

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**FUNZIONI SPECIALI ED  
EQUAZIONI DIFFERENZIALI  
SINGOLARI**

Tesi di Laurea in Analisi

Relatore:  
Prof.  
ANGELO FAVINI

Presentata da:  
GIOVANNO MARCELO  
RENATO CARDENAS  
JIMENEZ

II Sessione  
Anno Accademico 2010/2011



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Funzioni speciali e singolarità regolari</b>	<b>7</b>
1.1 Equazioni differenziali lineari singolari e il metodo di Frobenius	7
1.2 Sistemi fondamentali di soluzioni per la equazione ipergeometrica intorno ai punti singolari . . . . .	11
1.2.1 Soluzioni nei casi eccezionali . . . . .	16
1.3 Equazione di Legendre . . . . .	18
1.3.1 Polinomi di Legendre . . . . .	19
<b>2 Problema al bordo omogeneo per operatori lineari del secondo ordine</b>	<b>23</b>
2.1 Problema omogeneo . . . . .	23
2.2 Problema non omogeneo . . . . .	26
2.2.1 Caso in cui il problema omogeneo ha una soluzione non banale . . . . .	28
2.3 Problemi omogenei e autovalori . . . . .	29
2.3.1 Funzioni ortogonali . . . . .	31
2.3.2 Problema di Sturm-Liouville . . . . .	33
2.3.3 Condizioni al bordo periodiche e punti del bordo singolari	36
<b>3 Limitatezza delle soluzioni per operatori lineari degeneri</b>	<b>39</b>



# Introduzione

Sono chiamate funzioni speciali delle specifiche funzioni che hanno proprietà che le rendono utili in diverse applicazioni, soprattutto per quanto riguarda le loro applicazioni computazionali e le loro connessioni con importanti equazioni differenziali. Infatti famose funzioni speciali si ottengono come soluzioni di equazioni differenziali singolari. Ad esempio le funzioni ipergeometriche, che formano una ampia famiglia di funzioni alla quale appartengono per esempio le funzioni di Bessel, la funzione Gamma incompleta, le funzioni di Legendre e in particolare i polinomi ortogonali di Legendre, sono soluzioni di una classe molto generale di equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine: le equazioni differenziali ipergeometriche. L'equazione ipergeometrica è una equazione differenziale del secondo ordine che ha tre punti singolari. Nel primo capitolo si troveranno sistemi fondamentali di soluzioni intorno ai tre punti, anzitutto ottenendo una soluzione particolare intorno allo zero con il metodo di Frobenius e poi facendo cambiamenti opportuni di variabile per trovare le altre soluzioni. Si vedrà che l'equazione di Legendre è un caso particolare della ipergeometrica e si studieranno alcune proprietà delle sue soluzioni più importanti nelle applicazioni, cioè i polinomi di Legendre.

Nei problemi di valori al bordo per equazioni differenziali ordinarie si cercano soluzioni della equazione che invece di soddisfare delle condizioni iniziali in un punto come nel problema di Cauchy, soddisfino delle condizioni sul bordo del dominio dell'equazione. Nel caso di equazioni differenziali del secondo ordine definite su un intervallo reale  $[a, b]$ , il problema è quello di trovare soluzioni tali che il loro valore e quello delle loro derivate soddisfino delle condizioni nei punti  $a$  e  $b$ . Nel secondo capitolo si espongono alcuni risultati fondamentali su questo tipo di problemi, si introducono i concetti di funzioni ortogonali, di autovalore e autofunzione, e di sistema ortogonale completo. In particolare si introduce il problema di Sturm-Liouville la cui soluzione è determinata dagli autovalori e autofunzioni dell'equazione. Alcuni dei teoremi enunciati nel secondo capitolo continuano ad essere veri anche

quando i punti del bordo sono punti singolari della equazione, infatti si vedrà che basta sostituire le condizioni relativi a quel punto con la condizione che la soluzione sia limitata. In questo modo lo stesso metodo usato per trovare la soluzione quando i punti non sono singolari può essere usato. In relazione ai problemi di valore al bordo, l'equazione di Legendre risulta essere molto importante dato che non è solo un caso particolare della equazione ipergeometrica ma è anche un caso particolare dell'equazione che compare nel problema di Sturm-Liouville. Come conseguenza si vedrà che tutti i polinomi di Legendre risultano essere un sistema ortogonale completo.

In generale quando i punti del bordo sono punti singolari della equazione, esistono alcuni criteri che permettono di capire quando esistono autofunzioni della equazione che siano limitate nei punti del bordo. Nel terzo capitolo si espongono questi criteri.

# Capitolo 1

## Funzioni speciali e singolarità regolari

### 1.1 Equazioni differenziali lineari singolari e il metodo di Frobenius

Una equazione differenziale di ordine  $n$  della forma

$$Q_0(z)w^{(n)} + Q_1(z)w^{(n-1)} + \dots + Q_n(z)w = 0, \quad (1.1)$$

dove tutti i coefficienti  $Q_k(z)$  sono funzioni olomorfe in un dominio  $D$  e dove  $Q_0 \neq 0$  in  $D$  ha sempre, per ogni punto  $z_0 \in D$ ,  $n$  soluzioni linearmente indipendenti  $w_1, \dots, w_n$  che sono anche olomorfe in un intorno di  $z_0$ .

