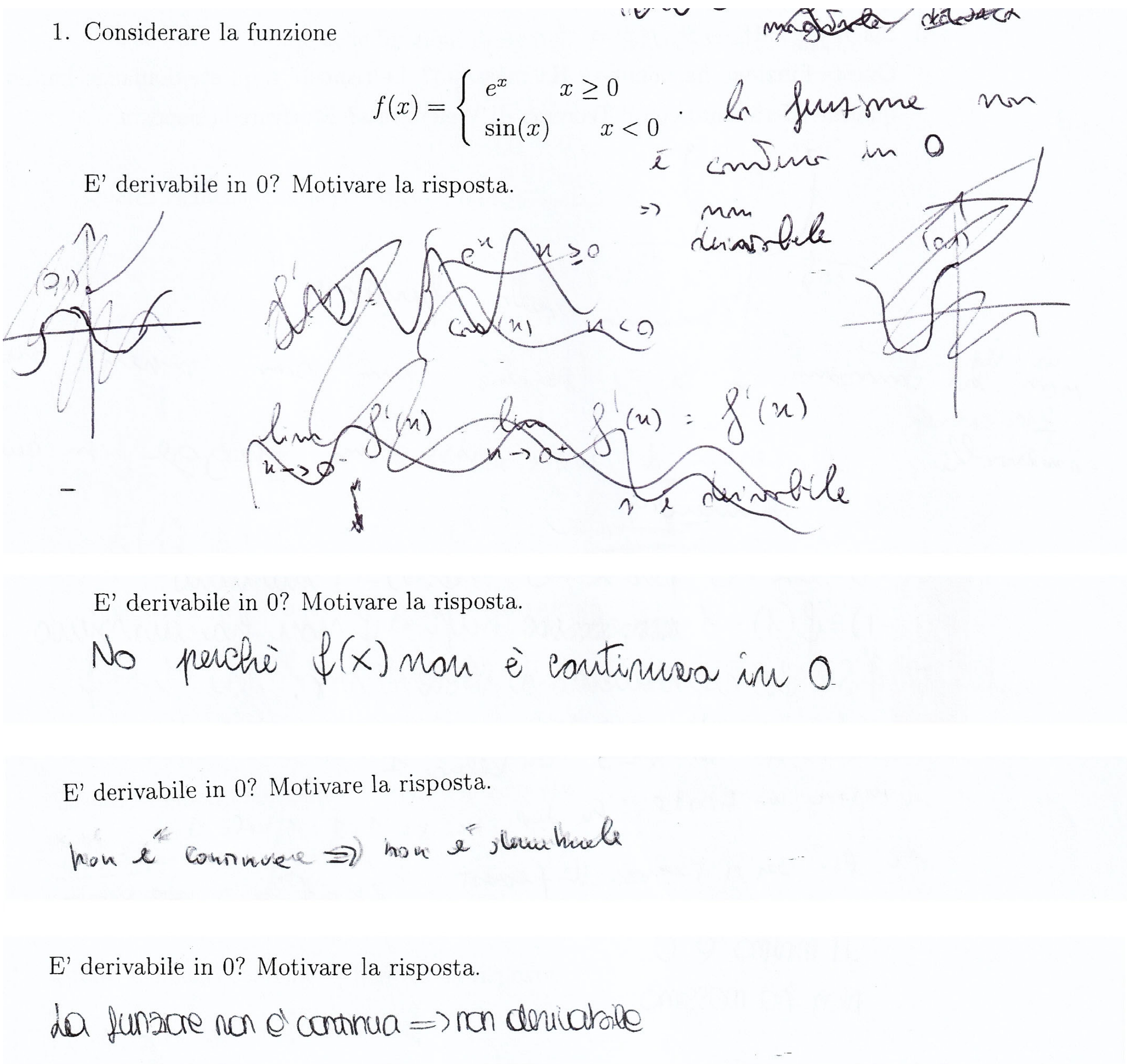
E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x = e^0 = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{\partial \sin x}{\partial x} = -\cos x = -1$$

Poiché il $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$, la f non è derivabile in 0

Figura 3.6: Esempio particolare di risposta errata "atipica"

Ho deciso di non considerare totalmente corrette le seguenti sei risposte, catalogandole come "parzialmente corrette", poiché peccano in mancanza di giustificazione o risultano poco chiare e fraintendibili. Le prime 4 che esaminiamo convengono che la funzione, non essendo continua, non possa essere neanche derivabile. Purtroppo nell'affermare che la funzione non è continua non mostrano nessun passaggio algebrico, né grafico.(figura 3.7)



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

la funzione non è continua in 0 => non derivabile

$f'(x)$ = e^x $x \geq 0$, $\cos(x)$ $x < 0$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x)$ $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'(x)$

è derivabile

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

No perchè f(x) non è continua in 0

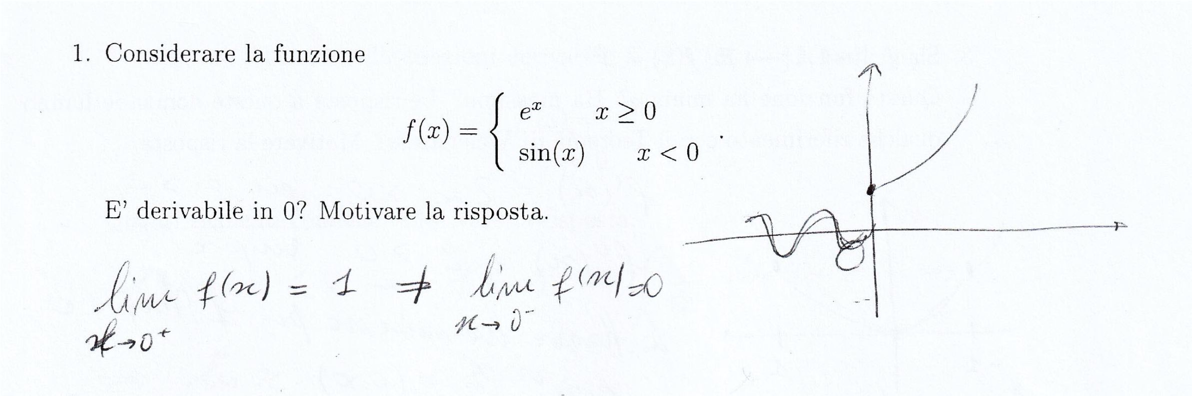
E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

non è continua => non è derivabile

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

la funzione non è continua => non derivabile

Figura 3.7: Esempi particolari di risposte parzialmente corrette



1. Considerare la funzione

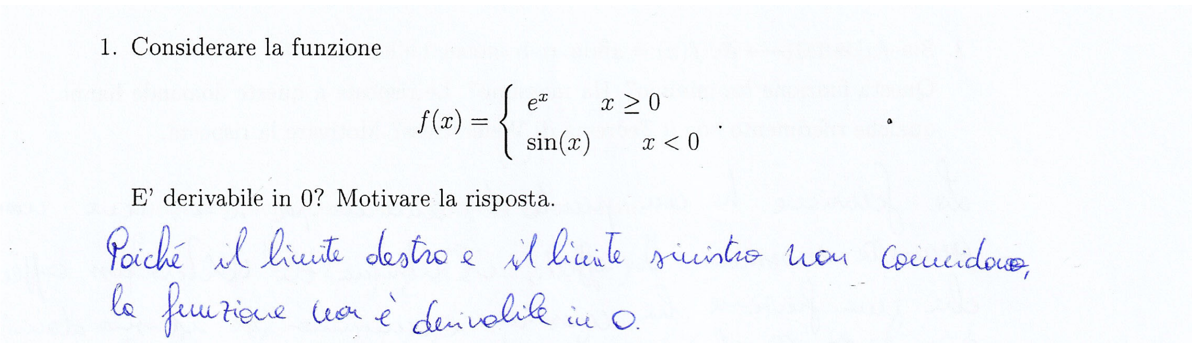
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases} .$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

Figura 3.8: Esempio particolare di risposta parzialmente corretta

Un'altra risoluzione non del tutto corretta è quella che presenta sia il grafico della funzione con discontinuità, sia i limiti della funzione, senza poi concludere alcunché. Quando ho chiesto alla studentessa in questione se questa per lei fosse una risposta chiara lei mi ha risposto : "ho mancato di chiarezza e di conclusione dando per scontato che dimostrando la non-continuità dimostrassi anche la non-derivabilità, presa dalla fretta, non l'ho ribadito a parole." (figura 3.8)
Infine ho catalogato come corretta ma solo parzialmente la risposta di questo studente che non ha specificato, forse volutamente, a quale funzione si stesse riferendo. (figura 3.9)



1. Considerare la funzione

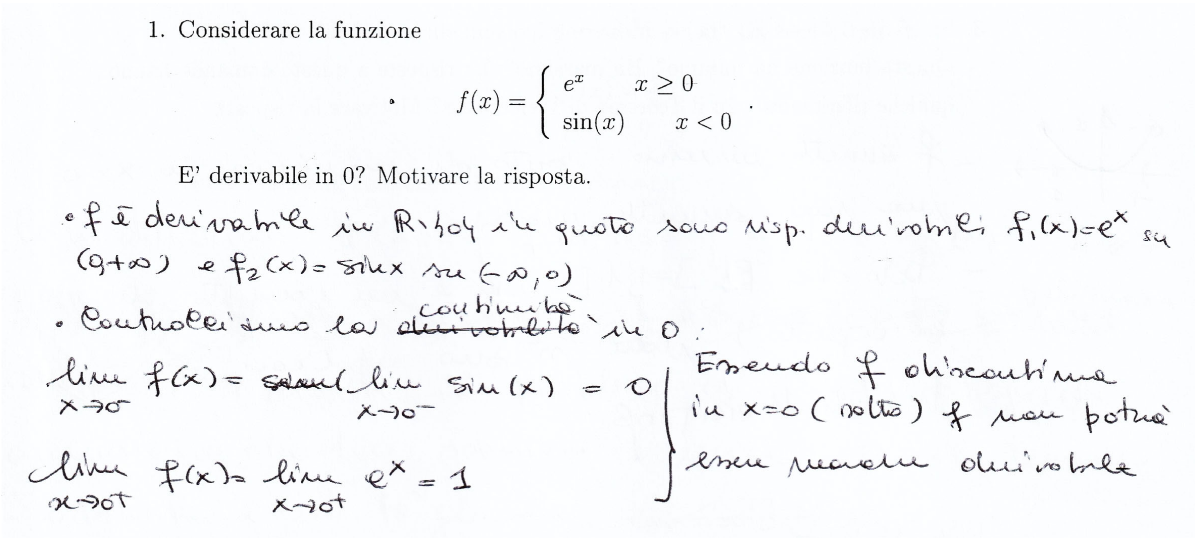
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases} .$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

Poiché il limite destro e il limite sinistro non coincidono, la funzione non è derivabile in 0.

Figura 3.9: Esempio particolare di risposta parzialmente corretta

Tra le 51 risposte corrette degli studenti universitari, ho selezionato le risposte in figura 3.10 come esempi di risposte "esaustive" che ci aspettavamo fossero raggiunte da più della maggioranza degli studenti, ma così non è stato.



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

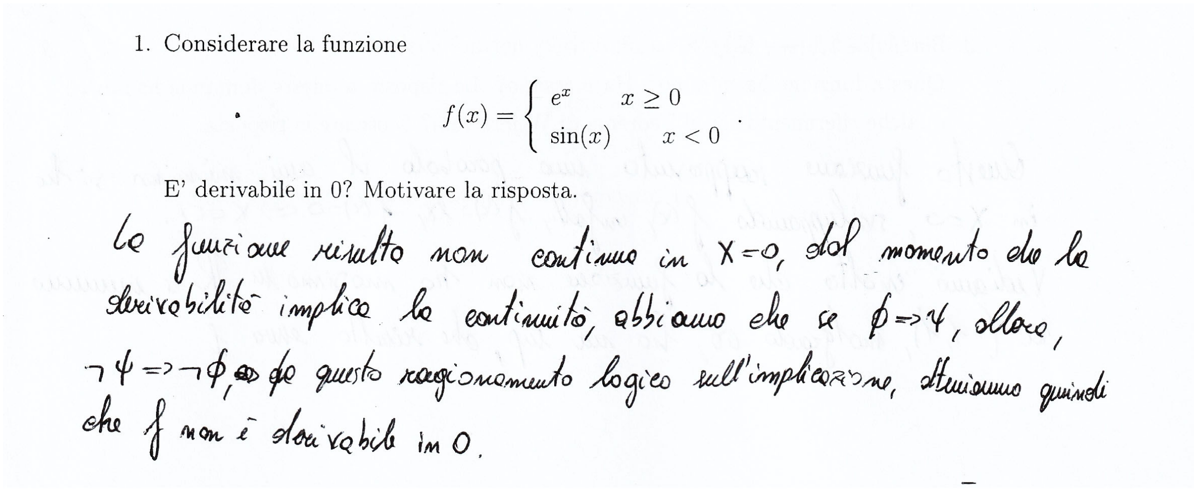
• f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in quanto sono risp. derivabili $f_1(x)=e^x$ su $(0,+\infty)$ e $f_2(x)=\sin x$ su $(-\infty,0)$

• Controlliamo la ~~derivabilità~~ continuità in 0:

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \sin(x) = 0$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^x = 1$

Essendo f discontinua in x=0 (salto) f non potrà essere neanche derivabile



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

La funzione risulta non continua in X=0, dal momento che la derivabilità implica la continuità, abbiamo che se $\phi \Rightarrow \psi$, allora, $\neg\psi \Rightarrow \neg\phi$, da questo ragionamento logico sull'implicazione, otteniamo quindi che f non è derivabile in 0.

Figura 3.10: Esempi di risposte corrette

3.2.2 Il quesito 1 e i liceali

Abbiamo classificato le risposte degli studenti liceali nelle seguenti tipologie:

- corrette;
- errate, che possiamo suddividere in:
  - * chi ha impostato il calcolo dei limiti e della derivata prima di f valutata in zero per dimostrare la derivabilità in zero;

* altri tipi di errori “atipici” che vedremo nel dettaglio.

- omesse.

I risultati del quesito 1 nei liceali sono stati i seguenti:

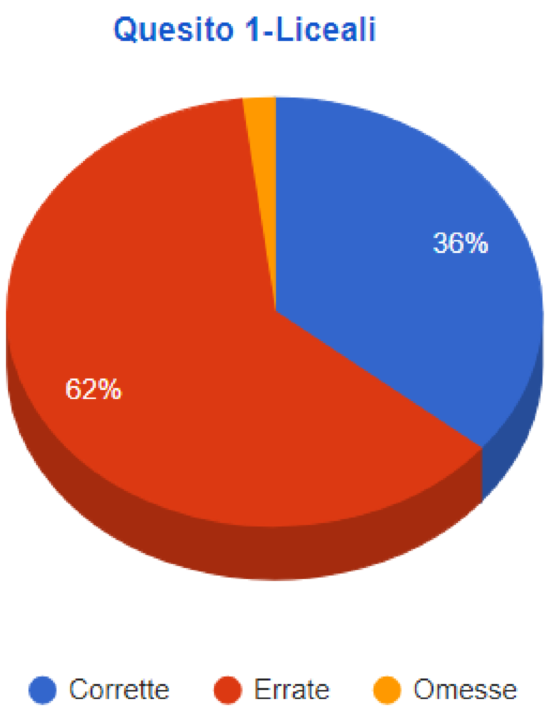
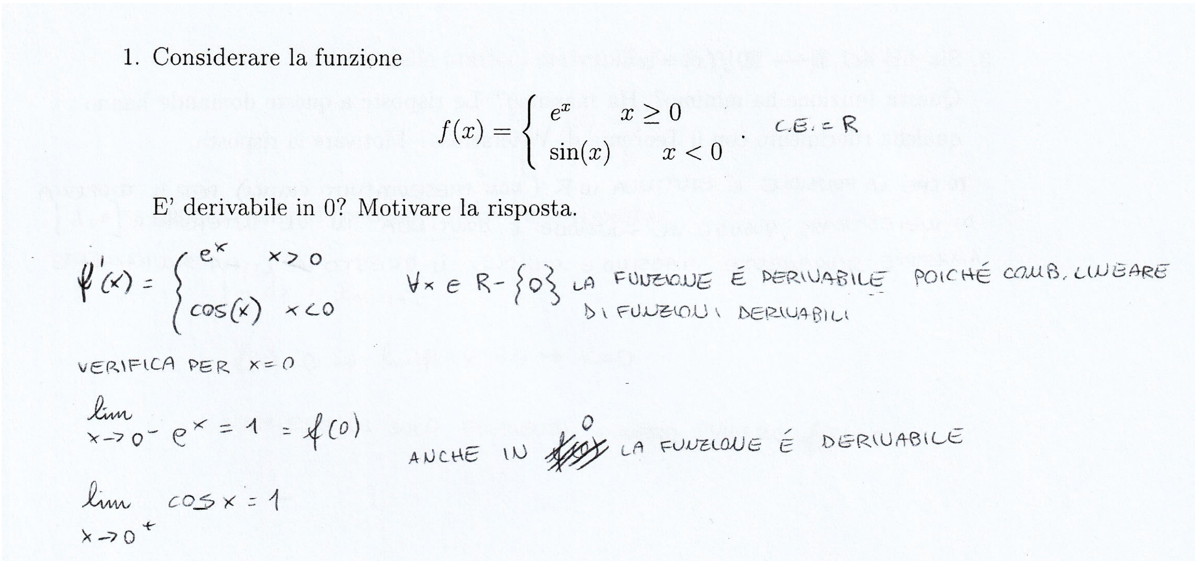


Figura 3.11: Risposte Quesito 1

Sono stati 18 gli studenti che hanno commesso l’errore tipico catalogato sopra di limitarsi a fare i calcoli relativi ai valori di f' in zero. Un esempio può essere quello mostrato in figura 3.12 dove si può anche notare l’utilizzo di espressioni non formalmente corrette (si parla di combinazioni lineari...) per avvalorare il risultato ottenuto.



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases} . \quad C.E. = \mathbb{R}$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ \cos(x) & x < 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ LA FUNZIONE É DERIVABILE POICHÉ COMB. LINEARE DI FUNZIONI DERIVABILI

VERIFICA PER $x = 0$

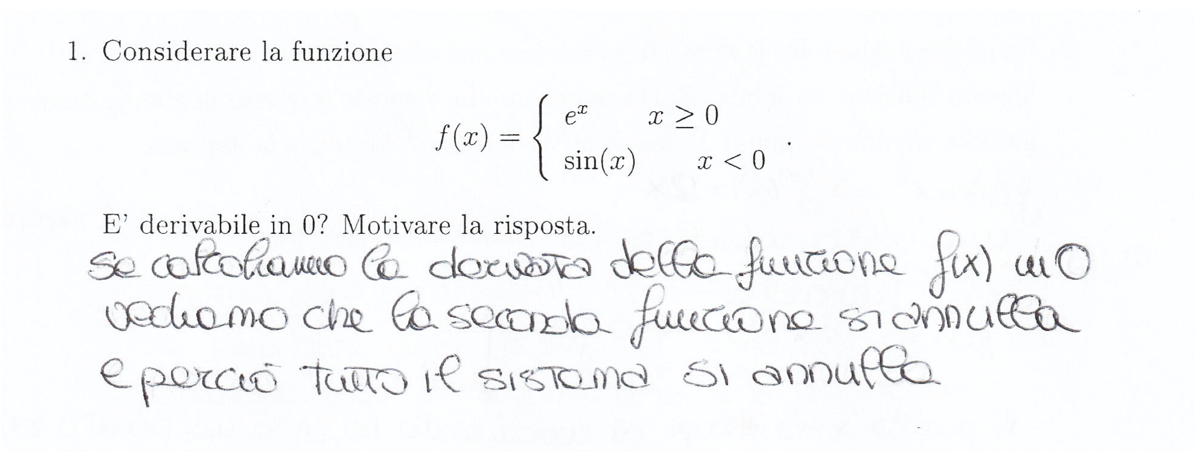
$\lim_{x \to 0^-} e^x = 1 = f(0)$

ANCHE IN $\cancel{f(0)}$ 0 LA FUNZIONE É DERIVABILE

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$

Figura 3.12: Esempio di risposta errata tipica

Proseguendo l'analisi delle risposte errate dei liceali, ho trovato che sono state più variegate di quelle dei Matematici, catalogando ben 13 risposte nella tipologia di "atipiche". Gli errori più comuni fra queste sono di calcolo ($\lim_{x\to 0} \sin(x) = 1$, $\frac{d\sin(x)}{dx} = -\cos(x)$), anche se sono presenti 6 casi di ricerca di giustificazione formale che porta gli studenti a utilizzare nozioni o costrutti non necessari al fine della risoluzione dell'esercizio. Ho scelto di riportare le 4 risoluzioni seguenti come esempi di queste risposte più "fantasiose".



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases} .$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

se calcoliamo la derivata della funzione f(x) in 0 vediamo che la seconda funzione si annulla e perciò tutto il sistema si annulla

Figura 3.13: Esempio di risposta errata atipica

1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \rightarrow \text{e' derivabile} \\ \sin(x) & x < 0 \rightarrow \text{DERIVABILE} \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta. y $-\cos x$ → in 0 → tax.

No → funzione data da funzioni derivabile → $f'(x) = e^x$

ra $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = -\cos x$

e $\cos x$ in 0 ha vale uno e lo tg orizzontale.

Figura 3.14: Esempio di risposta errata atipica

1. Considerare la funzione

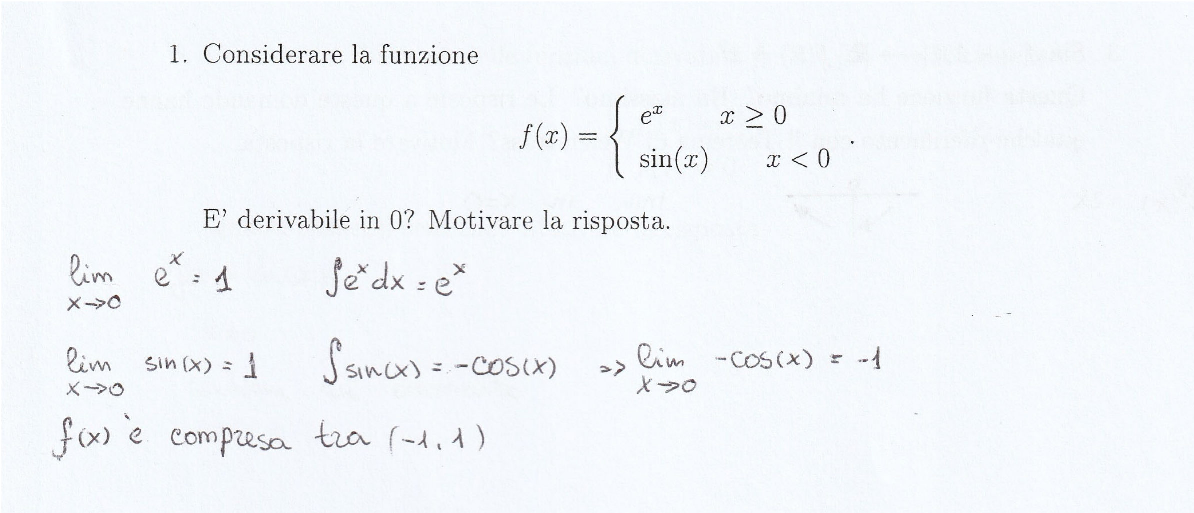
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$$f'(x) \begin{cases} e^x \geq 0 \\ \cos(x) \quad x<0 \end{cases} \qquad x=0 \begin{cases} e^0 \geq 1 = 1 \quad 1 \geq 1 \\ \cos(0) = 1 \quad \underline{x<0} \quad \text{impossibile} \end{cases}$$

non è derivabile in zero

Figura 3.15: Esempio di risposta errata atipica



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$\lim_{x \to 0} e^x = 1 \qquad \int e^x dx = e^x$

$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 1 \qquad \int \sin(x) = -\cos(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} -\cos(x) = -1$

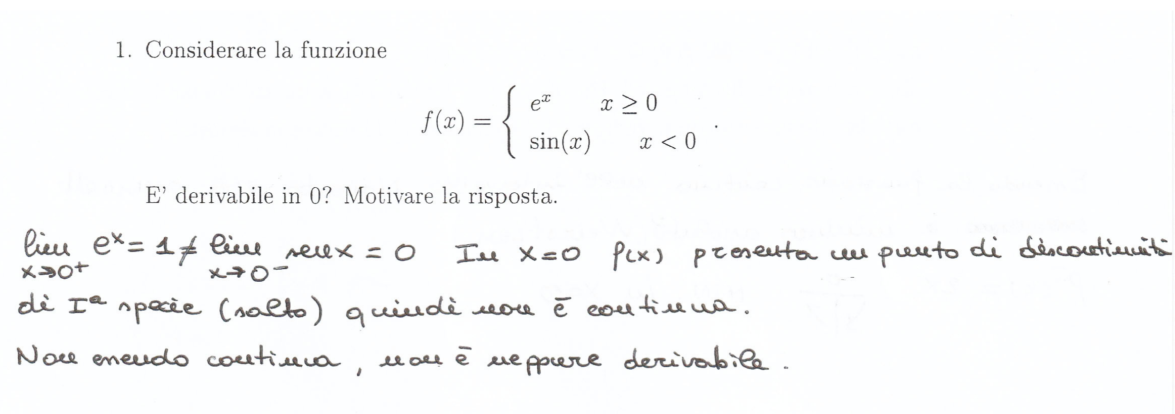
$f(x)$ è compresa tra $(-1, 1)$

Figura 3.16: Esempio di risposta errata atipica

Fra queste risposte errate è da notare la risoluzione in figura 3.16 nella quale la studentessa interpreta il simbolo di parentesi graffa, utilizzato per definire la funzione, come un simbolo procedurale che significa che l'operazione da eseguire in questo caso è l'integrazione. Questa interpretazione della studentessa, evidenziata in seguito anche nella figura 3.31, non è da trascurare, in quanto problemi connessi alla semiotica e, in particolare, alla rappresentazione in matematica, portano a lacune ben più profonde di quelle che possono essere interpetate come semplici "sviste". La celebre formula di didattica della matematica "non c'è noetica senza semiotica" formulata da Duval può essere applicata in via diagnostica per l'analisi del questionario della studentessa, per portare la stessa verso l'apprendimento dei concetti con la consapevolezza del registro necessario per la loro rappresentazione. In un colloquio con la studentessa, questa, dubbiosa, rileggendo la propria risoluzione, ha ammesso: "Sinceramente non mi ricordo il vero motivo del mio procedimento. Capisco che ho sbagliato e mi sto rendendo conto ora di quanto i miei calcoli non abbiano senso e che non c'entrano assolutamente con le richieste dei quesiti". Purtroppo, nonostante l'alunna coscientemente abbia capito di aver sbagliato, non riusciva a trovare la giusta via risolutiva neanche in un secondo momento, avvalorando le ipotesi fatte sopra.

Un'attenzione particolare va rivolta all'unica risposta che è stata catalogata come omessa, che è un esempio in cui l'intero questionario è stato lasciato in bianco. Non

appena lo studente in questione si è accorto che il test consegnatogli riguardava la matematica, questi si è alzato presentando la propria volontà di consegnare senza neanche leggerlo. Sorpresa da questo atteggiamento chiuso e negativo, ho proposto allo studente di leggere almeno gli esercizi due volte e di provare a pensare a qualunque risoluzione gli venisse in mente. Lo studente, una volta tornato al suo posto, ha continuato a non interessarsi al test, per poi consegnarlo alla fine dell'ora di tempo prestabilita esordendo con un "tanto non sono capace" che ha destato in me un profondo senso di sconfitta. Questo è un tipico caso di mancata implicazione personale dello studente nell'apprendimento della matematica, e necessita di un percorso più individualizzato al fine di coinvolgere l'alunno nelle situazioni didattiche, ma anche a-didattiche, scolastiche. Casi come questo sono particolarmente delicati perché possono portare gli insegnanti alla rinuncia del compito di fare applicare gli studenti, degenerando in situazioni di insegnamento/apprendimento passive e non produttive.
Possiamo infine sottolineare che, sebbene i liceali sono risultati peggiori, in media, nella risoluzione di questo quesito, tutte le 18 risposte che ho catalogato come corrette presentano un buon grado di argomentazione e motivazione dei procedimenti utilizzati, come si nota in fiugra 3.17.



1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$\lim_{x \to 0^+} e^x = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0$ In $x=0$ $f(x)$ presenta un punto di discontinuità di I^a specie (salto) quindi non è continua.
Non essendo continua, non è neppure derivabile.

Figura 3.17: Esempio di risposta corretta

3.3 Quesito 2

Il secondo quesito proposto approfondisce il legame tra continuità e derivabilità chiedendo:
Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases} ,$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.
In questo quesito si presenta una funzione derivabile ma non C^1. La derivabilità in zero risulta facilmente se si usa la definizione, mentre non può essere dedotta calcolando $\lim_{x\to 0} f'(x)$, tecnica più consueta, almeno per i liceali, in esercizi di questo tipo.

3.3.1 Il quesito 2 e i matematici

Abbiamo classificato le risposte nelle seguenti tipologie:

- corrette;
- omesse;
- errate, che possiamo suddividere in:
  - * "continua⇒ derivabile";
  - * "derivabile ⇔ C^1".

I risultati sono stati i seguenti:

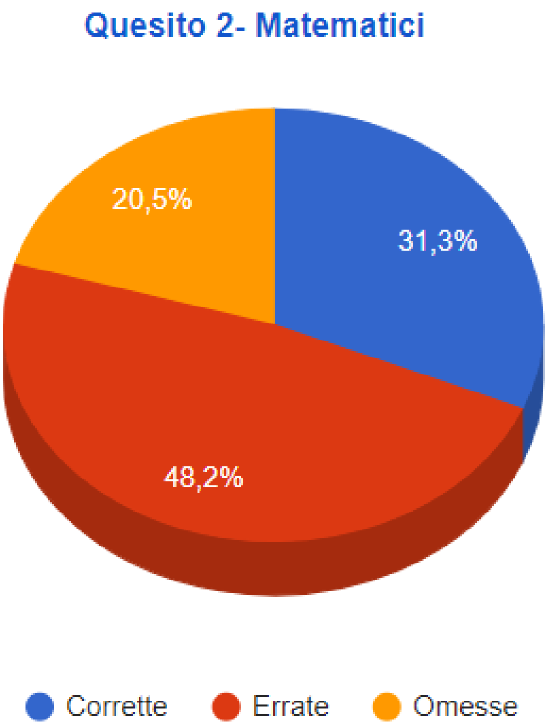
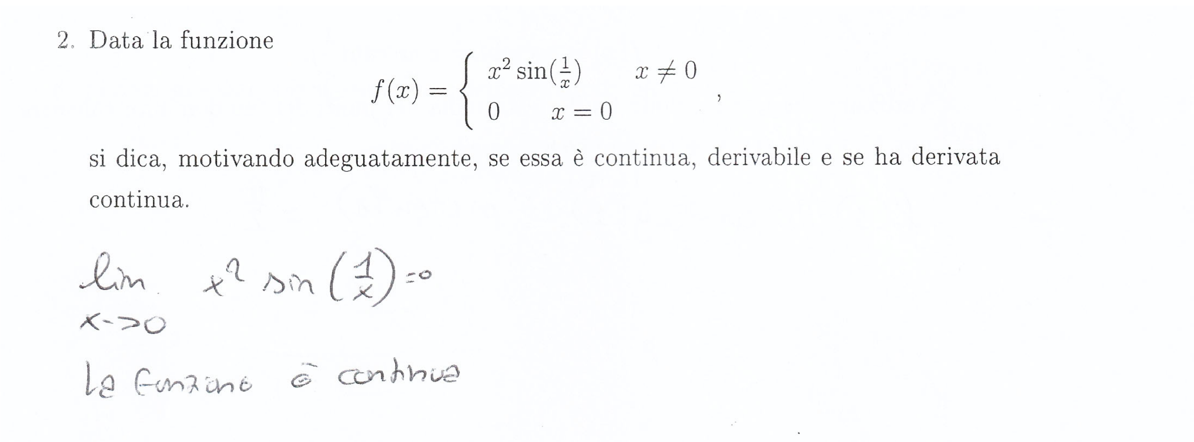


Figura 3.18: Risposte Quesito 2

In questo esercizio ho considerato come “omesse” non solo le schede bianche(3), ma anche quelle di studenti che si fermavano dopo aver studiato la continuità della funzione, per un totale di 17 risposte omesse. Un esempio di tali risposte è datto dalla figura 3.19.



2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

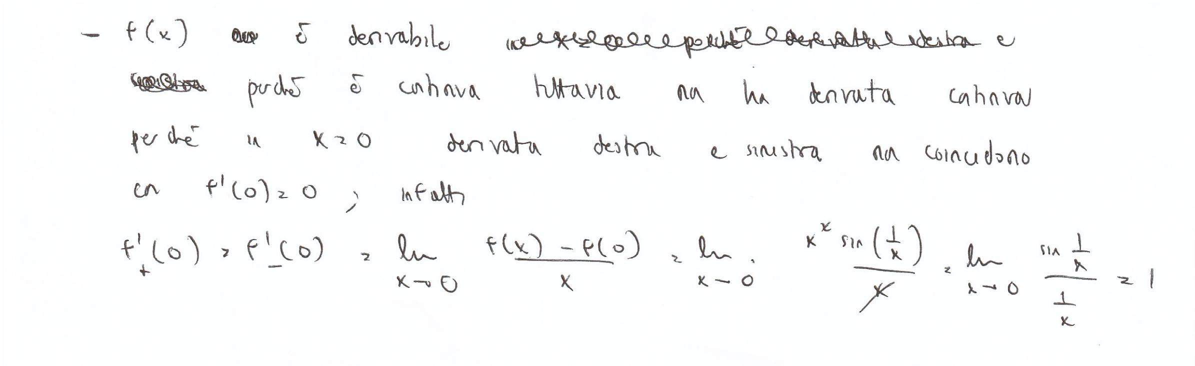
si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

la funzione è continua

Figura 3.19: Esempio di omessa

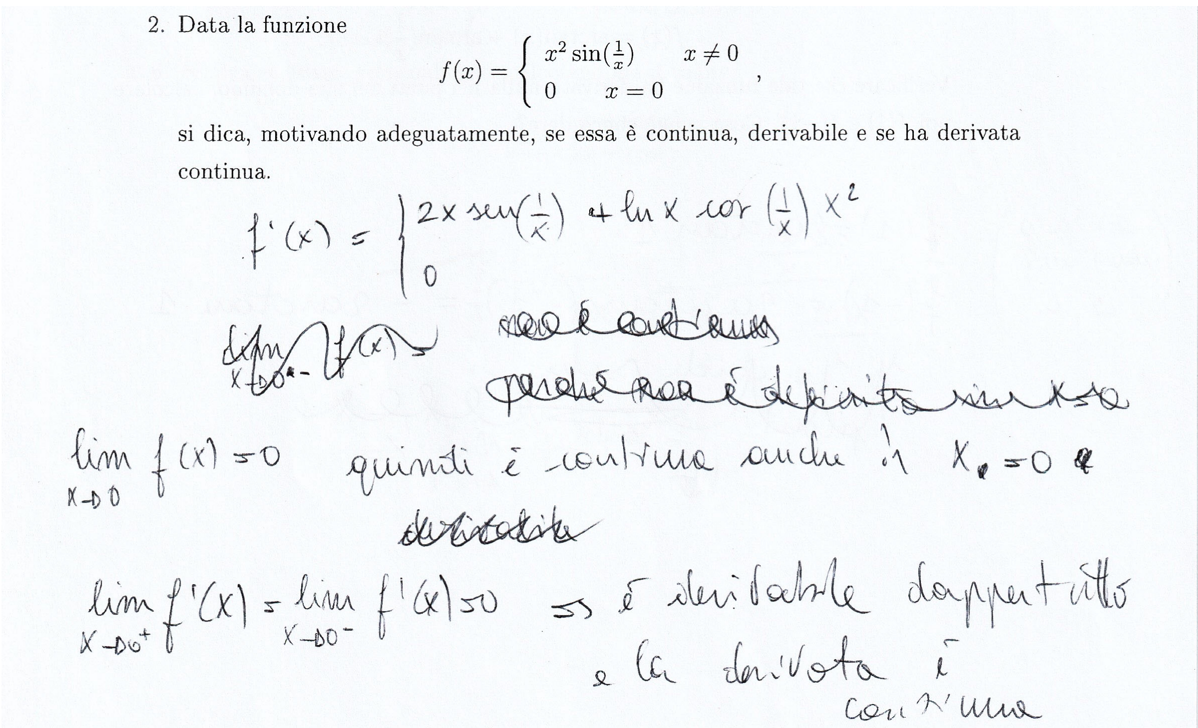
Tra le 40 risposte errate, 12 affermano che la derivabilità della funzione è conseguenza della continuità (figura 3.20) e le restanti non distinguono tra derivabilità e continuità della derivata proponendo spesso soltanto i calcoli del limite destro e sinistro della derivata in zero senza analizzare il limite del rapporto incrementale (figura 3.22). Un caso particolare di questo tipo di errori è dato in figura 3.21 dove lo studente in aggiunta commette il grave errore di considerare $\log(x)$ come derivata di $\frac{1}{x}$, errore che non era stato ipotizzato per studenti di matematica, e che, proprio per questo, ci ha allarmato.



