

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea (in Analisi Matematica)

**APPLICAZIONI DEI TEOREMI
DI STOKES E DIVERGENZA
ALLE EQUAZIONI DI MAXWELL**

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
ANNAMARIA MONTA-
NARI

Presentata da:
FRANCESCA ARCECI

Sessione Unica
Anno Accademico 2016/2017

“Alla mia famiglia”

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è affrontare, da un punto di vista matematico, le leggi di Maxwell, quattro equazioni che regolano le interazioni tra campo elettrico e magnetico, che vennero pubblicate per la prima volta in forma differenziale dal fisico James Clerk Maxwell, nel 1865, nel testo “*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*”. Queste leggi non solo furono un punto di partenza per il fisico che, a coronamento della sua opera, dimostrò che un raggio di luce è una configurazione di campi elettrici e magnetici in moto, un’ **onda elettromagnetica**, ma rappresentano le basi di quella che oggi definiamo “*fisica moderna*”: la disputa sulla natura della luce nacque agli inizi del XVII secolo e vedeva contrapposte le teorie di *Isaac Newton* che sosteneva che fosse costituita da un flusso di corpuscoli a quelle di *Huygens* e *Young*, che invece ne dimostrarono la natura ondulatoria; fu proprio Maxwell a dimostrare che la luce fosse solo una parte dello spettro della radiazione elettromagnetica. Fu infine *Albert Einstein* a porre fine al dibattito, con la prova dell’esistenza di *quanti* di luce, pacchetti di energia, giustificando quindi il coportamento della luce sia come onda che come particella. [1]

Ci occuperemo, in questi quattro capitoli, di introdurre tutti gli strumenti necessari per enunciare in un primo momento le equazioni in forma integrale, per poi mostrarle, attraverso le applicazioni dei Teoremi di Divergenza e di Stokes, in forma differenziale ed infine utilizzare i risultati trovati per la ricerca di una soluzione per quella che definiremo *equazione d’onda*.

A tal fine, introduciamo tutti gli strumenti di geometria differenziale necessari: nel primo capitolo generalizzeremo il classico teorema di integrazione

per parti per gli integrali della retta reale a integrali multipli su domini con frontiera sufficientemente regolare: partendo dalla nozione di *aperto regolare*, definiremo la *normale esterna* al bordo dell'insieme per arrivare all'enunciato del teorema: sfrutteremo infine due semplici lemmi per dimostrarlo. Il Teorema della divergenza si presenta, in una prima forma, come applicazione immediata del teorema di integrazione per parti di integrali multipli.

Nel secondo capitolo, approcceremo al Teorema da un punto di vista più geometrico: per far ciò, introduciamo la teoria del calcolo vettoriale esterno, attraverso la quale definiremo le *forme differenziali* e tutti gli strumenti necessari per poter calcolare integrali su domini regolari di queste; seguirà l'enunciato del Teorema nel caso tridimensionale e uno dei risultati più importanti nella geometria differenziale: il *Teorema di Gauss-Green*.

Nel terzo capitolo enunceremo il Teorema di Stokes, che estende il Teorema della divergenza a *superfici regolari con bordo*: anche in questo caso, partendo dall'enunciato per *k-catene*, arriveremo ad analizzare il caso voluto, quello tridimensionale.

Potremo a questo punto definire le leggi di Maxwell in forma integrale attraverso le applicazioni dei teoremi sopra analizzati: il passaggio dalla forma integrale alla forma differenziale risulterà una banale applicazione del teorema. Avendo a disposizione le leggi in forma differenziale, ci occuperemo di vedere come queste cambiano nel caso in cui i campi elettrici e magnetici siano immersi nel vuoto: sarà proprio questo il nostro punto di partenza per andare a studiare l'equazione d'onda, che regola i legami tra i due campi. Cercheremo, dunque, una soluzione a tale equazione che definiremo *onda elettromagnetica* evidenziando, oltre al significato matematico, anche l'interpretazione fisica del fenomeno.

Indice

1	Integrazione	1
1.1	Il teorema di integrazione per parti in \mathbb{R}^n	1
2	Teorema della divergenza	11
2.1	Calcolo vettoriale esterno	11
2.2	Integrali di forme differenziali	16
2.3	Teorema della divergenza in \mathbb{R}^3	19
3	Teorema di Stokes	21
3.1	Teorema di Stokes in \mathbb{R}^3	27
4	Applicazione dei teoremi di Stokes e divergenza alle leggi di Maxwell	31
4.1	Leggi di Maxwell: dalla forma integrale alla forma differenziale	31
4.2	Equazione d'onda	36
4.3	Onde elettromagnetiche	38

Capitolo 1

Integrazione

Lo scopo di questo capitolo è quello di generalizzare il teorema di integrazione per parti “classico”, ovvero quella che prevede l’integrazione di funzioni a valori scalari su un intervallo reale, anche al caso di funzioni di più variabili, definite su un dominio *regolare*.

1.1 Il teorema di integrazione per parti in \mathbb{R}^n

Definizione 1.1. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto; diciamo che Ω è aperto regolare se

- (i) $Fr(\Omega)$ è una $(n-1)$ -varietà di classe C^1 (almeno);
- (ii) $\text{Int}(\overline{\Omega}) = \Omega$;
- (iii) Ω è limitato

Osservazione 1. La proprietà (ii) non è sempre valida: supponiamo infatti di avere $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \|x\| < 1\}$. Allora $\overline{\Omega} = \overline{D(0,1)}$, ma $\text{Int}(\overline{D(0,1)}) = D(0,1) \neq \Omega$

Definizione 1.2. Sia Ω aperto regolare; definiamo

- (i) **Bordo** di Ω :

$$\partial\Omega = Fr(\Omega)$$

(ii) La **normale esterna** ν su $\partial\Omega$, con $\|\nu\| = 1$ e, $\forall x \in \partial\Omega$, si ha:

$$\begin{aligned} x + r\nu &\notin \Omega && \forall r \text{ piccolo positivo} \\ x - r\nu &\in \Omega && \forall r \text{ piccolo positivo} \end{aligned}$$

Possiamo arrivare a definire la normale esterna per aperti regolari anche in maniera differente: a tal fine, introduciamo la definizione di superficie regolare e k-superficie.

Supponiamo di avere $\Sigma \subseteq R^3$, una sua parametrizzazione r , con $r : T \rightarrow \Sigma$, dove T è un connesso tale che, comunque prenda un aperto A , si ha che $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$ e, inoltre, la coppia $r(u, v) \in \Sigma$, $\forall (u, v) \in T \subseteq R^2$.

Definizione 1.3. La coppia (Σ, r) è una superficie regolare se:

1. $r \in C^1(T)$, con $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
2. Posto $r_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ e $r_v = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$, si ha che r_u e r_v sono linearmente indipendenti, cioè che il rango della matrice $\begin{bmatrix} r_u \\ r_v \end{bmatrix}$ è massimo in ogni punto della superficie Σ .

Avendo una superficie regolare è quindi possibile definire il vettore unitario perpendicolare al piano generato da r_u e r_v come

$$\frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}$$

Infatti, avendo la matrice rango massimo, $r_u \wedge r_v \neq 0$ ed inoltre risulta essere perpendicolare al piano tangente alla superficie Σ nel punto (u, v) .

Ora, se definiamo per una superficie regolare (Σ, r) l'orientazione

$$\nu := \frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}$$

dove ν è la normale esterna, allora r si dice compatibile con l'orientazione di Σ . Il discorso si può generalizzare anche al caso n-dimensionale: introduciamo quindi la nozione di k-superficie.

Definizione 1.4. Sia $T \subseteq \mathbb{R}^k$ connesso tale che, se A è un aperto di \mathbb{R}^k , si ha $A \subseteq T \subseteq \overline{A}$ e sia $r : T \rightarrow \Sigma$, con $r(u_1, \dots, u_k) \in \Sigma$, $r \in C^1(T)$; sotto queste ipotesi la coppia (Σ, r) si definisce una k -superficie di \mathbb{R}^n di C^1 . Inoltre, la k -superficie è regolare se $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial u_k}$ sono linearmente indipendenti in ogni punto di T .

Osservazione 2. Nel caso in cui $k=n-1$, la coppia (Σ, r) è detta **ipersuperficie**.