Essendo queste soluzioni olomorfe, e quindi anche analitiche intorno a  $z_0$ , si può supporre che sono della forma

$$w_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki}(z - z_0)^i \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

dove le  $a_{ki}$  sono costanti complesse. Siano  $(w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn})$  per  $k = 1, 2, \dots, n$  vettori linearmente indipendenti di  $\mathbf{C}^n$ , allora assegnando all'equazione i valori iniziali  $w(z_0) = w_{k1}, w'(z_0) = w_{k2}, \dots, w^{(n-1)}(z_0) = w_{kn}$  e sostituendo la serie formale  $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ki}(z - z_0)^i$  con le sue derivate formali nella (1.1) si possono trovare i coefficienti  $a_{ki}$  di  $w_k(z)$ . Infatti, basta osservare che una volta sostituita la serie con le sue derivate formali, i coefficienti della serie risultante a sinistra della (1.1) devono essere tutti nulli.

Da qui in poi si suppone  $z_0 = 0$  (per ricondursi a questo caso dal caso generale basta considerare il cambiamento di variabili  $z \rightarrow z + z_0$ ).

Nel caso in cui almeno una delle  $Q_k(z)$  non è olomorfa intorno a  $z = 0$  il metodo precedente non è più utilizzabile per trovare una soluzione della equazione. Per gli argomenti trattati in questa tesi risulta d'interesse il caso in cui  $z = 0$  è un punto singolare regolare, cioè il caso in cui l'equazione è della forma

$$z^n w^{(n)} + z^{n-1} B_1(z) w^{(n-1)} + \dots + z B_{n-1} w' + B_n(z) w = 0, \quad (1.3)$$

dove le funzioni  $B_k(z)$  sono olomorfe in  $z = 0$  mentre almeno una delle funzioni

$$z^{-k} B_k(z) \quad (1.4)$$

non lo è. In questo caso si può trovare una soluzione della forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+s}$ , dove  $s$  è un numero complesso. Precisamente si descriverà il metodo di Frobenius che permette di trovare una soluzione di questo tipo.

Prima di trovare i coefficienti  $c_n$ , bisogna capire quali sono i valori che può assumere la  $s$ . A questo scopo conviene scrivere la (1.3) in un modo diverso introducendo il seguente operatore

$$Tf = zf'(z) \quad (1.5)$$

Si definiscono anche le potenze di  $T$  come

$$T^n f = T(T^{n-1} f) \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

e si può vedere per induzione che risulta

$$z^k f^{(k)}(z) = T(T - I) \dots (T - (k - 1)I) f(z), \quad (1.7)$$

dove  $I$  è l'operatore identità. Dunque la (1.3) si può scrivere

$$\sum_{k=1}^n B_{n-k}(z) T(T - I) \dots (T - (k - 1)I) w(z) + B_n(z) w(z) = 0. \quad (1.8)$$

Espandendo i polinomi in  $T$  e raccogliendo i termini che hanno la stessa potenza di  $T$  l'equazione prende la forma

$$\sum_{k=0}^n P_{n-k}(z) T^k w = 0, \quad P_0 = 1. \quad (1.9)$$

Ora, essendo la soluzione cercata della forma  $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{s+m}$ , sostituendo questa serie formale nella (1.9) si ottiene

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} P_{n-k,j} z^j \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m + s)^k z^{m+s} \equiv 0, \quad (1.10)$$



## 1.1 Equazioni differenziali lineari singolari e il metodo di Frobenius 9

---

dove

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{mj} z^j. \quad (1.11)$$

Chiaramente una condizione necessaria affinché la serie sia una soluzione è che i coefficienti del polinomio in  $z$  del termine a sinistra della (1.10) siano tutti nulli. In particolare deve esserlo anche il coefficiente che corrisponde al termine di grado minore. Questo termine corrisponde a  $j = m = 0$  e quindi deve essere

$$f_0(s) = \sum_{k=0}^n P_{n-k,0} s^k = 0, \quad (1.12)$$

il che vuol dire che la  $s$  deve essere una radice di questa equazione che si conosce come *equazione indiciale* di (1.3) in  $z = 0$ . Supponendo che  $s$  sia una delle radici della equazione indiciale, il passo successivo di questo metodo consiste nel trovare i valori dei coefficienti  $c_n$ . Essendo

$$f_j(s) = \sum_{k=0}^n P_{n-k,j} s^k \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

I coefficienti della (1.10) sono tutti nulli se e solo se, per  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$f_j(s) = \sum_{k=0}^n P_{n-k,j} s^k \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Prendendo  $c_0 = 1$  gli altri coefficienti si possono trovare attraverso la (1.14) sempre che sia  $f(s+m) \neq 0$  per ogni  $m$ , cioè quando non esiste un'altra radice della equazione caratteristica che differisca della  $s$  per un intero positivo (Chiaramente scegliendo per  $s$  il valore della radice che ha la parte reale più grande questa condizione viene assicurata). Sotto queste ipotesi, la serie trovata è una soluzione della equazione nel suo dominio di convergenza.

Nel caso in cui le radici della equazione indiciale siano tutte diverse vale il seguente teorema.