– f(x) è derivabile e perchè è continua tuttavia non ha derivata continua perchè in x = 0 derivata destra e sinistra non coincidono con f'(0) = 0 ; infatti

$$f'_+(0) = f'_-(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

Figura 3.20: Esempio di continua “continua ⇒ derivabile” e altri errori



2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

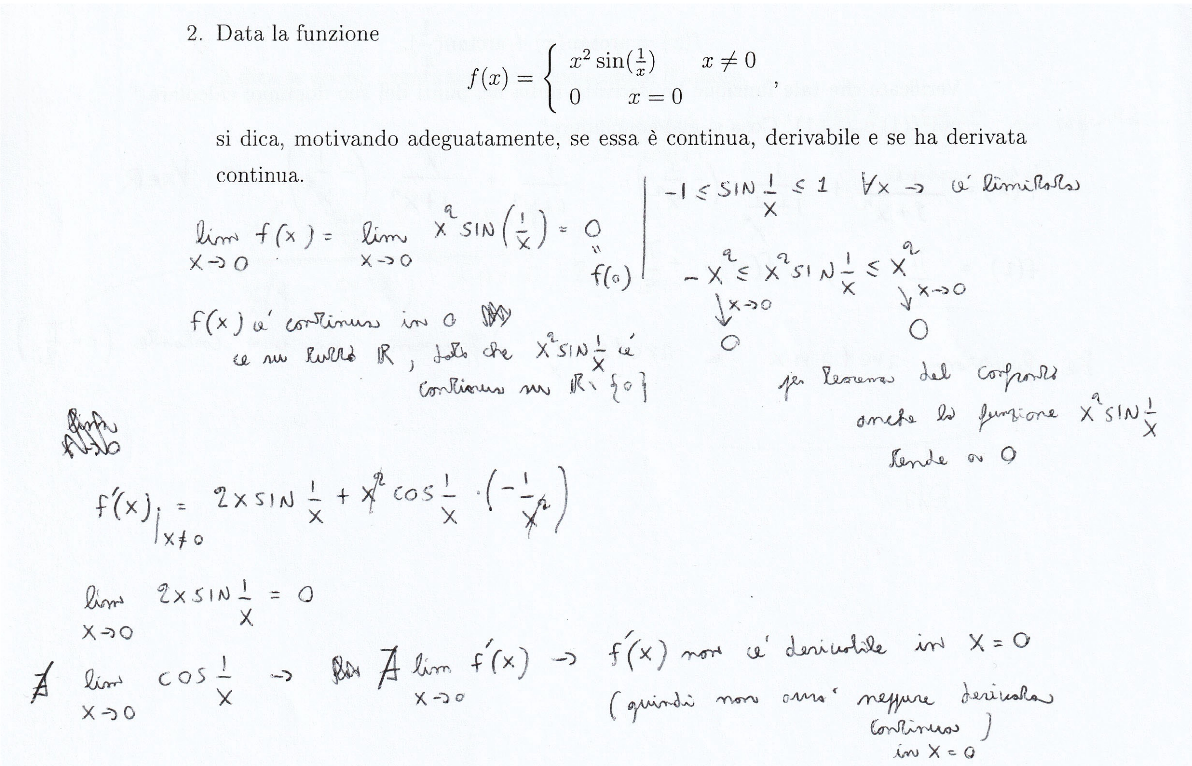
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 \\ 0 \end{cases}$$

~~non è continua perchè non è definita in x=0~~

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ quindi è continua anche in $x_0 = 0$ ~~e derivabile~~

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \Rightarrow$ è derivabile dappertutto e la derivata è continua

Figura 3.21: Esempio di "derivabile $\Leftrightarrow C^1$" e errori gravi di derivazione



2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

$f(x)$ è continua in 0 e su tutto $\mathbb{R}$, dato che $x^2 \sin\frac{1}{x}$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \to$ è limitata

$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$, con $-x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0$ e $x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0$

per teorema del confronto anche la funzione $x^2 \sin\frac{1}{x}$ tende a 0

$f'(x)\big|_{x \neq 0} = 2x \sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$

$\lim_{x \to 0} 2x \sin\frac{1}{x} = 0$

$\nexists \lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \to \nexists \lim_{x \to 0} f'(x) \to f'(x)$ non è derivabile in $x = 0$ (quindi non avrà neppure derivata continua in $x = 0$)

Figura 3.22: Esempio di risposta errata in cui manca il calcolo del limite del rapporto incrementale

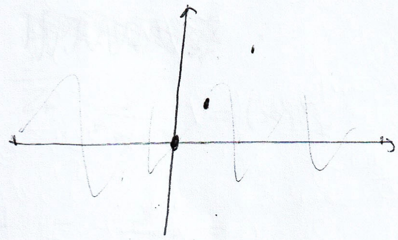
Fra le risposte errate ho individuato anche due casi di ricerca di giustificazione formale che porta gli studenti a utilizzare proposizioni o teoremi non opportuni nel caso del nostro quesito, al fine di ottenere una conclusione a loro avviso "più matematica". (figure 3.23 e 3.24)

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

La funzione è continua, è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.
Non avendo punti angolosi, è anche derivabile in ogni punto del dominio.



Anche la sua derivata è continua, perché somma di funzioni continue.

Figura 3.23: Esempio di ricerca di giustificazione formale

2. Data la funzione

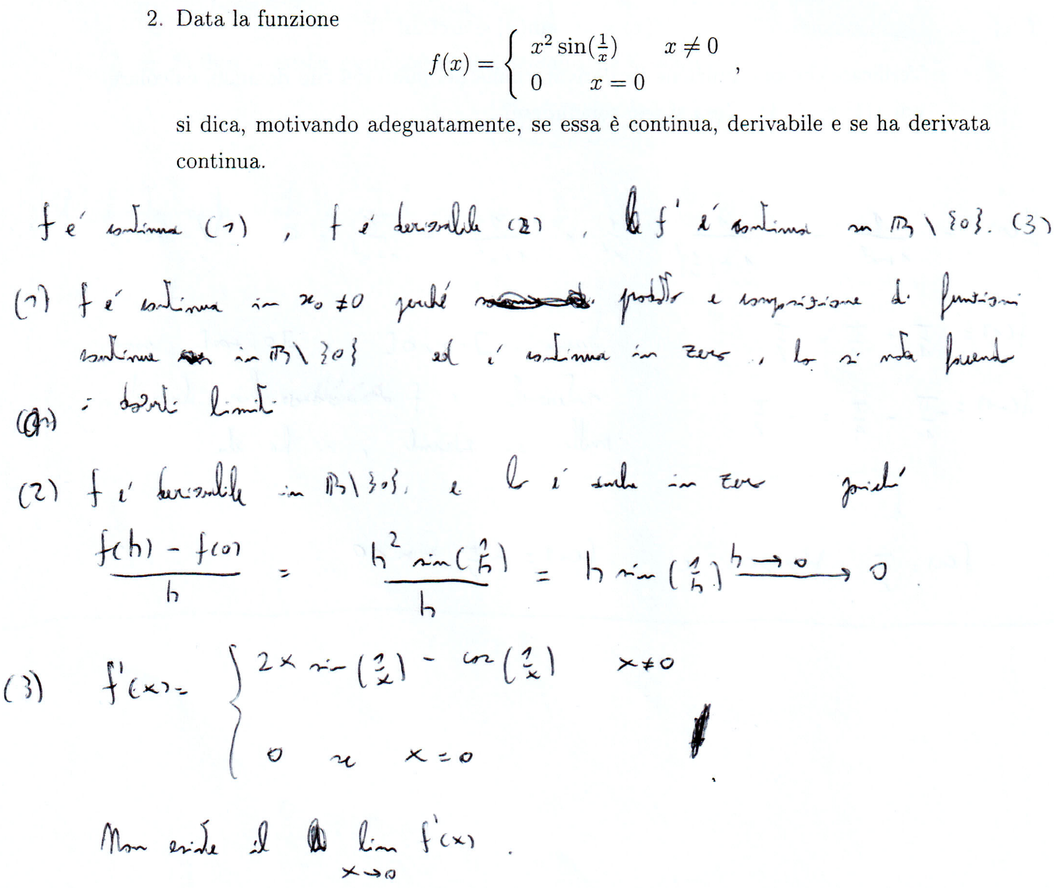
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

Si nota che l'unico punto di discontinuità sarebbe per $x=0$. Ma
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^2 \sin\left(\frac{1}{0}\right) = 0 = f(0)$ quindi f è continua in 0.
- Il dominio è $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ (quindi ha derivata continua) perché per $x=0$ la derivata è 0 quindi per definizione il limite del rapporto incrementale calcolato in $x=0$ è finito, quindi è derivabile in 0. Per quanto riguarda gli altri punti di $\mathbb{R}$, f è il prodotto della funzione x^2 con $\sin(\frac{1}{x})$ a sua volta composizione di $\sin$ e $\frac{1}{x}$. Sono tutte funzioni continue e derivabili e con derivate continue quindi per alcuni teoremi la composizione e il prodotto fra funzioni mantengono le stesse proprietà

Figura 3.24: Esempio di ricerca di giustificazione formale

Tra le risposte corrette ho infine selezionato la risposta in figura 3.25 come esempio di risposta esaustiva.



2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

f è continua (1), f è derivabile (2), ~~ma~~ f' è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (3)

(1) f è continua in $x_0 \neq 0$ perché prodotto e composizione di funzioni continue in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è continua in zero, lo si nota facendo i dovuti limiti

(2) f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e lo è anche in zero poiché

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} = h \sin(\frac{1}{h}) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

(3) $$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Non esiste il $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

Figura 3.25: Esempio di risposta corretta

3.3.2 Il quesito 2 e i liceali

Abbiamo classificato le risposte degli studenti liceali nelle seguenti tipologie:

- errate, che possiamo suddividere in:
  - * "continua⇒ derivabile";
  - * "derivabile ⇔ C^1";
  - * altre risoluzioni atipiche.
- omesse.

I risultati del quesito 2 nei liceali sono stati i seguenti:

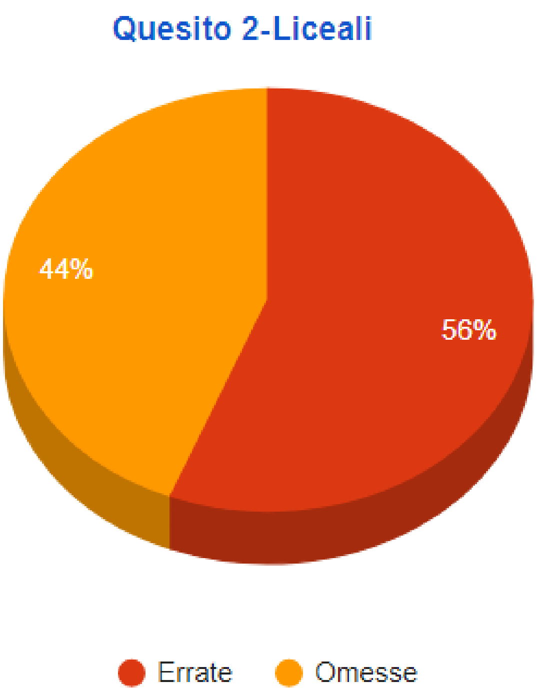
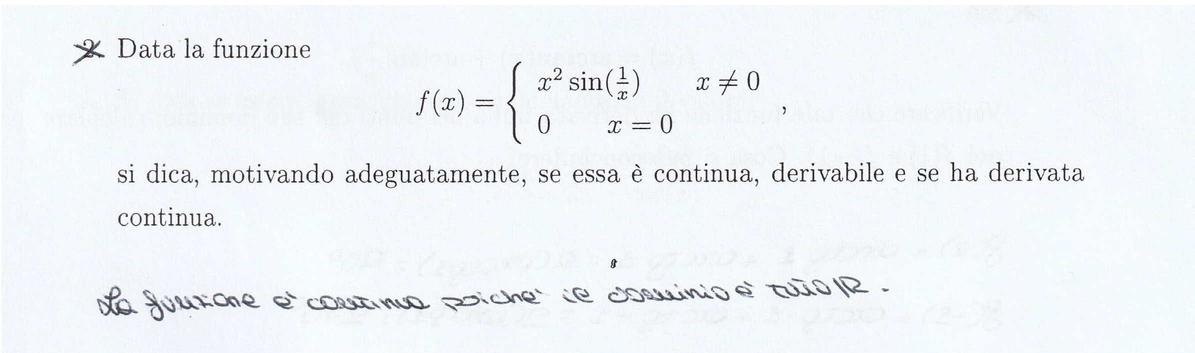


Figura 3.26: Risposte Quesito 2

Come per i matematici, in questo esercizio ho considerato come "omesse" non solo le schede bianche(2), ma anche quelle che presentavano soltano alcuni calcoli relativi alla continuità (20 schede). Un esempio di tali risposte è dato dalla figura 3.27.



Data la funzione

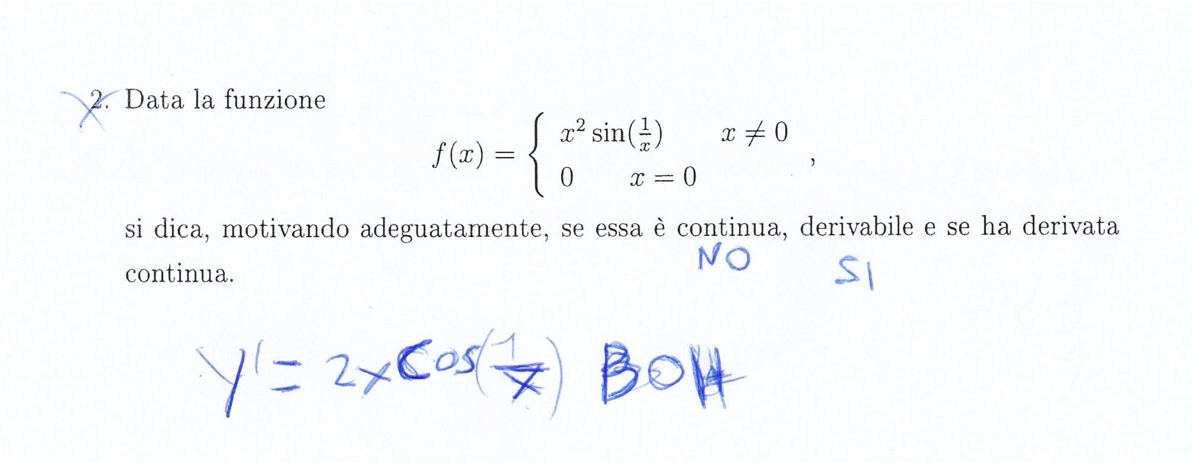
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

La funzione è continua poichè il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Figura 3.27: Esempio di omessa

Tra le 28 risposte errate, nessuna presenta il calcolo del rapporto incrementale per lo studio della derivabilità, 4 presentano la convinzione che basta dimostrare la continuità della funzione f per avere di conseguenza anche la sua derivabilità e 5 ritengono che la derivabilità è indistinguibile dall'essere C^1. Nelle risposte dei liceali sono stati trovati molti più errori di calcolo nella derivazione e, ancora una volta, molte più risposte atipiche, come quelle presentate di seguito. Si può osservare che le figure 3.28, 3.29 e 3.30 contengono gravi errori di derivazione della funzione proposta, mentre la figura 3.31 presenta un interpretazione errata del simbolo parentesi graffa, già esaminata nella precedente sezione.


2. Data la funzione

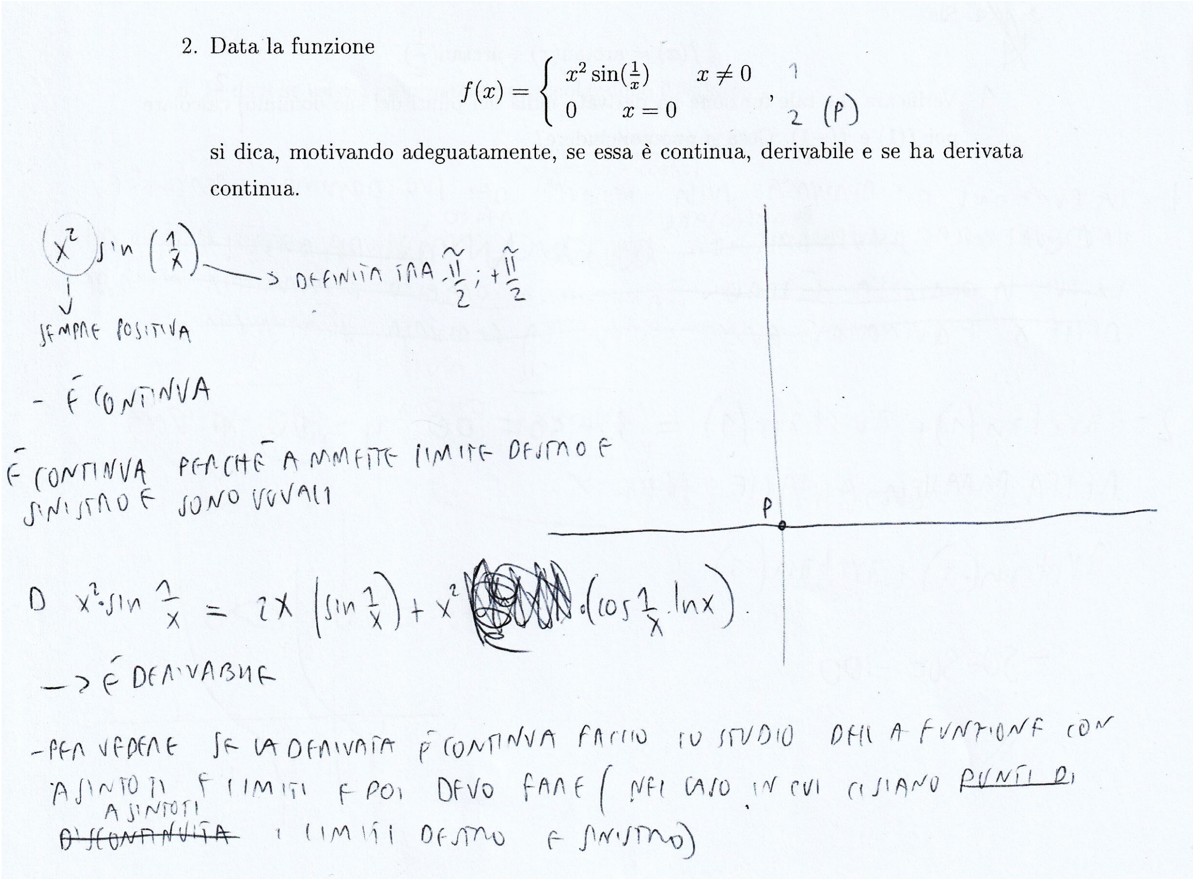
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

NO SI

$y' = 2x\cos(\frac{1}{x})$ BOH

Figura 3.28: Esempio di errata "atipica"



2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 1 \\ 2\ (P) \end{matrix}$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ → DEFINITA FRA $-\frac{\pi}{2}$; $+\frac{\pi}{2}$

SEMPRE POSITIVA

- É CONTINUA

É CONTINUA PERCHÉ AMMETTE LIMITE DESTRO E SINISTRO E SONO UGUALI

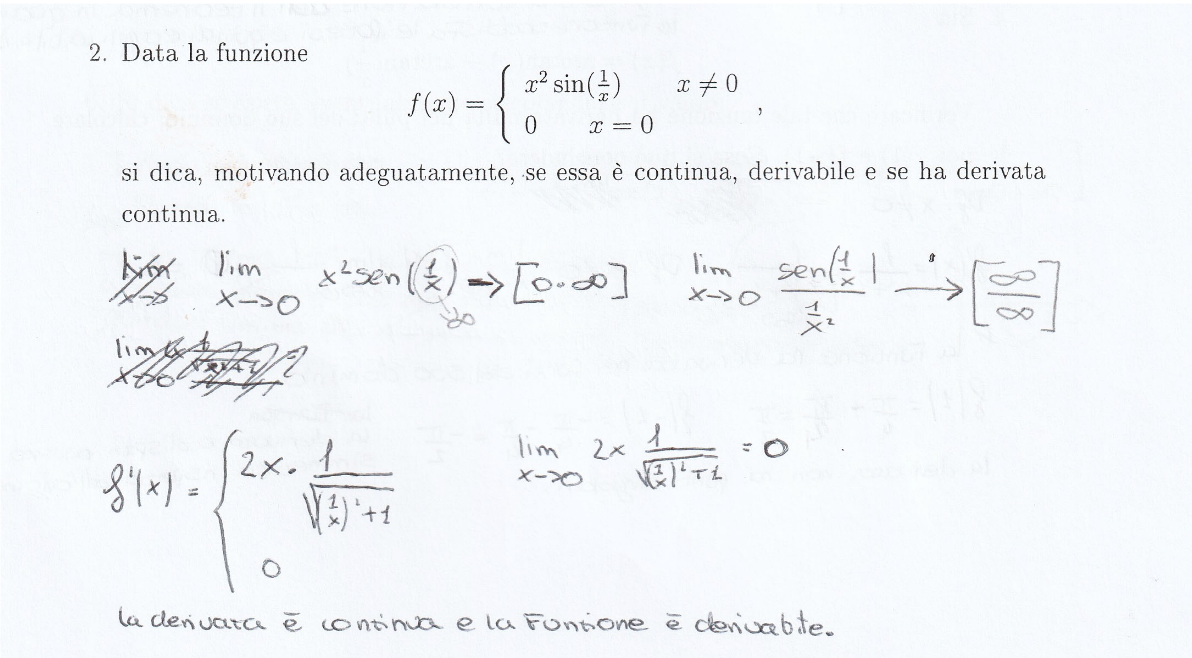
P

$D\ x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = 2x\left(\sin\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(\cos\frac{1}{x} \cdot \ln x\right)$.

→ É DERIVABILE

- PER VEDERE SE LA DERIVATA É CONTINUA FACCIO LO STUDIO DELLA FUNZIONE CON ASINTOTI E LIMITI E POI DEVO FARE (NEL CASO IN CUI CI SIANO PUNTI DI ASINTOTI ~~DISCONTINUITÀ~~ I LIMITI DESTRO E SINISTRO)

Figura 3.29: Esempio di errata "atipica"



2. Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},$$

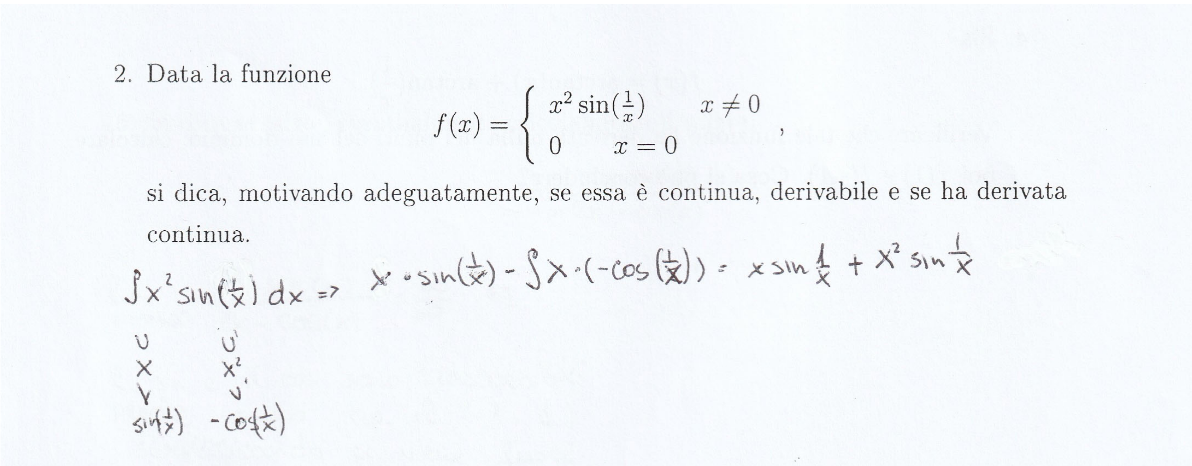
si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$\lim_{x\to 0} x^2 sen(\frac{1}{x}) \to [0\cdot\infty]$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{sen(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} \longrightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{x})^2+1}}\\ 0\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} 2x\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{x})^2+1}}=0$$

la derivata è continua e la Funzione è derivabile.

Figura 3.30: Esempio di errata “atipica”



2. Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$\int x^2\sin(\frac{1}{x})\,dx \Rightarrow x\cdot\sin(\frac{1}{x}) - \int x\cdot(-\cos(\frac{1}{x})) = x\sin\frac{1}{x} + x^2\sin\frac{1}{x}$

$u \quad u'$

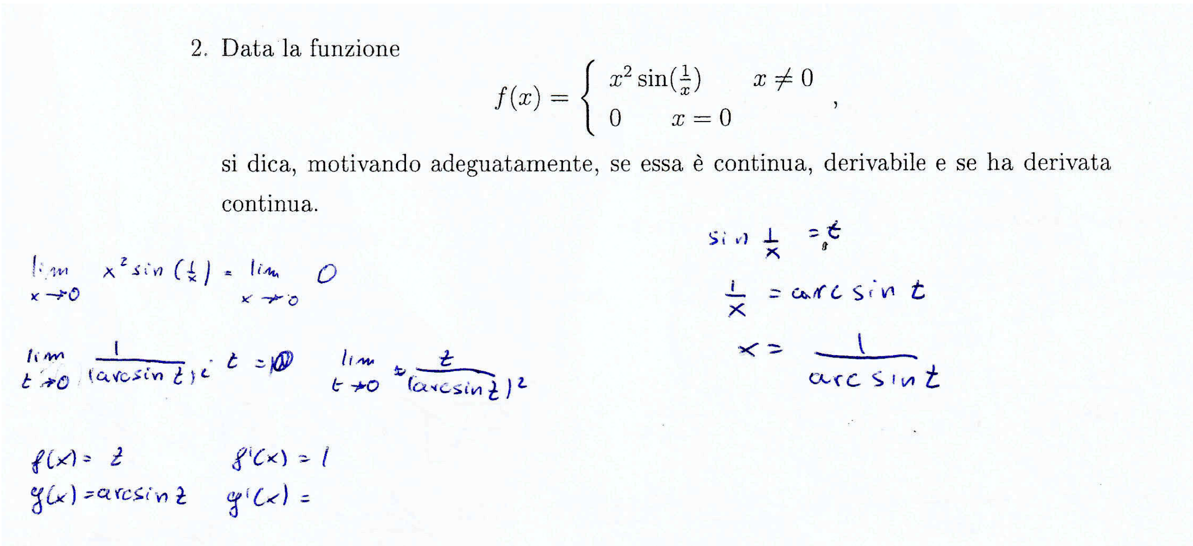
$x \quad x^2$

$v \quad v'$

$\sin(\frac{1}{x}) \quad -\cos(\frac{1}{x})$

Figura 3.31: Esempio di errata “atipica”

Un discorso a parte va fatto per il tentativo di risoluzione in figura 3.32 nel quale lo studente imposta un cambio di variabili ma, come conseguenza, complica la risoluzione perdendosi in inutili calcoli. Dopo aver chiesto allo studente in questione come mai avesse messo in pratica questo ragionamento non standard, questi mi ha risposto: “per comodità...avevo imparato le formule con la x e se mi trovavo con $1/x$ o qualsiasi altra cosa diversa da x mi metteva in difficoltà. Con il cambio di variabile mi sento più tranquillo." Cercando di capire più a fondo come mai lo studente non avesse portato a termine la propria scelta algoritmica, egli si è confidato: "quello è un problema che ho avuto sempre...parto con il primo ragionamento che ho in mente...poi spesso diventa contorto e quindi faccio un sacco di errori." La sincerità dello studente in questo caso ha evidenziato una credenza negativa riguardante la propria attitudine nei confronti degli esercizi matematici, che è per lo studente un vero e proprio "problema". Credenze come questa possono non essere esplicite e nascondersi dietro errori che a prima vista potrebbero essere considerati di distrazione; è proprio in casi come questo che non sono sufficienti metodologie curative e che l'azione dell'insegnante deve essere di tipo diagnostico.



2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0} 0$

$\sin \frac{1}{x} = t$

$\frac{1}{x} = \arcsin t$

$x = \frac{1}{\arcsin t}$

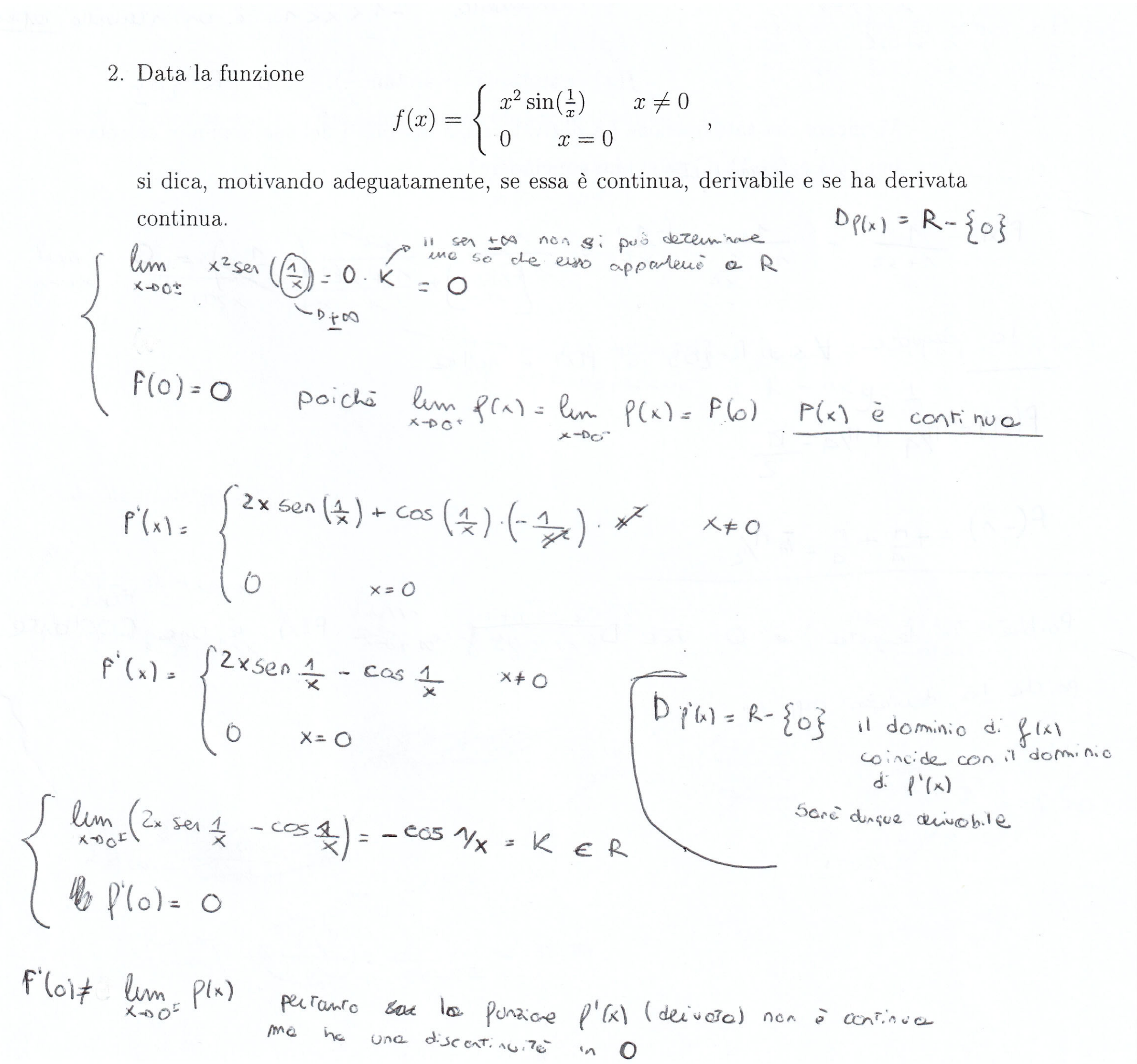
$\lim_{t \to 0} \frac{1}{(\arcsin t)^2} \cdot t = 0$ $\quad \lim_{t \to 0} \frac{t}{(\arcsin t)^2}$

$f(x) = t$ $\quad f'(x) = 1$

$g(x) = \arcsin t$ $\quad g'(x) =$

Figura 3.32: Esempio di errata "atipica"

In seguito ho riportato anche la risoluzione di uno tra i liceali che è risultato tra i più brillanti, per mostrare che anche per questo ragazzo è stato problematico determinare la derivabilità della funzione, a causa della moltitudine di esercizi che si è abituati a fare nei quali la derivabilità si trova facendo il limite delle derivate da destra e sinistra, abitudine sconveniente in questo caso.



2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$D_{f(x)} = R - \{0\}$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^\pm} x^2 \operatorname{sen}\left(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to \pm\infty}\right) = 0 \cdot K = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

il sen $\pm\infty$ non si può determinare uno so che esso appartenè a R

poichè $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ f(x) è continua

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) \cdot \cancel{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$D_{f'(x)} = R - \{0\}$ il dominio di f(x) coincide con il dominio di f'(x)

Sarà dunque derivabile

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^\pm} \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = -\cos 1/x = K \in R \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

$f'(0) \neq \lim_{x \to 0^\pm} f(x)$ pertanto la funzione f'(x) (derivata) non è continua ma ha una discontinuità in 0

Figura 3.33: Esempio di errata "atipica"

3.4 Quesito 3

Il questionario prosegue con il seguente quesito:

Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

Per rispondere a questo quesito i ragazzi devono fare attenzione ai dettagli, come ad esempio il fatto che l'intervallo di definizione di f sia aperto. Nel formulare il quesito avevamo ipotizzato che gli studenti si sarebbero cimentati nel calcolo della derivata di f per poi imporre ad $f'(x)$ la condizione di uguaglianza a zero. Ciò avrebbe permesso agli studenti di trovare il minimo della funzione e di concludere l'esercizio, dato che gli estremi -1 e 1 erano esclusi dal dominio di definizione di f. La richiesta di valutare se il teorema di Weierstrass potesse essere collegato alle risposte con le domande è stata introdotta per confondere gli studenti, cercando di deviarli verso la conclusione errata dell'esistenza del massimo. Questo tipo di risoluzione è stata trovata in entrambi i livelli d'istruzione e mostra come gli studenti siano portati ad utilizzare i dati (in questo caso un teorema) citati nel testo di un esercizio, nonostante questi siano superflui nella risoluzione. In didattica della matematica questa pratica comune degli studenti è stata catalogata come clausola del contratto didattico e porta il nome di "*effetto età del capitano*".