Con le definizioni date, possiamo ora introdurre il teorema di integrazione per parti nel caso n -dimensionale; prendendo un aperto regolare Ω in \mathbb{R}^n , possiamo definire la sua normale esterna $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

1. $\|\nu\| = 1$
2. $\nu \perp \partial\Omega$
3. $\forall x_0 \in \partial\Omega, \exists \delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} x_0 + t \cdot \nu &\notin \Omega & \forall t \in]0, \delta[\\ x_0 - t \cdot \nu &\in \Omega & \forall t \in]0, \delta[\end{aligned}$$

Si ha quindi il

Teorema 1.1.1. *Sia Ω aperto regolare di \mathbb{R}^n , $h \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Allora

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial\Omega} h(x) \nu_j(x) d\sigma(x) \quad (1.1)$$

dove ν_j è la j -esima componente della normale esterna.

Per dimostrare il teorema dell'integrazione per parti, abbiamo bisogno dei due seguenti lemmi:

Lemma 1.1.2. *Sia $O \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $g \in C^1(O, \mathbb{R}^n)$ a supporto compatto in O ; allora*

$$\int_O \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = 0$$

Dimostrazione. Per ipotesi, g è a supporto compatto in O , perciò $\exists M > 0$ tale che $\text{supp } g \subseteq [-M, M]^n$. Allora si ha che

$$\int_O \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = \int_{[-M, M]^n} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx$$

Introduciamo la seguente notazione: $x = (\hat{x}_j, x_j)$, dove $x_j \in \mathbb{R}$, $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Allora

$$\begin{aligned} \int_{[-M, M]^n} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx &= \int_{[-M, M]^{n-1}} \left(\int_{-M}^M \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \right) d\hat{x}_j \\ &= \int_{[-M, M]^{n-1}} [g(M, \hat{x}_j) - g(-M, \hat{x}_j)] d\hat{x}_j = 0 \end{aligned}$$

Dove l'ultima uguaglianza vale perchè g ha supporto compatto dentro O . \square

Per il secondo lemma introduciamo la terminologia necessaria:

Definizione 1.5. Diciamo che un insieme $D \in \mathbb{R}^n$ è k -normale se $\exists \varphi : V \rightarrow]a, b[$ (dove V è un aperto di \mathbb{R}^{n-1}) tale che

$$D = \text{epi } \varphi = \{x = (x_k, \hat{x}_k) \in]a, b[\times V; x_k < \varphi(\hat{x}_k)\}$$

cioè vogliamo definire il nostro insieme D come “sottografico” o “sopragrafico” di φ .

Lemma 1.1.3. Sia $D \in \mathbb{R}^n$ k -normale, $\varphi \in C^1(V)$; sia inoltre $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con supporto di $g \in]a, b[\times V$. Allora

$$\int_D \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = \int_{\partial^* D} g \cdot \nu_j d\sigma \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

dove $\partial^* D = \{(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k), \hat{x}_k \in V\}$.

Dimostrazione. Supponendo che D sia il sottografico di φ , ovvero che $D = \text{epi } \varphi = \{(x_k, \hat{x}_k) \in]a, b[\times V; x_k < \varphi(\hat{x}_k)\}$, dividiamo la dimostrazione in due casi: $j = k$ e $j \neq k$.

(1) Se $j = k$:

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial g}{\partial x_k} dx &= \int_V \left(\int_a^{\varphi(\hat{x}_k)} \frac{\partial g}{\partial x_k}(x_k, \hat{x}_k) dx_k \right) d\hat{x}_k \\ &= \int_V (g(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k)) - g(a, \hat{x}_k) d\hat{x}_k \\ &= \int_V g(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k) d\hat{x}_k \end{aligned}$$

Vediamo chi è il secondo membro di (1.2):

Consideriamo una parametrizzazione r di $\partial^* D$ tale che $r(\hat{x}_k) = (\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k)$

Poichè $\varphi : V \rightarrow]a, b[$, possiamo scrivere

$$\int_{\partial^* D} g \cdot \nu_k d\sigma = \int_V g(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k) \cdot \nu_k \cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi(\hat{x}_k)|^2} d\hat{x}_k$$

Dove $g(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k) = g(r(\hat{x}_k))$ mentre la quantità $\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\hat{x}_k)|^2} d\hat{x}_k$ è proprio l'elemento di superficie:

$$J_r = \begin{bmatrix} J_\varphi(\hat{x}_k) \\ I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \varphi(\hat{x}_k) \\ I_{n-1} \end{bmatrix}$$

Perciò,

$$|{}^t(I_r) \cdot (I_r)| = |[\nabla \varphi \quad I_{n-1}] \begin{bmatrix} \nabla \varphi \\ I_{n-1} \end{bmatrix}| = 1 + |\nabla \varphi|^2$$

Ci rimane quindi da calcolare ν_k : definiamo $\partial^* D = \{F(x_k, \hat{x}_k) = x_k - \varphi(\hat{x}_k) = 0; \hat{x}_k \in V, x_k \in V\}$. Allora $\nu = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$, da cui $\nu_k = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2}}$

Quindi

$$\int_{\partial^* D} g \cdot \nu d\sigma = \int_V g(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k) d\hat{x}_k = \int_D \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) dx$$

e questo conclude il primo caso.

(2) Se $j \neq k$:

$$\int_D \frac{\partial h}{\partial x_j} dx = \int_V \left(\int_a^{\varphi(\hat{x}_k)} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x_k, \hat{x}_k) dx_k \right) d\hat{x}_k = \quad (1.3)$$

e, notando che

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_a^{\varphi(\hat{x}_k)} h(x_k, \hat{x}_k) dx_k \right) = h(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\hat{x}_k) + \int_a^{\varphi(\hat{x}_k)} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x_k, \hat{x}_k) dx_k \quad (1.4)$$

Allora

$$(1.3) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_a^{\varphi(\hat{x}_k)} h(x_k, \hat{x}_k) dx_k \right) d\hat{x}_k - \int_V h(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\hat{x}_k) d\hat{x}_k \quad (1.5)$$

Ponendo $g(\hat{x}_k) = \int_a^{\varphi(\hat{x}_k)} h(x_k, \hat{x}_k) dx_k$, notiamo che h ha supporto compatto dentro $]a, b[\times V$ e posso quindi applicare il lemma 1:

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x_j} g(\hat{x}_k) d\hat{x}_k = 0$$

Consideriamo ora il secondo membro di (1.2) : $\int_{\partial^+ D} h(x) \nu_j(x) d\sigma(x)$, dove $\partial^* D = \{(x_k, \hat{x}_k) \in]a, b[\times V \mid x_k - \varphi(\hat{x}_k) = 0\}$, mentre la normale esterna risulta essere

$$\nu_j = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\hat{x}_k)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}}$$

Allora

$$\int_{\partial^+ D} h(x) \nu_j(x) dx = \int_V h(\varphi(\hat{x}_k), \hat{x}_k) \cdot \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\hat{x}_k) \right) d\hat{x}_k$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 3. Sofferamoci brevemente sulla definizione di normale esterna: prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) < 0\}$ e supponiamo $\nabla F \neq 0, \forall x \in Fr(\Omega)$, dove la $Fr(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$, cioè la frontiera si presenta come il grafico della F . Allora

$$\nu = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

Infatti, se consideriamo un punto $x_0 \in Fr(\Omega)$, si ha: $F(x) - F(x_0) = \langle \nabla F(x), (x - x_0) \rangle$, ma per la scelta di x_0 , $F(x_0) = 0$. Scegliamo quindi x tale che:

$$x = x_0 + t \frac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|}$$

$$\Rightarrow F(x_0 + t \frac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|}) = \langle \nabla F(x), t \frac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|} \rangle > 0$$

cioè $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, ovvero punta verso l'esterno: in effetti, $\frac{\nabla F(x_0)}{\|\nabla F(x_0)\|}$ è proprio la normale esterna.