**Teorema 1.** *Se le radici  $s_k$  dell'equazione indiciale sono tali che  $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$  per  $j \neq i$ , allora l'equazione (1.3) ha  $n$  soluzioni linearmente indipendenti  $w_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{km} z^{s_k+m}$  dove  $k = 1, 2, \dots, n$ , che sono olomorfe in ogni intorno aperto di  $z = 0$  in cui siano olomorfe tutte le  $P_k$ .*

In realtà il metodo di Frobenius permette di trovare soluzioni linearmente indipendenti anche nel caso in cui ci siano radici coincidenti o che differiscano per un numero intero. Per questa tesi però è d'interesse il fatto

che è sempre possibile trovare una soluzione con il metodo descritto sopra, scegliendo come  $s$  la radice della equazione indiciale con la parte reale più grande. Per trovare altre soluzioni indipendenti, si sfrutterà la struttura particolare delle equazioni considerate, facendo opportuni cambiamenti di variabili.

L'ultima cosa da dire rispetto ai punti singolari è che una equazione differenziale lineare, si può studiare anche in un intorno dell' $\infty$ . Basta fare il cambiamento di variabile  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  e poi studiare l'equazione risultante dopo il cambiamento in un intorno dello zero. L' $\infty$  è un punto singolare regolare della equazione quando  $z = 0$  lo è per l'equazione trovata dopo il cambiamento di variabile.

**Esempio 1.1: Soluzione dell'equazione ipergeometrica in un intorno di  $z=0$**

L'equazione ipergeometrica è una equazione differenziale del secondo ordine della forma

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0 \quad (1.15)$$

dove i tre parametri  $\alpha, \beta, \gamma$  sono costanti complesse arbitrarie.

È chiaro che l'equazione ha i tre punti singolari,  $0, 1, \infty$ . Nel caso di  $z = 0$  l'equazione indiciale è

$$f_0(c) = a_0(c(c-1) + \gamma c) = 0 \quad (1.16)$$

che ha come radici  $0, 1 - \gamma$

Dunque, si può osservare che se  $\gamma$  non è un intero non negativo, allora prendendo  $s = 0$  si può sempre trovare una soluzione intorno a  $z = 0$  col aiuto del metodo di Frobenius.

La soluzione  $u$  è della forma  $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , dunque

$$u'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{(n-1)} \quad (1.17)$$

$$u''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{(n-2)} \quad (1.18)$$

e sostituendo nella equazione ipergeometrica risulta

$$\begin{aligned} & z \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2} - z^2 \sum_{r=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2} \\ & + \gamma \sum_{r=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} - (\alpha + \beta + 1) z \sum_{r=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} - \\ & \alpha\beta \sum_{r=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

che raggruppando i termini con la stessa potenza di  $z$  si può riscrivere

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)nz^n - a_n n(n-1)z^n + \\ & \gamma a_{n+1}(n+1)z^n - (\alpha + \beta + 1)a_n n z^n - \\ & \alpha \beta a_n z^n = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Uguagliando i coefficienti di questa serie a zero si ottiene

$$((n+1)n + \gamma(n+1))a_{n+1} + (n(1-n) - (1+\alpha+\beta)n - \alpha\beta)a_n = 0 \quad (1.21)$$

e si ricava

$$a_n = \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)}{n(n+\gamma-1)} a_{n-1} \quad 1 \leq n \quad (1.22)$$

Essendo  $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$  il simbolo di Pochhammer, la relazione sopra implica

$$a_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} \quad 1 \leq n \quad (1.23)$$

E quindi, supponendo  $a_0 = 1$  si trova la soluzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} z^n \quad (1.24)$$

Questa soluzione si conosce come serie ipergeometrica, si denota con  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  e ha raggio di convergenza  $\rho = 1$ .

## 1.2 Sistemi fondamentali di soluzioni per la equazione ipergeometrica intorno ai punti singolari

Nell'esempio (1.1) si è visto che supponendo  $\gamma$  diverso da un intero non negativo, la serie ipergeometrica  $F(a, b, c; z)$  è una soluzione intorno al punto  $z = 0$  dell'equazione

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0. \quad (1.25)$$

Allora si ha che

$$w_{01}(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z) \quad (1.26)$$

è una soluzione olomorfa in  $z = 0$ , e la serie converge per  $|z| < 1$ .

Da questo punto in poi si intende che una funzione  $w(z)$  è soluzione della equazione in un certo intorno di un punto singolare, se questa risulta convergente per tutti i punti di quell'aperto tranne il punto singolare dove la  $w$

potrà anche non essere definita. I casi in cui un cambiamento delle variabili non basta saranno trattati più avanti; questi casi eccezionali sono:

$$\begin{aligned} &\text{in } z = 0, && \text{se } \gamma \text{ è un intero,} \\ &\text{in } z = 1, && \text{se } \alpha + \beta - \gamma \text{ è un intero, e} \\ &\text{in } z = \infty, && \text{se } \alpha - \beta \text{ è un intero.} \end{aligned}$$

L'equazione ipergeometrica ammette una serie di trasformazioni delle variabili che la trasformano in una equazione simile con nuovi parametri. Una di quelle trasformazioni è

$$w = z^{1-\gamma}u. \quad (1.27)$$

L'equazione per  $u$  è

$$z(1-z)u'' + [2-\gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)z]u' - (\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)u = 0. \quad (1.28)$$