3.4.1 Il quesito 3 e i matematici

Abbiamo classificato le risposte nelle seguenti tipologie:

- corrette;
- errate, che possiamo suddividere in:
    * chi utilizza il teorema di Weierstrass per dimostrare che esite il massimo;
    * altri tipi di errori "atipici" che vedremo nel dettaglio.

I risultati del quesito 3 nei matematici sono stati i seguenti:

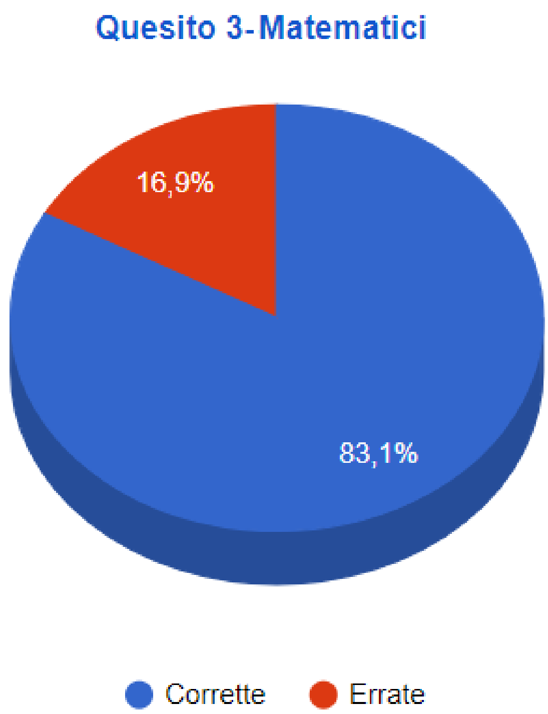
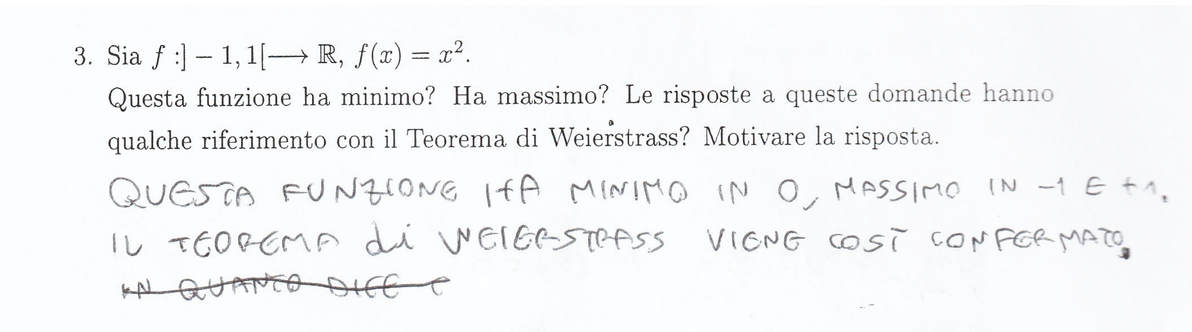


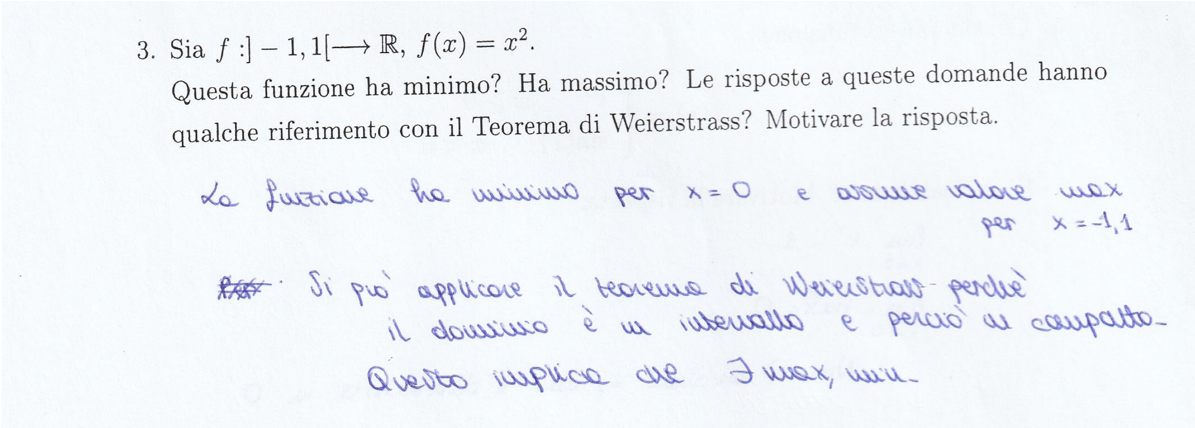
Figura 3.34: Risposte Quesito 3

Tra le 14 risposte errate, 5 affermano che si può applicare il teorema di Weierstrass sia per mostrare l'esistenza del minimo che quella del massimo. Ne sono esempi le figure 3.35, 3.35, 3.37 e 3.38.


3. Sia $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

QUESTA FUNZIONE HA MINIMO IN 0, MASSIMO IN -1 E $+1$. IL TEOREMA di WEIERSTRASS VIENE COSÌ CONFERMATO.
~~IN QUANTO DICE C~~

Figura 3.35: Esempio di applicazione errata del teorema di Weierstrass

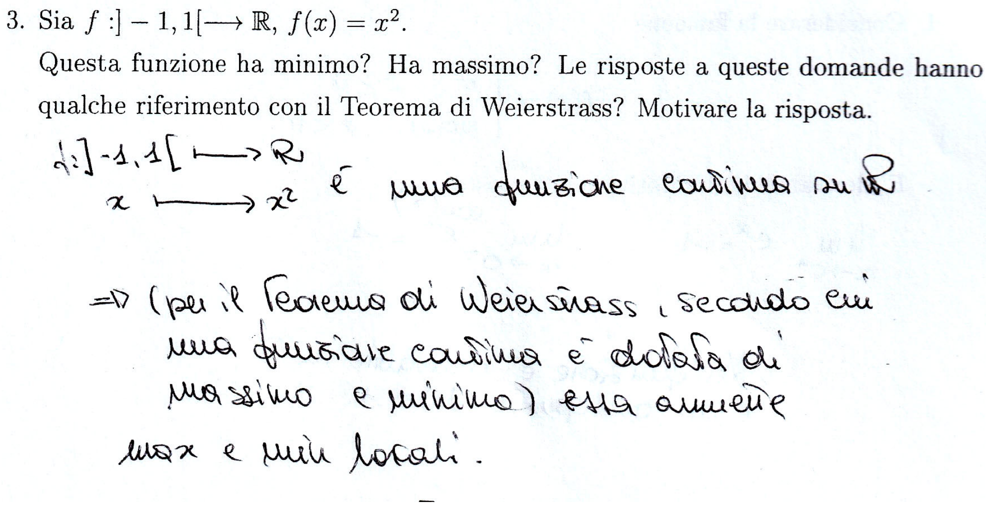


3. Sia $f:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

La funzione ha minimo per $x = 0$ e assume valore max per $x = -1, 1$

~~Poi~~ Si può applicare il teorema di Weierstrass perchè il dominio è un intervallo e perciò un compatto. Questo implica che $\exists$ max, min.

Figura 3.36: Esempio di applicazione errata del teorema di Weierstrass

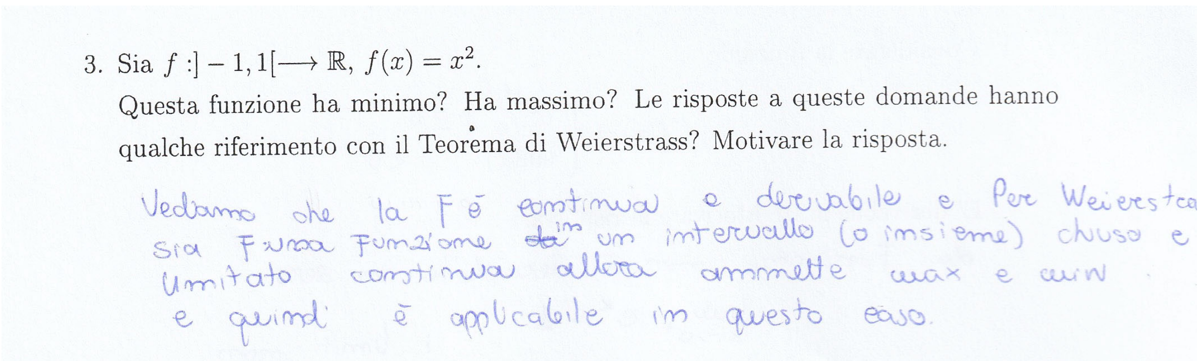


3. Sia $f:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$f:]-1,1[\longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (per il Teorema di Weierstrass, secondo cui una funzione continua è dotata di massimo e minimo) essa ammette max e min locali.

Figura 3.37: Esempio di applicazione errata del teorema di Weierstrass

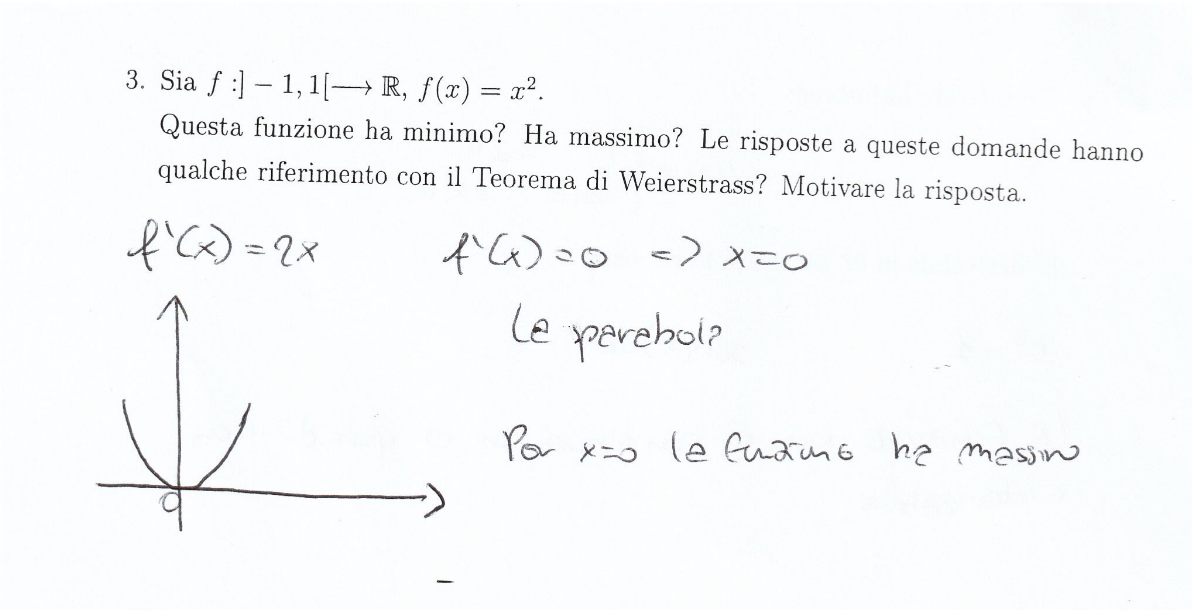


3. Sia $f:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

Vediamo che la F è continua e derivabile e Per Weierstrass sia F una Funzione ~~da~~ in un intervallo (o insieme) chiuso e limitato continua allora ammette max e min e quindi è applicabile in questo caso.

Figura 3.38: Esempio di applicazione errata del teorema di Weierstrass

Le restanti risposte errate si differenziano nelle conclusioni che traggono dal teorema di Weierstrass o nei calcoli effettuati, mostrando scarsa attenzione ai dati dell'esercizio. Purtroppo questi quesiti non presentavano un contatto cui fare riferimento quindi non è stato possibile capire fino in fondo cosa ha portato gli studenti a dare questo tipo di risposte, che ho comunque riportato nelle figure 3.39, 3.40, 3.41 e 3.42.



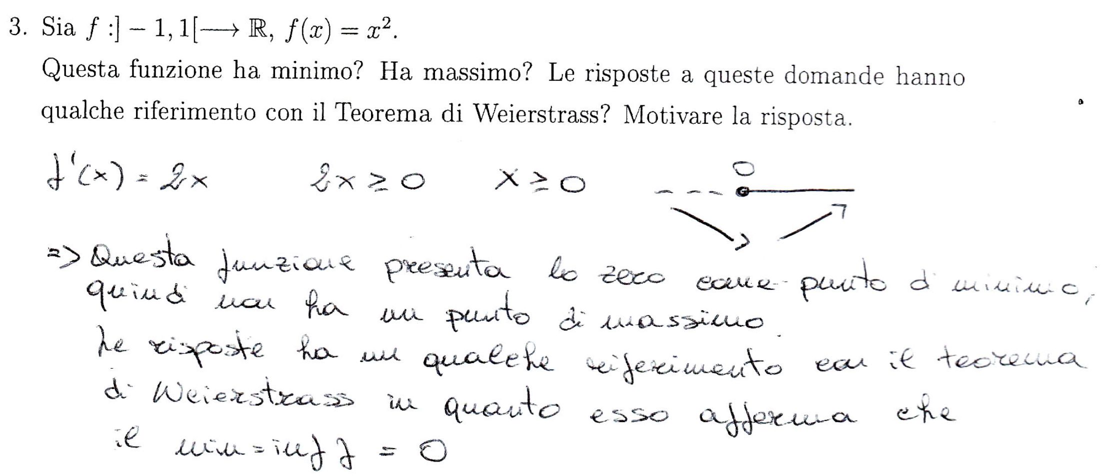
3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$f'(x) = 2x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

La parabola

Per $x=0$ la funzione ha massimo

Figura 3.39: Esempio di risposta errata

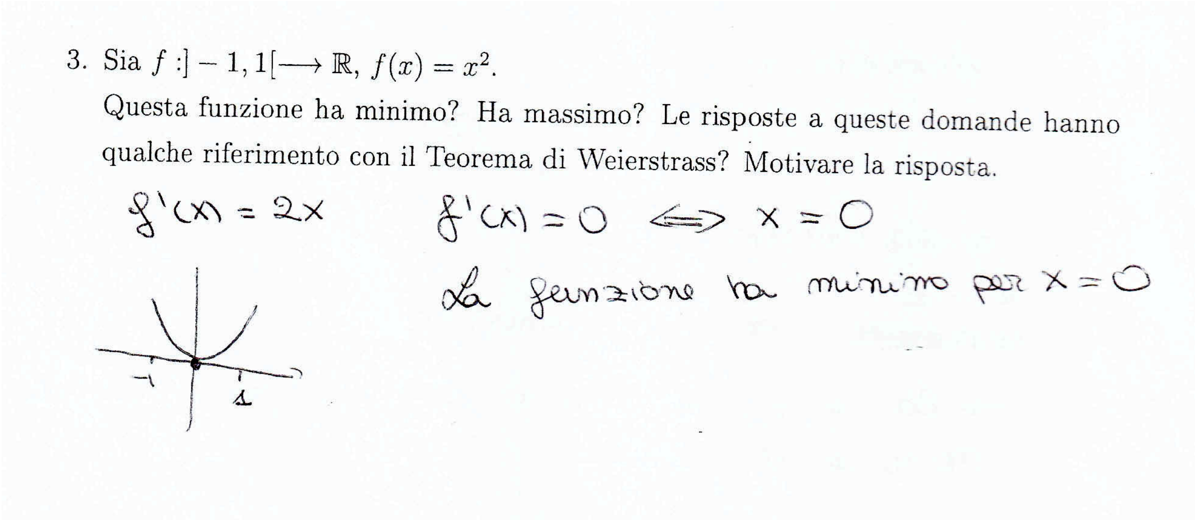


3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$f'(x) = 2x$ $2x \geq 0$ $x \geq 0$

$\Rightarrow$ Questa funzione presenta lo zero come punto di minimo, quindi non ha un punto di massimo.
Le risposte ha un qualche riferimento con il teorema di Weierstrass in quanto esso afferma che il $\min = \inf f = 0$

Figura 3.40: Esempio di risposta errata



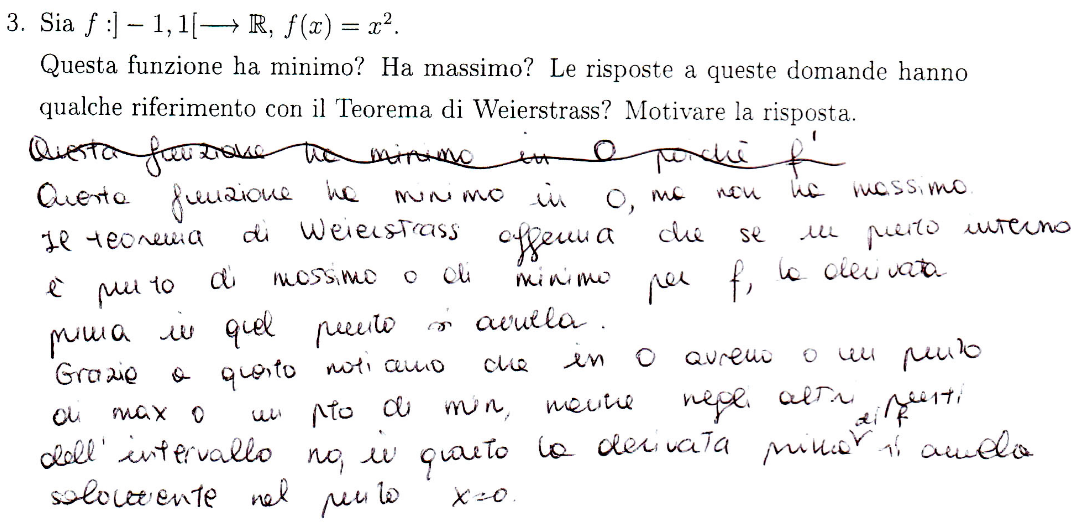
3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$f'(x) = 2x$ $\quad f'(x) = 0 \iff x = 0$

La funzione ha minimo per $x = 0$

Figura 3.41: Esempio di risposta errata

Nell'esempio di risposta errata che segue è emerso un ragionamento che non era stato da noi ipotizzato. Lo studente, che enuncia correttamente una condizione necessaria del primo ordine per l'esistenza di massimi e minimi, chiamandola "teorema di Weierstrass", sembra poi applicarla in maniera "inversa" nell'esercizio. L'esigenza di giustificazione formale ha, anche in questo caso, allontanato lo studente da semplici e più intuitivi ragionamenti sulla funzione f.



3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

~~Questa funzione ha minimo in 0 perché f'~~
Questa funzione ha minimo in 0, ma non ha massimo.
Il teorema di Weierstrass afferma che se un punto interno è punto di massimo o di minimo per f, la derivata prima in quel punto si annulla.
Grazie a questo notiamo che in 0 avremo o un punto di max o un pto di min, mentre negli altri punti dell'intervallo no, in quanto la derivata prima di f si annulla solamente nel punto x=0.

Figura 3.42: Esempio di risposta errata

3.4.2 Il quesito 3 e i liceali

Nel caso dei liceali, abbiamo classificato le risposte nelle tipologie:

- corrette;
- errate, che possiamo suddividere in:
  * chi utilizza il teorema di Weierstrass per dimostrare che esite il massimo;
  * chi utilizza il teorema di Weierstrass per dimostrare che non esite né massimo né minimo;
  * altri tipi di errori “atipici” che vedremo nel dettaglio;
- omesse.

Negli studenti liceali, che avevano appena affrontato il teorema di Weierstrass, è emersa una maggiore tendenza a utilizzarlo, anche se a volte in maniera erronea. Diversamente dagli studenti universitari, ci sono state anche 3 risposte omesse. I risultati del quesito 3 nei liceali sono stati i seguenti:

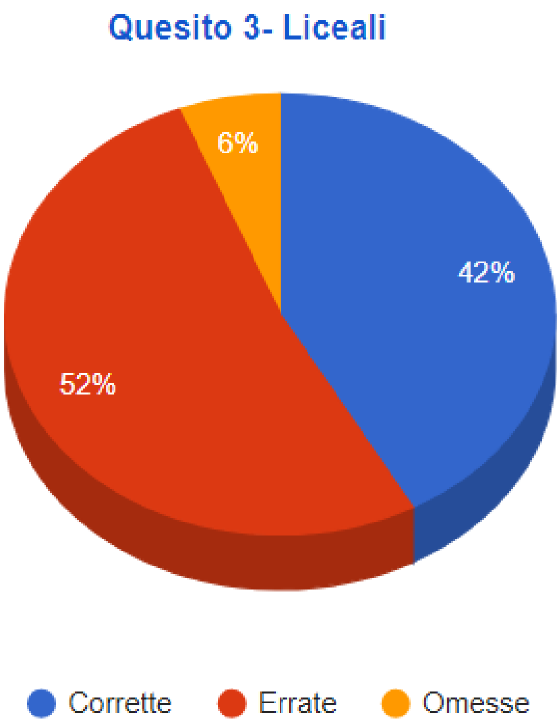
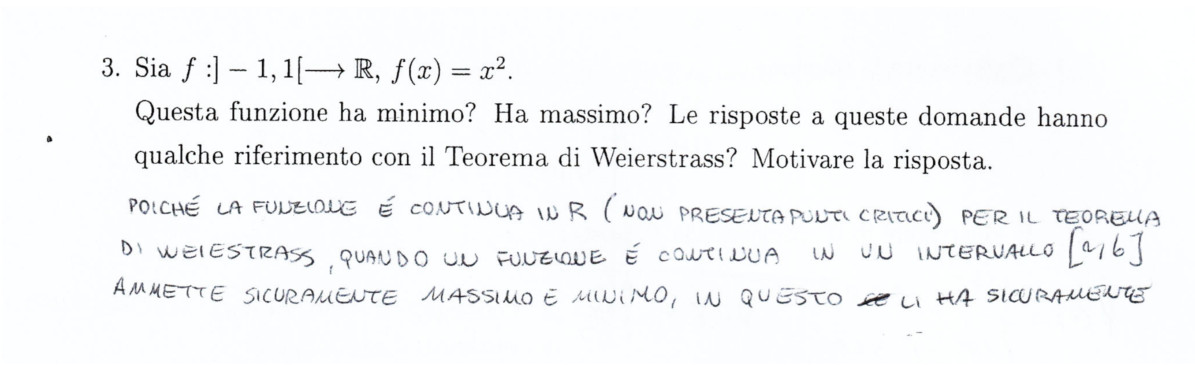


Figura 3.43: Risposte Quesito 3

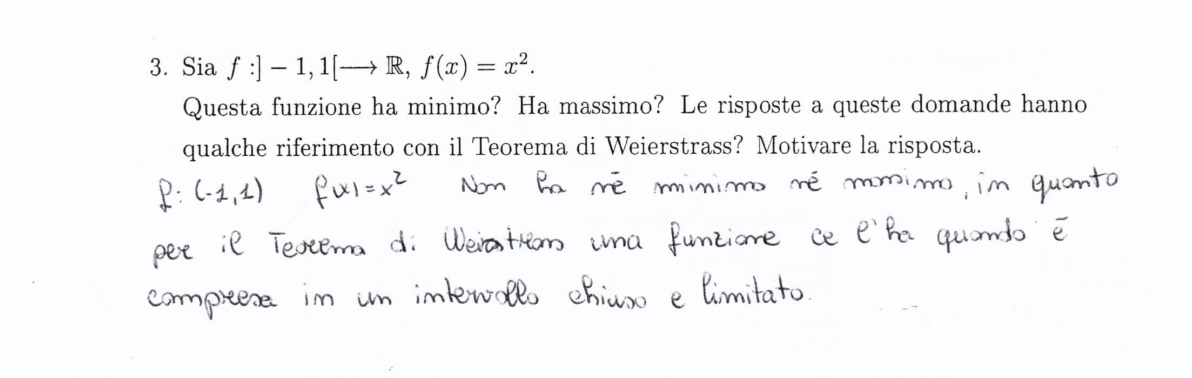
Tra le 26 risposte errate degli studenti, 8 si affidano totalmente al teorema di Weierstrass, delegando a questo la risoluzione dell'esercizio, per concludere senza effettuare alcun calcolo che la funzione ammette sia massimo che minimo (figura 3.44) o, viceversa, che non esiste nessuno dei due (figura 3.45)



3. Sia $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

POICHÉ LA FUNZIONE É CONTINUA IN R (NON PRESENTA PUNTI CRITICI) PER IL TEOREMA DI WEIESTRASS, QUANDO UN FUNZIONE É CONTINUA IN UN INTERVALLO [a, b] AMMETTE SICURAMENTE MASSIMO E MINIMO, IN QUESTO LI HA SICURAMENTE

Figura 3.44: Esempio di risposta errata

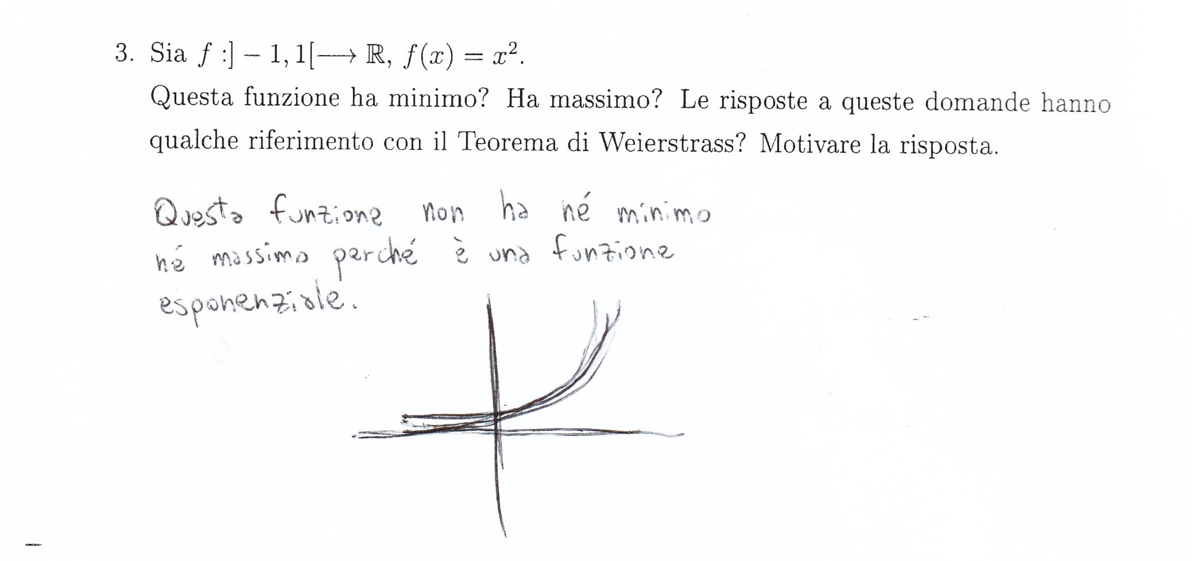


3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$f: (-1,1)$ $f(x)=x^2$ Non ha nè minimo nè massimo, in quanto per il Teorema di Weierstrass una funzione ce l'ha quando è compresa in un intervallo chiuso e limitato.

Figura 3.45: Esempio di risposta errata

Le restanti risposte errate sono risultate ancora una volta più variegate rispetto a quelle degli universitari, come si può notare dalle seguenti risoluzioni.



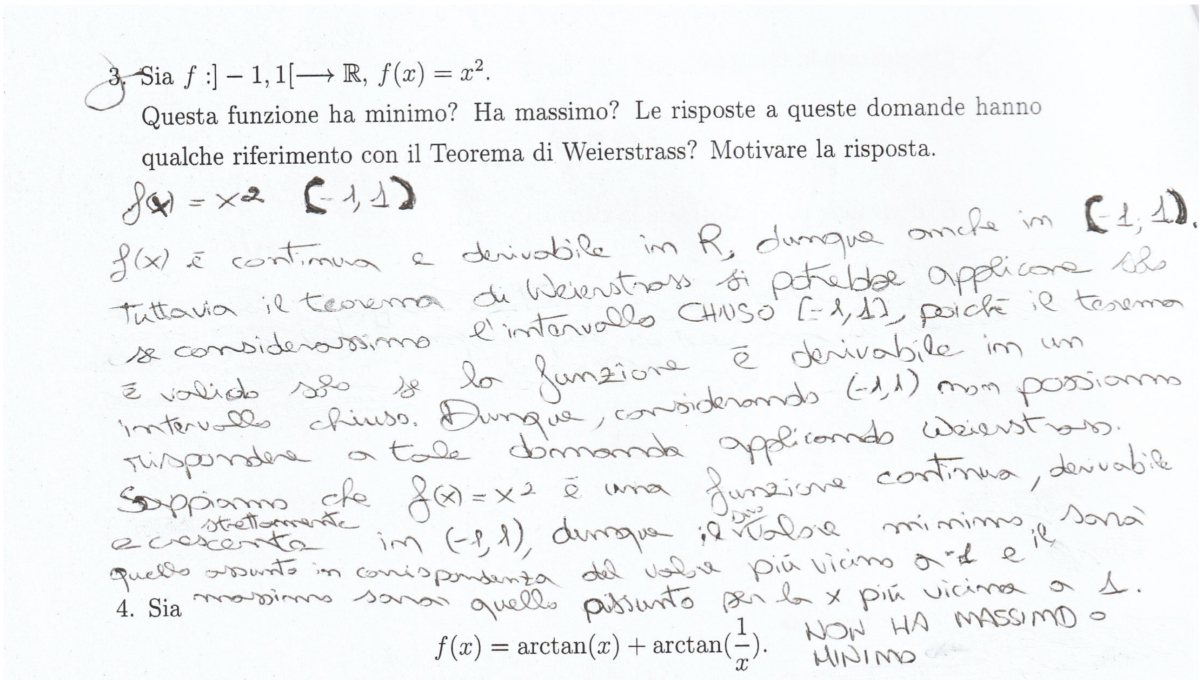
3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

Questa funzione non ha né minimo né massimo perché è una funzione esponenziale.

Figura 3.46: Esempio di risposta errata

In questo primo caso lo studente ha creato un nuovo tipo di funzioni comprendente quella in questione: le funzioni esponenziali. Ho cercato di interpretare questo come una conseguenza delle considerazioni che spesso si fanno sugli ordini di grandezza delle funzioni della forma x^α in relazione a quella esponenziale, ipotizzando che lo studente non abbia ancora sistemato le conoscenze relative a questo tipo di concetti.
Diverse sono le considerazioni da fare sulle risoluzioni in figura 3.47 e 3.48. Il primo

esempio mostra che la studentessa comincia la risoluzione con un ragionamento corretto e una buona argomentazione. Purtroppo, con il procedere del ragionamento, e con l'abbondare delle parole e dei concetti utilizzati, la ragazza sembra perdersi e giunge a concludere che non esista né massimo né minimo. Per il secondo esempio riportato, invece, si nota come l'insicurezza e la debolezza dell'apprendimento della matematica nella ragazza la portino a cancellare un primo ragionamento che era stato impostato correttamente. Analizzando più a fondo l'intero compito di questa studentessa, questo tipo di operazione è emerso più volte ed ho scoperto che nasceva da delle difficoltà emotive della ragazza sorte solo all'inizio del quinto anno. Casi come questo, senza l'aiuto degli strumenti della didattica della matematica, in passato sarebbero stati catalogati come casi di "disinteresse" da parte della studentessa. Fortunatamente oggi gli insegnanti sono più consapevoli delle dinamiche che includono gli studenti nella noosfera e che possono minare il loro corretto apprendimento e il rapporto con la disciplina di per sé.



3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$f(x) = x^2$ $[-1, 1]$
$f(x)$ è continua e derivabile in R, dunque anche in $[-1; 1]$.
Tuttavia il teorema di Weierstrass si potrebbe applicare solo se considerassimo l'intervallo CHIUSO $[-1, 1]$, poiché il teorema è valido solo se la funzione è derivabile in un intervallo chiuso. Dunque, considerando $(-1,1)$ non possiamo rispondere a tale domanda applicando Weierstrass.
Sappiamo che $f(x) = x^2$ è una funzione continua, derivabile e ~~crescente~~ strettamente in $(-1, 1)$, dunque il suo valore minimo sarà quello assunto in corrispondenza del valore più vicino a -1 e il massimo sarà quello assunto per la x più vicina a 1.

4. Sia
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

NON HA MASSIMO o MINIMO

Figura 3.47: Esempio di risposta errata

3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$f'(x) = 2x$

$2x \geq 0$

$x \geq 0$

$f'(x)$ − 0 +

$f(x)$ ↘ ↗

min

$x_{min} = 0$

$y_{min} = 0$

la Funzione $f(x)$ ha un minimo relativo in $x=0$

Il teorema di Weirestrass ammette sempre un massimo e un minimo assoluto ~~all'interno~~ di una Funzione continua in un intervallo chiuso $(a;b)$

$f(-1) = 1$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

$f(1) = 1$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

~~nel teorema però gli estremi dell'intervallo vengono considerati, mentre nell'esercizio la delimitazione mi dice di escludere~~

sì, vi è una correlazione con il teorema in quanto la Funzione soddisfa le ipotesi e quindi è applicabile il teorema.

4. Sia

$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

Figura 3.48: Esempio di risposta errata

Infine, tra le 21 risposte corrette, ho notato una certa maturità nell'argomentare, che può essere mostrata dall'esempio in figura 3.49.

3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

$(-1;1)$

$f'(x) = 2x$ $f'(x) \geq 0$ $x \geq 0$

$f'(x)$ − 0 +

$f(x)$ ↘ ↗

MIN

la funzione ha un minimo in $x=0$, ma non ha massimo.

Il teorema di Weierstrass afferma che se una funzione è continua in un intervallo chiuso $[a;b]$ ammette sicuramente minimo assoluto e massimo assoluto in $[a;b]$. In questo caso considero un intervallo aperto per cui non è garantita la presenza di massimo e minimo assoluto. Infatti la funzione presenta solo il minimo.

Figura 3.49: Esempio di risposta corretta

3.5 Quesito 4

Il quarto quesito del questionario chiedeva:
Sia

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?
I requisiti per la risoluzione di questo esercizio sono la conoscenza delle regole di derivazione elementari e il calcolo di semplici valori della funzione arcotangente. A partire da questi requisiti lo studente deve poi fare attenzione alle conclusioni che si possono trarre dal fatto che la derivata della funzione si annulli nel dominio.

3.5.1 Il quesito 4 e i matematici

Abbiamo classificato le risposte a questo quesito nelle seguenti tipologie:

- corrette;
- omesse;
- errate, che possiamo suddividere in:
    * errori di derivazione;
    * altri tipi di errori "atipici" che vedremo nel dettaglio.