Si può facilmente dare un esempio: consideriamo la sfera unitaria S^2 di \mathbb{R}^3 e sia, nelle notazioni precedenti $F = x^2 + y^2 + z^2 - 1 < 0$. Allora, banalmente, si ha che la normale esterna è proprio $\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema di integrazione per parti, premettiamo la definizione di partizione dell'unità:

Definizione 1.6. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ a supporto compatto, sia $\{\Omega_{i \in I}\}$ un ricoprimento aperto di K , I una famiglia di indici tale che $K \subseteq \Omega_i$. Definiamo **partizione dell'unità associata a K e al ricoprimento** una famiglia finita di funzioni $p_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le seguenti proprietà:

1. $0 \leq p_j \leq 1$; con $\text{supp } p_j$ compatto $\subseteq \Omega_{i_j}$ per $i_j \in I$; (cioè ciascun p_j ha supporto compatto dentro un Ω_i)
2. $\sum_{j=1}^m p_j = 1$, su un aperto contenente K e con $m \in \mathbb{N}$.

Possiamo ora dimostrare il teorema di integrazione per parti:

Dimostrazione. (Teorema 1.1.1) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare. Prendiamo ora un ricoprimento di $\partial\Omega$: $\forall x \in \partial\Omega, \exists$ un intorno U_x di x tale che l'insieme $U_x \cap \Omega$ sia K -regolare (per un certo $k=1, \dots, n$; è possibile affermare ciò per il teorema di Dini poichè, per definizione di aperto regolare, l'insieme $\partial\Omega$ è una $(n-1)$ -varietà.). Sia inoltre U'_x un intorno di x tale che $\overline{U'_x} \subseteq U_x$. Allora possiamo prendere come ricoprimento aperto di $\partial\Omega$

$$\partial\Omega = \bigcup_{x \in \partial\Omega} U'_x$$

Ma poichè $\partial\Omega$ è compatto, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito. ²

Allora

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{l=1}^m U'_{x_l}, \quad \text{con } x_l \in \partial\Omega$$

dove U'_{x_l} è K -regolare perchè contenuto in U_{x_l} e tali che $\overline{U'_{x_l}} \subseteq U_{x_l}$.

Poniamo inoltre

² Conseguenza immediata del teorema di Bolzano Weierstrass

- $U_0 = \Omega \setminus \bigcup_{l=1}^m U'_l$
- $U_l = U_{x_l}$
- $\bar{\Omega} \subseteq \bigcup_{l=1}^m U_l$

Sia ora $\{p_l\}_{l=0,\dots,m}$ una partizione dell'unità associata a $\bar{\Omega}$ e al ricoprimento $\{U_l\}_{l=0,\dots,m}$ con $\text{supp } p_l \in U_l$ compatto e $\sum_{l=0}^m p_l = 1$. Allora

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(h \cdot 1)}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (h \cdot \sum_{l=0}^m p_l) dx = \sum_{l=0}^m \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (h \cdot p_l) dx =$$

Ma la \sum_l parte da 1 perchè il primo termine $\int_{\Omega \cup U_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (h \cdot p_0) dx = 0$
 $U_0 = \Omega \setminus \bigcup_{x_l} U'_l$, $\Omega \cap U_0 = U_0$, p_0 a supporto compatto su U_0 ($\Rightarrow h \cdot p_0 = g$)
 Applicando quindi il lemma uno, l'integrale è zero.

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \int_{\Omega \cup U_l} \frac{\partial}{\partial x_j} (h \cdot p_l) dx &= \quad (\text{con } \Omega \cup U_l \text{ tutti } K\text{-normali}) \\ \sum_{l=1}^m \left(\int_{\partial^+(\Omega \cup U_l)} h \cdot p_l \cdot \nu_j d\sigma \right) &= \quad (\partial^+(\Omega \cup U_l) = \partial\Omega \cup U_l) \\ \sum_{l=1}^m \int_{\partial\Omega \cup U_l} h \cdot p_l \cdot \nu_j d\sigma &= \quad (\text{Scrivo } \int_{\partial\Omega} \text{ poichè } p_l \text{ a supp compatto}) \\ \int_{\partial\Omega} h \cdot \left(\sum_{l=1}^m p_l \right) \cdot \nu_j d\sigma &= \quad (\text{Aggiungo il termine } l=0) \\ \int_{\partial\Omega} h \cdot \left(\sum_{l=0}^m p_l \right) \cdot \nu_j d\sigma &= \\ \int_{\partial\Omega} h \cdot \nu_j d\sigma &= \end{aligned}$$

□

Tra le tante applicazioni immediate del teorema di integrazione per parti c'è la derivazione del teorema della divergenza, di cui ci occuperemo più specificamente nel prossimo capitolo: diamo ora l'enunciato

³ p_l a supporto compatto su U_l

Teorema 1.1.4. Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare; definendo $F = (F_1, \dots, F_n)$ la sua divergenza, dove $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$, allora

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F dx &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j} dx = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} dx = \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} F_j \cdot \nu_j d\sigma = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n F_j \nu_j d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma \end{aligned}$$

□

Capitolo 2

Teorema della divergenza

Alla fine del primo capitolo abbiamo visto una prima derivazione del teorema della divergenza come applicazione immediata del teorema di integrazione per parti; vogliamo, ora, presentarlo in maniera differente: a tal fine, introduciamo la teoria del calcolo vettoriale esterno, che ci servirà per definire le *forme differenziali*. L'importanza del teorema della divergenza risiede nel fatto che ci permette di “trasportare” integrali calcolati su superfici regolari in integrali sul bordo di tale superficie (in altre parole, possiamo ricondurre integrali su domini n -dimensionali ad integrali su domini $(n - 1)$ -dimensionali). Nell'ultima sezione presenteremo il teorema nel caso di \mathbb{R}^3 , dove quindi integrali di volume vengono ridotti ad integrali di superficie.

2.1 Calcolo vettoriale esterno

Consideriamo $\forall j : 1, \dots, n$ un'applicazione lineare dx_j definita da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} che associa ad ogni vettore $h \in \mathbb{R}^n$ la sua componente j -esima:

$$\begin{aligned} dx_j : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ dx_j(h) &= h_j \end{aligned}$$

Definizione 2.1. Definiamo $\forall i, j : 1, \dots, n$ un'applicazione bilineare \wedge a

valori reali tale che, presi $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$dx_i \wedge dx_j(\alpha, \beta) = \det \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{bmatrix}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- (i) $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ (proprietà di antisimmetria)
- (ii) se $i = j \Rightarrow dx_i \wedge dx_j = 0$

La definizione si può generalizzare al caso di applicazioni trilineari:

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k)(\alpha, \beta, \gamma) = \det \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix}$$

Le forme dx_i , $dx_i \wedge dx_j$, $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ si definiscono rispettivamente 1-forme differenziali, 2-forme differenziali, 3-forme differenziali su \mathbb{R}^n .

Osservazione 4. Sfruttando la proprietà di antisimmetria vista per le 2-forme differenziali e generalizzando al caso delle 3-forme differenziali si ha che, permutando gli indici i, j, k otteniamo: $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = (-1)^{p(i,j,k)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$,

dove $p(i, j, k) = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione pari di } (1,2,3) \\ 1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione dispari di } (1,2,3) \end{cases}$

Le forme differenziali sopra descritte si definiscono per questo motivo *alternanti*.

Esempio 2.1. Si ha $dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$; infatti se consideriamo

la matrice associata $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $p(2, 3, 1) = 0$

Definiamo ora lo spazio vettoriale generato dalle k-forme:

- per $n = 1$, $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = \{1\text{-forme differenziali alternanti}\}$, dove una base per lo spazio è data da $\{dx_i, i = 1, \dots, n\}$
- per $n = 2$, $\Lambda^2(\mathbb{R}^n) = \{2\text{-forme differenziali alternanti}\}$, dove una base per lo spazio è data da $\{dx_i \wedge dx_j, i \neq j, i, j = 1, \dots, n\}$
- In generale, $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle p -forme differenziali alternanti generato da $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, i_1, \dots, i_p \text{ a due a due distinti}\}$

Esempio 2.2. Se $n=2$, possiamo costruire

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^2) = \{\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) = \{\lambda(dx_1 \wedge dx_2), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\Lambda^3(\mathbb{R}^2) = \{0\}$$

Se $n=3$, possiamo costruire

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^3) = \{\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \lambda_3 dx_3, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^3) = \{\lambda_1(dx_2 \wedge dx_3) + \lambda_2(dx_1 \wedge dx_3) + \lambda_3(dx_1 \wedge dx_2), \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$$

$$\Lambda^3(\mathbb{R}^3) = \{\lambda(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\Lambda^4(\mathbb{R}^4) = \{0\}$$

Dagli esempi riportati si nota che lo spazio $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ è costruibile solo nel caso in cui $p \leq n$. Se $p > n$ lo spazio $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ è infatti composto solo dall'applicazione nulla.