Ponendo

$$a = \alpha - \gamma + 1, b = \beta - \gamma + 1, c = 2 - \gamma, \quad (1.29)$$

si vede che (1.28) è una equazione ipergeometrica con parametri  $a, b, c$ . Dato che  $u_1(z) = F(a, b, c; z)$  è una soluzione di (1.28) intorno a  $z = 0$ , risulta che

$$w_{02}(z) = u_1(z)z^{1-\gamma} = z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z) \quad (1.30)$$

soddisfa (1.25) quando  $\gamma$  non è un intero positivo. Se  $\gamma = 1$  le due soluzioni sono identiche, ma quando  $\gamma$  non è un intero,  $w_{01}(z)$  e  $w_{02}(z)$  sono soluzioni linearmente indipendenti di (1.25). In questo modo si è trovato un sistema fondamentale intorno a  $z = 0$ .

Per trovare un sistema fondamentale intorno a  $z = 1$ , si osserva che con il cambiamento della variabile indipendente  $z \rightarrow 1 - z$  si ottiene un'altra ipergeometrica di parametri

$$\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, \quad (1.31)$$

di cui

$$w_{11}(z) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - z), \quad (1.32)$$

è una soluzione, e quindi ponendo

$$w_{12}(z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta}F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - z), \quad (1.33)$$

queste due sono soluzioni di (1.25) per  $|z - 1| < 1$  quando  $\alpha + \beta - \gamma$  non è un intero. Sono linearmente indipendenti e costituiscono un sistema fondamentale in  $z = 1$ .

Per trovare un sistema fondamentale nel punto all'infinito si considera la trasformazione  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ . Di nuovo si trova una ipergeometrica, che in questo caso ha parametri

$$\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1$$

e

$$w_{\infty,1}(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{z}) \quad (1.34)$$

è una soluzione per  $|z| > 1$ . Dato che (1.25) non si modifica scambiando  $\alpha$  e  $\beta$ , segue che

$$w_{\infty,2}(z) = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{z}) \quad (1.35)$$

è un'altra soluzione. Queste funzioni esistono a meno che  $\alpha - \beta$  sia un intero e costituiscono un sistema fondamentale nel punto all'infinito.

Si possono trovare ancora altre soluzioni con domini di convergenza diversi considerando altre trasformazioni della forma  $w = z^\delta(1 - z)^\varepsilon u$ . Altre soluzioni trovate in questo modo sono:

1) Con la trasformazione  $z \rightarrow \frac{1}{1-z}$  si ottiene una ipergeometrica di parametri

$$\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1$$

di cui

$$w_{\infty,3}(z) = (z - 1)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{1-z}) \quad (1.36)$$

è una soluzione. Come nel caso precedente l'equazione non si modifica scambiando  $\alpha$  e  $\beta$  e si ottiene

$$w_{\infty,4}(z) = (z - 1)^{-\beta} F(\beta, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{1-z}) \quad (1.37)$$

come seconda soluzione. Queste serie convergono per  $|z - 1| > 1$  e se  $\alpha - \beta$  non è un intero, entrambi le soluzioni esistono, e costituiscono un sistema fondamentale all'infinito.

2)  $z \rightarrow \frac{z}{1-z}$ . Si ottiene di nuovo una ipergeometrica, i parametri sono

$$\alpha, \gamma - \beta, \gamma$$

e la soluzione corrispondente è

$$w_{03}(z) = (1-z)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \frac{z}{1-z}) \quad (1.38)$$

Scambiando  $\alpha$  e  $\beta$  si ottiene anche

$$w_{05}(z) = (1-z)^{-\beta} F(\beta, \gamma - \alpha, \gamma; \frac{z}{z-1}). \quad (1.39)$$

Per trovare ancora altre due soluzioni si osserva che la

$$s(1-s)u'' + [c - (a+b+1)s]u' - abu = 0 \quad (1.40)$$

ha come soluzione la

$$s^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; s). \quad (1.41)$$

(Infatti non è altro che la seconda soluzione che è stata trovata intorno a  $z=0$ ). Sostituendo in questa ultima  $a, b, c$  rispettivamente per

$$\alpha, \gamma - \beta, \gamma \quad \text{oppure} \quad \beta, \gamma - \alpha, \gamma$$

ed scrivendo  $\frac{z}{1-z}$  per  $s$  si trovano le due soluzioni

$$w_{04}(z) = z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} F(\alpha+1-e\gamma, 1-\beta, 2-\gamma; \frac{z}{z-1}) \quad (1.42)$$

$$w_{06}(z) = z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\beta-1} F(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma; \frac{z}{z-1}) \quad (1.43)$$

Queste quattro soluzioni esistono per  $\Re(z) < \frac{1}{2}$  quando  $\gamma$  non è un intero.