I risultati del quesito 4 nei matematici sono stati i seguenti:

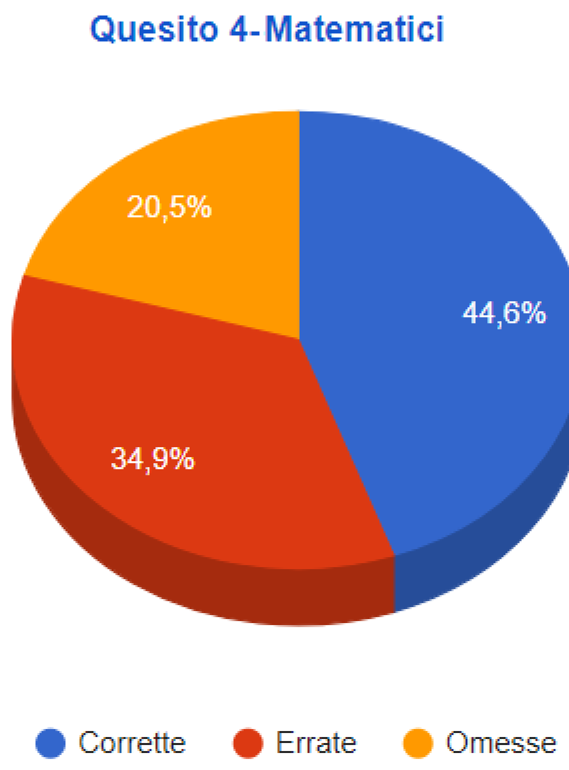
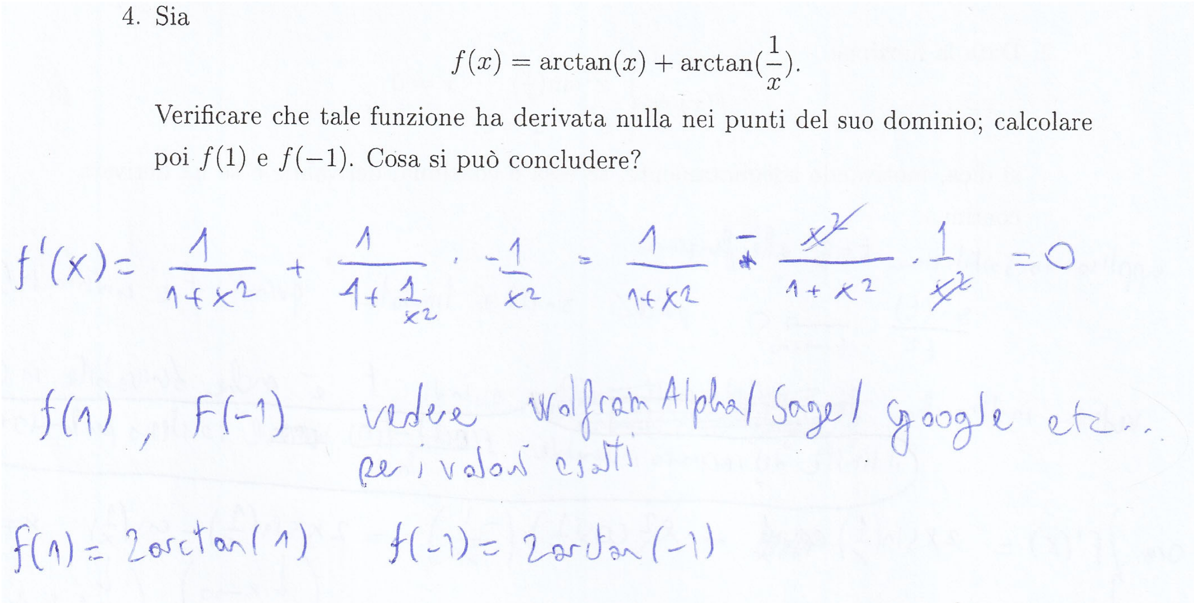


Figura 3.50: Risposte Quesito 4

Tra le 17 risposte omesse ho incluso non solo le schede bianche, ma anche quelle che presentavano alcuni calcoli della derivata o dei valori di f senza portarli a termine. Nell'ipotizzare le risposte degli studenti di Matematica non era stato messo in conto questo tipo di errore dovuto al calcolo dei valori di f, eppure questo è comunque emerso dal questionario. Ho riportato per questa tipologia di risposte l'esempio ironico in figura 3.51.



4. Sia
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$
Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

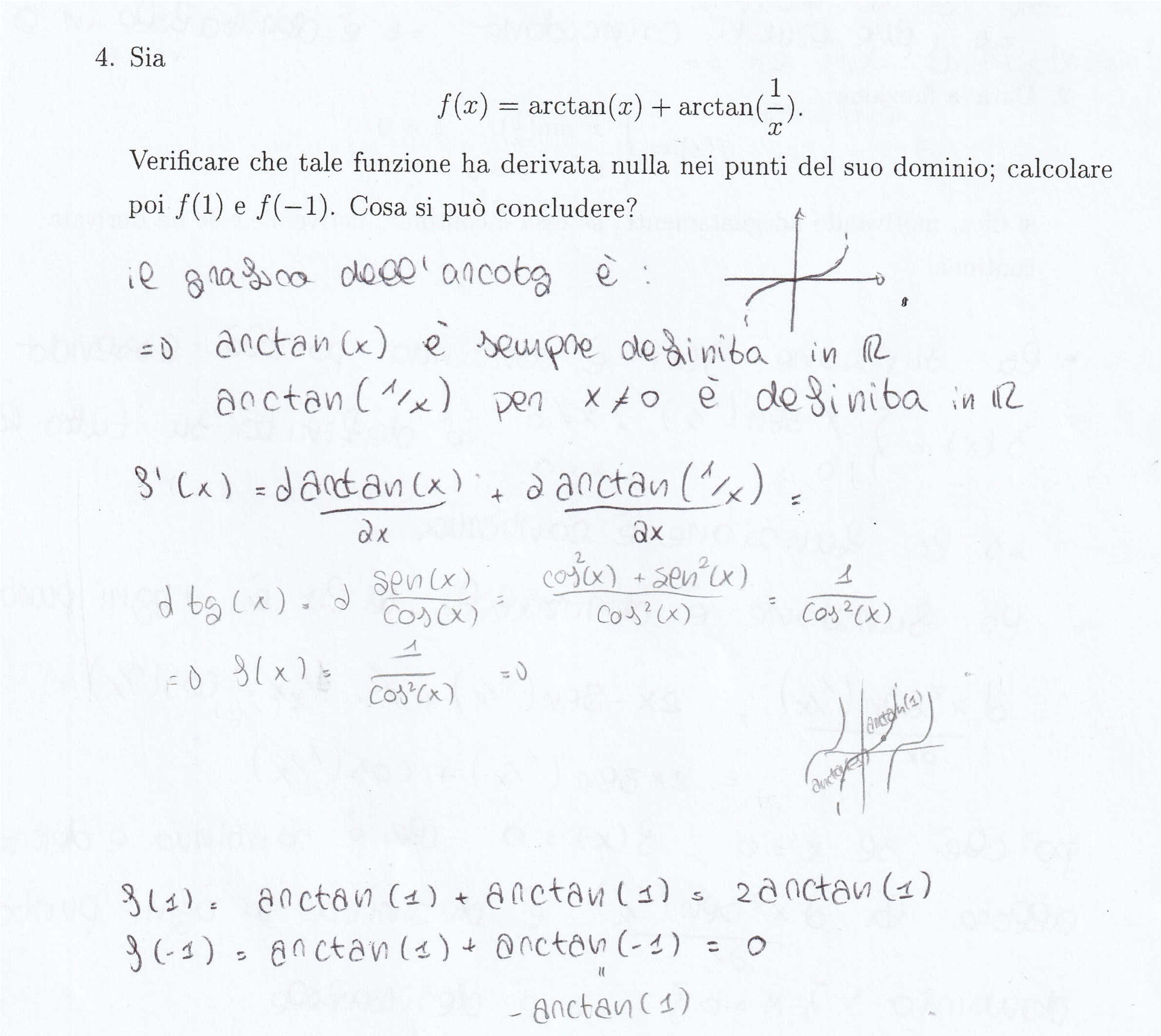
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{x^2}}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = 0$$

$f(1)$, $F(-1)$ vedere Wolfram Alpha/Sage/google etc.. per i valori esatti

$f(1) = 2\arctan(1)$ $f(-1) = 2\arctan(-1)$

Figura 3.51: Esempio di risposta omessa

Ho riscontrato tra le 29 risposte errate 5 risoluzioni con gravi errori di derivazione, anche questi non ipotizzati in fase preliminare, dovuti a problemi nel ricordare la derivata dell'arcotangente o la formula di derivazione di funzione composta, come si nota nelle figure 3.52 e 3.53.



4. Sia

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

il grafico dell'arcotg è :

$\Rightarrow$ arctan(x) è sempre definita in $\mathbb{R}$

arctan(1/x) per $x \neq 0$ è definita in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{d\,\arctan(x)}{dx} + \frac{d\,\arctan(1/x)}{dx} =$$

$$d\,tg(x) = d\,\frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{cos^2(x)} \Rightarrow$$

arctan(1)

arctan(-1)

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\arctan(1)$$

$$f(-1) = \arctan(1) + \underbrace{\arctan(-1)}_{-\arctan(1)} = 0$$

Figura 3.52: Esempio di risposta con calcolo della derivata inconcluso

4. Sia
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$
Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

$f(x)$ è definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$$

~~f(1) = arctg 1 + arctg 1 = π/4 ... π/2~~ $f(1) = \text{arctg}\,1 + \text{arctg}(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

~~f(-1) = arctg(-1) + arctg(-1) ... π/2~~ $f(-1) = \text{arctg}(-1) + \text{arctg}(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Figura 3.53: Esempio di risposta con calcolo della derivata sbagliato

Le restanti risposte errate hanno conclusioni del tipo " f è costante perché la derivata è nulla" (figure 3.55 e 3.56) o calcoli dei valori di $f(1)$ e $f(-1)$ con periodicità pari a $k\pi$ (figura 3.57). Il primo tipo di risposta, a differenza del secondo, era prevedibile, perché già evidenziato dalla prova d'esame corso d'ordinamento del 2004/2005, che portò molti studenti a concludere che la funzione fosse costante e pari a $\frac{\pi}{4}$ (figura 3.54).

10 Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \text{arctg}\,x - \text{arctg}\,\frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Figura 3.54: Quesito tratto dall'esame d'ordinamento a.s. 2004/2005

4. Sia

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

DOMINIO: $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \forall x \text{ del dominio}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

La funzione per $x>0$ sarà $f(x) = \frac{\pi}{2}$

per $x<0$ sarà $f(x) = -\frac{\pi}{2}$

(derivata nulla in ogni punto del dominio => f costante)

la funzione è ~~dispari~~ pari

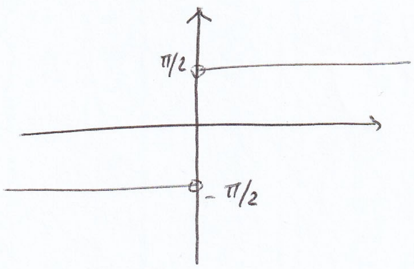
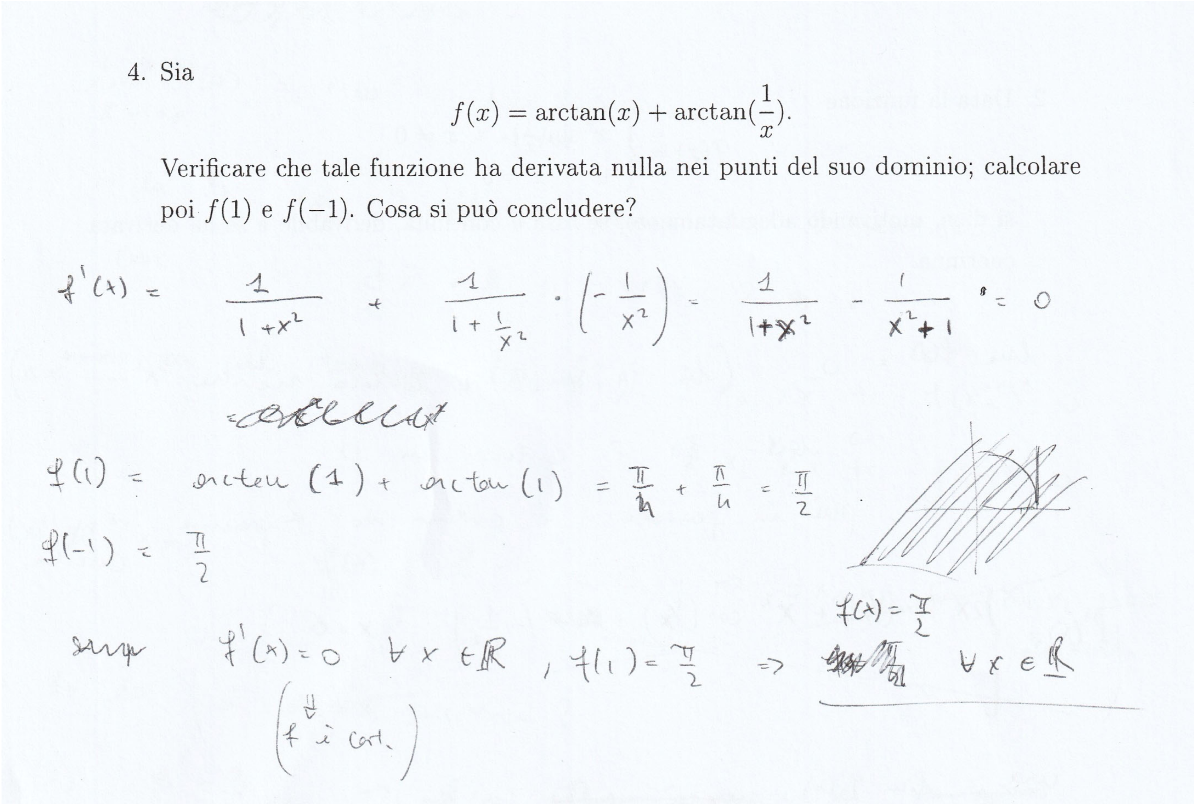


Figura 3.55: Esempio di risposta del tipo " f è costante perché la derivata è nulla" (e altro errore)



4. Sia
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$
Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

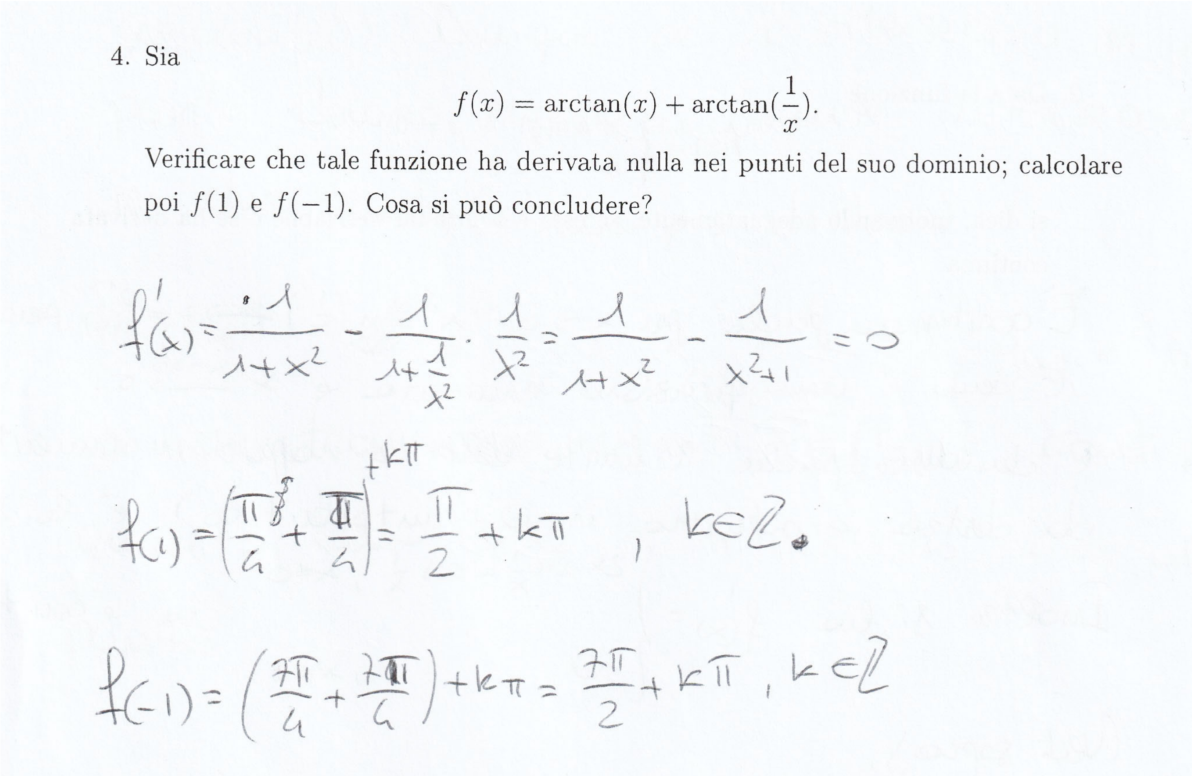
$$f(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$\left(\begin{array}{c} f' \\ \Downarrow \\ f \text{ è cost.} \end{array} \right)$

Figura 3.56: Esempio di risposta del tipo “ f è costante perché la derivata è nulla”



4. Sia
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$
Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

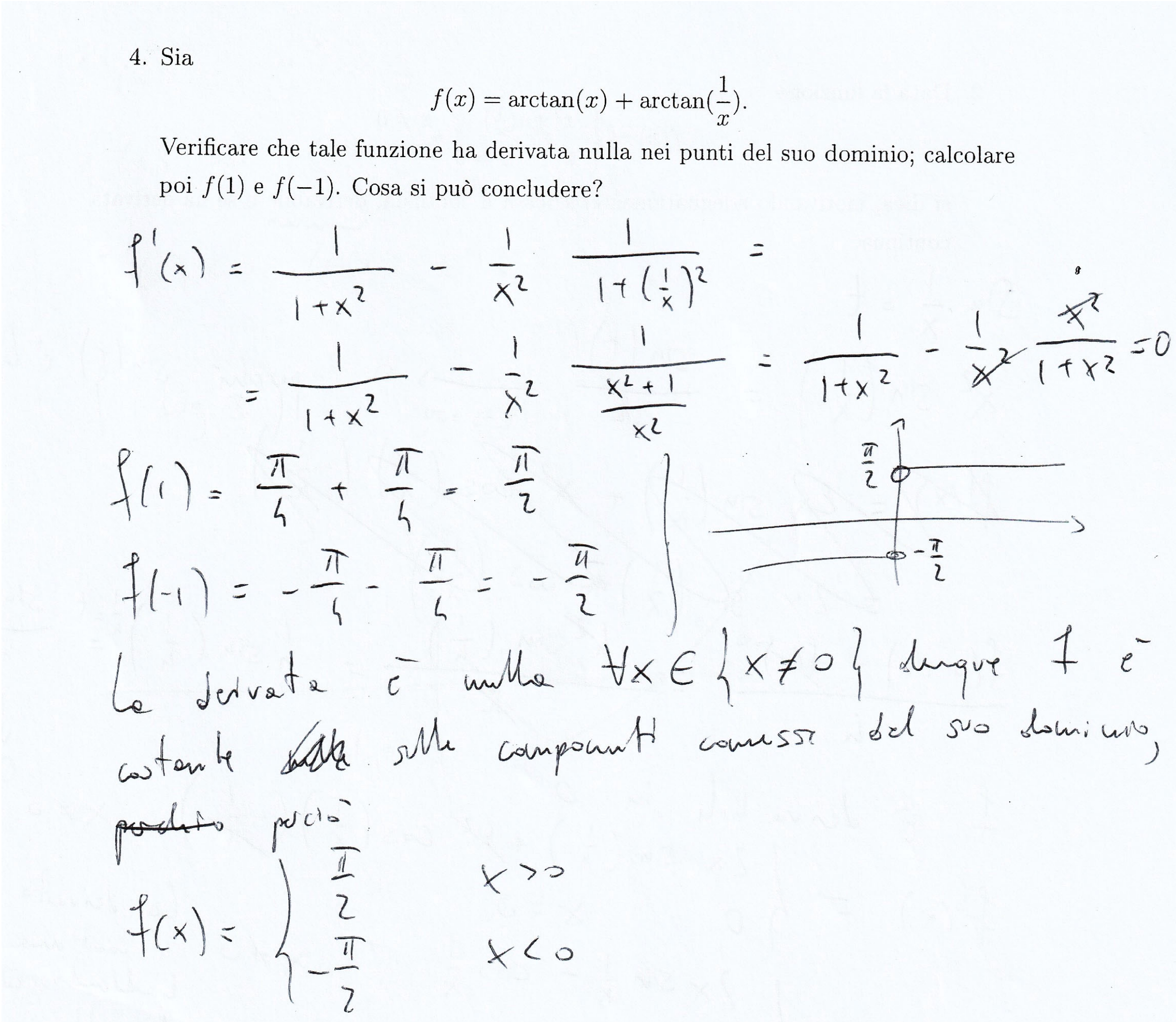
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$f(1) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}.$$

$$f(-1) = \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) + k\pi = \frac{7\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Figura 3.57: Esempio di risposta con periodicità insensata

Quando ho intervistato il ragazzo che ha dato la precedente risposta, per chiedergli come mai riteneva che andasse aggiunto $k\pi$ al valore di $f(1)$ e $f(-1)$, questi mi ha gentilmente risposto: "è quasi un automatismo legato alle funzioni goniometriche. È stata, almeno per me, una svista legata al fatto che generalmente va specificato per la periodicità. Non ho però fatto attenzione al fatto che fosse una funzione inversa e dunque ha una periodicità legata alle ordinate, quindi giustamente includendola non si ha più una funzione."
Questa risposta mi ha colpito per la sua sincerità e perché nasconde delle abitudini notazionali difficili da eliminare per gli studenti.
Infine, tra le 37 risposte che ho valutato corrette, vorrei riportare quella in figura 3.58 come esempio di risposta esaustiva e chiara. In questa risposta si utilizza l'espressione "componenti connesse" in maniera matura, a riprova del fatto che il formalismo in matematica può essere padroneggiato senza che diventi eccessivo o che ostacoli la risoluzione dell'esercizio.



4. Sia

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{\cancel{x^2}}{1+x^2} = 0$$

$$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$

La derivata è nulla $\forall x \in \{x \neq 0\}$ dunque f è costante ~~tutta~~ sulle componenti connesse del suo dominio, ~~perdito~~ perciò

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Figura 3.58: Esempio di risposta corretta

3.5.2 Il quesito 4 e i liceali

Abbiamo classificato le risposte a questo quesito per i liceali nella stessa maniera che per i matematici, ma i risultati sono stati molto diversi:

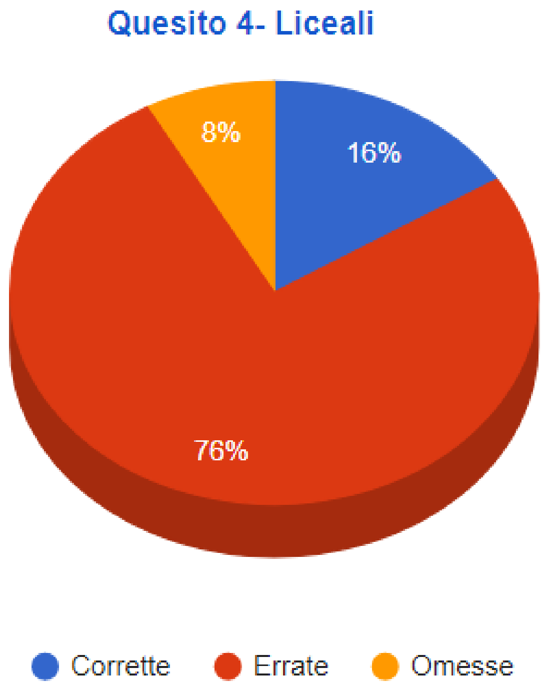
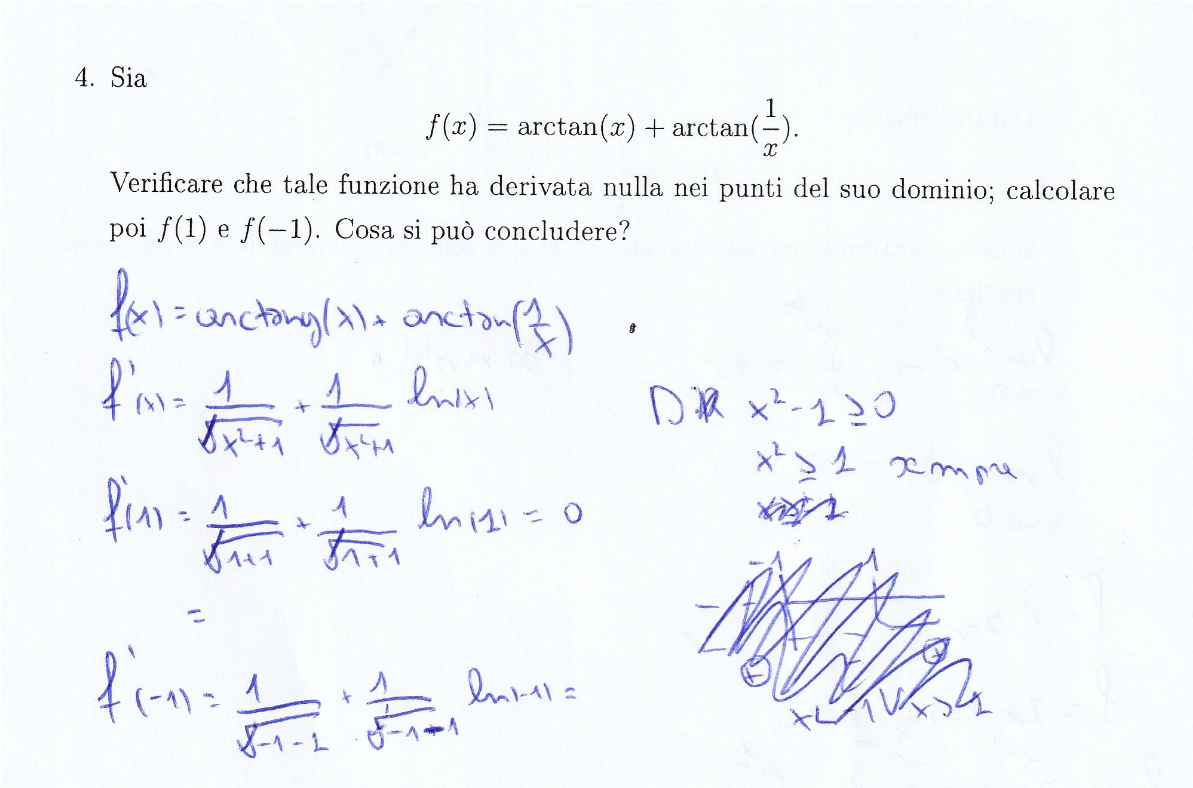


Figura 3.59: Risposte Quesito 4

Nonostante dal grafico si noti l'andamento peggiore degli studenti liceali in questo quesito, è opportuno fare una considerazione al riguardo. Tra le 38 risposte sbagliate, in questo caso, sono state incluse anche 22 risoluzioni con calcoli dei valori di f e della sua derivata corretti, ma che non presentavano una conclusione come richiesto dal testo dell'esercizio. I restanti errori sono stati in maggioranza connessi al problema di derivare una funzione composta e sono emersi anche calcoli atipici, che nei matematici non erano stati osservati, come quello in figura 3.60 più volte rilevato nei vari compiti ogni volta che si chiedeva di analizzare un'espressione contenente $\frac{1}{x}$. Ho interpretato questo tipo di errore come una confusione degli studenti data l'introduzione, in quella stessa settimana, del concetto di primitiva.
Così come in altri esercizi, abbiamo notato che fra le poche risposte corrette degli studenti liceali, vi era una caratteristica interessante: queste presentavano la stessa maturità e capacità argomentativa delle migliori risposte dei matematici, come si può notare ad esempio dalla risoluzione in figura 3.61.



4. Sia

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

$f(x) = \arctan g(x) + \arctan(\frac{1}{x})$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ln|x|$

$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} \ln|1| = 0$

$=$

$f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{-1-1}} + \frac{1}{\sqrt{-1+1}} \ln|-1| =$

D ~~R~~ $x^2 - 1 \geq 0$

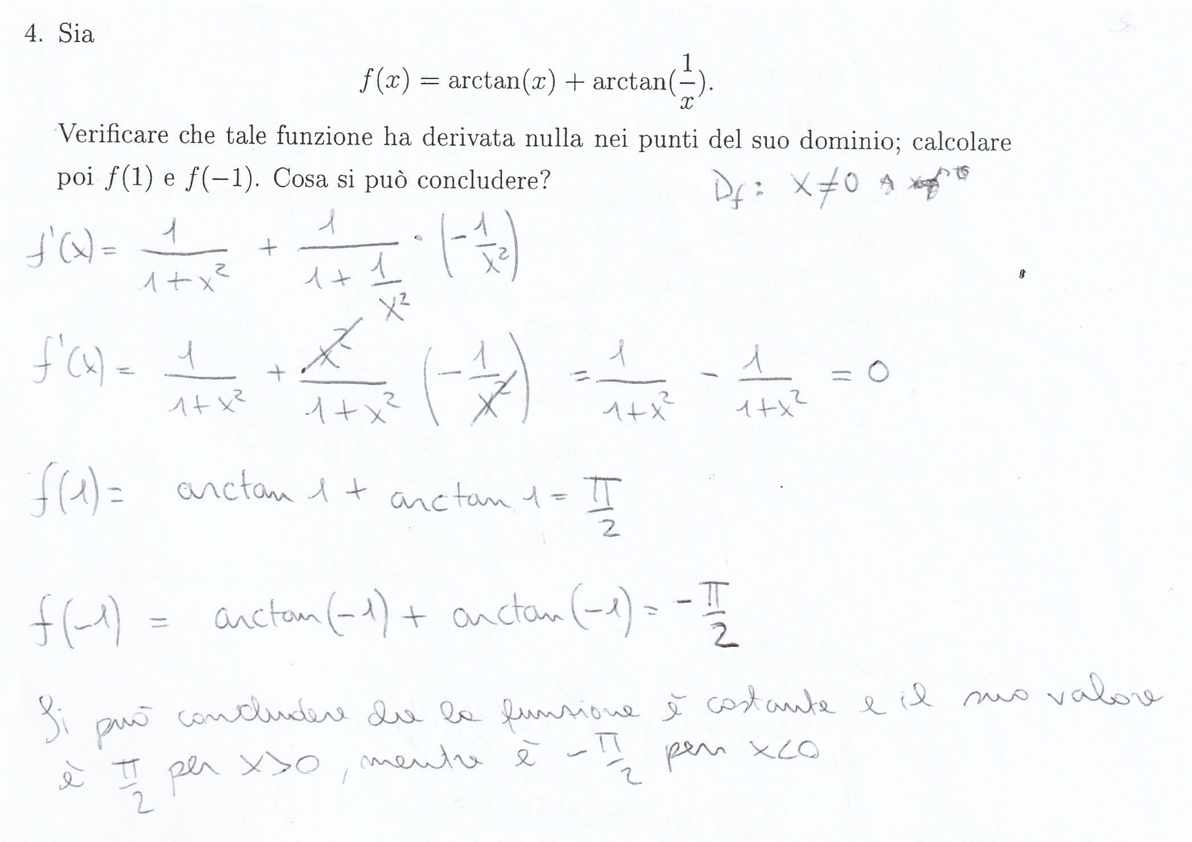
$x^2 \geq 1$ sempre

~~$x \geq 1$~~

-1 1

$x < -1 \vee x > 1$

Figura 3.60: Esempio di risposta con calcoli errati ricorrenti nei liceali


4. Sia
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$
Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

$D_f: x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\cancel{x^2}}{1+x^2}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Si può concludere che la funzione è costante e il suo valore è $\frac{\pi}{2}$ per $x>0$, mentre è $-\frac{\pi}{2}$ per $x<0$

Figura 3.61: Esempio di risposta corretta

3.6 Quesito 5

Proseguendo, il quinto quesito del questionario riportava:
Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.
In questo esercizio più che in altri si richiedeva la concentrazione dello studente per l'interpetazione del testo. Durante lo svolgimento, più volte ci è stato chiesto quale fosse l'insieme da considerare e abbiamo subito notato che gli studenti non riuscivano a impostare in maniera adeguata la risoluzione. Partendo dalla funzione $\log(x)$ e creando

le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ \log(-x) + k & x < 0 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$, la risoluzione sarebbe stata semplificata. Purtroppo i matematici hanno preferito un approccio “teorico” a questo esercizio e i liceali sono rimasti disorientati dal tipo di domanda posta, non essendo abituati a questo tipo di ragionamenti.
Collegandoci all’analisi didattica dell’apprendimento degli studenti in relazione alle misconcezioni, si potrebbe interpretare il fallimento degli studenti in tale risoluzione come conseguenza della credenza già citata nella forma “un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica compare esplicitamente il segno - ”. Potrebbe sembrare forzato, ma in realtà a partire da questa concezione cognitiva errata si possono creare le seguenti misconcezioni:

- $log(-x)$ non è mai definito;
- confusione fra integrale e area;
- un punto generico del terzo quadrante è $(-x, -y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Collegandoci quindi alle credenze classificate dalla ricerca in didattica della matematica potremmo interpretare alcune delle risposte degli studenti come conseguenza della convinzione inconscia che non possa essere definita una funzione $log(-x)$ come artificio per risolvere l’esercizio.

3.6.1 Il quesito 5 e i matematici

Abbiamo classificato le risposte dei matematici a questo quesito nelle seguenti tipologie:

- corrette;
- omesse;
- errate, che possiamo suddividere in:
    * unicità della funzione dimostrata con il teorema di Picard-Lindelöf;

* $log(x)$ è l'unica funzione di quell'insieme;
* l'insieme non contiene nessun elemento;
* altre risposte "atipiche".

I risultati del quesito 5 nei matematici sono stati i seguenti:

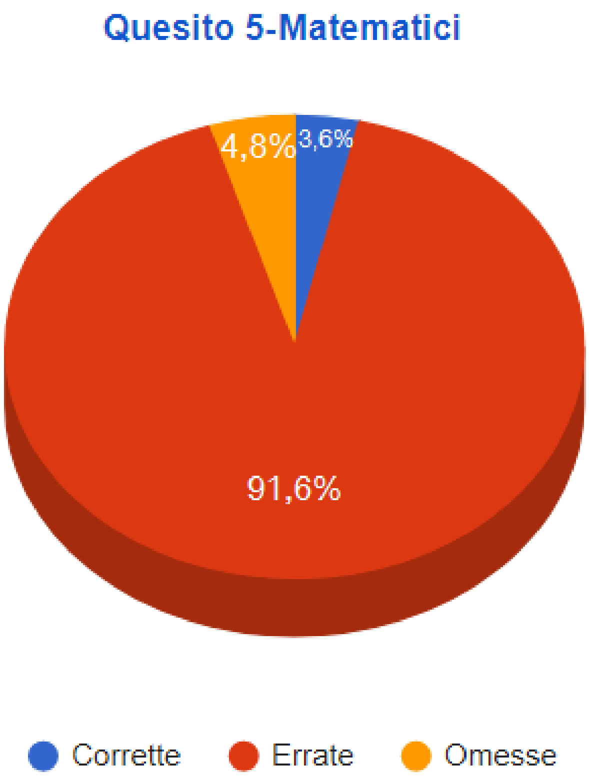
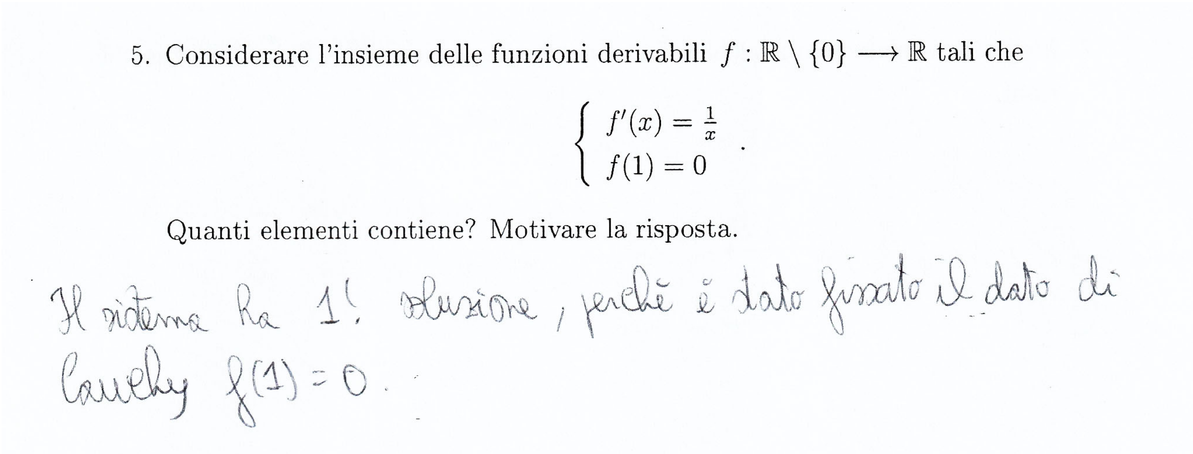


Figura 3.62: Risposte Quesito 5

Le risposte omesse in questo esercizio sono state soltanto 4 mentre quelle errate sono ben 76! Tra le risposte errate, 49 rientrano nella categoria "unicità della funzione dimostrata con il teorema di Picard-Lindelöf". Questa risoluzione, mostrata nelle figure 3.63 e 3.64, viene spontanea agli studenti del secondo anno di Matematica che hanno appena concluso il corso di Analisi 2, studiando proprio i problemi di Cauchy. In questo caso però questa impostazione porta gli studenti a concludere che la funzione debba essere solo una, facendo totale affidamento al teorema di esistenza e unicità senza ragionare sul tipo di problema sottoposto e sulle ipotesi di tale teorema. Questo tipo di risoluzione degli studenti mostra un tipico caso in cui l'esigenza di giustificazione formale appesantisce la risoluzione dell'esercizio e porta gli studenti a ragionare in maniera sbagliata. Si può anche notare come in questi esempi le risposte degli studenti siano scarne e deleghino totalmente la risoluzione dell'esercizio al teorema, non implicandosi nel ragionamento.