Nel caso in cui $p = n$ lo spazio vettoriale $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle combinazioni lineari di $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ed è lo spazio vettoriale più grande che possiamo ottenere: questo prende il nome di *forma volume*.

Definizione 2.2. 1. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto, diciamo che ω è una p -forma differenziale di \mathbb{R}^n se $w(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)\omega_j$, dove $\omega_j \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, cioè $\omega : \Omega \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$; in tal caso f_j si definiscono le *componenti* di ω .

2. Diciamo che ω è una p-forma differenziale di classe C^k se le sue componenti (rispetto alla base canonica) sono funzioni $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^k .
3. Se ω è una p-forma differenziale di classe C^1 , definiamo il *differenziale* di ω ($d\omega$) la (p-1)-forma differenziale che si ottiene derivando formalmente tutte le componenti di ω .

Esempio 2.3. Se ω è una 2-forma differenziale di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \omega(x) = f(dx_1 \wedge dx_2)$; se ω è una 2-forma differenziale di $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \omega(x) = f_1(dx_2 \wedge dx_3) + f_2(dx_3 \wedge dx_1) + f_3(dx_1 \wedge dx_2)$

Diamo ora delle definizioni preliminari, che ci serviranno nel calcolo differenziale.

Definizione 2.3. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiamo il rotore di f :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \\ &= (\partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2, \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3, \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1) =: F \end{aligned} \quad (2.1)$$

Riprendiamo inoltre la definizione di divergenza vista nel primo capitolo: se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si definisce divergenza di f la quantità: $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$.

Esempio 2.4. (ESEMPI DI CALCOLO DIFFERENZIALE)

1. Sia ω una 1-forma differenziale di \mathbb{R}^2 , $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$, allora $d\omega = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(dx_2 \wedge dx_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(dx_1 \wedge dx_2) = (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2$
2. Sia ω una 2-forma differenziale di \mathbb{R}^3 , $\omega = f_1(dx_2 \wedge dx_3) + f_2(dx_3 \wedge dx_1) + f_3(dx_1 \wedge dx_2)$, derivando formalmente le componenti di ω si ottiene:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1) + \\ &\quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2) = \operatorname{div}[f_1, f_2, f_3] dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Nel caso in cui $d\omega = 0$, allora la forma ω si dice *chiusa*: infatti le derivate parziali $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$. In realtà, si tratta di una caratterizzazione delle forme differenziali chiuse (si ha quindi la doppia implicazione).

3. Sia ora ω una 1-forma di \mathbb{R}^3 : $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. Calcoliamo il $d\omega$, ricordandoci che $dx_i \wedge dx_i = 0, \forall i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(dx_2 \wedge dx_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(dx_3 \wedge dx_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(dx_1 \wedge dx_2) \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(dx_3 \wedge dx_2) + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(dx_1 \wedge dx_3) + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(dx_2 \wedge dx_3) = \\ &(\text{antisimmetria}) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)dx_3 \wedge dx_1 \end{aligned}$$

dove, riprendendo la definizione 2.3: $d\omega = F_1(dx_2 \wedge dx_3) + F_2(dx_3 \wedge dx_1) + F_3(dx_1 \wedge dx_2)$, che altro non è che una 2-forma differenziale di \mathbb{R}^3 ; posso quindi calcolarne il $d^2\omega$:

$$d^2\omega = \text{div}(\text{rot } f)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\text{div } F)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

2.2 Integrali di forme differenziali

In questa sezione vedremo brevemente come si calcola l'integrale di forme differenziali su $(n - 1)$ -superfici di \mathbb{R}^n .

Definizione 2.4. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto, ω una forma volume di \mathbb{R}^n , cioè $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, allora

$$\int_{\Omega} \omega := \int_{\Omega} f(x) dx \quad (2.2)$$

dove l'integrale al secondo membro è un integrale di Lebesgue.

Ora, data $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$ una $(n - 1)$ -forma differenziale di \mathbb{R}^n definita su un aperto Ω di \mathbb{R}^n , vogliamo capire come si calcola il suo integrale su una $(n - 1)$ -superficie Σ di \mathbb{R}^n , $\Sigma \subseteq \Omega$: a tal fine, fissiamo una parametrizzazione r su Σ , con $r : T \rightarrow \Sigma$, dove $T \in \mathbb{R}^{n-1}$, tale che $r(u_1, \dots, u_{n-1}) = x \in \Sigma$; inoltre, supponiamo r iniettiva e $C^1(T)$. Allora, sotto queste ipotesi, (Σ, r) risulta essere una $(n - 1)$ -superficie regolare di \mathbb{R}^n .

Possiamo quindi definire l'integrale di ω :

$$\int_{\Sigma} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n := \int_T \det \frac{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_n)} du_1 \dots du_{n-1} \quad (2.3)$$

dove la quantità $\frac{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_n)}$ è la matrice Jacobiana di ordine $(n - 1) \times (n - 1)$ associata alla parametrizzazione.

Approfondiamo il caso in cui (Σ, r) sia una 2-superficie regolare di \mathbb{R}^3 , $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ e sia r una parametrizzazione tale che, preso $u = (u_1, u_2) \in T$, si

$$\text{ha che } r(u) = x, \text{ cioè } \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, u_2) \\ x_2 = x_2(u_1, u_2) \\ x_3 = x_3(u_1, u_2) \end{cases}$$

allora, sfruttando la (2.3), si ha :

$$\int_{\Sigma} f dx_1 \wedge dx_2 = \int_T f \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} du_1 du_2$$

In generale,

Proposizione 2.2.1.

$$\int_{\Sigma} f dx_i \wedge dx_j = (-1)^{p(k,i,j)} \int_{\Sigma} f \nu_k d\sigma \quad (2.4)$$

dove ν_k è la k -esima componente della normale esterna, con $k \neq i, j$

Osservazione 5. • Si noti che in $\mathbb{R}^3 \exists!$ k che verifica l'uguaglianza (2.4).

- Data una parametrizzazione della superficie regolare, è sempre possibile ricondurre l'integrale di una forma differenziale ad un integrale di Lebesgue

Dimostrazione. (2.2.1)

Vogliamo provare che

$$\int_{\Sigma} f dx_1 \wedge dx_2 = \int_T f(r(u_1, u_2)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} du_1 du_2 = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ (-1)^{p(k,i,j)} \cdot \int_{\Sigma} f \nu_k d\sigma & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Calcoliamo quindi ν : scegliamo una parametrizzazione della nostra superficie: sia $r : T \rightarrow \Sigma$ iniettiva e di classe $C^1(\bar{T})$, con $r(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$. Sappiamo che, se (Σ, r) è una superficie regolare, allora $\nu = \frac{r_{u_1} \wedge r_{u_2}}{\|r_{u_1} \wedge r_{u_2}\|}$:

$$r_{u_1} \wedge r_{u_2} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} - \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} - \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right) = \nu$$

Dove, la prima componente di ν è proprio $\det \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)}$, ovvero la matrice Jacobiana della parametrizzazione; la seconda componente è $\nu_2 = \det \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)}$ e la terza $\nu_3 = \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}$. Allora

$$\int_{\Sigma} f dx_1 \wedge dx_2 = (-1)^{p(3,1,2)} \int_T f(r(u_1, u_2)) \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} =$$

$$(sfruttando la definizione di normale appena vista) = (-1)^{p(3,1,2)} \int_{\Sigma} f \nu_3 d\sigma$$

Il teorema è quindi dimostrato nel caso $j = 2, i = 1$.