3)  $z \rightarrow \frac{z-1}{z}$ . I parametri della ipergeometrica trovata sono

$$\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha + \beta + 1 - \gamma \quad (1.44)$$

Quindi

$$w_{1,3}(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha + \beta + 1 - \gamma; \frac{z-1}{z}) \quad (1.45)$$

$$w_{1,5}(z) = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \alpha + \beta + 1 - \gamma; \frac{z-1}{z}) \quad (1.46)$$

sono soluzioni. Di nuovo si ottengono altre due soluzioni considerando la seconda soluzione dell'equazione ipergeometrica intorno all'origine (1.41): le soluzioni trovate sono

$$w_{1,4}(z) = z^{\beta-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta, 1 - \beta, 1 + \gamma - \alpha - \beta; \frac{z-1}{z}) \quad (1.47)$$

$$w_{1,6}(z) = z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, 1 - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta; \frac{z-1}{z}) \quad (1.48)$$

Le ultime quattro serie ipergeometriche convergono per  $\Re(z) > \frac{1}{2}$ .

In totale, si sono trovate sedici soluzioni che convergono per

$$\begin{array}{ll} |z| < 1 & \text{nel caso di } w_{01}, w_{02}, \\ |z-1| < 1 & \text{nel caso di } w_{11}, w_{12}, \\ |z| > 1 & \text{nel caso di } w_{\infty,1}, w_{\infty,2}, \\ |z-1| > 1 & \text{nel caso di } w_{\infty,3}, w_{\infty,4}, \\ \Re z < \frac{1}{2} & \text{nel caso di } w_{03}, w_{04e}, w_{05}, w_{06}, \\ \Re z > \frac{1}{2} & \text{nel caso di } w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16} \end{array} \quad (1.49)$$

Tre soluzioni di una equazione del secondo ordine sono sempre linearmente dipendenti. Quindi qualsiasi delle sedici soluzioni si può scrivere come combinazione lineare di un sistema fondamentale. In questo modo si possono trovare un numero di relazioni tra le soluzioni. In particolare si può vedere che

$$\begin{aligned} w_{01} = w_{03} = w_{05}, & \quad w_{02} = w_{04} = w_{06} \\ w_{11} = w_{13} = w_{15}, & \quad w_{12} = w_{14} = w_{16} \\ w_{\infty,1} = w_{\infty,3}, & \quad w_{\infty,2} = w_{\infty,4}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Tali relazioni sono conseguenza del principio di Kummer. Le tre soluzioni  $w_{01}, w_{03}$  e  $w_{05}$  sono olomorfe in un intorno dell'origine dove tutte hanno valore 1, e quindi l'uguaglianza segue. Le tre soluzioni della seconda identità sono tutte della forma  $z^{1-\gamma}$  volte una funzione olomorfa in un intorno di  $z = 0$  e

con valore 1 in quel punto, quindi in base a Kummer l'identità segue. Un argomento simile si può usare per gli altri casi. Nella terza e quarta identità, le soluzioni esistono in un intorno di  $z = 1$ , nella quinta e sesta in un intorno del infinito.

### 1.2.1 Soluzioni nei casi eccezionali

Dato che le soluzioni dedotte nella sezione precedente sono state trovate riconducendosi ad una equazione ipergeometrica intorno a  $z = 0$ , per studiare i casi eccezionali è sufficiente discutere la situazione in quel punto. In  $z = 0$  è eccezionale il caso in cui  $\gamma$  è un intero  $p$ . Se  $p > 0$ ,  $w_{01}$  è ancora una soluzione, ma la formula per  $w_{02}(z)$  non ha più senso. Per trovare una seconda soluzione in  $z = 0$ , si può usare un argomento di continuità. Per valori fissi di  $z$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  la serie

$$w_{02}(z) = z^{1-\gamma} + \sum_n^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n (\beta - \gamma + 1)_n}{(1)_n (2 - \gamma)_n} z^{n+1-\gamma} \equiv G(\gamma) \quad (1.51)$$

definisce una funzione meromorfa di  $\gamma$  che ha un polo semplice in  $\gamma = p$ . Facendo i calcoli si vede che il residuo di  $G(\gamma)$  in  $\gamma = p$  è

$$(-1)^{p-1} \frac{(\alpha - p + 1)_{p-1} (\beta - p + 1)_{p-1}}{(p-2)!(p-1)!} F(\alpha, \beta, p; z) \equiv f_{-1}(z), \quad (1.52)$$

che è una soluzione di (1.25) per  $\gamma = p$ . Qui si è assunto che  $p > 1$  e che  $\alpha$  e  $\beta$  sono tutti e due diversi da  $1, 2, \dots, p-1$ . Il caso  $p = 1$  ha bisogno di uno studio speciale, dato che le espressioni per  $w_{01}$  e  $w_{02}$  coincidono. Per i valori eccezionali di  $\alpha$  e  $\beta$  appena detti il punto  $\gamma = p$  non è un polo di  $G(\gamma)$  e

$$\lim_{\gamma \rightarrow p} G(\gamma)$$

esiste finito ed è la seconda soluzione. Lasciando questi casi eccezionali per ultimo, si procede nel modo seguente.