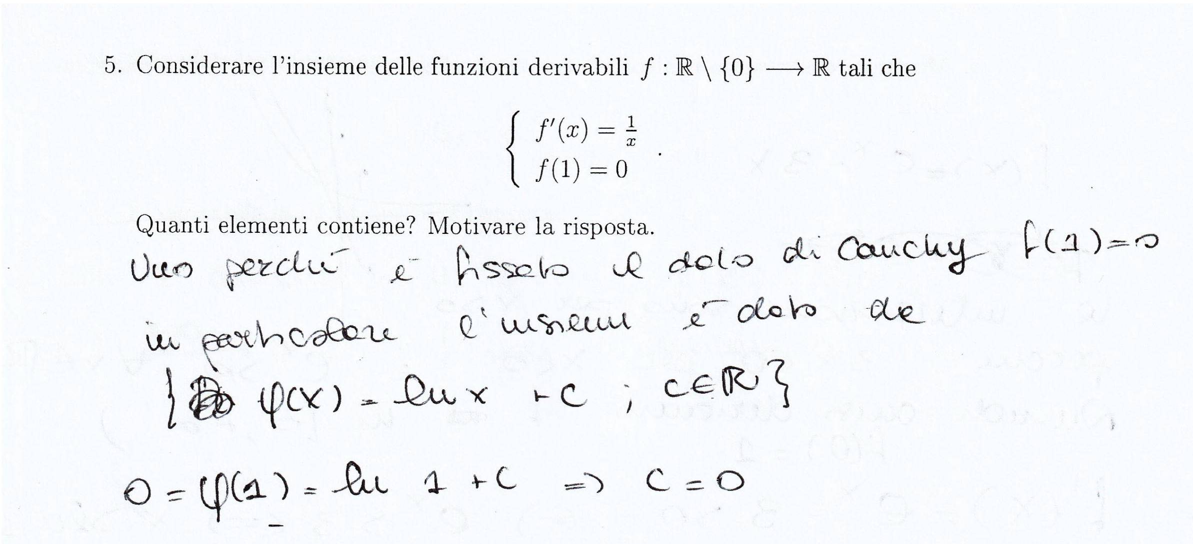
5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

Il sistema ha 1! soluzione, perchè è dato fissato il dato di Cauchy $f(1) = 0$.

Figura 3.63: Esempio di risposta del tipo " unicità della funzione dimostrata con il teorema di Picard-Lindelöf"



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

Uno perché è fissato il dato di Cauchy $f(1)=0$

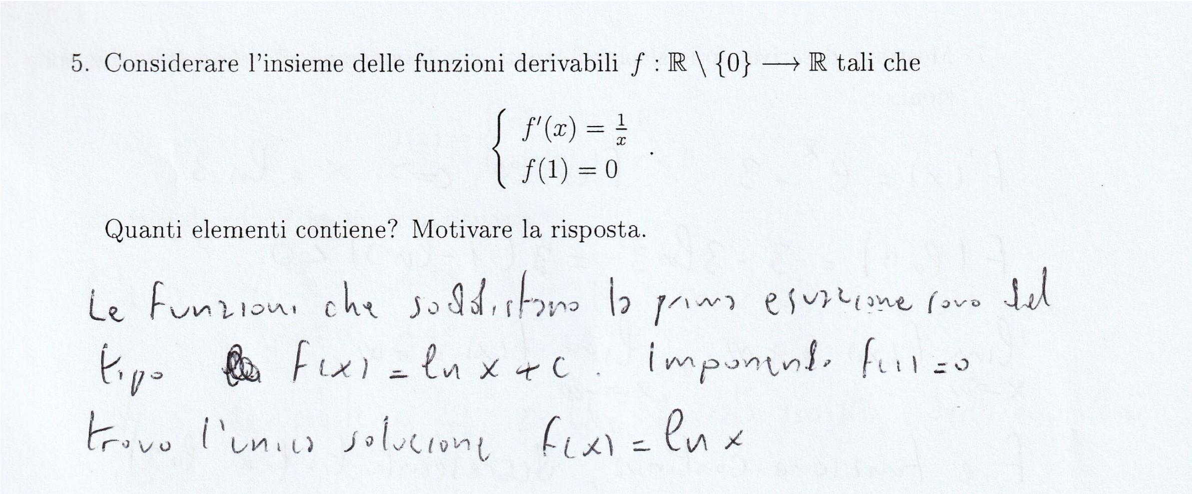
in particolare l'insieme è dato da

$\{ \varphi(x) = \ln x + c \; ; \; c \in \mathbb{R} \}$

$0 = \varphi(1) = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$

Figura 3.64: Esempio di risposta del tipo " unicità della funzione dimostrata con il teorema di Picard-Lindelöf"

Le risposte errate che riportano come unico elemento dell'insieme $log(x)$ sono 16 e sono facilmente rappresentabili dalle figure 3.65 e 3.66.



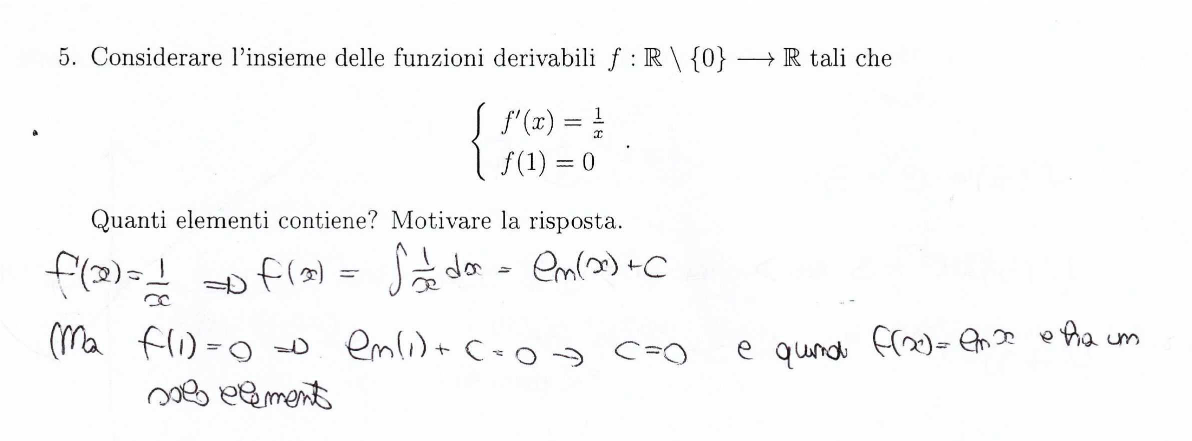
5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases} .$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

Le funzioni che soddisfano la prima equazione sono del tipo $f(x) = \ln x + c$. Imponendo $f(1) = 0$ trovo l'unica soluzione $f(x) = \ln x$

Figura 3.65: Esempio di risposta del tipo "log(x) è l'unica funzione dell'insieme"



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases} .$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$

Ma $f(1) = 0 \Rightarrow \ln(1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$ e quindi $f(x) = \ln x$ e ha un solo elemento

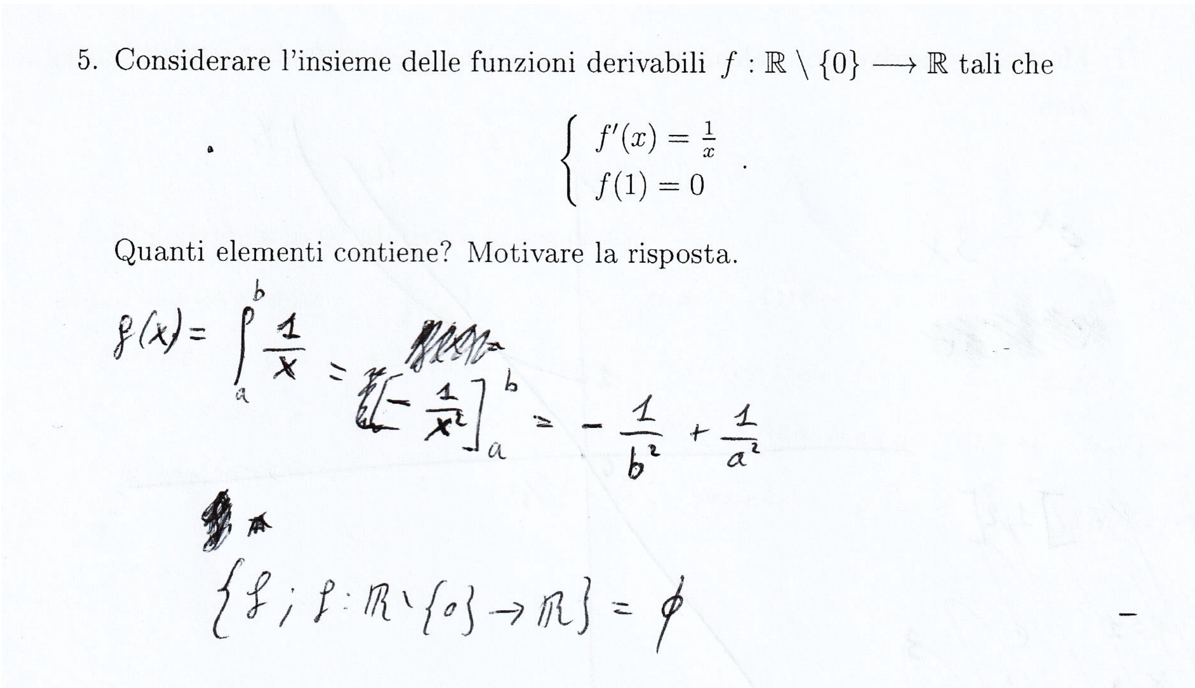
Figura 3.66: Esempio di risposta del tipo "log(x) è l'unica funzione dell'insieme"

Nel creare il quesito non avevamo ipotizzato che ci potessero essere delle risposte del tipo " l'insieme non contiene nessuna funzione", eppure 4 ragazzi hanno concluso questo, non riuscendo a trovare neanche la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases} .$$

Ne sono un esempio le risposte in figura 3.67 e 3.68.

Approfondendo la risoluzione in figura 3.67 grazie ad un colloquio con lo studente, ho potuto osservare che questi si è subito accorto dell'errore fatto nel derivare anziché integrare $\frac{1}{x}$, ma, aiutandolo con il ragionamento, non riusciva comunque a spiegare il perché avesse aggiunto gli estremi d'integrazione a e b. La mia spiegazione è che lo studente fosse abituato a risolvere esercizi inerenti i problemi di Cauchy e che, con la tecnica risolutiva a mente, non si sia soffermato a sufficienza sui dettagli che rendevano l'esercizio non banale.



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

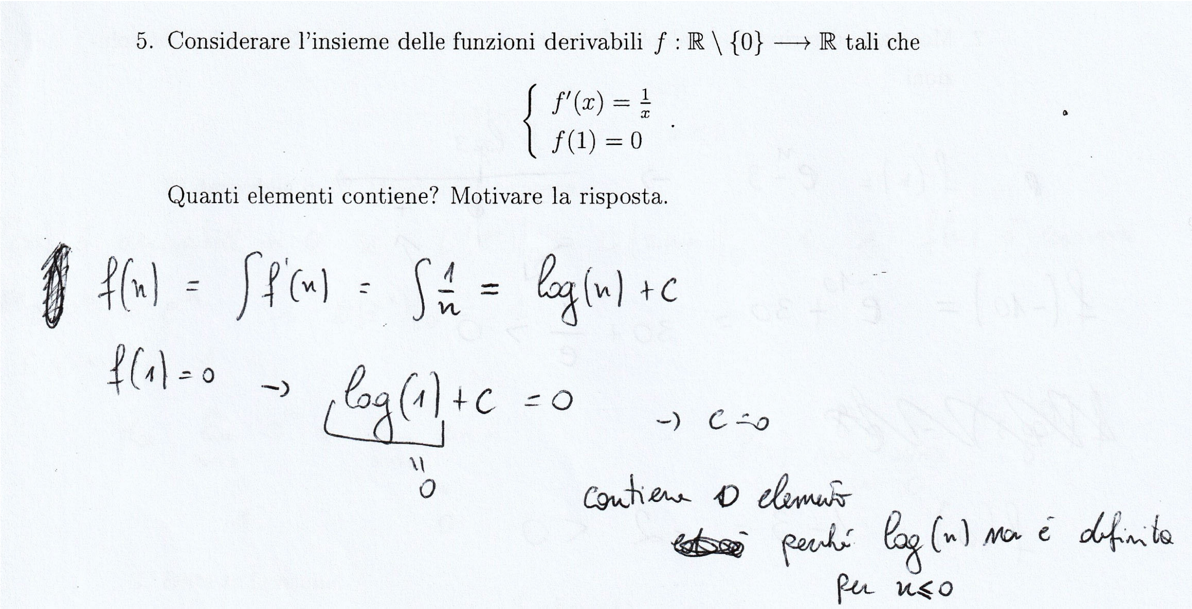
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

$$f(x) = \int_a^b \frac{1}{x} = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_a^b = -\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$\{f ; f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\} = \phi$$

Figura 3.67: Esempio di risposta del tipo "l'insieme non contiene nessun elemento"



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

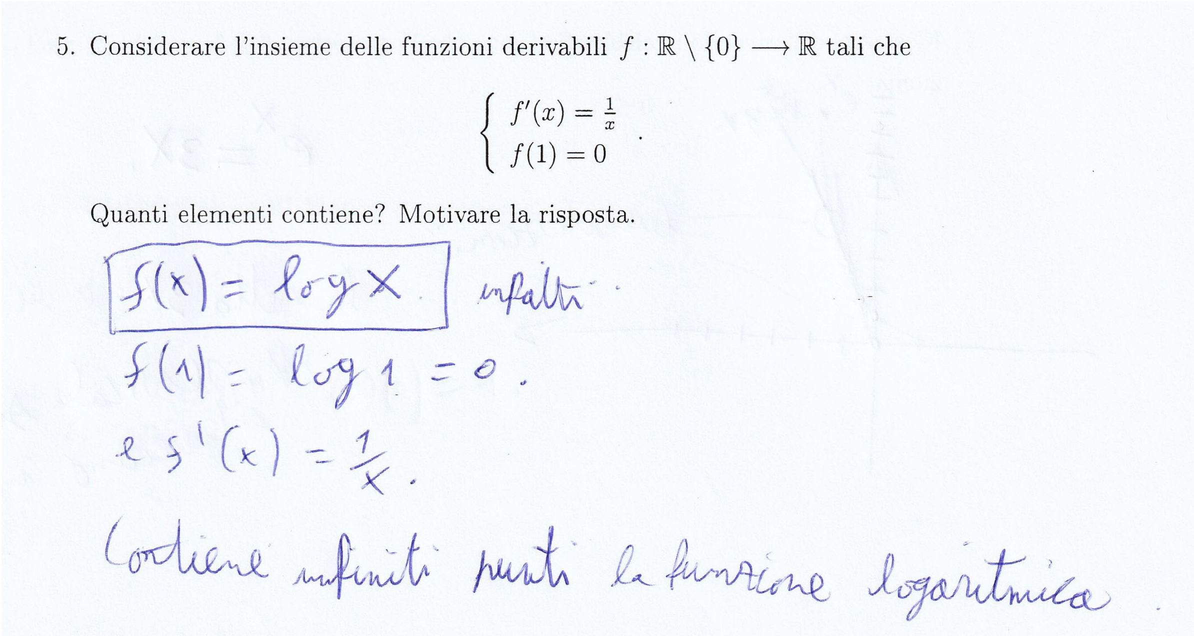
$$f(x) = \int f'(x) = \int \frac{1}{x} = \log(x) + c$$

$$f(1) = 0 \rightarrow \underbrace{\log(1)}_{=0} + c = 0 \rightarrow c = 0$$

contiene 1 elemento perché $\log(x)$ non è definita per $x \leq 0$

Figura 3.68: Esempio di risposta del tipo "l'insieme non contiene nessun elemento"

Infine, tra le risposte errate, 7 sono state catalogate come "atipiche" perché riportavano delle risoluzioni diverse dalle precedenti. Ad esempio, in figura 3.69, si nota che lo studente interpeta male la domanda non comprendendo quale è l'insieme di cui si parla. Sembra quasi che lo studente stia parlando della cardinalità dell'immagine del logaritmo seppur esprimendolo in maniera confusionaria.



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

$\boxed{f(x) = \log x}$ infatti

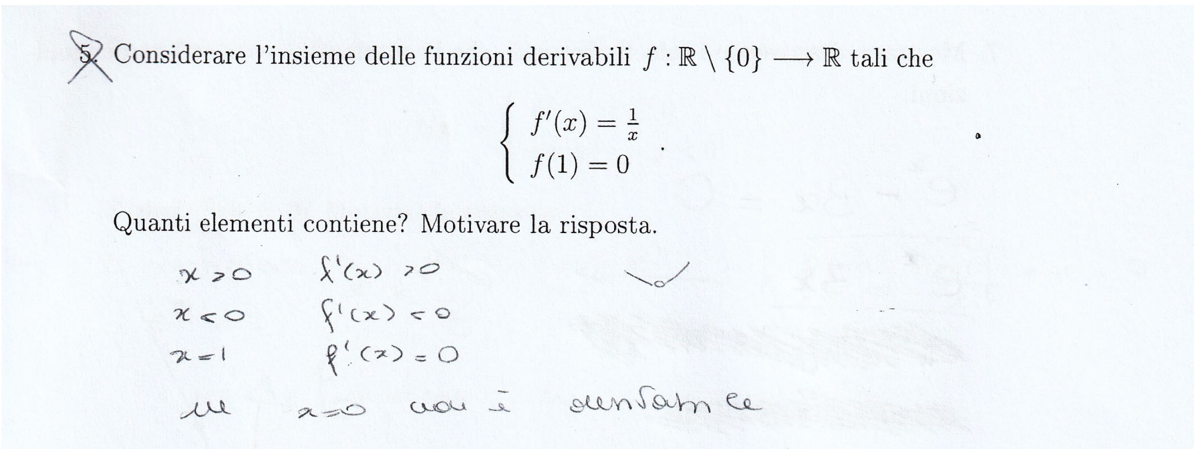
$f(1) = \log 1 = 0.$

e $f'(x) = \frac{1}{x}.$

Contiene infiniti punti la funzione logaritmica.

Figura 3.69: Esempio di risposta del tipo "atipica"

La figura 3.70, invece, mostra un caso in cui lo studente, non riuscendo a interpretare la consegna in maniera corretta, procede facendo dei calcoli e proponendo una conclusione atipica difficile da interpretare senza confrontarsi con lo studente. Purtroppo in questo caso non era presente un contatto cui fare riferimento nel questionario e le eventuali misconcezioni o difficoltà dello studente restano a noi sconosciute.



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

$x > 0$ $f'(x) > 0$

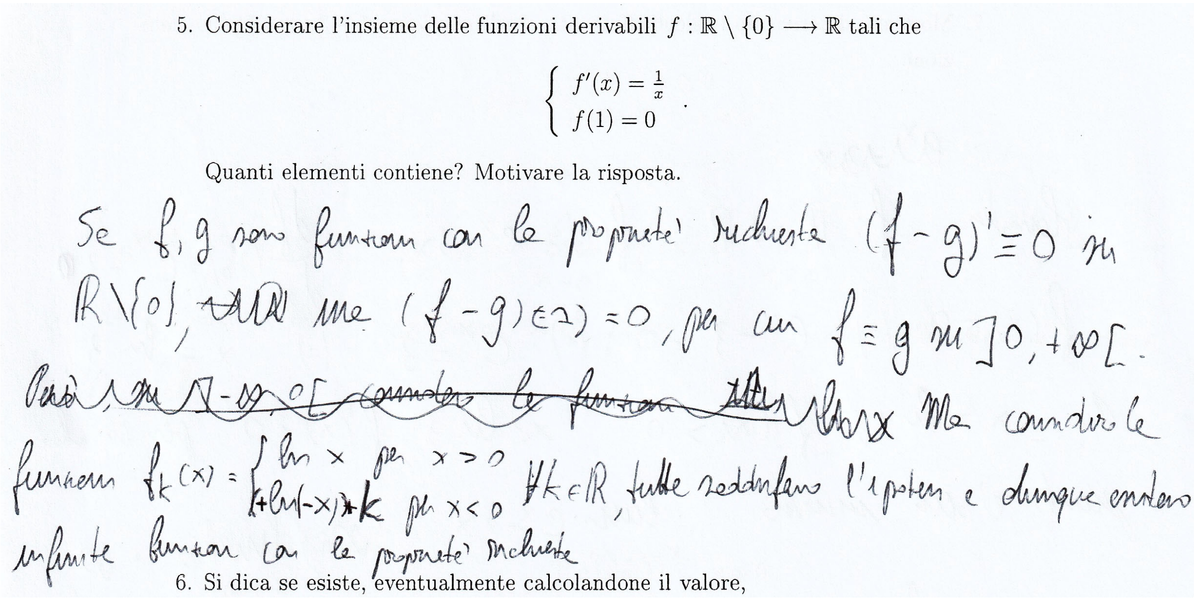
$x < 0$ $f'(x) < 0$

$x = 1$ $f'(x) = 0$

[illegible] $x = 0$ non è [illegible]

Figura 3.70: Esempio di risposta del tipo "atipica"

Tra le tre risposte corrette ho deciso di riportare quella in figura 3.71 perché rappresenta la corretta conclusione che ci aspettavamo dagli studenti, ma che non è stata raggiunta dalla maggioranza.



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases} .$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

Se f, g sono funzioni con le proprietà richieste $(f-g)' \equiv 0$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ma $(f-g)(1) = 0$, per cui $f \equiv g$ in $]0,+\infty[$. ~~Però in]−∞,0[considero le funzioni tali~~ $\ln x$ Ma considero le funzioni $f_k(x) = \begin{cases} \ln x & \text{per } x > 0 \\ \ln(-x) + k & \text{per } x < 0 \end{cases}$ $\forall k \in \mathbb{R}$, tutte soddisfano l'ipotesi e dunque esistono infinite funzioni con le proprietà richieste

6. Si dica se esiste, eventualmente calcolandone il valore,

Figura 3.71: Esempio di risposta del tipo corretta

3.6.2 Il quesito 5 e i liceali

Nel caso degli studenti liceali, la catalogazione delle risposte è risultata stavolta meno variegata, evidenziando soltanto risposte di tipo:

- omesse;
- errate, che possiamo suddividere in:
    * $log(x)$ è l'unica funzione di quell'insieme;
    * altre risposte "atipiche".

I risultati del quesito 5 nei liceali sono stati i seguenti:

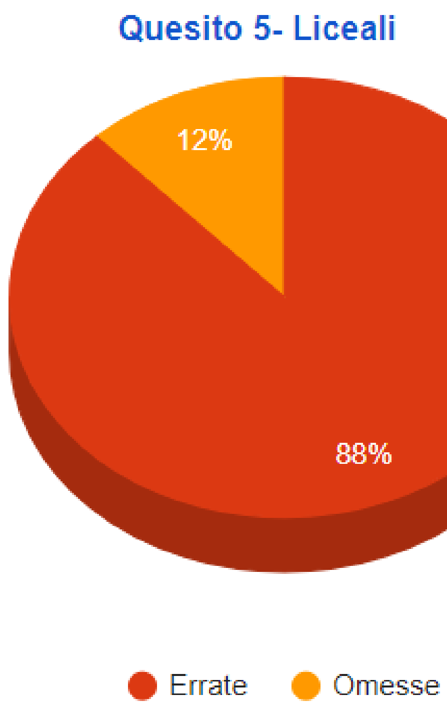
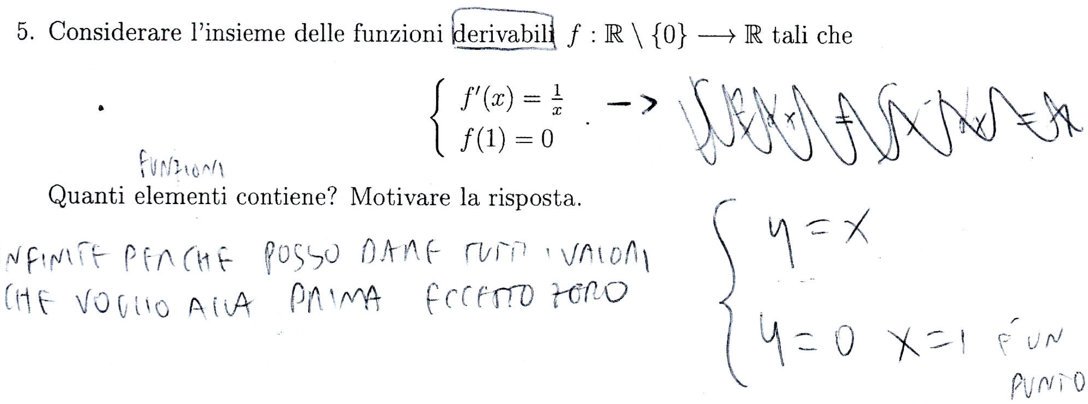


Figura 3.72: Risposte Quesito 5

Non è un dato sorprendente che nessuna risposta degli studenti liceali sia stata corretta, dato che neanche gli studenti universitari hanno avuto una buona riuscita in questo esercizio. Anche il tipo di risoluzione più gettonata poteva essere ipotizzato correttamente: 40 tra le 44 risposte errate riportano l'esempio di $\log(x)$ come unica funzione soddisfacente i dati dell'esercizio, confermando la debolezza dell'apprendimento riguardo alla funzione logaritmo e alla sua definizione. Le rimanenti risposte errate nelle figure da 3.73 a 3.76 si sono distinte per il tipo di conclusione e argomentazione.



5. Considerare l'insieme delle funzioni $\boxed{\text{derivabili}}$ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases} . \longrightarrow$$

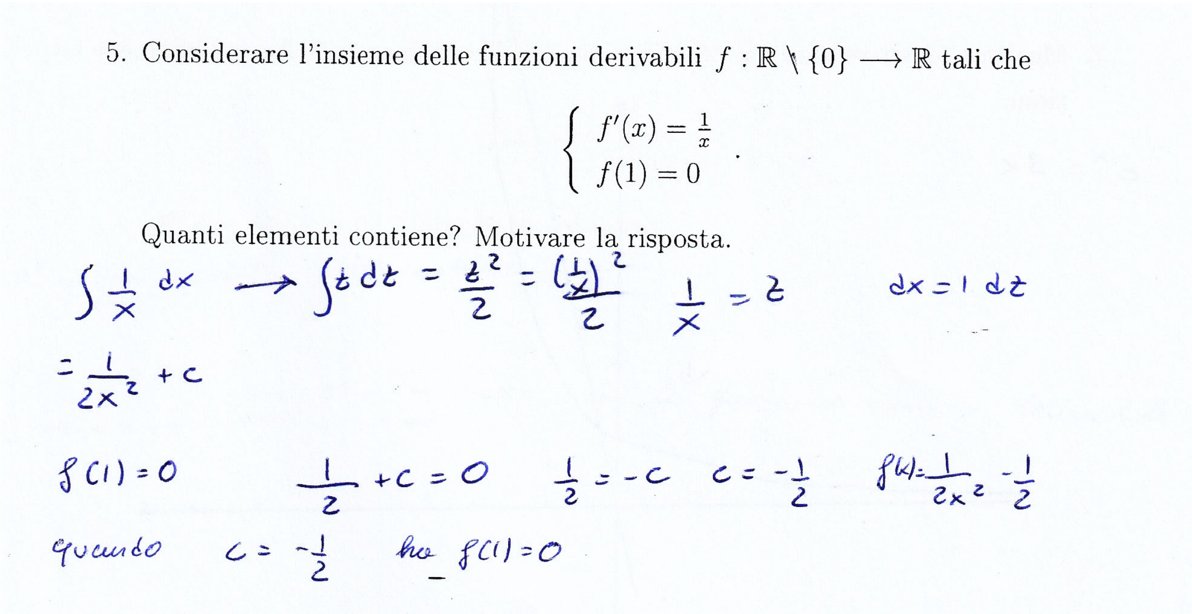
FUNZIONI

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

INFINITE PERCHÉ POSSO DARE TUTTI I VALORI CHE VOGLIO ALLA PRIMA ECCETTO ZERO

$$\begin{cases} y = x \\ y = 0 \quad x = 1 \end{cases}$$ È UN PUNTO

Figura 3.73: Esempio di risposta errata "atipica"



5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases} .$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

$\int \frac{1}{x}\, dx \longrightarrow \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\frac{1}{x})^2}{2} \qquad \frac{1}{x} = t \qquad dx = 1\, dt$

$= \frac{1}{2x^2} + c$

$f(1) = 0 \qquad \frac{1}{2} + c = 0 \qquad \frac{1}{2} = -c \qquad c = -\frac{1}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}$

quando $c = -\frac{1}{2}$ ho $f(1) = 0$

Figura 3.74: Esempio di risposta errata "atipica"

Queste prime due risoluzioni mostrano gravi errori nell'integrare $\frac{1}{x}$. Nonostante gli studenti abbiano affrontato approfonditamente e concluso il concetto di derivata, manca in questi il collegamento duale con quello di primitiva e questo tipo di risposta non può essere giustificato dall'insegnante semplicemente dicendo che che "gli alunni non hanno fatto abbastanza esercizi". Diversa è la conclusione mostrata dalle figure 3.75 e 3.76:

la prima interpreta la domanda come “quanti elementi contiene il dominio di $\log|x|$”, mentre la seconda riporta una conclusione sensata ma non fa attenzione alla definizione delle funzioni che crea.

5. Considerare l’insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

$F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

$F(x) = \ln|x|$

$x=0 \rightarrow \ln(1) = 0$

tranne lo 0 (escluso dal D)

contiene infiniti elementi, poiché l'argomento del logaritmo ha un valore assoluto.

Figura 3.75: Esempio di risposta errata “atipica”

5. Considerare l’insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

$f = \ln|x| + c$

INFINITI PERCHE' C RAPPRESENTA UNA COSTANTE CHE PUO' ASSUMERE VALORI INFINITI
* E RAPPRESENTA LA FAMIGLIA DI FUNZIONI PRIMITIVE DI $f'(x)$

Figura 3.76: Esempio di risposta errata “atipica”

3.7 Quesito 6

Il sesto quesito del questionario chiedeva:
Si dica se esiste, eventualmente calcolandone il valore,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin(x)}{2x - \cos(x)}.$$

I requisiti per la risoluzione di questo esercizio sono la conoscenza del

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \quad e \quad del \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$$

o, in alternativa, la capacità di impostare disuguaglianze per sfruttare il teorema del confronto. Il quesito è stato creato nella falsa riga dell'esercizio di maturità supplettiva in figura 3.77.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

1 La funzione $f(x) = \frac{3x - 2\,\text{sen}\,x}{2x - 3\,\text{sen}\,x}$ è, per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$:

A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Figura 3.77: Prototipo di esercizio di maturità

3.7.1 Il quesito 6 e i matematici

Le risposte a questo quesito sono state classificate nelle seguenti tipologie:

- corrette;
- omesse;
- errate.

I risultati del quesito 6 nei matematici sono stati i seguenti:

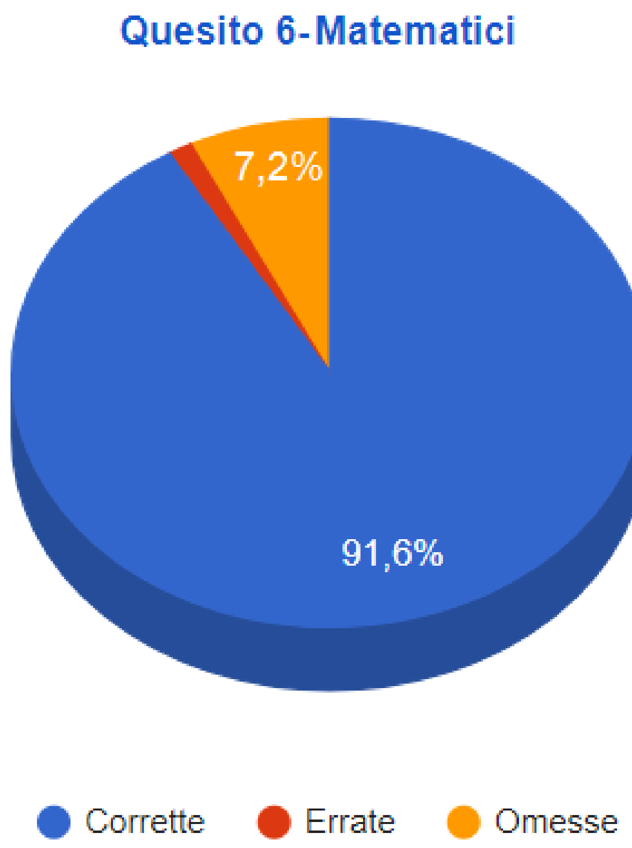
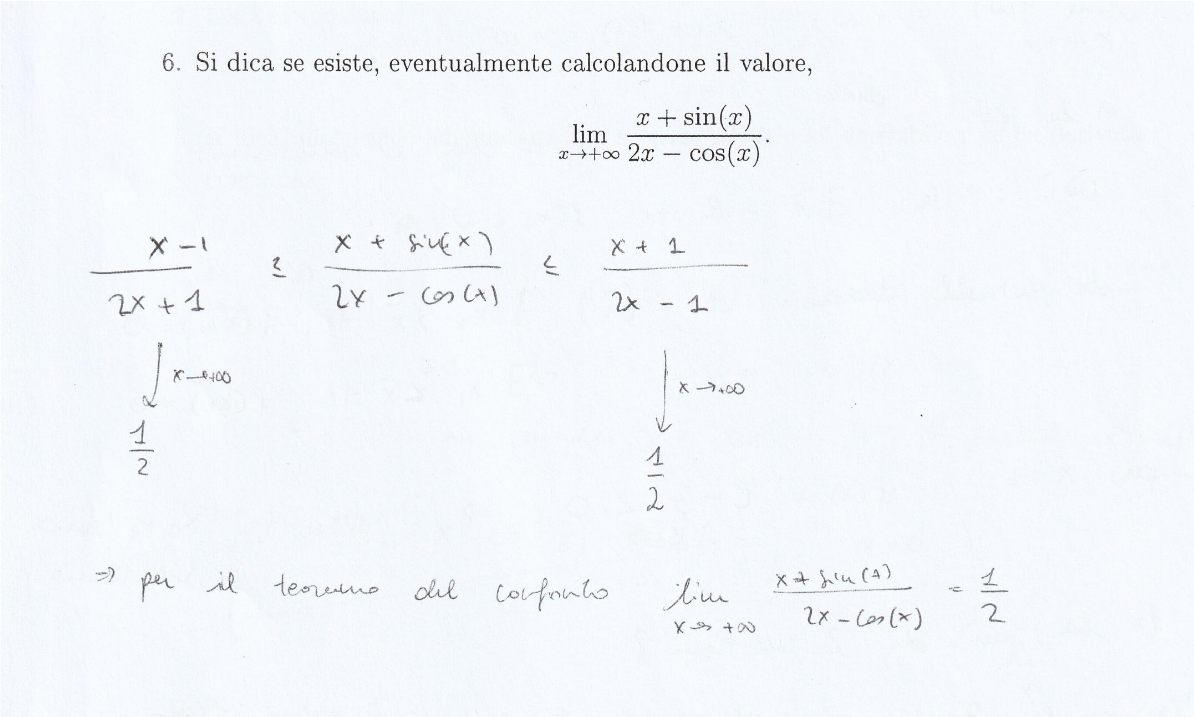


Figura 3.78: Risposte Quesito 6

In questo esercizio i matematici hanno soddisfatto le aspettative, mostrando soltanto un esempio di risoluzione errata con il teorema di De l'Hopital. Nonostante questo, sono comunque presenti 6 schede omesse, forse dettate da alcune lacune nella ricerca di procedimenti per la risoluzione del limite proposto. Tra le 76 risposte corrette ho selezionato quelle in figura 3.79 e 3.80 come standard di riferimento per le due macrocategorie di risoluzioni corrette, che mostrano come gli studenti siano preparati a svolegere esercizi meccanici come questo.