Considero ora

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f dx_2 \wedge dx_3 &= \int_T f(r(u_1, u_2)) \det \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)} du_1 du_2 = \\ &= (-1)^{p(1,2,3)} \int_{\Sigma} f \nu_1 d\sigma \end{aligned}$$

dove $p(1, 2, 3) = 1$ in quanto permutazione pari. Infine,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f dx_3 \wedge dx_1 &= \int_T f(r(u_1, u_2)) \det \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)} = \\ &= (-1)^{p(2,3,1)} \int_{\Sigma} f \nu_2 d\sigma \end{aligned}$$

con $p(2, 3, 1) = 1$ in quanto permutazione pari. □

2.3 Teorema della divergenza in \mathbb{R}^3

Enunciamo il teorema della divergenza nel caso particolare di \mathbb{R}^3 :

Teorema 2.3.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ regolare, ω una 2-forma differenziale di classe $C^1(\overline{\Omega})$ allora*

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\Omega} d\omega \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Prendiamo $\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ e indichiamo $f = (f_1, f_2, f_3)$; riprendendo l'esempio 2, sappiamo che $d\omega = (\operatorname{div} f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Ora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\operatorname{def}) \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(f) dx_1 dx_2 dx_3 = (\text{teorema della divergenza visto nel capitolo I}) \\ &= \int_{\partial\Omega^+} \langle f, \nu \rangle d\sigma \end{aligned} \quad (2.6)$$

Poichè

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} \omega &= \int_{\partial\Omega^+} f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2 = \\ &= (-1)^{p(1,2,3)} \int_{\partial\Omega^+} f_1 \nu_1 d\sigma + (-1)^{p(2,3,1)} \int_{\partial\Omega^+} f_2 \nu_2 d\sigma \\ &\quad + (-1)^{p(3,2,1)} \int_{\partial\Omega^+} f_3 \nu_3 d\sigma = (\text{dove tutte le permutazioni sono pari}) \\ &= \int_{\partial\Omega^+} \sum_{i=1}^3 f_i \cdot \nu_i d\sigma = \int_{\partial\Omega^+} \langle f, \nu \rangle d\sigma \end{aligned} \quad (2.7)$$

□

Il teorema rimane valido per ogni \mathbb{R}^n :

Teorema 2.3.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare, ω una $(n-1)$ -forma differenziale di \mathbb{R}^n di classe $C^1(\overline{\Omega})$. Allora*

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega^+} \omega \quad (2.8)$$

Come caso particolare del teorema della divergenza si può trovare un risultato molto utile in geometria differenziale: il teorema di Gauss-Green, che ci permette di ricondurre il caso di un integrale piano ad un integrale di linea, partendo sempre dall'ipotesi che l'ambiente in cui stiamo lavorando sia un aperto regolare di \mathbb{R}^2 , in modo tale che la sua frontiera sia una 1-varietà di \mathbb{R}^2 : dunque, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto regolare, definisco una 1-forma differenziale su Ω : $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$, con $d\omega = (-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}) dx_1 \wedge dx_2$.

Scegliamo ora una parametrizzazione $r(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in I, I \subseteq \mathbb{R}$, compatibile con l'orientazione $\partial\Omega^+$; definiamo il vettore tangente ad ogni punto della curva come $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ e il vettore normale alla curva $n(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$ che altro non è che la normale esterna ν all'aperto nel punto. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy = (def) \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = (teorema divergenza) \\ &= \int_{\partial\Omega^+} (f_2 \nu_1 - f_1 \nu_2) d\sigma = \int_I f_2 y'(t) + f_1 x'(t) dt \\ &= \int_I \langle f(r(t)), r'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Mentre

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} \omega &= \int_{\partial\Omega^+} f_1 dx + f_2 dy = (parametrizzazione) \\ &= \int_I (f_1 r(t) r'(t) + f_2 r(t) r'(t)) dt = \int_I \langle f(r(t)), r'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Da cui l'uguaglianza.

Capitolo 3

Teorema di Stokes

In questo capitolo enunciamo il teorema di Stokes, che insieme al teorema della divergenza, costituisce uno dei metodi più efficienti nel calcolo di integrali. Vedremo il teorema prima nel caso generale per k -catene e per varietà orientate con bordo per poi concentrarci sul caso tridimensionale.

Poichè siamo interessati a calcolare l'integrale di una forma differenziale lungo il bordo di una superficie, introduciamo quello che è il concetto di integrale di linea per generalizzarlo poi al caso di integrale di superficie. Nel caso unidimensionale, possiamo procedere con vari approcci. Il primo, più fisico, prevede di suddividere l'intervallo di integrazione in sottointervalli, su ognuno dei quali si approssima il valore della funzione con il valore che questa prende nel punto medio di ogni sottointervallo (*teorema del valore medio o di Lagrange*): così facendo, calcolo l'integrale come limite di somme finite (somme di Riemann); il secondo approccio, geometrico, prevede l'approssimazione della funzione attraverso il vettore tangente (vettore velocità) ad essa nel punto: anche in questo caso, l'integrale di linea si ottiene come limite di somme finite. Per quanto riguarda l'integrale di superficie, possiamo generalizzare quanto detto per quello curvilineo: introduciamo a tal fine la definizione di 2-cubi di cui ne diamo la definizione per un k generale:

Definizione 3.1. Sia M una qualsiasi varietà; una funzione $c : [0, 1]^k \rightarrow M$ di classe C^∞ è detta k -cubo singolare su M .

Si noti che nella definizione non è richiesto che la funzione sia iniettiva (da qui il termine singolare). Se consideriamo la mappa di inclusione $I^k : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ questa viene denominata come k -cubo standard.

Ora, se ω è una k -forma su $[0, 1]^k$ e (x_1, \dots, x_k) sono le sue componenti, allora ω si scrive in modo unico come $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Definiamo ora

$$\int_{[0,1]^k} \omega \quad \text{come} \quad \int_{[0,1]^k} f = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad (3.1)$$

Se ω è una k -forma su M e c è un k -cubo singolare su M , definiamo

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega \quad (3.2)$$

dove nel termine di destra appare l'operatore lineare chiamato *pull-back*.

Vediamo prima come questo opera, attraverso il seguente teorema:

Teorema 3.0.1. *Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ tra due n -varietà, (x, U) un sistema di coordinate attorno un punto $p \in M$ e (y, V) un sistema di coordinate attorno $q = f(p) \in N$. Allora*

$$f^*(g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (g \circ f) \det\left(\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (3.3)$$

La dimostrazione del teorema è rimandata a *Michael Spivak [3]*

Ora, tornando alla (3.2), si ha:

Proposizione 3.0.2. *Sia $c : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un k -cubo singolare iniettivo, con $\det c' \geq 0$ su $[0, 1]^n$. Sia ω una n -forma differenziale, $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Allora*

$$\int_c \omega = \int_{c([0,1]^n)} f$$

Dimostrazione. Dalla definizione sopra data,

$$\begin{aligned} \int_c \omega &= \int_{[0,1]^n} c^*(\omega) = \int_{[0,1]^n} c^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \quad (\text{teorema 3.0.1}) \\ &= \int_{[0,1]^n} (f \circ c)(\det c') dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{[0,1]^n} (f \circ c) |\det c'| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (\text{per assunzione}) \\ &= \int_{c([0,1]^n)} f \quad (\text{dalla formula del cambiamento di variabili}) \end{aligned}$$

□

Questo risultato ci servirà poi nella dimostrazione del teorema 3.0.3. Generalizziamo ora la definizione di integrale di una k -forma su un k -cubo singolare attraverso la definizione di k -catena:

Definizione 3.2. Una k -catena è una somma formale (finita) di k -cubi singolari, moltiplicati per un intero, ad esempio

$$1 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 \quad (3.4)$$

La definizione di integrale lungo una k -catena $c = \sum a_i \cdot c_i$ dove $a_i \in \mathbb{Z}$ risulta ovvia:

$$\int_{\sum a_i c_i} \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega \quad (3.5)$$

La ragione per cui si introduce il concetto di k -catena è che, ad ognuna di queste (vale anche nel caso in cui siano semplicemente dei k -cubi), può essere associata una $(k-1)$ -catena ∂c , chiamata *bordo* di c , che possiamo sempre considerare come somma finita di $(k-1)$ -cubi attorno al bordo di ogni singolo k -cubo di c . Dopo queste premesse, possiamo enunciare la prima versione del teorema:

Teorema 3.0.3. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$, ω una $(k-1)$ -forma su M e sia c una k -catena in M , allora

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \quad (3.6)$$

Dimostrazione. Supponiamo ω sia una $(k-1)$ -forma di \mathbb{R}^k e $c = I^k$. In questo caso, ω è una somma di $(k-1)$ -forme del tipo: $f dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k$, ed è quindi sufficiente provar il teorema per ognuna di queste.