Si pone

$$C_p(\alpha, \beta) = (-1)^{p-1} \frac{(\alpha - p + 1)_{p-1} (\beta - p + 1)_{p-1}}{(p-2)!(p-1)!} \quad (1.53)$$

e si osserva che



$$\Delta \equiv G(\gamma) - C_p(\alpha, \beta) \frac{1}{\gamma - p} F(\alpha, \beta, \gamma; z) \quad (1.54)$$

è una soluzione di (1.25) per  $0 < |\gamma - p| < 1$ . Se la espressione ha un limite quando  $\gamma \rightarrow p$ , allora il limite è soluzione di (1.25) per  $\gamma = p$ . Adesso si sa che  $G(\gamma)$  si può scrivere

$$G(\gamma) = \frac{1}{\gamma - p} f_{-1}(z) + f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) (\gamma - p)^n, \quad (1.55)$$

che è convergente per  $0 < |\gamma - p| < 1$ , dove

$$f_0(z) = \frac{\partial}{\partial \gamma} [(\gamma - p)G(\gamma)]_{\gamma=p} \quad (1.56)$$

per il teorema di Taylor. Segue che

$$\Delta = -C_p(\alpha, \beta) \frac{1}{\gamma - p} [F(\alpha, \beta, \gamma; z) - F(\alpha, \beta, p; z)] + f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) (\gamma - p)^n, \quad (1.57)$$

che ha limite

$$-C_p(\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial \gamma} F(\alpha, \beta, p; z) + f_0(z) = -C_p(\alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial \gamma} F(\alpha, \beta, p; z) + \frac{\partial}{\partial \gamma} [(\gamma - p)G(\gamma)]_{\gamma=p}. \quad (1.58)$$

Quindi il limite esiste e per trovare la soluzione basta fare i calcoli che compaiono nell'ultime espressione.

In questo modo si trova una espressione della forma

$$-C_p(\alpha, \beta) F(\alpha, \beta, p; z) \log z + F_1(\alpha, \beta, p; z), \quad (1.59)$$

dove

$$F_1(\alpha, \beta, p; z) = G(\alpha, \beta, p; z) + z^{1-p} + \sum_{n=1}^{p-2} \frac{(\alpha-p+1)_n (\beta-p+1)_n}{(1)_n (2-\gamma)_n} z^{n+1-p} - C_p(\alpha, \beta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(1)_m (p)_m} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \frac{1}{\alpha+j} + \frac{1}{\beta+j} - \frac{1}{1+j} - \frac{1}{p+j} \right) z^m. \quad (1.60)$$

Poichè  $G$  è il prodotto di una costante per  $F(\alpha, \beta, p; z)$ , lo si può togliere, dato che si vuole trovare una seconda soluzione linearmente indipendente da

$w_{01}(z)$ . Dunque (1.60) è una soluzione di (1.25) per  $\gamma = p$  ed è linearmente indipendente con  $w_{01}$ .

Per il caso  $p = 1$  vale la formula

$$-F(\alpha, \beta, 1; z) \log z + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(1)_m (1)_m} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \frac{1}{\alpha + j} + \frac{1}{\beta + j} - \frac{2}{1 + j} \right) z^m. \quad (1.61)$$

che si può ottenere come il

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1}{\gamma - 1} [F(\alpha, \beta, \gamma; z) - z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z)] \quad (1.62)$$

che è quindi soluzione di (1.25) per  $\gamma = 1$  e che chiaramente, non essendo  $F(\alpha, \beta, 1; z)$  moltiplicato per una costante, è una soluzione linearmente indipendente. I casi in cui  $\gamma$  è un intero positivo oppure  $\gamma = 0$  si possono trattare in maniera simile. In questo caso è  $w_{02}$  che rimane valida mentre  $w_{01}$  diventa infinita e non può essere usata come seconda soluzione. Il metodo descritto sopra si può anche usare in questo caso, e risultati simili valgono nei punti singolari dove sono presenti parametri eccezionali.

### 1.3 Equazione di Legendre

Da qui e per il resto della tesi, la variabile dipendente  $x$  sarà considerata reale, e quindi tutte le funzioni saranno considerate definite in  $\mathbf{R}$ .

L'equazione

$$(1 - x^2)w'' - 2xw' + a(a + 1)w = 0 \quad (1.63)$$

si conosce come equazione di Legendre e le sue soluzioni si chiamano funzioni di Legendre. Queste funzioni si incontrano spesso in fisica, ad esempio nella soluzione in coordinate sferiche di equazioni alle derivate parziali come l'equazione di Laplace.

In realtà essa è un caso particolare della equazione ipergeometrica, infatti facendo la sostituzione  $u = \frac{1}{2}(1 - z)$  si trova una equazione ipergeometrica di parametri.

$$a + 1, -a, 1.$$

e quindi una soluzione della (1.63) in  $z=1$  è

$$P_a(z) = F(a + 1, -a, 1; \frac{1}{2}(1 - z)). \quad (1.64)$$

e risulta che l'equazione di Legendre ha tre punti singolari regolari  $z = 1, -1$  e  $\infty$  e che le radici delle rispettive equazioni indiciali sono

$$0, 0; 0, 0; a + 1, -a$$

Con lo stesso metodo usato per trovare una seconda soluzione intorno a  $z = 0$  per la ipergeometrica, si ottiene come seconda soluzione per la (1.63) intorno a  $z = 1$

$$P_{a,1}(z) = P_a(z) \log \frac{1}{2}(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)_n (-a)_n}{(1)_n (1)_n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{a+1+j} + \frac{1}{-a+j} - \frac{2}{1+j} \right] \frac{1}{2} (1-z)^n. \quad (1.65)$$