6. Si dica se esiste, eventualmente calcolandone il valore,

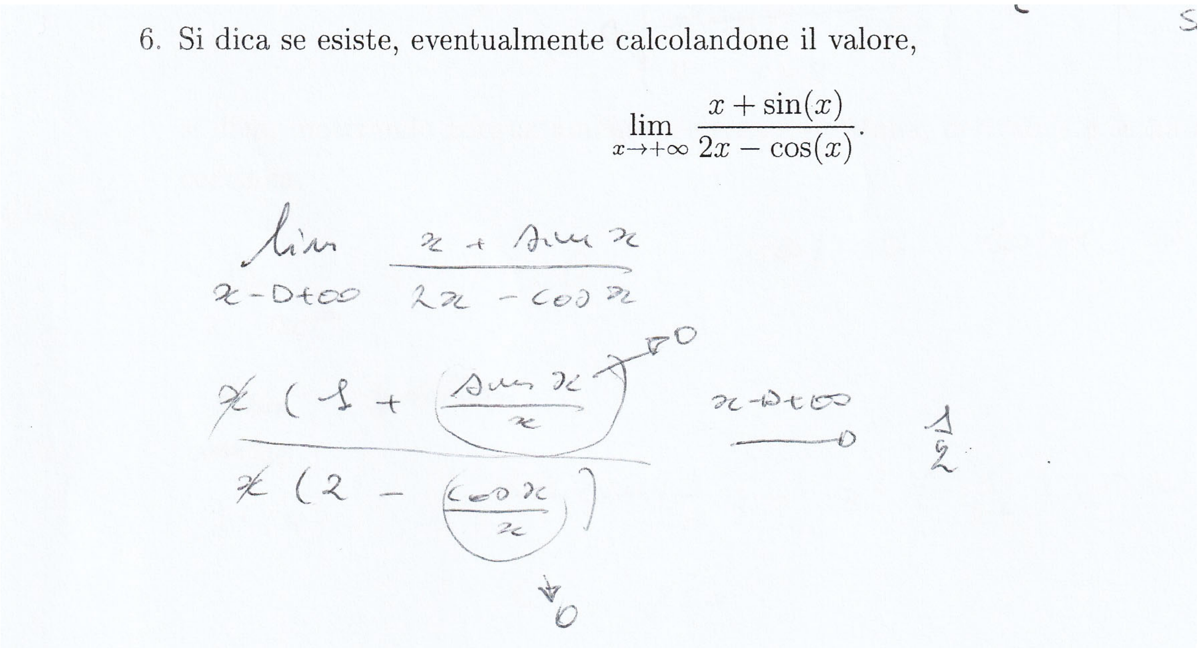
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)}.$$

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)} \leq \frac{x+1}{2x-1}$$

$$\frac{x-1}{2x+1} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{2} \qquad \frac{x+1}{2x-1} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ per il teorema del confronto $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)} = \frac{1}{2}$

Figura 3.79: Esempio di risposta corretta



6. Si dica se esiste, eventualmente calcolandone il valore,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x-\cos x}$$

$$\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2-\frac{\cos x}{x}\right)} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 0 \qquad \frac{\cos x}{x} \to 0$$

Figura 3.80: Esempio di risposta corretta

3.7.2 Il quesito 6 e i liceali

La catalogazione delle risposte dei liceali è avvenuta con lo stesso criterio riportato per i matematici ed ha portato ai seguenti risultati:

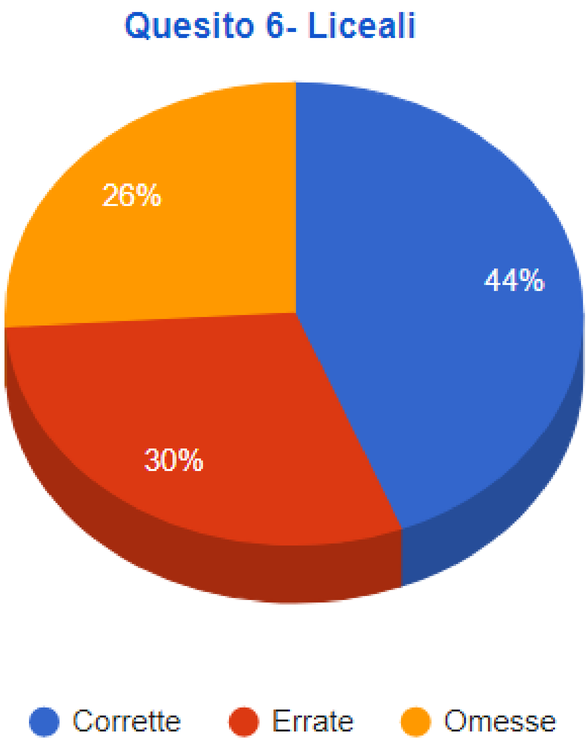


Figura 3.81: Risposte Quesito 6

In questo esercizio, 8 delle 15 risposte errate hanno confermato l'ipotesi che gli studenti liceali avrebbero utilizzato il teorema di De l'Hopital delegando a questo la risoluzione del quesito. Tra questi, la risoluzione in figura 3.82 mi ha colpito perché evidenzia come lo studente non fosse stato soddisfatto da una prima risoluzione "naif" basata sul ragionamento riguardante i gradi e si sia affidato alla regola di De l'Hopital per la risoluzione. Questo mostra come l'insicurezza e l'esigenza di giustificazione formale possono portare anche chi ha delle buone intuizioni a cadere nelle trappole del contratto didattico.

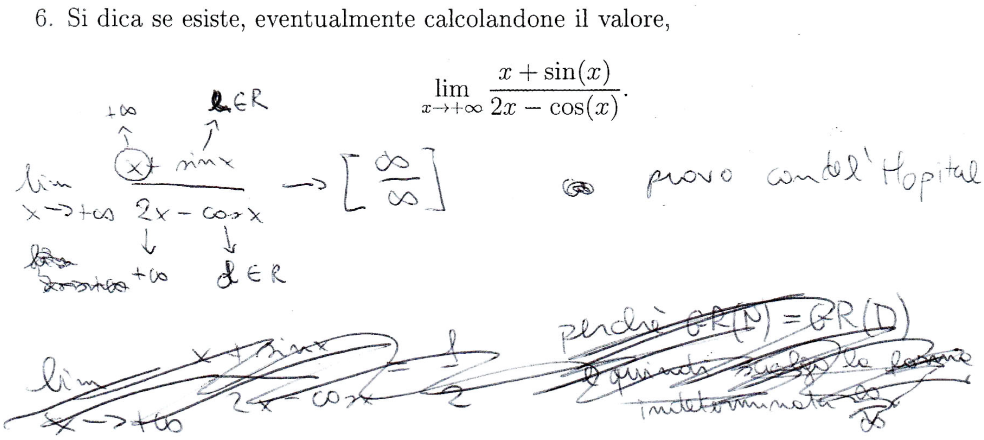


Figura 3.82: Esempio di risposta errata

Le restanti 7 risposte errate non riuscivano a utilizzare nessun tipo di ragionamento per sciogliere la forma indeterminata, e arrivavano a concludere i loro ragionamenti dicendo che il limite proposto non poteva esistere. L'alta percentuale di risposte omesse può essere spiegata se si considera che le risposte corrette (22) erano tutte dello stesso tipo cioè basate sul confronto dei gradi di numeratore e denominatore. Gli studenti liceali non hanno posto sufficiente attenzione alle applicazioni pratiche del teorema del confronto, e non lo hanno individuato come strategia risolutiva efficiente, a causa, ancora una volta, della concezione del teorema come entità "teorica" e non utilizzabile in un esercizio di questo tipo favorendo così le risposte omesse o basate sul teorema di De l'Hopital.

3.8 Quesito 7

L'ultimo quesito del questionario riporta:
Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni. Questo quesito era stato studiato sulla linea degli esercizi proposti negli esami di maturità ordinaria. Partendo dal quesito in figura 3.83 ho deciso di aggiungere una difficoltà: cambiando un segno nell'equazione la soluzione non è più una ma diventano due.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

4 Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.

Figura 3.83: Prototipo per l'esercizio 7

I requisiti per la risoluzione di questo esercizio, come per quello della maturità indicata, sono la conoscenza del teorema di esistenza degli zeri nella sua versione che garantisca anche l'unicità delle soluzioni in ciascun intervallo. Le risoluzioni che presentano soltanto grafici non possono essere considerate corrette perché, come in questo caso, potrebbero risultare fuorvianti e non hanno la formalità di una vera e propria dimostrazione.

3.8.1 Il quesito 7 e i matematici

Nelle risoluzioni dei matematici è risultata una variegata gamma di risposte diverse, che ho catalogato in:

- corrette;
- omesse;
- errate, che possiamo dividere in:
    * dimostrazione grafica;
    * unica soluzione;
    * utilizzo incompleto del teorema di esistenza degli zeri.

I risultati del quesito 7 sono stati i seguenti:

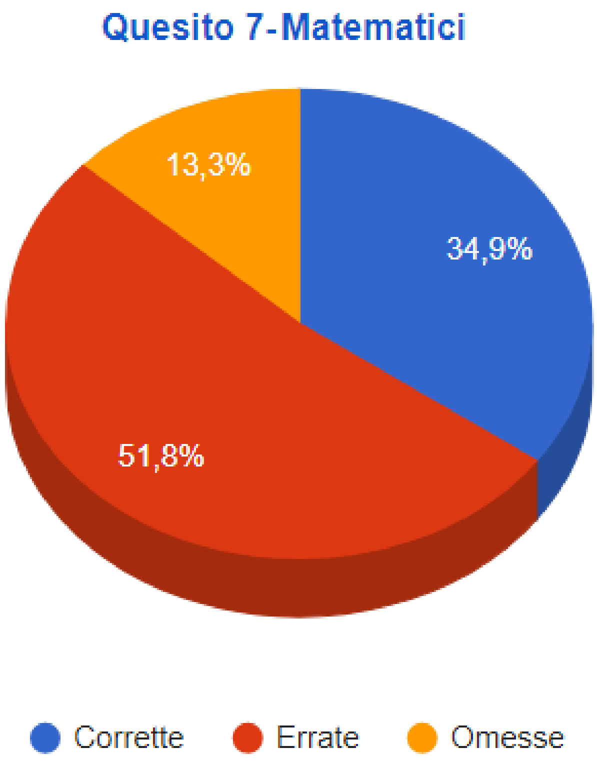
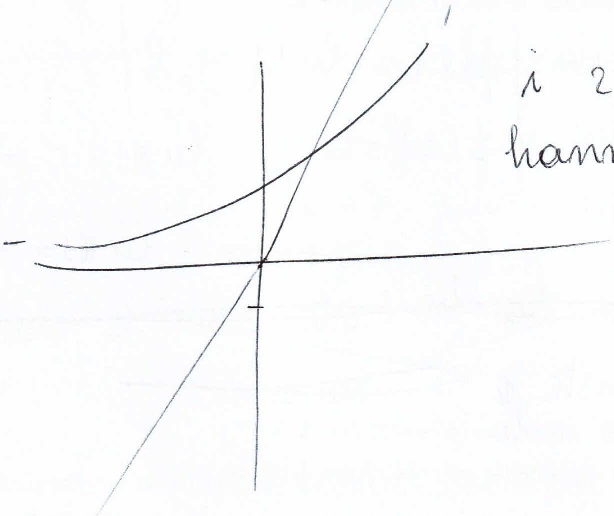


Figura 3.84: Risposte Quesito 7

Il tipo di risposta che ha avuto più successo è stato quello che sceglieva di mostrare, con il grafico, l'esistenza di queste due soluzioni. Ben 35 delle 43 risposte errate mostrano questo tipo di risoluzione che purtroppo non può essere accettata come corretta perché l'evidenza grafica non è una dimostrazione matematica. Ho riportato come esempi di tali risposte errate quelle in figura 3.86 e 3.85 che differiscono nella quantità di parole spese per validare il loro risultato.

7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

$e^x = 3x$



i 2 grafici hanno CHIARAMENTE 2 punti in comune!

basta a tentativi guardare i punti di $f(x) = 3x$ come sono messi ~~quando sono~~ in relazione a $f(x) = e^x$

Figura 3.85: Esempio di risposta errata con grafico

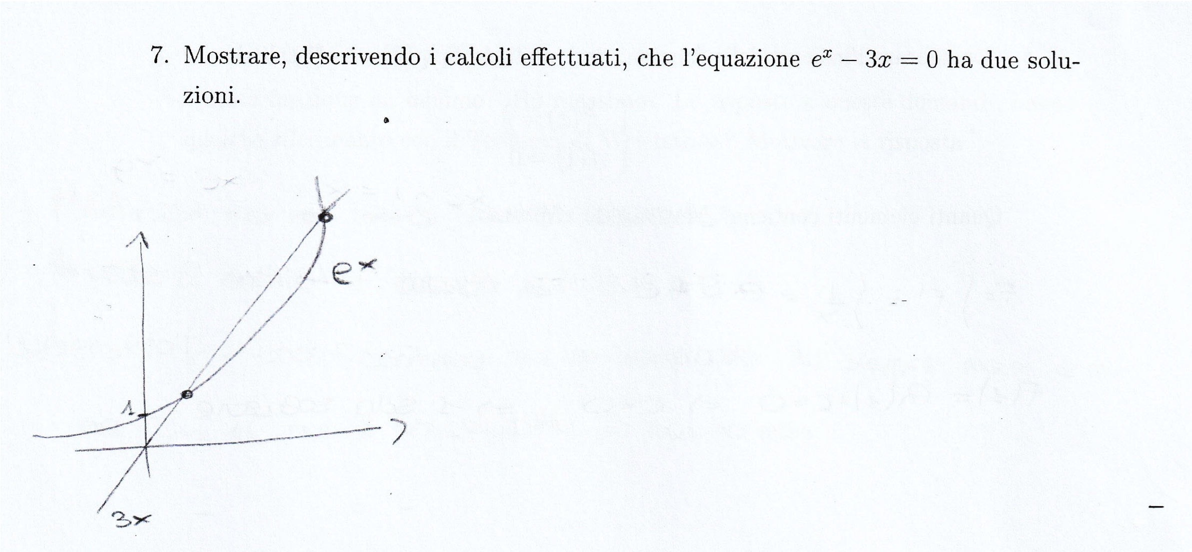


Figura 3.86: Esempio di risposta errata con grafico

Quattro delle risposte presentano invece una risoluzione "anomala", che rompe il contratto didattico, poiché si muovono nel tentativo di dimostrare che la soluzione sia soltanto una, contrariamente a ciò che riportava il testo dell'esercizio! (figura 3.70)

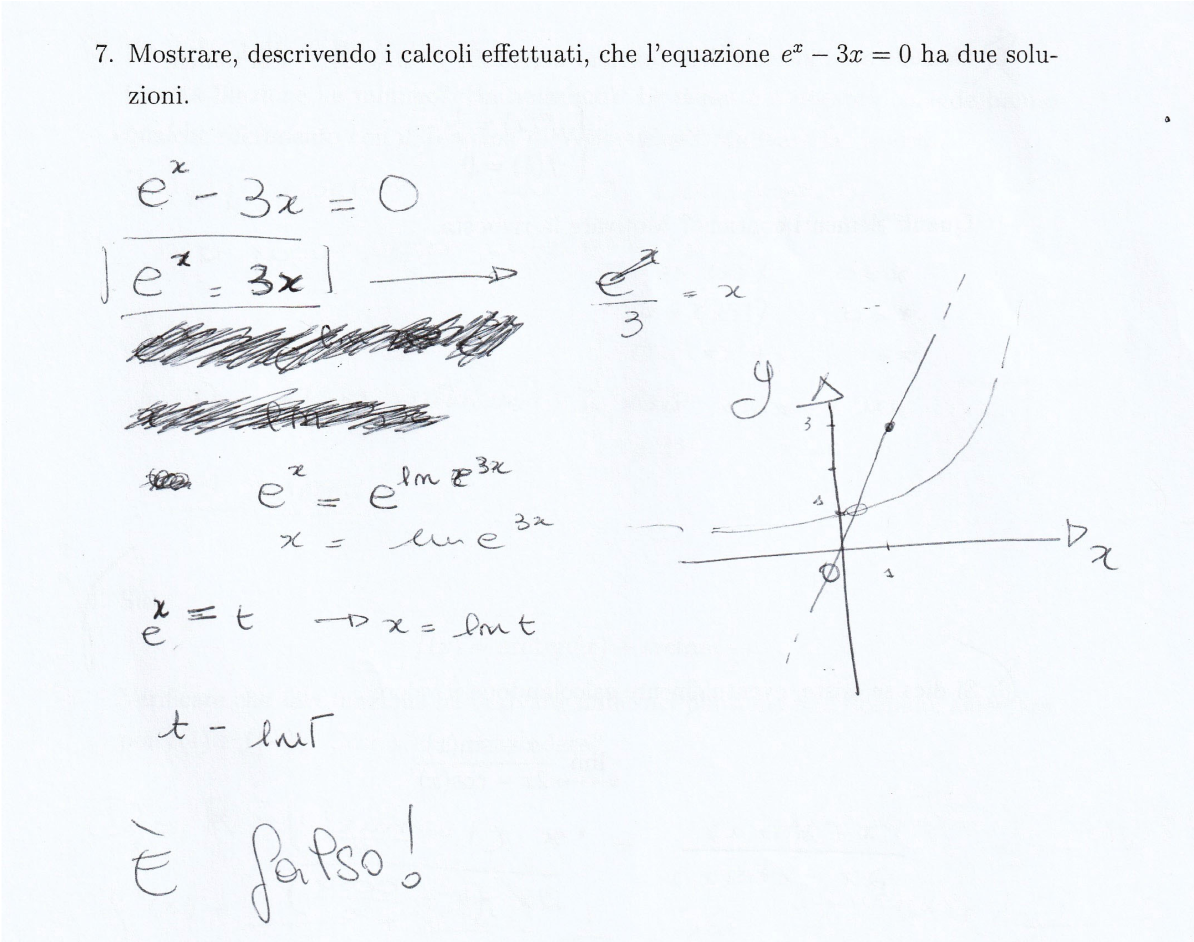
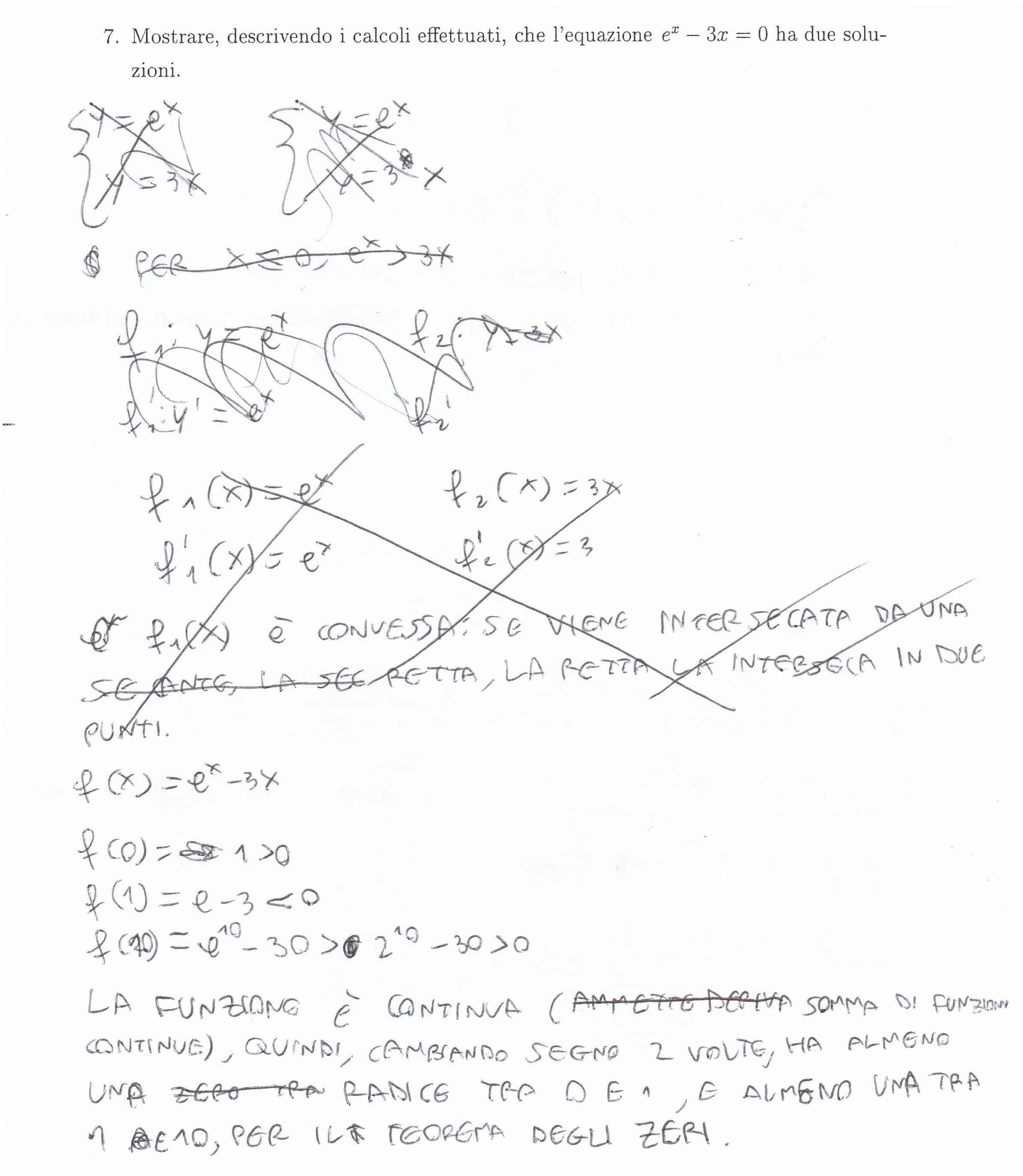


Figura 3.87: Esempio di risposta errata del tipo "unica soluzione"

Infine, tra le risposte errate, 6 sono state considerate non del tutto corrette perché, nonostante l'impostazione generale fosse buona, non facevano considerazioni sulla monotonia della funzione considerata. In questo senso queste risoluzioni dimostrano l'esistenza di almeno due soluzioni e non quella di esattamente due soluzioni. Tra queste ho selezionato le risposte in figura 3.88 e 3.89. La confusionarietà della risoluzione presentata in figura 3.88 è stata riscontata anche in altri ragazzi che, in questo esercizio più che in altri, non sanno bene come impostare la risoluzione e cosa l'insegnante si aspetti da loro.



7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

~~$\begin{cases} y = e^x \\ y = 3x \end{cases}$~~ ~~$\begin{cases} y = e^x \\ y = 3x \end{cases}$~~

~~PER $x \leq 0$, $e^x > 3x$~~

~~$f_1: y = e^x$ $f_2: y = 3x$~~

~~$f_1': y' = e^x$ f_2'~~

~~$f_1(x) = e^x$ $f_2(x) = 3x$~~

~~$f_1'(x) = e^x$ $f_2'(x) = 3$~~

~~$f_1(x)$ È CONVESSA: SE VIENE INTERSECATA DA UNA SECANTE, LA SEC RETTA, LA RETTA LA INTERSECA IN DUE PUNTI.~~

$f(x) = e^x - 3x$

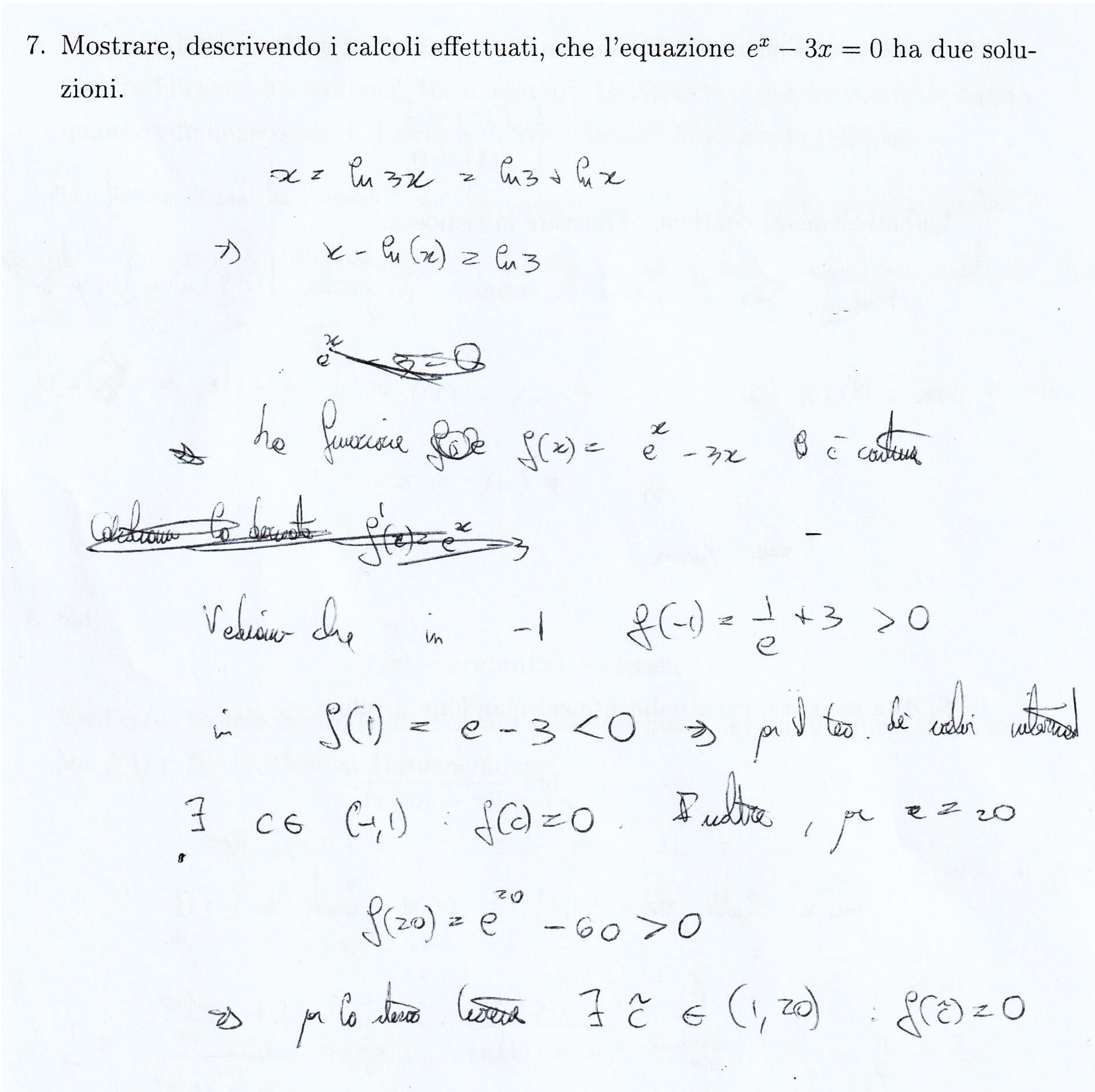
$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = e - 3 < 0$

$f(10) = e^{10} - 30 > 2^{10} - 30 > 0$

LA FUNZIONE È CONTINUA (~~AMMETTE DERIVA~~ SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE), QUINDI, CAMBIANDO SEGNO 2 VOLTE, HA ALMENO UNA ~~ZERO TRA~~ RADICE TRA 0 E 1, E ALMENO UNA TRA 1 E 10, PER IL TEOREMA DEGLI ZERI.

Figura 3.88: Esempio di risposta del tipo “le soluzioni sono almeno due”



7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

$x = \ln 3x = \ln 3 + \ln x$

$\Rightarrow \quad x - \ln(x) = \ln 3$

$\cancel{e^x - 3x = 0}$

$\Rightarrow$ La funzione $f(x) = e^x - 3x$ è continua

~~Calcoliamo la derivata~~ $\cancel{f'(x) = e^x - 3}$

Vediamo che in -1 $f(-1) = \frac{1}{e} + 3 > 0$

in $f(1) = e - 3 < 0$ $\Rightarrow$ per il teo. dei valori intermedi

$\exists\, c \in (-1,1) : f(c) = 0$. Inoltre, per $x = 20$

$f(20) = e^{20} - 60 > 0$

$\Rightarrow$ per lo stesso teorema $\exists\, \tilde{c} \in (1, 20) : f(\tilde{c}) = 0$

Figura 3.89: Esempio di risposta del tipo "le soluzioni sono almeno due"

Tra le 29 risposte giudicate corrette ho scelto di riportare le due seguenti a titolo rappresentativo. Gli studenti che hanno impostato il giusto ragionamento hanno ricavato agevolmente l'esistenza e unicità delle due soluzioni, anche senza l'aiuto della rappresentazione grafica, sfuggendo così a una clausola del contratto didattico secondo la quale in analisi matematica l'alunno ritiene che l'insegnante si aspetti una risoluzione che comprenda anche grafici delle funzioni considerate (figura 3.90).

7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

$\cancel{e^x = 3x \Rightarrow x = \ln(3x) = \ln 3 + \ln x}$

$\cancel{x - \ln x = \ln 3}$

$e^x - 3x = 0$ [illegible]

- $\lim_{x \to -\infty} (e^x - 3x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x) = +\infty$

- DERIVATA: $f(x) = e^x - 3x$

  $f'(x) = e^x - 3$

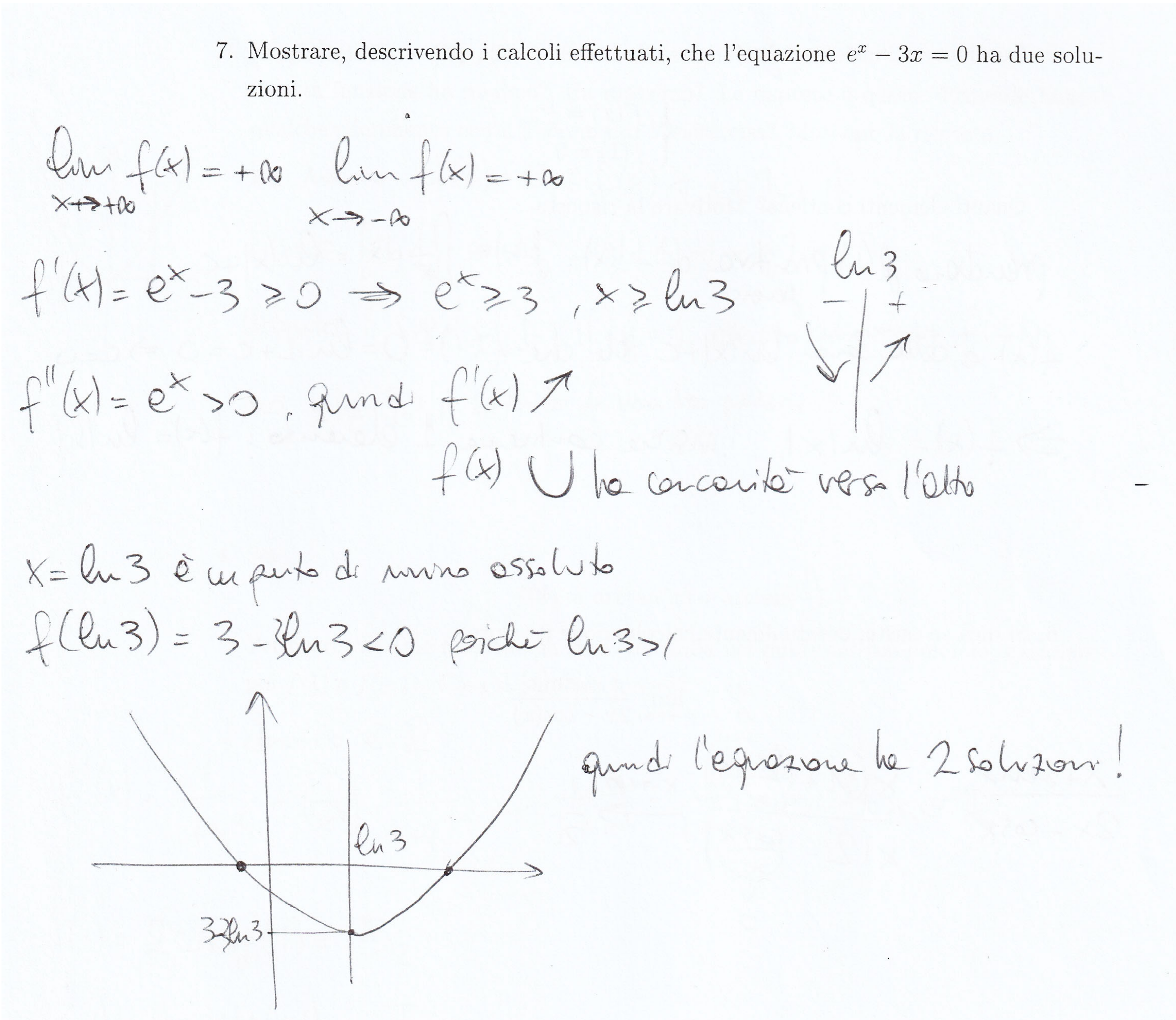
$\Rightarrow f'(x) = 0$ per $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$ punto di minimo.

Per $x = \ln 3$ $f(x) = e^{\ln 3} - 3 \cdot \ln 3 = 3 - 3\ln 3 = 3(1 - \ln 3)$

con $\ln 3 > \ln e = 1 \Rightarrow f(x) < 0$

$\Rightarrow$ perché $f''(x) = e^x > 0 \ \forall x$, necessariamente la funzione $f(x)$ interseca l'asse delle x in due punti distinti.

Figura 3.90: Esempio di risposta corretta



7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = e^x - 3 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 3$, $x \geq \ln 3$

$\ln 3$
$-$ | $+$
$\searrow$ | $\nearrow$

$f''(x) = e^x > 0$, quindi $f'(x) \nearrow$

$f(x)$ $\cup$ ha concavità verso l'alto

$x = \ln 3$ è un punto di minimo assoluto

$f(\ln 3) = 3 - 3\ln 3 < 0$ poiché $\ln 3 > 1$

quindi l'equazione ha 2 soluzioni!