Per prima cosa, dalla definizione di pull back vista in precedenza, si ha

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^{k-1}} I_{(j,\alpha)}^k * (f dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, \alpha, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k & \text{se } j=i \end{cases} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial I^k} f dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}x_i \wedge \cdots \wedge dx_k \\
 &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I_{(j,\alpha)}^k (f dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}x_i \wedge \cdots \wedge dx_k) \\
 &= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \\
 &+ (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k
 \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}
 & \int_{I^k} d(f dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}x_i \wedge \cdots \wedge dx_k) = \\
 &= \int_{[0,1]^k} D_i f dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}x_i \wedge \dots \wedge dx_k \\
 &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} D_i f
 \end{aligned}$$

Dal teorema di Fubini e dal teorema fondamentale del calcolo si ha che:

$$\begin{aligned}
 & \int_{I^k} d(f dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}x_i \wedge \cdots \wedge dx_k) \\
 &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \left(\int_0^1 D_i f(x_1, \dots, x_k) dx_i \right) dx_1 \dots \hat{d}x_i \dots dx_k \\
 &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 [f(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, 0, \dots, x_k)] dx_1 \dots \hat{d}x_i \dots dx_k \\
 &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \\
 &+ (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k
 \end{aligned}$$

E, dunque,

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega$$

Per un generico k -cubo singolare e per le definizioni date:

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega$$

Possiamo quindi concludere:

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} d^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Il teorema segue per le k -catene. \square

Presentiamo ora il teorema di Stokes in un'altra versione generale, ovvero nel caso in cui M sia una varietà orientata con bordo.

Teorema 3.0.4. *Se M è una n -varietà orientata con bordo, ∂M data dall'orientazione indotta, ω una $(n-1)$ -forma differenziale a supporto compatto in M , allora*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Supponiamo per prima cosa che esista un n -cubo singolare c che preservi l'orientazione di M e di ∂M e tale che $\text{supp } \omega \subseteq \text{Int}(Im(c))$; allora

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega \stackrel{(3.6)}{=} \int_{\partial c} \omega = 0$$

(Dove l'ultima uguaglianza si ha perchè ω ha supporto compatto dentro $Im(c)$).

D'altra parte, anche $\int_{\partial M} \omega = 0$, poichè per ipotesi ω ha supporto compatto dentro M . Supponiamo ora che esista un n -cubo singolare $c \subseteq M$ che preserva l'orientazione tale che $\partial M \cap c([0, 1]^n) = c_{(n,0)}([0, 1]^{n-1})$ e che $\text{supp } \omega \subseteq \text{Int}(Im(c))$ e ancora una volta: ¹

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

In generale, esiste un ricoprimento aperto O di M e una partizione dell'unità Φ ad esso associata tale che per ogni $\varphi \in \Phi$, la forma $\varphi \circ \omega$ rientra in una delle due classi già considerate. Si ha che

$$0 = d(1) = d\left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi\right) = \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi$$

¹ In generale, con la notazione $c_{(j,\alpha)}$ si indica la (j, α) -esima faccia del n -cubo c , definita da: $c_{(j,\alpha)} = c \circ (I_{(j,\alpha)}^n)$.

E, quindi,

$$\sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = 0$$

Poichè ω ha supporto compatto, questa risulta essere una somma finita e possiamo concludere che

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0$$

Concludiamo

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \circ d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M (d\varphi \wedge \omega + \varphi \wedge d\omega) \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d(\varphi \circ \omega) = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{\partial M} \varphi \circ \omega = \int_{\partial M} \omega \end{aligned}$$

□

3.1 Teorema di Stokes in \mathbb{R}^3

Definizione 3.3. Data la coppia (Σ, r) e dato Ω aperto regolare di \mathbb{R}^2 (in particolare $\partial\Omega$ è una 1-varietà di \mathbb{R}^2) con $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ e $r : \bar{\Omega} \rightarrow \Sigma$, $r \in C^2(\bar{\Omega})$ e compatibile con l'orientazione di $(\partial\Omega)^+$, definiamo $\partial\Sigma := r(\partial\Omega)$ e definiamo l'orientazione di Σ come quella indotta da $r : (\partial\Sigma)^+ := r(\partial\Omega)^+$.

Allora (Σ, r) è una superficie con bordo.

Teorema 3.1.1. Sia (Σ, r) una superficie con bordo di \mathbb{R}^3 di classe C^2 orientabile e sia ν la sua normale esterna; se $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ è una 1-forma differenziale di \mathbb{R}^3 di classe $C^1(\bar{\Sigma})$, con $f = (f_1, f_2, f_3)$, allora

$$\int_{\Sigma^+} d\omega = \int_{(\partial\Sigma)^+} \omega \quad (3.8)$$

Poichè ω è una 1-forma di \mathbb{R}^3 , nel capitolo 2 abbiamo calcolato che il suo differenziale $d\omega$ risulta essere una 2-forma differenziale di \mathbb{R}^3 , le cui componenti sono il *rot* f ; per questo motivo il teorema è anche noto come **teorema del rotore**.

Possiamo concludere dicendo che l'integrale di ω , ovvero la circuitazione del campo f è uguale al flusso del rotore del campo nella superficie Σ .

Sfruttando il teorema di Gauss-Green visto nel capitolo precedente, possiamo ottenere una diversa formulazione del teorema 3.1.1: indicando con T la componente tangenziale del campo f , si ha:

$$\int_{\Sigma^+} \langle \text{rot} f, \nu \rangle d\sigma = \int_{\Sigma^+} d\omega = \oint_{(\partial\Sigma)^+} \omega = \oint_{(\partial\Sigma)^+} \langle f, T \rangle ds \quad (3.9)$$

Procediamo ora con la dimostrazione del teorema:

Dimostrazione. (Teorema 3.1.1) Siano $(u, v) \in \bar{\Omega}$, $r : (u, v) \mapsto (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma$ dove $x_i = x_i(u, v)$, per $i = 1, 2, 3$. Calcolo

$$\int_{(\partial\Sigma)^+} \omega = \int_{(\partial\Sigma)^+} \sum_{j=1}^3 f_j dx_j =$$

(Scriviamo dx_i in termini della parametrizzazione $dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial u} du + \frac{\partial x_j}{\partial v} dv$)

$$\int_{(\partial\Omega)^+} \sum_{j=1}^3 f_j(r(u, v)) \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} du + \frac{\partial x_j}{\partial v} dv \right) = (\text{Gauss-Green})$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 d(f_j(r(u, v))) \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} du + \frac{\partial x_j}{\partial v} dv \right) =$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial v} \left(f_j \frac{\partial x_j}{\partial u} \right) dv \wedge du + \frac{\partial}{\partial u} \left(f_j \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) du \wedge dv =$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial u} (f_j) \frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} (f_j) \frac{\partial x_j}{\partial u} \right) du \wedge dv = (\text{Schwartz})$$

$$\int_{\Omega} \sum_j \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} (f_j) & \frac{\partial}{\partial v} (f_j) \\ \frac{\partial x_j}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial v} \end{pmatrix} du \wedge dv =$$

$$(\text{Calcoliamo } \frac{\partial}{\partial u} ((f_j \circ r)(u, v)) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u}$$

$$\text{e } \frac{\partial}{\partial v} ((f_j \circ r)(u, v)) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial v})$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \det \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u} & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial v} \\ \frac{\partial x_j}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial v} \end{pmatrix} du \wedge dv =$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial u} & \frac{\partial x_k}{\partial v} \\ \frac{\partial x_j}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial v} \end{pmatrix} du \wedge dv =$$

(La matrice è la Jacobiana $\frac{\partial(x_k, x_j)}{\partial(u, v)}$ con la condizione che $k \neq j$)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) \cdot \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} + \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \cdot \det \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(u, v)} + \right. \\ & \quad \left. \left(-\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) \cdot \det \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)} \right) du \wedge dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con } \frac{\partial(x_k, x_j)}{\partial(u, v)} du \wedge dv = dx_k \wedge dx_j \text{ dalla parametrizzazione } r \\ \int_{\Sigma^+} \left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \right) = \\ \int_{\Sigma^+} d\omega. \end{aligned}$$

□

Capitolo 4

Applicazione dei teoremi di Stokes e divergenza alle leggi di Maxwell

Trattiamo in questo capitolo delle immediate applicazioni del teorema di Stokes e della divergenza nel caso \mathbb{R}^3 alle leggi di Maxwell.