### 1.3.1 Polinomi di Legendre

Il caso particolare più importante dell'equazione di Legendre per le applicazioni è quello in cui  $a=n$ , un intero positivo. In questo caso la (1.64) diventa

$$P_n(z) = F(n+1, -n, 1; \frac{1}{2}(1-z)). \quad (1.66)$$

che è un polinomio. Questi polinomi  $P_n$ , chiamati polinomi di Legendre sono soluzioni della equazione che chiaramente essendo polinomi sono finite nei punti singolari  $x = 1, -1$ . Una seconda soluzione della (1.63) viene data dalla (1.65) sostituendo  $a$  con  $n$ , ma a differenza dei polinomi  $P_n$  queste soluzioni sono divergenti in  $x = 1, -1$ .

Nei problemi di valori al bordo risulta utile esprimere i polinomi di Legendre come la derivata  $n$ -esima di un polinomio molto semplice. Integrando il polinomio di Legendre  $P_n(x)$   $n$  volte tra 0 e  $t$  si trova un polinomio di grado  $2n$ :

$$S_{2n}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} \frac{t^{2n-2j}}{(n-2j+1)(n-2j+2) \dots (2n-2j)}. \quad (1.67)$$

che si può scrivere

$$S_{2n}(t) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} (t^2)^{n-j}. \quad (1.68)$$

La potenza più bassa di  $t$  in  $S_{2n}$  è  $t^{2n-2m}$ , cioè,  $t^n$  se  $n$  è pari, oppure  $t^{n+1}$  se  $n$  è dispari. Se alla somma precedente si aggiunge il polinomio di grado

minore di  $n$ :

$$\frac{1}{2^n n!} \sum_{j=m+1}^n (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} (t^2)^{n-j}. \quad (1.69)$$

l'espressione risultante non è altro che l'espansione binomiale di  $(t^2 - 1)^n$ . Quindi essendo la derivata  $n$ -esima di un polinomi di grado minore di  $n$  nulla, ed essendo  $P_n(t)$  la derivata  $n$ -esima di  $S_{2n}(t)$ , risulta che  $P_n(t)$  è la derivata  $n$ -esima di  $(2^n n!)^{-1}(t^2 - 1)$ ; cioè,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.70)$$

La (1.70) si chiama *formula di Rodrigues* per i polinomi di Legendre.

Con l'aiuto della formula di Rodrigues si può dedurre una relazione di ricorrenza per i  $P_n$ . Si osservi che essendo  $D^n$  l'operatore derivata  $n$ -esima e ponendo  $u = (x^2 - 1)^n$  risulta

$$2^{n+1}(n+1)!P_{n+1} = D^{n+1}(u^{n+1}) = D^{n-1}(D^2 u^{n+1}).$$

e anche

$$\begin{aligned} D(u^{n+1}) &= 2(n+1)xu^n \\ D^2 u^{n+1} &= 2(n+1)(u^n + 2nx^2 u^{n-1}) = 2(n+1)[u^n + 2n(x^2 - 1)u^{n-1} + 2nu^{n-1}] \\ &= 2(n+1)[(2n+1)u^n + 2nu^{n-1}]. \end{aligned}$$

quindi,

$$2^n n! P_{n+1} = (2n+1)D^{n-1}u^n + 2nD^{n-1}u^{n-1};$$

e cioè,

$$P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{2^n n!} D^{n-1}u^n. \quad (1.71)$$

Con l'aiuto della regola di Leibnitz si può scrivere

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{D^n(Du^{n+1})}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{D^n(xu^n)}{2^n n!} = \\ &= \frac{x D^n u^n + n D^{n-1} u^n}{2^n n!} = x P_n + \frac{n}{2^n n!} D^{n-1} u^n. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Usando le equazioni (1.71) e (1.72) per cancellare il termine  $D^{n-1}u^n$ , si ottiene la formula di ricorrenza

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.73)$$

che si può scrivere

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (1.74)$$

**Esercizio 1.1:** Dimostrare che  $P_n(1) = 1$ .

*Soluzione.*  $(x^2 - 1)^n = (x + 1)^n(x - 1)^n$ , quindi dalla formula di Rodrigues

$$2^n n! P_n(x) = D^n((x + 1)^n(x - 1)^n).$$

Usando la regola di Leibnitz risulta

$$2^n n! P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} D^k[(x + 1)^n] D^{n-k}[(x - 1)^n],$$

dove  $D^0 w = w$ . Solo il primo termine ( $k = 0$ ) non moltiplica  $x - 1$ . Quindi quando  $x = 1$ , il valore della somma è  $n!2^n$ , e si verifica che

$$P_n(1) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

•



## Capitolo 2

# Problema al bordo omogeneo per operatori lineari del secondo ordine

### 2.1 Problema omogeneo

Si consideri il problema al contorno omogeneo

$$\begin{aligned} \text{ED: } & Ly = 0 \quad a \leq x \leq b \\ \text{CB: } & \begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Qui è  $L$  un operatore lineare del secondo ordine definito come

$$Ly = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \quad (2.2)$$

dove  $a_0 \neq 0$  e  $a_0, a_1, a_2$  sono funzioni continue in  $a \leq x \leq b$  e si suppone che le coppie  $(\alpha_1, \beta_1)$  e  $(\alpha_2, \beta_2)$  siano non nulle.