Figura 3.91: Esempio di risposta corretta

3.8.2 Il quesito 7 e i liceali

La valutazione del quesito somministrato ai liceali è avvenuta con la stessa catalogazione usata per i matematici, ed ha portato ai seguenti dati:

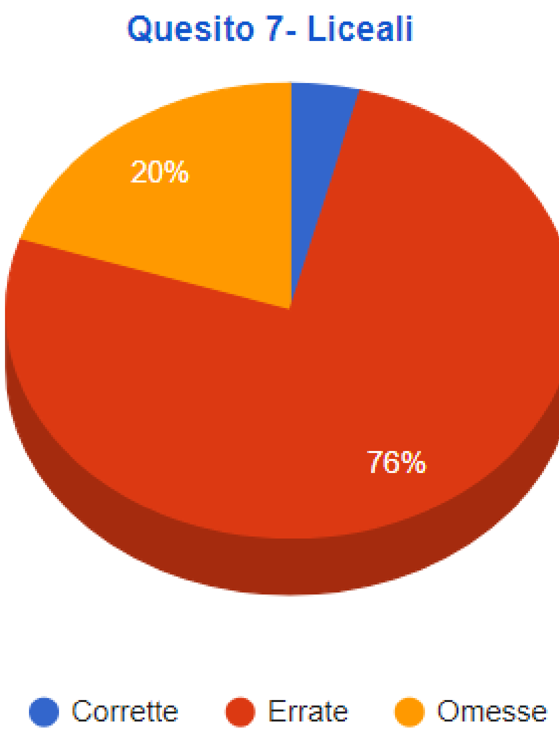
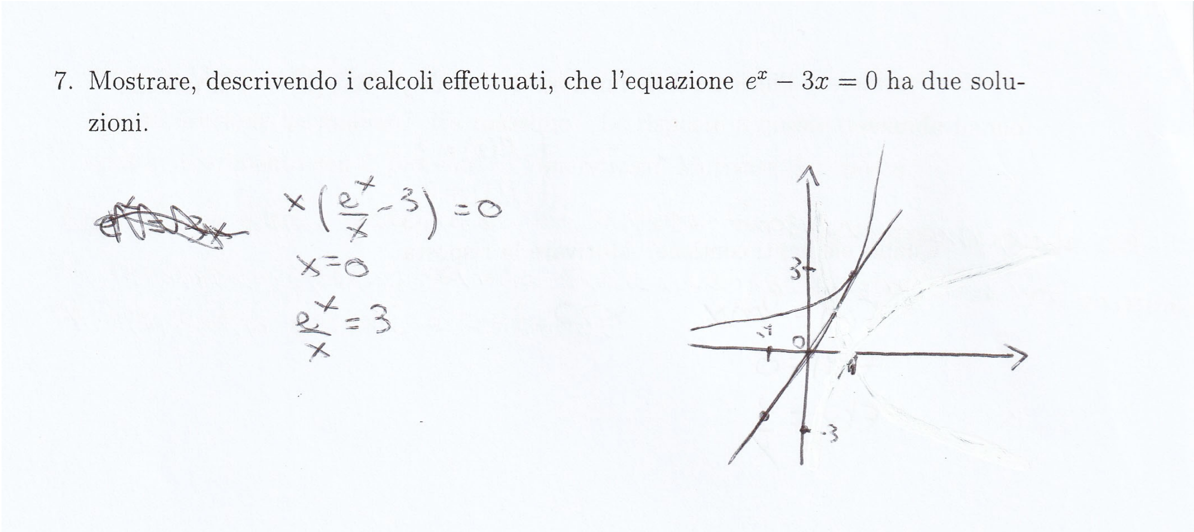


Figura 3.92: Risposte Quesito 7

In questo caso il tipo di risposta più gettonato è stato quello che sfruttava il grafico per mostrare l'esistenza delle due soluzioni (31 risposte su 38 catalogate come errate), seguito dalle omesse (10) e dai restanti tipi di risposta errata con esempi dati dalle figure 3.93 e 3.94.



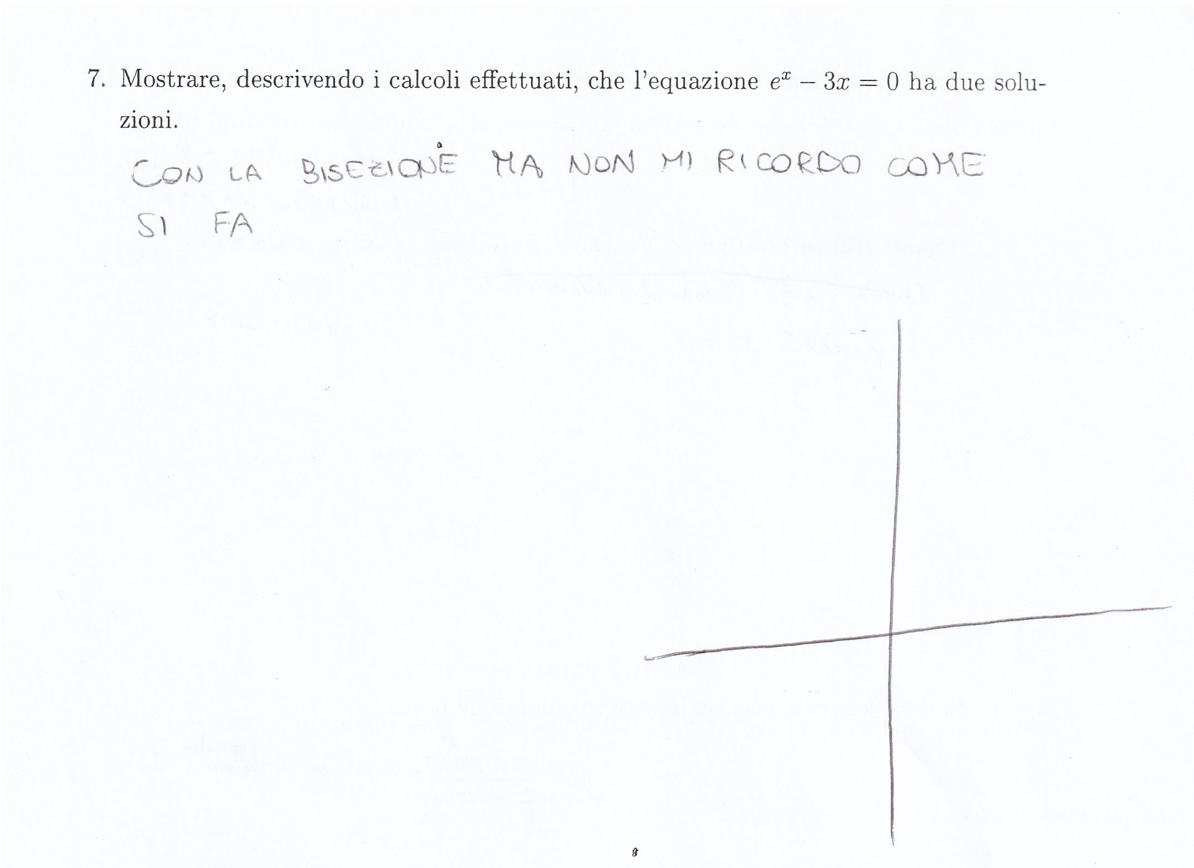
7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

$x\left(\frac{e^x}{x} - 3\right) = 0$

$x = 0$

$\frac{e^x}{x} = 3$

Figura 3.93: Esempio di risposta errata con calcoli atipici



7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

CON LA BISEZIONE MA NON MI RICORDO COME SI FA

Figura 3.94: Esempio di risposta errata

Ho trovato che la risoluzione in figura 3.94 fosse interessante perché lo studente inquadra il tipo di domanda proposta riconoscendo un metodo cui fare riferimento per calcolare le soluzioni, ma non nota la sottile differenza che vi è tra dimostrare che queste esistono e trovarle. In questo caso lo sforzo dello studente si è spostato dal tentativo di ragionare sull'esercizio a quello di ricordare il metodo di bisezione, portandolo a non concludere l'esercizio.
Tra le due risposte corrette individuate, quella seguente mi è piaciuta perché caratterizzata da ragionamenti personali e perché cela un grado di apprendimento con una buona robustezza. Lo studente, nel trasformare l'equazione nella forma $\frac{\exp(x)}{x} = 3$ ha, a mio avviso, aggiunto un grado di difficoltà all'esercizio, ma questo non lo ha distolto dall'ottenere una conclusione esaustiva e corretta formalmente.

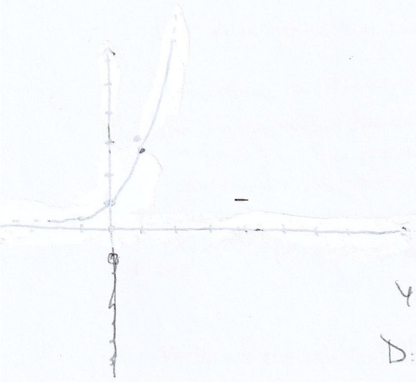
7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

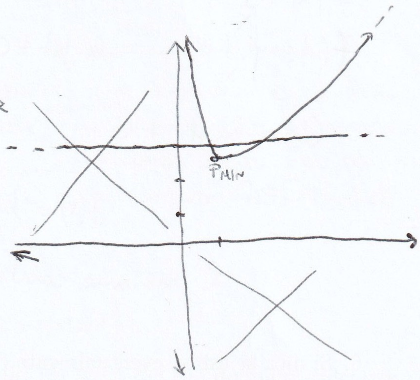
$e^x - 3x = 0$

$e^x = 3x$

$\dfrac{e^x}{x} = 3$

$x = 0$ non è soluzione quindi posso dividere tutto per x.





$y = \dfrac{e^x}{x}$

D: $x \neq 0$

segno $f(x) > 0$ per $x > 0$ → per gerarchia infiniti

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

~~no as. orizzontale~~

~~no as. obliquo~~

no as. orizzontale dx

no as. obliquo dx

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x) \geq 0 \quad x \geq 1$

	1	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗
	MIN	

$y_{MIN} = e$

il minimo è sotto alla retta $y = 3$ pertanto l'equazione $\dfrac{e^x}{x} = 3$ ha 2 soluzioni

Figura 3.95: Esempio di risposta corretta

Capitolo 4

Analisi della robustezza dell'apprendimento di alcuni studenti

La lente dell'apprendimento robusto di cui si è parlato nel capitolo 1, è stata utilizzata per studiare le competenze sviluppate dagli studenti, come nell'esempio proposto da Gianfranco Arrigo in [9]. Il primo step per la verifica dell'apprendimento degli studenti è stato quello di selezionare gli allievi che hanno avuto maggior successo nel test proposto nel capitolo 3 per sottoporli a colloqui intesi a sondare le reali ragioni che li hanno portati alla risposta corretta e la loro capacità di difenderla di fronte a obiezioni avanzate da una terza persona autorevole. Per costruire i colloqui si è cercato di eliminare gli effetti del contratto didattico: questi hanno avuto luogo fuori dall'aula e l'insegnante non ha assistito. La scelta di interpretare io stessa, ancora studentessa, la figura del ricercatore ha facilitato la creazione di un clima disteso necessario per la riuscita delle interviste ed ha limitato gli effetti del contratto sperimentale.
Durante i colloqui ho deciso di curare i miei modi, gesti, ed il tono della voce, per assomigliare il più possibile ad un amico che si interessa di ciò che l'allievo ha fatto o pensato nello svolgere il questionario. É stata inoltre creata con gli allievi intervistati una relazione d'intesa, consentendo la modifica di alcune risoluzioni del test che sembravano loro errate con la promessa di non informare l'insegnante dei cambiamenti effettuati.

Sulla linea delle ricerche in didattica precedentemente citate, al fine della valutazione delle competenze, si sono definiti tre livelli di robustezza:

- Primo livello: l'allievo conferma la risposta data, giustificandola. Per testare il suo raggiungimento, si chiede al soggetto di confermare e giustificare il proprio operato.

- Secondo livello: l'allievo resiste a un'obiezione che riesce a contrastare con le sue conoscenze. Per valutare il suo raggiungimento, ci si avvale di un'obiezione formalmente errata, ma apparentemente corretta, nel tentativo di confondere lo studente.

- Terzo livello: l'allievo resiste anche a obiezioni che non è in grado di verificare nei dettagli, producendo controesempi o ribattendo con obiezioni giustificate; oppure è in grado di generalizzare il risultato ottenuto, anche con piccoli aiuti dati dal ricercatore, aggiundendo dettagli trascurati nella fase scritta.

Per valutare il livello di robustezza acquisito si interviene attraverso obiezioni autoritarie, oppure, quando l'argomento si presta e lo studente ha superato il primo livello di apprendimento, si spinge verso generalizzazioni non richieste nel test.

4.1 Descrizione e interpretazione dei risultati

In questa sezione sono riportati i risultati della sperimentazione "naif" dell'apprendimento robusto in sette matematici e cinque liceali; ciascuno intervistato in merito a un esercizio tra quelli che aveva risolto correttamente.
Ai fini di alleggerire la notazione, si indicherà con "R" la figura del ricercatore, con la lettera "M" (o "L") il matematico (o il liceale) intervistato, aggiungendo un numero compreso tra 1 e 7, relativo al quesito in oggetto dello studio. L'ipotesi di partenza con la quale era stata fatta la sperimentazione è quella di ritenere che gli studenti universitari avrebbero dovuto conseguire almeno un apprendimento di secondo livello, mentre dai liceali ci aspettavamo che l'apprendimento potesse essere ancora debole e fragile di fronte agli attacchi del ricercatore.
I risultati della sperimentazione che andiamo ad analizzare, possono essere riassunti dalla

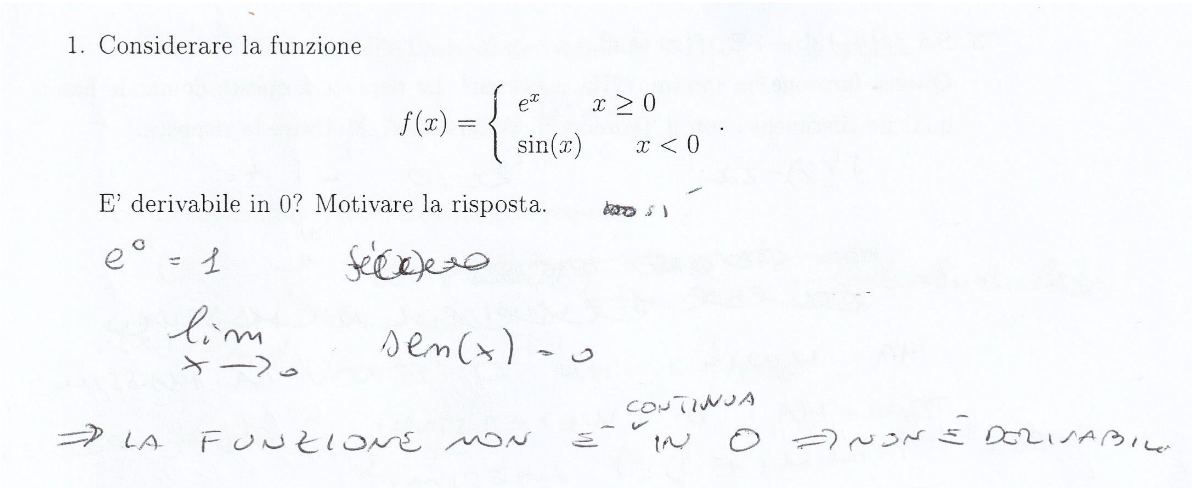
tabella sottostante.

Studente	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	L1	L3	L4	L6	L7
Livello di robustezza	1	3	3	3	1	3	3	3	1	3	1	3

Attraverso l'analisi di stralci d'intervista con matematici e liceali si cercherà di comprendere perché nei matematici ci siano stati due casi di apprendimento non completamente robusto e mostreremo come alcune risposte dei liceali si siano invece mostrate molto mature.

4.1.1 Apprendimento robusto nei matematici

L'intervista fatta dal ricercatore al matematico indicato come "M1" ha prodotto il seguente interessante stralcio, inerente la risposta in figura 4.1.


1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases}.$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta.

$e^0 = 1$

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

⇒ LA FUNZIONE NON È CONTINUA IN 0 ⇒ NON È DERIVABILE

Figura 4.1: Risposta originaria dello studente M1

Stralcio Matematico 1

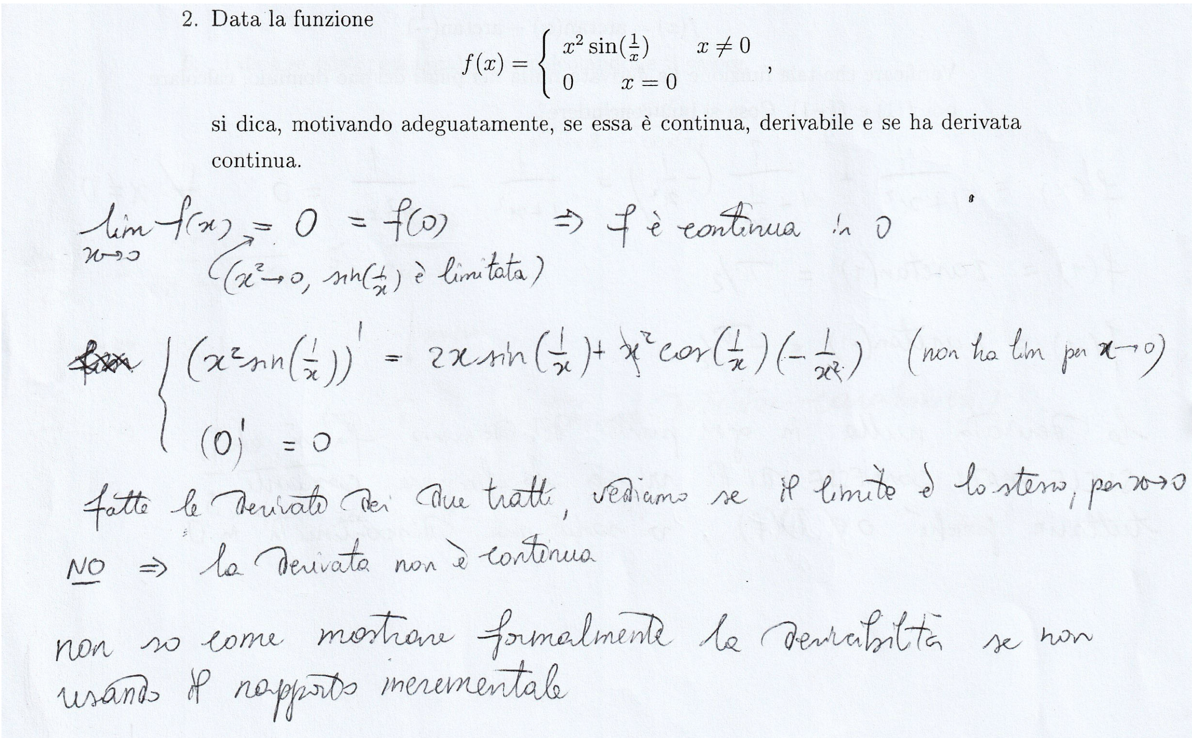
R: Leggiamo insieme quello che hai scritto...

M1: Che la funzione non è derivabile perché non è continua.

R: E come mai non è continua?

M1: Non me lo ricordo...Ho fatto il limite; questa cosa qui (indica) fa zero e questa fa uno...Quindi non è derivabile.

R: Ma guarda; se facciamo i limiti della derivata da destra e da sinistra in zero, questi fanno 1. Non ti sembra che sia derivabile?
M1: Eh, infatti. È derivabile allora... però non lo so, che non è continua l'ho capito... però non so cosa ho fatto qui (indica).
In questo caso lo studente M1 raggiunge con delle insicurezze un apprendimento robusto di primo livello, ma non riesce a superare il test riguardante il secondo livello, mostrando una grande insicurezza e poca confidenza con questi concetti basilari.
Positive si sono rivelate invece le interviste fatte con i matematici intervistati riguardo al secondo e terzo quesito (M2 e M3), che hanno mostrato un apprendimento robusto di terzo livello e una buona capacità di controbattere alle obiezioni rivolte dal ricercatore in maniera tranquilla, rimuovendo gli ostacoli indotti dalle metapratiche. Nonostante il buon esito delle interviste è da notare il fatto che le seguenti due risoluzioni originali scritte dagli studenti sono state catalogate corrette anche se presentavano qualche imprecisione. In seguito sono riportati le risoluzioni degli studenti M2 ed M3 (figure 4.2 e 4.3) e gli stralci d'intervista relativi.


2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

si dica, motivando adeguatamente, se essa è continua, derivabile e se ha derivata continua.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f$ è continua in 0

$(x^2 \to 0,\ \sin(\frac{1}{x})$ è limitata$)$

$$\begin{cases} (x^2 \sin(\frac{1}{x}))' = 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2\cos(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) & (\text{non ha lim per } x\to 0) \\ (0)' = 0 \end{cases}$$

fatte le derivate dei due tratti, vediamo se il limite è lo stesso, per $x \to 0$

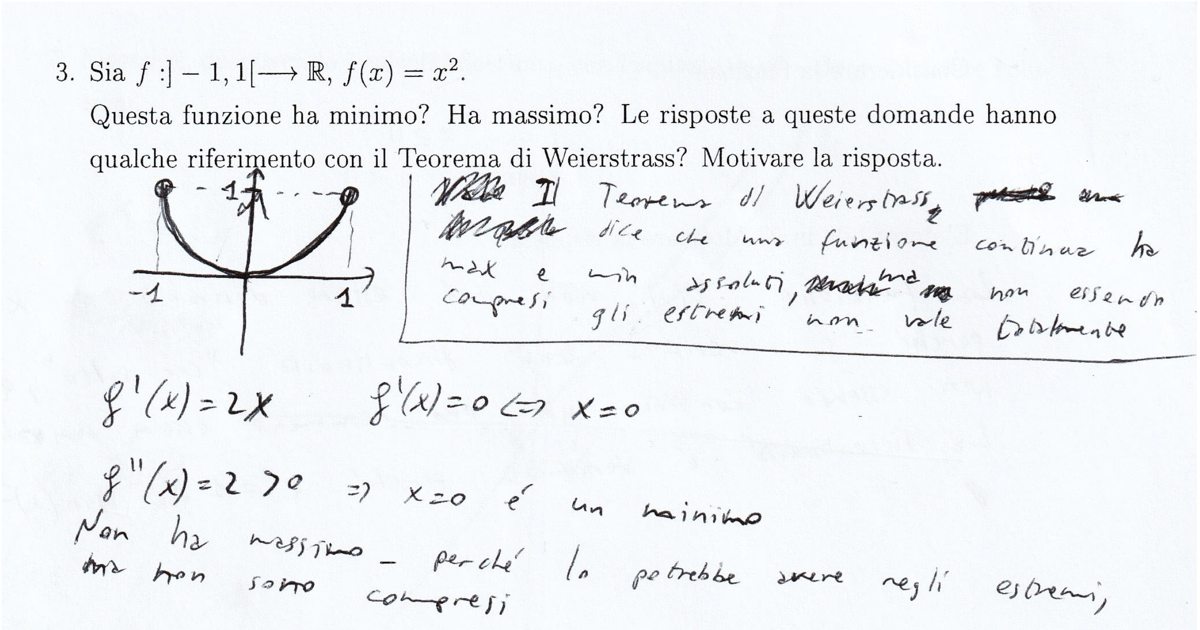
NO $\Rightarrow$ la derivata non è continua

non so come mostrare formalmente la derivabilità se non usando il rapporto incrementale

Figura 4.2: Risposta originaria dello studente M2

Stralcio Matematico 2

R: L'esercizio chideva se questa funzione è continua, derivabile e se ha derivata continua...tu fai il limite da destra e sinistra in zero per vedere se è continua, calcoli la derivata, trovi limiti diversi e dici che la derivata non è continua. Per la derivabilità dici che andrebbe fatto con il rapporto incrementale ma poi non lo fai...
M2: (ride)
R: Vuoi ripensare a qualcosa, confermi tutto?
M2: Allora, dovrei ricontrollare...(pensa)ok, si direi di si.
R: L'ultimo pezzo... perché useresti il rapporto incrementale? Io ho corretto i compiti, ma ancora non ho trascritto le risposte, se vuoi cambiare qualcosa...fallo ora... ad esempio, il rapporto incrementale va usato?
M2: È una funzione definita a tratti...il rapporto incrementale...
R: Sarebbe il limite...
M2: Sì questo...(scrive)... fa zero...la risposta dovrebbe essere è derivabile... sì... potevo farlo!
R: Quindi per te è sensato che una funzione derivabile abbia derivata non continua, non ti suona strano?!
M2: Si, cioè in generale è vero, può esistere, sono sicuro che esista, cioè tipo (indica quella del foglio).



3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

Il Teorema di Weierstrass dice che una funzione continua ha max e min assoluti, ma non essendo compresi gli estremi non vale totalmente

$f'(x) = 2x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x = 0$ é un minimo

Non ha massimo perché lo potrebbe avere negli estremi, ma non sono compresi

Figura 4.3: Risposta originaria dello studente M3

Stralcio Matematico 3

R: Rileggiamo insieme quello che hai scritto, fermami se non ti torna qualcosa così lo modifichiamo...
M3: Ok!
(leggiamo e non vengo fermata)
M3: Qui ho articolato molto poco, devo dire che non esistono massimi assoluti, ma neanche relativi. Prima si fa la ricerca di punti stazionari, si valuta la derivata prima nei punti e si possono trovare minimi o massimi, ma anche flessi, poi però devo vedere il comportamento agli estremi dell'intervallo, che però qui è aperto!
R: Quindi non si può applicare Weierstrass? Molti tuoi compagni lo hanno applicato... alla fine quella è una parabola...
M3: Nono esiste il *sup*, ma non il *max*! Dovevano stare attenti alle ipotesi si vede...

Per le analisi relative ai quesiti 4 e 5, non avendo a disposizione tutte le e-mail degli studenti ed essendo già poche le risposte corrette relative al quesito 5, ho selezionato le risoluzioni in figura 4.4 e 4.5 anche se contenevano delle piccole imperfezioni.

4. Sia

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$f(1) = \frac{\pi}{2}$ $\quad f(-1) = -\frac{\pi}{4}$ una funzione con derivata nulla e continua è costante solo nelle componenti connesse. (0 non è nel dominio)

Figura 4.4: Risposta originaria dello studente M4

5. Considerare l'insieme delle funzioni derivabili $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

Quanti elementi contiene? Motivare la risposta.

Contiene tutte le funzioni del tipo $\ln(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.
Basta integrare $\frac{1}{x}$.

Figura 4.5: Risposta originaria dello studente M5

La speranza era quella che nel colloquio gli studenti avrebbero notato i loro errori, chiedendo di modificarli, ma mantenendo la conclusione finale che era comunque corretta. Così è stato per quanto riguarda il matematico M4, con risultati di apprendimento robusto di terzo livello, ma non per il matematico M5, che si è fermato a un apprendimento con robustezza basilare; come si evince dai seguenti stralci.

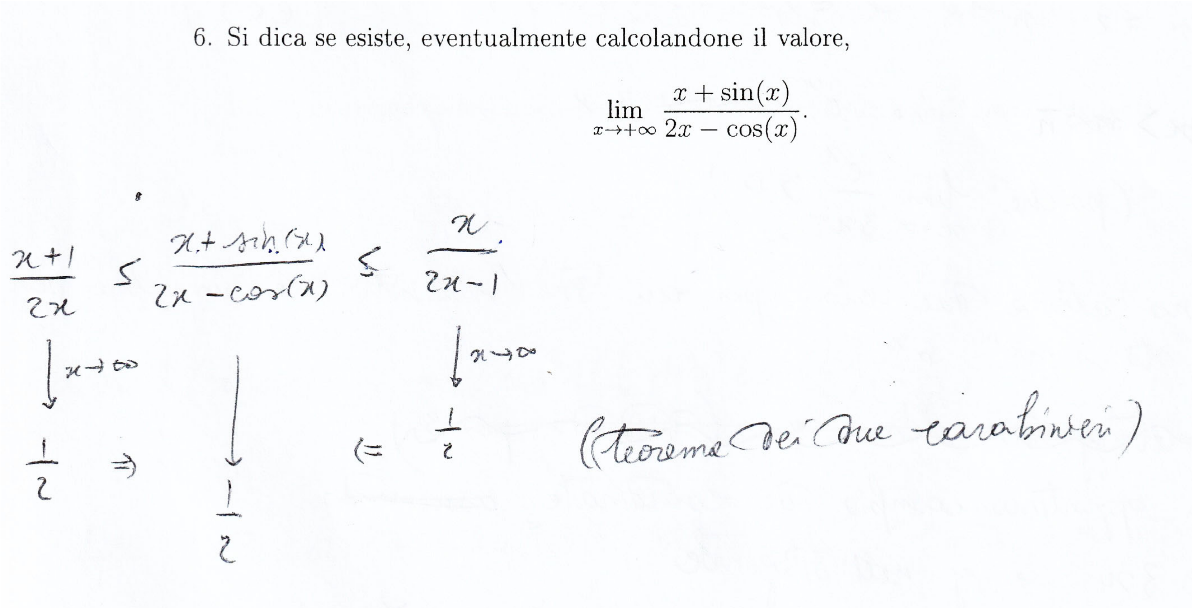
Stralcio Matematico 4

R: Rileggiamo...(leggiamo insieme ciò che ha scritto).
M4:(mi ferma) Qui errore stupido, ci andava un due!
R: Si...ma apparte quello, ti sembra tutto corretto? Ci sono dei teoremi che dicono che se la derivata si annulla allora la funzione deve essere costante... quindi un solo valore dappertutto, non credi?
M4: Mh...no... comunque la mia conclusione è giusta perché la funzione è costante in $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$, e non su tutto $\mathbb{R}$ perché lo zero non è compreso!

Stralcio Matematico 5

R: Ti chiedevo quanti elementi conteneva l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in $\mathbb{R}$ che soddisfano queste relazioni...dici che contiene tutte le funzioni della forma $\log(x)+c$...
M5: Eh li ci andava un modulo!
R: Quindi quante sono queste funzioni che crei?
M5: Allora... si può dire che è la stessa funzione traslata... infinite!
R: Ti convince del tutto questa risoluzione?
M5: Ci vuole il modulo, ci avevo pensato...
R: E il fatto che molti dicono che la soluzione è unica perché è un problema di Cauchy con dato al bordo...
M5: Ah no, aspetta però! (mi interrompe) se la $f(1)$ deve essere uguale a zero allora è solo una...perché è un problema di Cauchy questo!
R: Allora non sono infinite, è una sola...
M5: Sisi, è vero, da infinite passa a una, è giusto!

Nel caso del quesito 6, nel ricercare una risoluzione che facesse utilizzo del teorema del confronto, ho dovuto accontentarmi di quella con disuguaglianze errate mostrata in figura 4.6. In questo caso la risoluzione dell'intero questionario lasciava presupporre che lo studente si sarebbe accorto in sede d'intervista degli errori di calcolo e, in effetti, si è dimostrata un esempio di apprendimento robusto di terzo livello, come si osserva dallo stralcio seguente.



6. Si dica se esiste, eventualmente calcolandone il valore,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)}.$$

$$\frac{x+1}{2x} \le \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)} \le \frac{x}{2x-1}$$

$$\frac{x+1}{2x} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+\sin(x)}{2x-\cos(x)} \to \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} \xleftarrow{x\to\infty} \frac{x}{2x-1}$$

((teorema dei due carabinieri)

Figura 4.6: Risposta originaria dello studente M6

Stralcio Matematico 6

R: Non ti sembrava più facile usare De l'Hopital? Sei sicuro di tutto quello che hai scritto?

M6: tendenzialmente cerco prima di usare dimostrazioni un po' più... carine...è anche comodo ma questo è più elegante, visibile... Però probabilmente qui ero stanco, queste disuguaglianze sono sbagliate...(le modifica in maniera corretta) Ora dovrebbero avere senso!

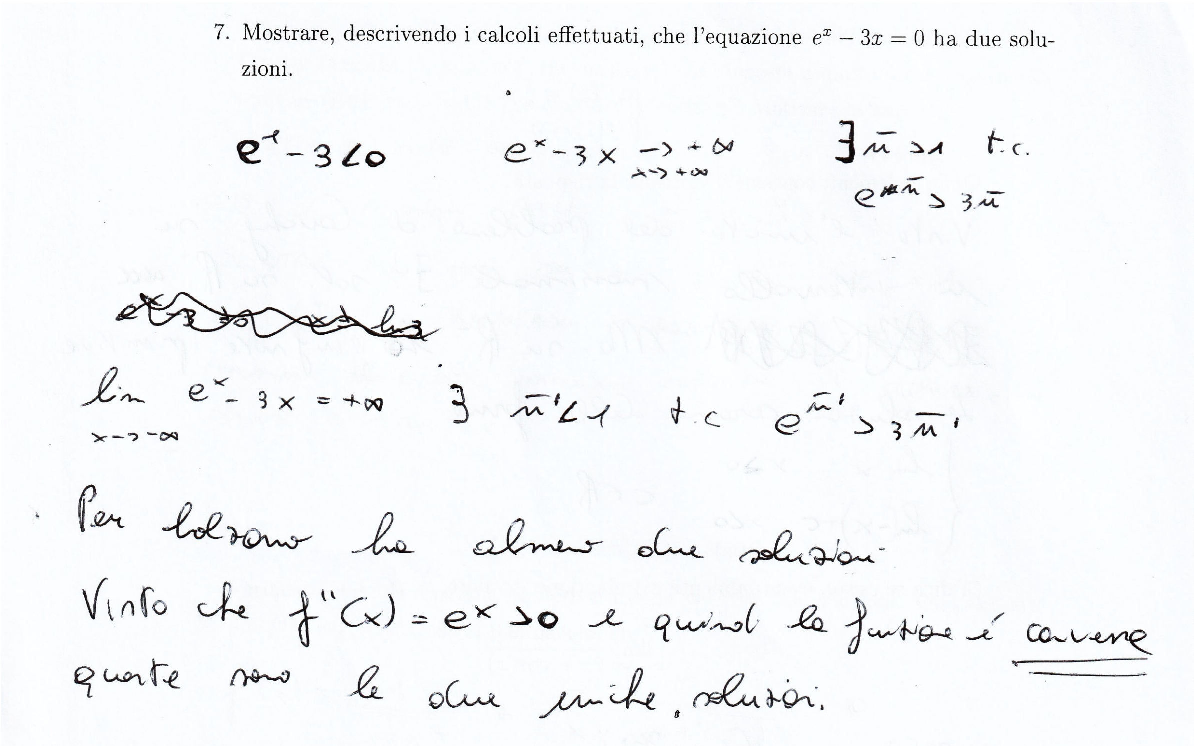
R: Quindi se proviamo a usare De l'Hopital...

M6: Va bene(scrive)...ah no... nono qui non si può usare, non sono soddisfatte le ipotesi!

R: Ma si può fare anche in altri modi?

M6: Se questa roba è limitata, raccolgo una x e ragiono sui gradi...ne abbiamo fatti di più complicati... E De l'Hopital va usato come ultima spiaggia...

Infine, per l'ultimo quesito, ho individuato la risposta in figura 4.7, per testare la robustezza dell'apprendimento legata alle competenze necessarie nell'applicare teoremi o risultati che gli studenti vedono come "teorici" in situazioni numeriche. L'intervista ha mostrato anche in questo caso una robustezza dell'apprendimento di livello superiore, adeguata a uno studente al secondo anno di matematica, e un clima disteso nella sede del colloquio.



7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

$e^1 - 3 < 0$ $\quad$ $e^x - 3x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\quad$ $\exists\, \bar{n} > 1$ t.c. $e^{\bar{n}} > 3\bar{n}$

$\lim_{x \to -\infty} e^x - 3x = +\infty$ $\quad$ $\exists\, \bar{n}' < 1$ t.c $e^{\bar{n}'} > 3\bar{n}'$

Per bolzano ha almeno due soluzioni
Visto che $f''(x) = e^x > 0$ e quindi la funzione é convessa
queste sono le due uniche soluzioni.