4.1 Leggi di Maxwell: dalla forma integrale alla forma differenziale

Il primo risultato storico che sancisce l'interazione tra campo elettrico e campo magnetico (e, quindi, dell'esistenza di un unico campo elettromagnetico) venne scoperto dal fisico Michael Faraday, nel 1831 e viene riconosciuto come il fenomeno dell'induzione; tre anni dopo, Heinrich Friedrich Lenz enunciò la seguente regola:

La corrente indotta in una spira ha un verso tale che il campo magnetico generato dalla corrente si oppone alla variazione di campo magnetico che l'ha indotta.

Supponiamo di avere quindi un campo elettrico \vec{E} . Se consideriamo il caso statico, si ha che il $\text{rot}\vec{E} = 0$, cioè che la circuitazione del campo elettrico su curve chiuse è nulla perchè il campo elettrico è, per definizione, irrotazionale. Per il caso dinamico, sia \vec{B} il campo magnetico generato da una superficie σ infinita: l'esperienza di Faraday-Lenz ci dice che il campo magnetico genera una forza elettromotrice (*f.e.m.*) che, dalla legge sopra enunciata possiamo scrivere come:

$$f.e.m. = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma^+} \langle B, \nu \rangle d\sigma \quad (4.1)$$

dove ν è la normale esterna alla superficie regolare Σ . Riscriviamo quindi l'equazione applicando il teorema di Stokes, indicando sempre con T la componente tangenziale del campo \vec{E})

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma^+} \langle \vec{B}, \nu \rangle d\sigma &= f.e.m. = \\ &= \oint_{(\partial\Sigma)^+} \langle \vec{E}, T \rangle ds = (\text{Stokes}) \int_{\Sigma^+} \langle \text{rot}\vec{E}, \nu \rangle d\sigma \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (4.3)$$

Notando come la variazione di un flusso magnetico potesse indurre un campo elettrico, fu naturale chiedersi se questo fenomeno presentasse delle simmetrie, ovvero, se il fenomeno di induzione potesse avvenire anche in senso inverso: può la variazione di un flusso elettrico generare un campo magnetico?

La risposta è sì e l'equazione che governa questo tipo di induzione risulta simmetrica alla 4.2: questa legge prese il nome di *Legge dell'induzione di Ampere-Maxwell*, dal nome dei fisici James Clerk Maxwell e André-Marie Ampère:

$$\oint_{(\partial\Sigma)^+} \vec{B} \cdot ds = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\Sigma^+} \vec{E} \cdot d\sigma \quad (4.4)$$

dove

- ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto, dove in generale, la costante dielettrica è una grandezza fisica che esprime la propensione di una sostanza nel contrastare l'intensità di un campo elettrico presente al suo interno;

- μ_0 rappresenta la costante di permeabilità magnetica del vuoto, ovvero una grandezza che esprime l'attitudine di un materiale a magnetizzarsi in presenza di un campo magnetico;
- i_c è la corrente concatenata, ovvero la corrente che passa attraverso il cammino chiuso $\partial\Sigma$ su cui calcolo l'integrale;

Introduciamo ora una nuova grandezza, la *densità di corrente* $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$ che è un vettore il cui flusso attraverso una superficie (nel nostro caso Σ) rappresenta la corrente elettrica che la attraversa. Riscrivendo la 4.4 e portando la derivata temporale sotto il segno di integrale:

$$\oint_{(\partial\Sigma)^2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} d\sigma + \mu_0 \epsilon_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\sigma \quad (4.5)$$

Mettiamoci ora in un caso particolare, in cui i nostri campi sono immersi nel vuoto: in questo caso, la densità di corrente sarà nulla; otteniamo quindi l'equazione nella forma:

$$\oint_{(\partial\Sigma)^+} \langle \vec{B}, T \rangle ds = \mu_0 \epsilon_0 \int_{\Sigma} \langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \nu \rangle d\sigma$$

e applichiamo il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_{(\partial\Sigma)^+} \langle \vec{B}, T \rangle ds &= \int_{\Sigma} \langle \text{rot} \vec{B}, \nu \rangle d\sigma \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \int_{\Sigma} \langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \nu \rangle d\sigma \end{aligned} \quad (4.6)$$

\Leftrightarrow

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.7)$$

Presentiamo ora le due equazioni di Maxwell mancanti, che descrivono il comportamento di campi elettrici e magnetici statici.

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{E}, \nu \rangle d\sigma = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (\text{Legge di Gauss}) \quad (4.8)$$

dove Q_{int} rappresenta il numero di cariche elettriche presenti all'interno della superficie Σ che stiamo considerando;

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{B}, \nu \rangle d\sigma = 0 \quad (4.9)$$

Volendo dare a queste equazioni un'interpretazione fisica, entrambe le equazioni descrivono il flusso rispettivamente di campo elettrico e campo magnetico in una superficie chiusa; la differenza sostanziale che intercorre tra i due è che il flusso del campo magnetico risulta essere nullo: questo risultato è conseguenza immediata del fatto che non possono esistere campi magnetici con un solo polo; in presenza di un polo nord magnetico, esiste sempre un polo sud e, proprio per questo motivo, in una superficie chiusa, i due campi si annullano a vicenda.

Ricapitolando, abbiamo le quattro equazioni in forma integrale (nel caso del vuoto):

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{E}, \nu \rangle d\sigma = 0 \quad (4.10)$$

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{B}, \nu \rangle d\sigma = 0 \quad (4.11)$$

$$\oint_{(\partial\Sigma)^+} \langle \vec{E}, T \rangle ds = - \int_{\Sigma} \langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nu \rangle d\sigma \quad (4.12)$$

$$\oint_{(\partial\Sigma)^+} \langle \vec{B}, T \rangle ds = \mu_0 \epsilon_0 \int_{\Sigma} \langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \nu \rangle d\sigma \quad (4.13)$$

Utilizzando il teorema di Stokes, abbiamo già scritto le equazioni 4.12 e 4.13 nel caso dinamico in forma differenziale, procediamo ora nella riscrittura delle altre due, sfruttando il teorema della divergenza: a tal fine, sia V il volume racchiuso dalla superficie, tale che $\partial V = \Sigma$.

Partiamo dalla 4.10:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \nu \rangle d\sigma &= \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dv = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mentre per la 4.11:

$$\int_{\partial V} \langle \vec{B}, \nu \rangle d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dv = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

dove in entrambi i casi, il termine dv indica l'elemento di volume. In conclusione, le equazioni di Maxwell in forma differenziale si presentano:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \tag{4.15}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{4.16}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.17}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4.18}$$

4.2 Equazione d'onda

Partendo dalle equazioni di Maxwell nel vuoto in forma differenziale, vogliamo arrivare a definire l'equazione d'onda, che regola le interazioni tra campo elettrico e campo magnetico: ci occuperemo in questa sezione di trovare una soluzione a tale equazione.

Per semplicità di notazione, se \vec{A} è un campo, indichiamo la divergenza di \vec{A} con il simbolo $\nabla \cdot \vec{A}$ e il rotore di \vec{A} con $\nabla \times \vec{A}$. Le equazioni di Maxwell nel caso del vuoto in forma differenziale si riscrivono come:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.21)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.22)$$

Prendiamo quindi l'equazione 4.21 e deriviamo parzialmente entrambi i membri rispetto al tempo e scambiamo le derivate parziali con quelle temporali:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{d}{dt}(\nabla \times \vec{E}) = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (4.24)$$

Moltiplicando ora per $\mu_0 \epsilon_0$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.25)$$

e usando l'equazione 4.22

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = 0 \quad (4.26)$$

Sfruttiamo la seguente identità vettoriale, valida per ogni campo vettoriale:

Proposizione 4.2.1. (*Identità del rotore.*)

Sia \vec{A} un campo vettoriale sufficientemente regolare. Allora

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad (4.27)$$

Riscriviamo quindi la 4.26 sfruttando l'identità:

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla \vec{B} + \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) &= \\ (\text{Sfrutto la 4.20: } \nabla \cdot \vec{B} = 0) & \\ = \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo in questo modo eliminato la dipendenza dal campo elettrico.

Riprendiamo ora l'equazione 4.22 e agiamo in maniera del tutto analoga:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-\nabla \times \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) &= 0 \\ -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Sfruttiamo ora la 4.21

$$-\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

e la proprietà 4.27 e otteniamo così un'equazione per il campo elettrico del tutto simile a quella per il campo magnetico:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.28)$$

In conclusione, sia il campo $\vec{E}(x, y, z, t)$ che il campo $\vec{B}(x, y, z, t)$ soddisfano la seguente equazione, detta *equazione delle onde*:

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})f(x, y, z, t) = 0 \quad (4.29)$$

dove la variabile c altro non è che la velocità della luce, con la relazione

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$$

Teorema 4.2.2. *Ogni funzione del tipo*

$$f_{\pm}(x, y, z, t) = f(\vec{q} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \quad \text{con } |\vec{q}|c = \omega \quad (4.30)$$

è soluzione dell'equazione d'onda.

Capiamo meglio come è fatta questa equazione: scelti un sistema di riferimento $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{x} = (x, y, z)$ e un parametro $\omega \in \mathbb{R}$ (detto *periodo*), si può dimostrare che l'equazione è soddisfatta se e solo se si verifica la condizione $|\vec{q}|c = \omega$, indipendentemente dalla scelta della funzione f .

Ora, poichè l'equazione delle onde è lineare, ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione: si può quindi dimostrare che un insieme completo di soluzioni indipendenti è dato dalle soluzioni del tipo:

$$\begin{cases} f_1(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) = \cos(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) \\ f_2(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) = \sin(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) \end{cases} \quad (4.31)$$

Queste rappresentano rispettivamente le soluzioni in parte reale e complessa della funzione complessa (chiamata *onda piana*):

$$f(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) = Ae^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (4.32)$$

Fissato un sistema di riferimento del tipo $\vec{q} = q\hat{i}$ (dove \hat{i} è il vettore unitario di direzione dell'asse x), possiamo dire che un'onda piana è descritta da una funzione:

1. periodiche in x , di periodo $\lambda = \frac{2\pi}{|q|}$
2. periodiche in t , di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

dove la grandezza λ è detta lunghezza d'onda e vale la relazione $\lambda = cT$. La quantità A descritta dall'equazione 4.32 è detta *ampiezza d'onda* ed è il massimo valore che la funzione può assumere in modulo.

4.3 Onde elettromagnetiche

Abbiamo visto che ogni componente di \vec{E} e \vec{B} soddisfa l'equazione delle onde; ma i due campi devono soddisfare anche le equazioni di Maxwell, che

impongono specifici vincoli sulla forma delle soluzioni. Per prima cosa, le equazioni di Maxwell, accoppiano tutte le componenti sia di \vec{E} che di \vec{B} : queste, se rappresentate da onde piane, devono quindi avere tutte lo stesso periodo ω . Scriviamo allora:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (4.33)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (4.34)$$

Vediamo quali risultati si ottengono andando a sostituire quindi le equazioni di Maxwell

1. Andiamo a sostituire queste espressioni nelle equazioni di Maxwell: inseriamo l'equazione 4.33 nella 4.19:

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = i(\vec{E}_0 \cdot \vec{q}) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)} \Leftrightarrow \vec{E}_0 \cdot \vec{q} = 0 \quad (4.35)$$

In maniera analoga, prendendo la 4.34 e sostituendola nella 4.20:

$$0 = \nabla \cdot \vec{B} = i(\vec{B}_0 \cdot \vec{q}) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)} \Leftrightarrow \vec{B}_0 \cdot \vec{q} = 0 \quad (4.36)$$

I risultati ottenuti ci dicono che campo elettrico e campo magnetico vibrano sempre lungo la stessa direzione, individuata dai vettori di ampiezza rispettivamente \vec{E}_0 e \vec{B}_0 , entrambi perpendicolari alla direzione di propagazione, individuata dal vettore \vec{q} : per questo motivo le onde vengono dette *onde trasversali*.

2. Componendo le equazioni 4.21 e 4.22, otteniamo che:

$$\langle \vec{E}_0, \vec{B}_0 \rangle = 0 \quad (4.37)$$

ovvero che le direzioni di vibrazione dei due campi risultano sempre perpendicolari tra loro. (Figura 1.1)

3. Inoltre, si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$||\vec{E}||^2 = c^2 ||\vec{B}||^2 \quad (4.38)$$

ovvero che campo elettrico e campo magnetico sono in stretto collegamento tra loro.

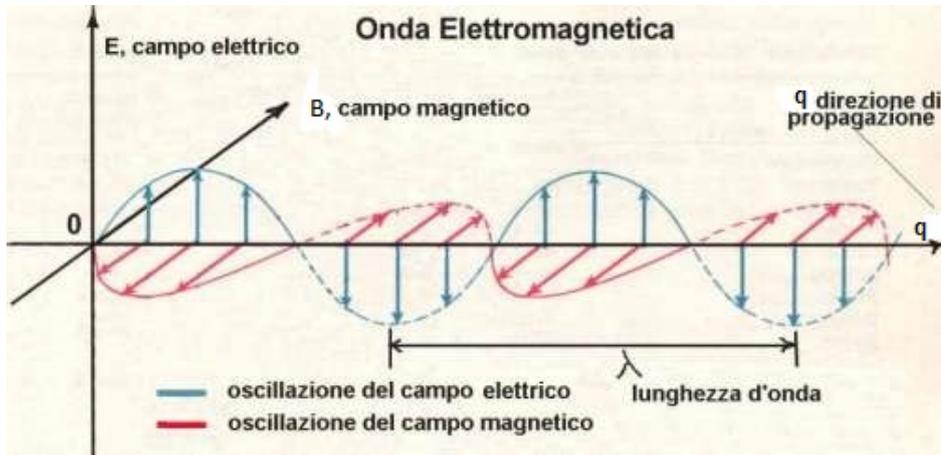


Figura 4.1: Onda elettromagnetica

In conclusione, le onde elettromagnetiche (\vec{E}, \vec{B}) che soddisfano le equazioni di Maxwell sono onde che si propagano nella direzione \vec{q} , tra loro perpendicolari e con velocità della luce c .

Inoltre, anche nel vuoto, i due campi non sono banalmente nulli: \vec{E} e \vec{B} possono variare nel tempo con il variare di \vec{q} , poichè la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{q}\|}$; in questo modo costruiamo lo spettro elettromagnetico, ovvero lo spettro di tutte le possibili lunghezze d'onda, tra le quali ritrovo anche la luce.

Elenco delle figure

4.1	Onda elettromagnetica	40
-----	---------------------------------	----

Bibliografia

- [1] Marco Galletti - *La duplice natura della luce* - http://www.marconi-galletti.it/progetti/sito_scienza_900-5LA/premesse/duplice_natura_della_luce.htm
- [2] Ermanno Lanconelli - *Lezioni Di Analisi Matematica 2 - Seconda Parte*, Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [3] Michael Spivak - *A Comprehensive Introduction To Differential Geometry - Volume 1*, Publish or Perish, INC. 1970.
- [4] Halliday, Resnik, Walter - *Fondamenti di fisica - Terza Edizione - Elettromagnetismo e ottica*, Zanichelli Editore, 2009 .
- [5] *Appunti personali del corso di Complementi Di Analisi Matematica* tenuto della professoressa Annamaria Montanari, anno accademico 2016/2017.
- [6] *Note del di corso fisica generale - secondo modulo* tenuto dalla professoressa Elisa Ercolessi, anno accademico 2015/2016.

Ringraziamenti

Vorrei spendere poche righe per ringraziare la mia famiglia, che mi ha permesso di affrontare questo percorso, senza mai farmi mancare nulla e che non mi ha mai abbandonata nei momenti di sconforto.

Un secondo ringraziamento va alle persone che in questi tre anni hanno condiviso con me questo percorso: alle mie coinquiline, che sono state il mio punto di riferimento più grande, grazie alle quali ho imparato a condividere, agli amici che, con me, erano a Bologna e a quelli che invece non c'erano, che non si sono fatti fermare dalla distanza e infine alle persone che hanno reso le ore di lezione un piacere.

Un ultimo ringraziamento alla professoressa, per la sua disponibilità e professionalità.