Figura 4.7: Risposta originaria dello studente M7

Stralcio Matematico 7

R: Tu dici che provando che i limiti a più e meno infinito fanno $+\infty$ e sfruttando il teorema di Bolzano, data la convessità della funzione le soluzioni che devono esistere, sono per forza uniche...
M7: Si, trovo un punto per cui la funzione assume valore negativo, dico che ci sarà un punto per cui l'esponenziale è maggione di $3x$, dopo un certo $\overline{n}$, ora quel punto sta nel dominio perché è $\mathbb{R}$; la funzione è continua quindi Bolzano ha almeno una soluzione...e faccio lo stesso ragionamento dall'altra parte...
R: E la convessità ...?
M7: Visto che la funzione è convessa...in analisi avevamo un teorema che dato un intervallo chiuso su cui una funzione era negativa all'estremo e nell'altro positiva, la soluzione era unica... e quindi lo faccio su entrambi gli intervalli, $[1, \overline{n}]$ e l'altro...

R: Era necessaria la convessità? Non ti sembra che si possa concludere anche senza?
M7: È vero, è vero, è vero! Mi ricordo ne ho discusso con un mio amico, e lui ha messo che bastava monotonia, infatti si! Serve anche solo la monotonia nei due intervalli!
R: Quindi confermi tutto, perché come ti ho detto se vogliamo modificare qualcosa...
M7: Mi sembra giusto così! (sorride)

4.1.2 Apprendimento robusto nei liceali

Allo stesso modo che per i matematici, sono state predisposte delle interviste individuali con gli studenti liceali pre-selezionati dal test e che avevano gentilmente concesso la loro disponibilità a chiarimenti riguardanti il questionario. Come già anticipato dalla tabella con i risultati della sperimentazione, queste interviste fatte ai liceali hanno mostrato in alcuni casi un buon livello di robustezza dell'apprendimento, paragonabile a quello riscontrato in alcuni matematici. Questo può far riflettere se si considera ancora una volta che gli universitari hanno alle spalle dei corsi ad hoc per poter sviluppare tutte le competenze necessarie alla risoluzione dei quesiti, ed una maturità che, credevamo, potesse essere acquisita soltanto con l'età.
Cominciamo con l'analisi dell'intervista fatta al liceale indicato con "L1" che ha prodotto il seguente interessante stralcio, inerente la risposta in figura 4.8.

1. Considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \sin(x) & x < 0 \end{cases} .$$

E' derivabile in 0? Motivare la risposta. NO

$\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$ $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0$ Poichè il $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$ la funzione non è continua in 0, pertanto non sarà derivabile in 0.

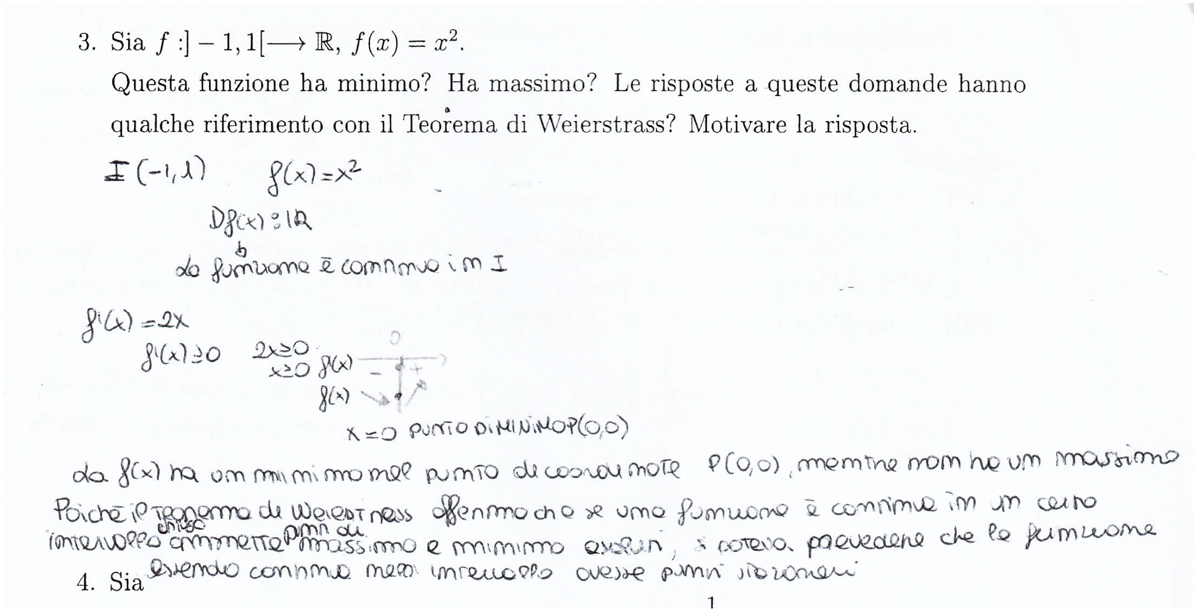
$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \cos x & x \leq 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} e^x = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Figura 4.8: Risposta originaria dello studente L1

Stralcio Liceale 1

R: Qui mi dici che la funzione non è continua quindi non può essere derivabile...
L1: (Mi ferma)Si perché derivabile implica continua.
R: Ma poi fai comunque il calcolo della f'... Se ti dicessi che molti hanno semplicemente calcolato i limiti di questa e hanno concluso che in realtà la funzione è derivabile?
L1: Mh... però c'erano tre condizioni: che fosse continua, oppure monotona...no però quello era per l'integrabilità!
R: Esatto, ma qui si chiede la derivabilità.
L1: Eh, infatti. Non ha senso la derivata in zero qui. No non è derivabile!

Da questa intervista si nota che lo studente L1 raggiunge con difficoltà un apprendimento robusto di terzo livello, anche se in parte deviato da quella ricerca di giustificazione formale che anche in un colloquio orale e in un ambiente più informale (in questo caso un bar) continua a pesare sugli studenti.
Non avendo avuto riscontri positivi nella risoluzione del secondo esercizio al liceo, non è stato possibile studiarne la robustezza. Passando quindi allo studio del quesito 3, si propone la risoluzione e lo stralcio dello studente L3 come esempio di apprendimento non robusto. Già dalla risoluzione del quesito, che era comunque stata catalogata come corretta, si potevano notare delle imprecisioni che avrebbero potuto portare a un livello di apprendimento debole, e così si è rivelato (figura 4.9).



3. Sia $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Questa funzione ha minimo? Ha massimo? Le risposte a queste domande hanno qualche riferimento con il Teorema di Weierstrass? Motivare la risposta.

I $(-1,1)$ $f(x)=x^2$

$Df(x): \mathbb{R}$

la funzione è continua in I

$f'(x)=2x$

$f'(x)\geq 0$ $2x\geq 0$ $x \geq 0$

$x=0$ punto di minimo $P(0,0)$

la $f(x)$ ha un minimo nel punto di coordinate $P(0,0)$, mentre non ha un massimo

Poichè il teorema di Weierstrass afferma che se una funzione è continua in un certo intervallo chiuso ammette punti di massimo e minimo assoluti, si poteva prevedere che la funzione essendo continua nell'intervallo avesse punti stazionari

4. Sia

1

Figura 4.9: Risposta originaria dello studente L3

Stralcio Liceale 3

R: Rileggiamo insieme quello che hai scritto...

L3: Ok!

(leggiamo e non ci sono interruzioni)

R: Confermi ciò scritto?

L3: Weierstrass era...se hai punti di massimo e di minimo. Quindi qui è giusto: ha un minimo ma non ha un massimo.

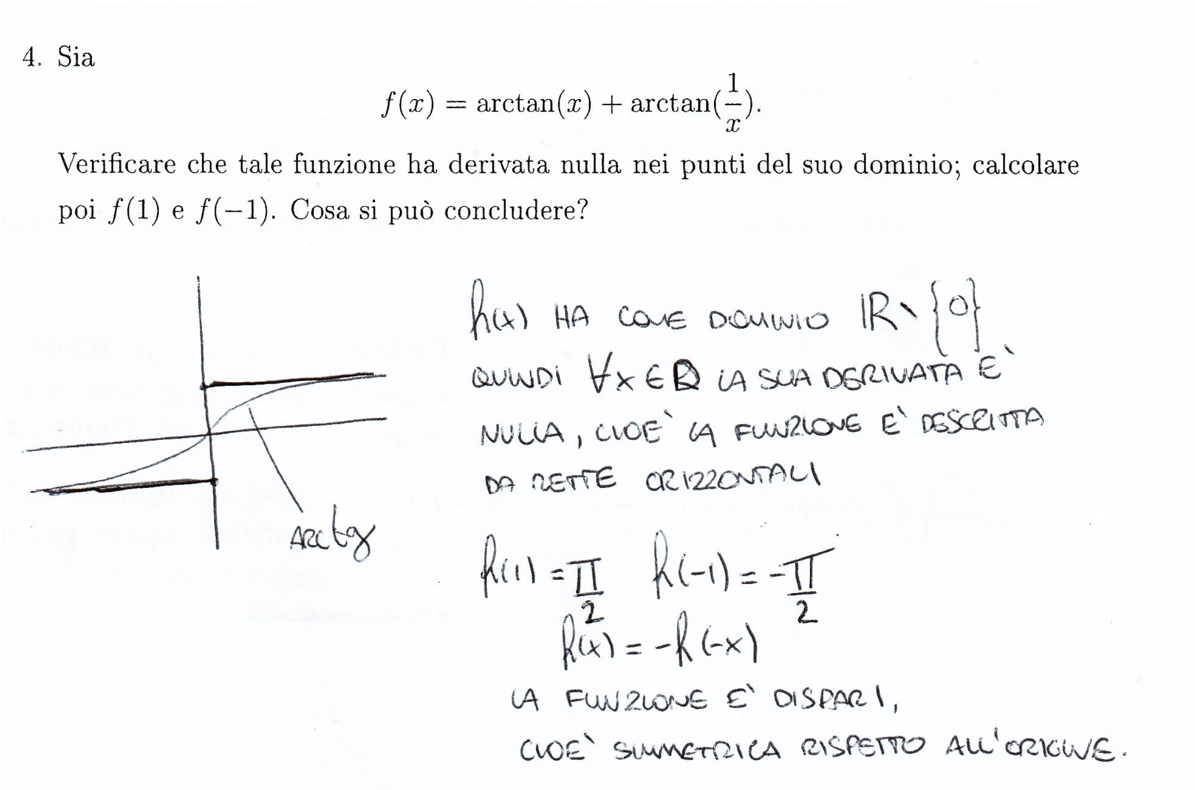
R: Perché?

L3: L'unico punto stazionario è un minimo...

R: Quindi i minimi e massimi li trovi solo così?

L3: Direi di si.

Per quanto riguarda la risoluzione del quesito 4, è stata scelta quella in figura 4.10 che ha poi fatto emergere, grazie al colloquio, interessanti considerazioni.


4. Sia

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$

Verificare che tale funzione ha derivata nulla nei punti del suo dominio; calcolare poi $f(1)$ e $f(-1)$. Cosa si può concludere?

Figura 4.10: Risposta originaria dello studente L4

Stralcio Liceale 4

R: Riguardiamo quello che hai scritto...se vuoi cambiare qualcosa fermami pure!
L4: Ora riguardandolo, io faccio parecchio tutto a grafico... perché le cose mi piace vederle e a numero mi torna male.
R: Ok...Ma ti sembra tutto giusto quello che hai scritto?
L4: Tu chiedevi di calcolare $f(1)$ e $f(-1)$...quella che ho disegnato è f quindi è quello che ho concluso.
R: Ma qui c'è un salto, ti torna con il fatto che la derivata sia nulla? Non è strano?
L4: No... cioè perché derivata nulla significa che la funzione è costante e dato che è dispari deve essere per forza così!

Al di là dell'apprendimento, che si è rivelato robusto di terzo tipo, è emersa la tendenza dello studente a approcciare gli esercizi in maniera grafica, fuggendo il più possibile dai conti che, a dire dello studente, "non permettono di vedere le cose". Questo tipo di risoluzione del questionario è risultato molto personale e anche se in maniera debole, mostra come lo studente nell'arco dei cinque anni di scuola superiore abbia trovato un proprio modo di pensare la matematica e di porsi rispetto a un esercizio dove il grafico non è richiesto ai fini della risoluzione.

Un caso di apprendimento robusto di primo livello si è dimostrato quello relativo al liceale 6, cui risoluzione è riportata in figura 4.11. In questo caso, nonostante lo studente con qualche insicurezza avesse dato una risoluzione che evitava di utilizzare la regola di De l'Hopital, non appena questa viene citata dal ricercatore, cambia subito idea, mostrando scarsa autostima e sicurezza nel proprio operato.

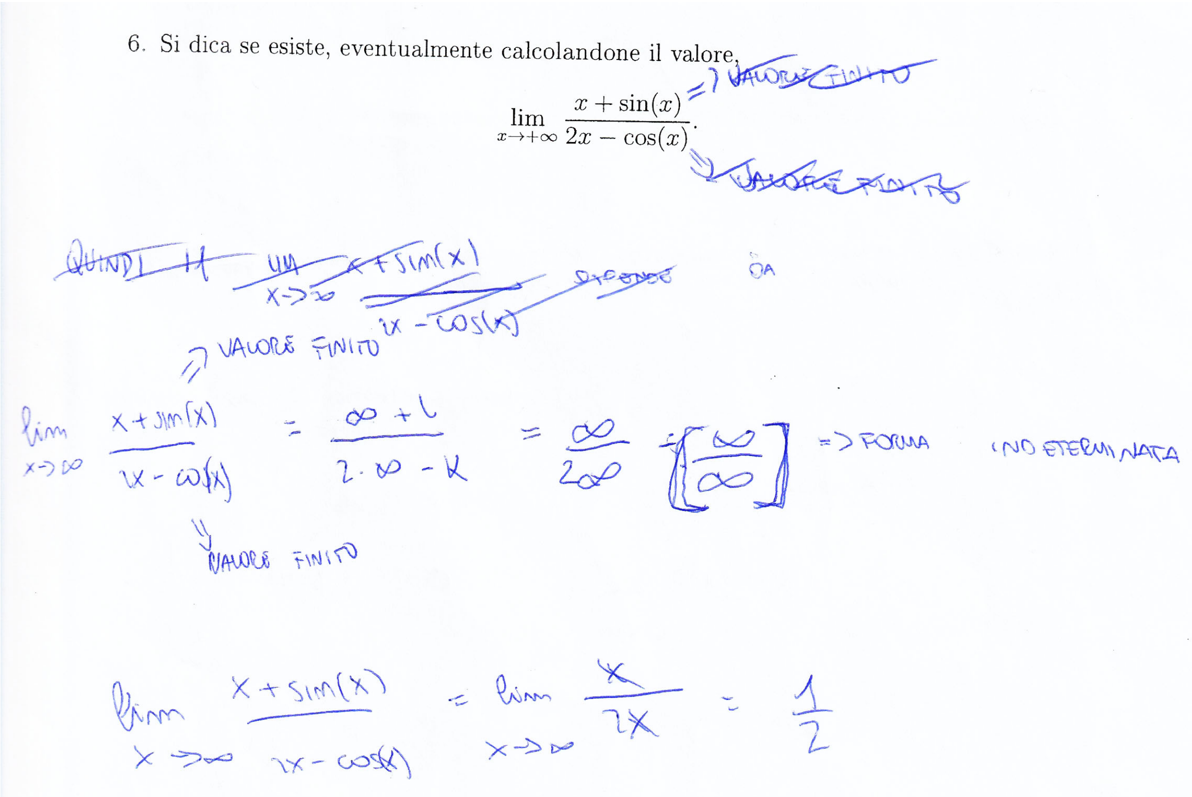


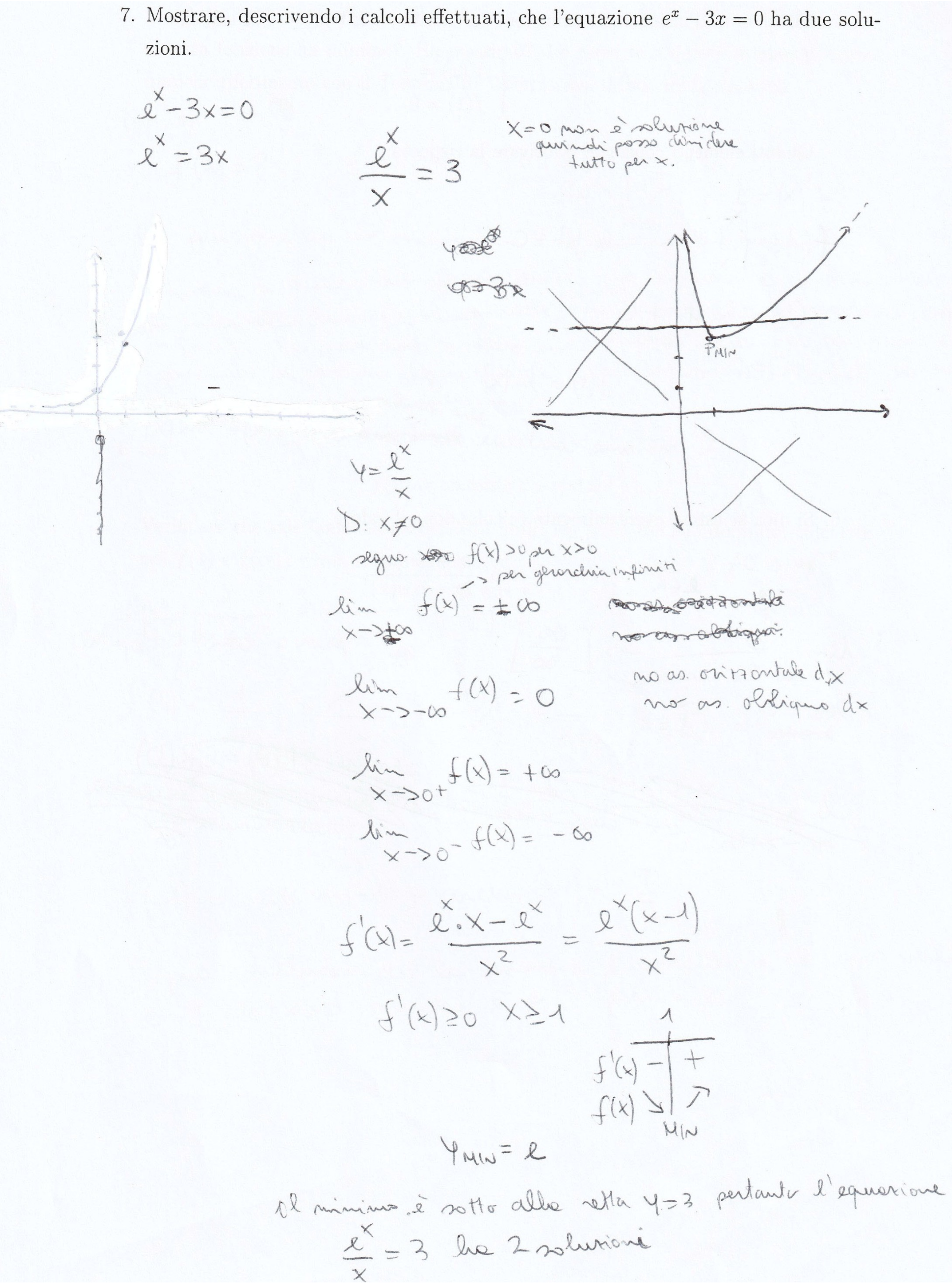
Figura 4.11: Risposta originaria dello studente L6

Stralcio Liceale 6

R: In questo esercizio tu risolvi il limite riconducendolo a quest'altro, più semplice...
L6: Mh...

R: Non ti sembrava più facile usare De l'Hopital? Molti al liceo hanno fatto così. Ma non viene $\frac{1}{2}$ a loro...chi ha fatto bene?
L6: Ah, io no sicuro!
R: Quindi se proviamo a usare De l'Hopital...
L6: Si riconduce al $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos(x)}{2+\sin(x)}$.
R: Allora...
L6: Non esite.

Infine, come nel caso dei matematici, ho riscontrato un'ottimo grado di apprendimento nello studente intervistato riguardo l'ultimo quesito, che aveva prodotto la risoluzione personale e al tempo stesso corretta mostrata in figura 4.12.



7. Mostrare, descrivendo i calcoli effettuati, che l'equazione $e^x - 3x = 0$ ha due soluzioni.

$e^x - 3x = 0$

$e^x = 3x$

$\frac{e^x}{x} = 3$

$x = 0$ non è soluzione quindi posso dividere tutto per x.

~~$y = e^x$~~

~~$y = 3x$~~

$y = \frac{e^x}{x}$

D: $x \neq 0$

segno $f(x) > 0$ per $x > 0$

$\rightarrow$ per gerarchia infiniti

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

~~no as. orizzontali~~

~~no as. obliqui~~

no as. orizzontale dx

no as. obliquo dx

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x) \geq 0 \quad x \geq 1$

		1	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$y_{MIN} = e$

il minimo è sotto alla retta $y=3$ pertanto l'equazione $\frac{e^x}{x} = 3$ ha 2 soluzioni

Figura 4.12: Risposta originaria dello studente L7

Stralcio Liceale 7

R: Rileggiamo insieme quello che hai fatto, aiutami a interpretarlo, così se vuoi puoi modificare qualcosa se non ti convince più...
L7: Si, anche perché ora non ricordo bene quel che avevo fatto...
R: Allora, la riscrivi e cominci separando e^x/x da 3...
L7: Così almeno posso rappresentarla graficamente e fare l'intersezione con la retta e trovi 'sti due punti. (indica)
R: Ok, poi fai una sorta di studio di funzione della parte a sinistra, con dominio, limiti...
L7: Dominio, limiti, la derivata... studio la derivata perché poi voglio trovare il punto di minimo e vedere se il punto di minimo è sotto la retta $y = 3$... perché così, se è sotto so che comunque due intersezioni ce le ha sicuramente essendo decrescente da una parte e crescente dall'altra.
R: Quindi i limiti a cosa ti sono serviti? Non sono un calcolo inutile?
L7: Poteva averne più sennò...di intersezioni... serviva il limite e lo studio della decrescenza, e basta.
R: Ok, sei convinto quindi di quello che hai fatto?
L7: Sisi!
R: Perché altri hanno fatto in un modo diverso... considerando il teorema di esistenza degli zeri...
L7: È come se facessimo uno studio di funzione con al posto di $y = 3$, $y = 0$... , dipende uno come lo vede meglio.
R: Quindi secondo te è giusto così?
L7: Si, dai!

L'intervista ha mostrato anche in questo caso una robustezza dell'apprendimento di livello superiore, inaspettata per uno studente di quinta liceo, tanto da instaurare la curiosità dell'intervistatore nel testare la robustezza dei restanti quesiti svolti in maniera corretta (quattro su sette, cinque se si potessero considerare le considerazioni cancellate dal ragazzo in sede del test). In tutti questi test il ragazzo ha mantenuto la propria risoluzione ribattendo alle obiezioni dell'intervistatore, argomentando e aggiungendo spiegazioni coerenti senza il bisogno di essere pesanti nel linguaggio o nella forma. Questi colloqui, in maniera molto "naif", ci hanno permesso di osservare che tra gli studenti pre-selezionati dal test non vi sono distinzioni notevoli riguardo il livello di robustezza dell'apprendimento, e che, diversamente da ciò che ci si poteva aspettare, il gap che avrebbe dovuto mostrare la maturità acquisita nel tempo dagli studenti di matematica, in realtà non si è manifestato in maniera marcata come ci aspettavamo.

4.2 Alcuni commenti

Per avere una visione d'insieme dell'andamento degli studenti di matematica e dei liceali nel questionario, si può fare riferimento alle figure 4.13 e 4.14.

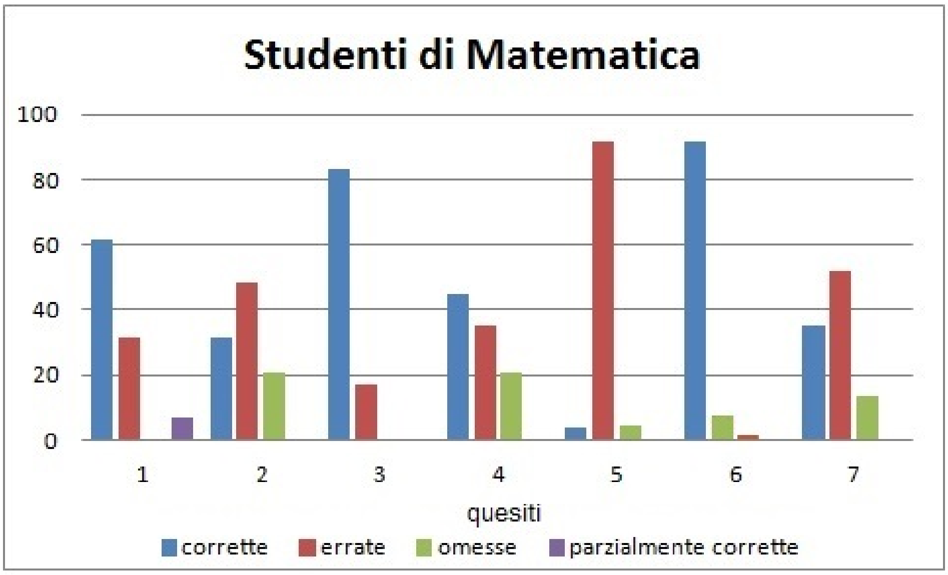


Figura 4.13: Il questionario ed i matematici

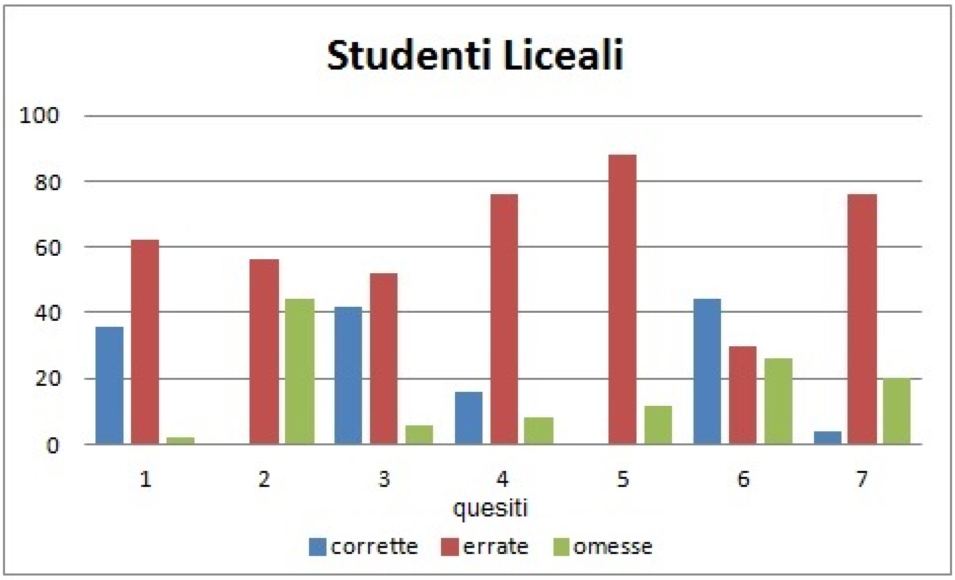


Figura 4.14: Il questionario ed i liceali

Confrontando i risultati ottenuti si può notare che in ogni domanda l'andamento delle risposte date dagli studenti di Matematica è migliore rispetto a quello degli studenti della scuola secondaria di secondo grado. Questo fatto non è sorprendente, in quanto gli studenti universitari hanno scelto di approfondire i loro studi in Matematica, mentre gli studenti del liceo devono ancora intraprendere la scelta del percorso universitario e soltanto alcuni proseguiranno i propri studi in ambiti scientifici. Inoltre, i matematici si sono dedicati per due anni in più dei loro colleghi più giovani allo studio specifico della matematica ed è utile sottolineare che i due livelli di scolarizzazione hanno diversi obiettivi di apprendimento, libri di testo e modalità d'insegnamento. Nella scuola secondaria lo studio della matematica ha spesso il ruolo di aiutare gli studenti a sviluppare la capacità di ragionamento, mentre lo scopo dell'insegnamento universitario in matematica è quello di edificare su solide basi concetti di livello superiore per quanto riguarda l'astrazione, la classificazione e la generalizzazione. Queste differenze sono evidenti anche nei libri di testo: da una parte abbiamo i libri (o gli appunti) universitari caratterizzati da un susseguirsi di definizioni, teoremi e dimostrazioni scritti in un linguaggio pulito e formale; dall'altra i libri di testo delle superiori che optano per un compromesso, fornendo agli studenti un'idea generale del concetto e mostrando loro alcuni casi particolari senza pretendere quel grado di precisione e astrazione tipico dell'università. La differenza di età, il diverso luogo d'insegnamento e le finalità che caratterizzano i due livelli di scolarizzazione potevano sicuramente essere predittivi di una migliore riuscita nel questionario da parte dei matematici, tuttavia non mancano eccezioni di studenti matematici con un apprendimento debole o di liceali che mostrano risoluzioni mature e rigorose. L'ingenutià e la superficialità con la quale molti studenti universitari hanno affrontato la risoluzione di alcuni quesiti come ad esempio il *quesito 5* od il *quesito 7*, sono caratteristiche assai più allarmanti rispetto al relativo apprendimento fallace negli studenti liceali. In questo senso l'analisi nel dettaglio delle risoluzioni scorrette ha potuto evidenziare le problematiche specifiche in ciascuno studente e, quando possibile, la causa generatrice di questo malessere cognitivo. Un'operazione di questo genere dovrebbe essere di routine per permettere allo studente di conoscere e recuperare le proprie lacune in itinere, mentre spesso queste vengono trovate soltanto nel momento della valutazione finale sommativa, quando forse è troppo tardi.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi è stato affrontato il problema dell'insegnamento-apprendimento delle prime nozioni di analisi negli studenti della scuola secondaria di secondo grado tramite il confronto con l'apprendimento degli studenti del corso di laurea in matematica. In particolare, l'accento è stato posto nelle caratteristiche dell'apprendimento in matematica, e nella sua robustezza.
Così, tramite un questionario, si sono potute testare le competenze degli studenti a due diversi gradi di scolarizzazione con diversi obiettivi e captare gli eventuali segni di malessere cognitivo. È emerso che per quanto riguarda questi concetti basilari nulla debba essere dato per scontato e che esercizi all'apparenza banali come ad esempio quello proposto nel *quesito 1* possono diventare insidiosi, se sottovalutati.
L'analisi delle risposte al questionario (sia dal punto di vista del numero delle risposte corrette ed errate, sia dal punto di vista dello svolgimento) mette in evidenza molte difficoltà inerenti i concetti di continuità, derivabilità, e riguardo i principali teoremi spesso enunciati ma non compresi fino in fondo dagli studenti (come ad esempio i teoremi di Weierstrass, di esistenza degli zeri, la Regola di De l'Hopital...). Purtroppo gli studenti hanno difficoltà nel ragionare su problemi appena un po' diversi da quelli standard che gli vengono spesso proposti (come nel caso del *quesito 5* o del *quesito 7*) e cercano di ricondursi alle risoluzioni che conoscono e cui fanno affidamento. Con queste pratiche lo studio della teoria rimane per i ragazzi troppe volte in un piano distaccato rispetto alla risoluzione degli esercizi numerici (ad esempio nel *quesito 2* si evidenzia come gli

studenti non riescano ad applicare il concetto di “derivabilità”).
I risultati del test confermano che anche gli studenti con una maggiore maturità dovuta in parte all’età ma, sopratutto, all’aver scelto la carriera di matematico, hanno spesso idee confuse su argomenti di questo tipo, non banali ma basilari per la loro formazione. L’attuale sistema valutativo scolastico non è sufficiente a cogliere le avvisaglie di un mancato apprendimento, e, come evidenziato tramite le interviste singole ai ragazzi più bravi, non può garantire una giusta valutazione delle competenze. Sarebbe perciò auspicabile che nell’insegnamento di questi concetti, e in generale della disciplina in questione, l’insegnante utilizzasse delle metologie di valutazione formativa in itinere per sanare le problematiche degli studenti, prima che queste si consolidino e diventino per essi misconcezioni di carattere negativo.
Credo fermamente che il punto di partenza per un apprendimento corretto in ogni livello da parte degli studenti sia da ricercare nell’insegnamento, predisponendo l’intervento didattico in maniera da eliminare le credenze errate degli studenti e stabilendo un clima sereno a partire dal quale ogni studente dovrà trovare la propria maniera di -citando uno studente intervistato- *vedere la matematica*.

Bibliografia

[1] G. Bolondi e M. I. Fandiño Pinilla, I quaderni della didattica: Metodi e Strumenti per l'Insegnamento e l'Apprendimento della Matematica, EdiSES, 2013.

[2] C. B. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori editore, Milano, 2014.

[3] MIUR, Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'art. 10, comma 3, del d.P.R. 15 marzo 2010.

[4] G. Brousseau, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1986, pp. 33-115.

[5] P. Clanché, L'enfant et le contrat didactique dans les derniers textes de Wittgenstein, in: H. Hannoun, A.-M. Drouin-Hans (eds.), Pour une philisophie de l'éducation. Bourgogne: CRDP. pp. 223-232, (1994).

[6] B. D'Amore, H. Maier. Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. La Matematica e la sua didattica. pp. 144-189, 2002.

[7] B. D'Amore, P. Sandri, Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. La Matematica e la sua didattica, pp. 4-18, 1998.

[8] M. I. Fandiño Pinilla, Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson, 2008.

[9] G. Arrigo, Robustezza degli apprendimenti. Un contributo alla valutazione della competenza. La Matematica e la sua didattica. pp. 471-479, 2007.

[10] G. Arrigo, Attività di pre-analisi: loro importanza ed esempi. Bollettino dei docenti di Matematica. Bellinzona (Svizzera). pp. 59-69, 2006.

[11] E. Giusti, Analisi Matematica 1, Bollati Boringhieri, 2002.

[12] B. D'Amore, D. J. Godino, G. Arrigo, M. I. Fandiño Pinilla, Competenze in matematica. Bologna: Pitagora, 2003.

[13] R. Zan, Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire. Tricase (Lecce), 3-4-5 marzo 2014, Convegno Nazionale "La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire.", pp 71-82.

[14] S. Valenti a cura di C. Zappulla, Rivisitando la storia dell'analisi cominciando dall'antichità, Capitolo 1,(http://math.unipa.it/ grim/storianalisi.pdf).

[15] H. Gardner, Educare al comprendere. Milano: Feltrinelli, 1993.

[16] G. Arrigo, B. D'Amore, "Lo vedo, ma non ci credo..." Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. Lavoro presentato e accolto al CERME 1 (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Osnabruck, (D) , 1999.

[17] X. Rogiers, Une pédagogie de l'intégration. Bruxelles: De Boeck Université, 2000.

[18] http://www.scienze.unibo.it/it/corsi/insegnamenti/insegnamento/2015/323861.

[19] http://online.scuola.zanichelli.it/provamatematica/corso-ordinamento/testi-e-svolgimenti/.

Ringraziamenti

Da una scelta d'istinto, fatta cinque anni fa, ad un finale che racchiude un sogno: l'insegnamento. In questi anni sono molte le persone che ho incontrato e che hanno contribuito a fare di me la persona che sono oggi. Tra questi sicuramente il Prof. Paolo Negrini, sempre cortese e disponibile in questi mesi; i miei genitori per avermi sostenuta ed incoraggiata sempre, anche grazie alle nostre abitudini scaramantiche; mia sorella per essersi presa la famosa ciabatta al posto mio; mia zia Patrizia che conosce bene questo percorso e mestiere, fonte di ispirazione per me; i miei nonni per la soddisfazione che dimostravano ad ogni mio traguardo; Valeria, Martina, Simona e ultima aggiunta Caterina per avermi accompagnata in questo percorso donandomi un gruppo di studio vincente ma sopratutto delle amiche con la A maiuscola; Valentina sempre presente e punto fermo per me; la mia seconda famiglia, le mie coinquiline Sara e Silvia per i loro consigli così diversi e così preziosi dati di sera, nell'atmosfera della nostra Bologna e per ultimo, ma non per importanza, il mio Paolo e la sua famiglia, per avermi sopportata nei miei discorsi filosofici di matematica ed essere sempre stato presente nei momenti di bisogno.