È chiaro che questo problema possiede sempre la soluzione banale  $y(x) \equiv 0$ . Una condizione per l'esistenza di una soluzione non banale del problema si può ottenere nel modo seguente. Siano  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  due soluzioni linearmente indipendenti della equazione differenziale  $Ly = 0$ . Allora la soluzione generale è della forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2. \quad (2.3)$$

Per soddisfare le condizioni al bordo deve essere

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

e sostituendo la (2.3), si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha_1[c_1y_1(a) + c_2y_2(a)] + \beta_1[c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a)] &= 0 \\ \alpha_2[c_1y_1(b) + c_2y_2(b)] + \beta_2[c_1y_1'(b) + c_2y_2'(b)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

che si può scrivere equivalentemente

$$\begin{aligned} c_1B_a(y_1) + c_2B_a(y_2) &= 0 \\ c_1B_b(y_1) + c_2B_b(y_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove

$$\begin{aligned} B_a(u) &= \alpha_1u(a) + \beta_1u'(a) \\ B_b(u) &= \alpha_2u(b) + \beta_2u'(b) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dunque si vede che le equazioni in (2.5) hanno soluzione non banale  $c_1, c_2$  se e solo se

$$\begin{vmatrix} B_a(y_1) & B_a(y_2) \\ B_b(y_1) & B_b(y_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Quindi una soluzione non banale del problema al contorno (2.1) esiste se o solo se soddisfatta la (2.7).

L'equazione differenziale che compare in (2.1), essendo lineare e del secondo ordine, ha come soluzione generale tutte le combinazioni lineari di due sue soluzioni che siano linearmente indipendenti, e cioè uno spazio vettoriale di dimensione due. Aggiungendo le condizioni al bordo però, risulta che la soluzione generale del problema non ha più dimensione due. Infatti nei casi in cui esiste una soluzione diversa da quella banale, il seguente teorema assicura che la soluzione generale è uno spazio di dimensione uno.

**Teorema 1.** *Se  $u(x)$  è una soluzione non banale del problema (2.1), allora tutte le soluzioni sono della forma  $y = cu(x)$  dove  $c$  è una costante arbitraria.*

*Dimostrazione.* Siano  $v(x)$  e  $u(x)$  due soluzioni non banali del problema ai valori al bordo. Allora sostituendo  $u$  e  $v$  nella prima delle condizioni si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha_1u(a) + \beta_1u'(a) &= 0 \\ \alpha_1v(a) + \beta_1v'(a) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Guardando queste ultime equazioni come un sistema lineare nelle incognite  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , e considerando che per ipotesi  $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$  si vede che il sistema lineare ha soluzione non banale, cioè:

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$



Questo determinante è il Wronskiano di  $u$  e  $v$  nel punto  $x = a$ . Essendo nullo in quel punto, è nullo anche in tutto l'intervallo. Ciò vuol dire che  $u$  e  $v$  sono linearmente dipendenti e che  $v(x) \equiv cu(x)$  con  $c$  costante.  $\square$

**Esercizio 2.1:** Siano  $A$  e  $B$  costanti non entrambi nulle. Si consideri il problema (2.1) con le condizioni al bordo non omogenee

$$\begin{aligned} \text{ED: } & Ly = 0 \quad a \leq x \leq b \\ \text{CB: } & \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = A \\ & \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dimostrare che il problema (2.10) ha soluzione unica se e solo se

$$\begin{vmatrix} B_a(y) & B_a(y_2) \\ B_b(y_1) & B_b(y_2) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.11)$$

dove  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni linearmente indipendenti di  $Ly = 0$

*Soluzione.* Sostituendo si verifica immediatamente che se  $u$  è una soluzione di (2.10) e  $v$  è una soluzione di (2.1), allora anche  $u+v$  è soluzione di (2.10). Quindi il problema ha soluzione unica se e solo se la omogenea ha solo la soluzione banale •

**Esercizio 2.2:** Se il problema con condizioni omogenee ha una soluzione non banale, allora il problema con condizioni al bordo non omogenee non ha soluzione, oppure ha infinite soluzioni della forma

$$y = y_p(x) + cu(x) \quad (2.12)$$

dove  $c$  è una costante,  $y_p$  è una soluzione particolare del problema con condizioni non omogenee, e  $u(x)$  è una soluzione non banale del problema con condizioni omogenee.

*Soluzione.* Un esempio di problema che non ha soluzione è  $y'' = 0$ ,  $B_a(y) = 1$ ,  $B_b(y) = -1$ , dove  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  e  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Considerando poi il caso in cui esista una soluzione  $y_p$  di (2.10). Sia  $v$  un'altra, si verifica facilmente che  $w = v - y_p$  è soluzione di (2.1). Dal Teorema 1 segue che tutte le soluzioni della omogenea sono della forma  $cw$ , e quindi si conclude che tutte le sol della (2.10) sono della forma  $y = y_p + cw$ , con  $c$  costante arbitraria •

## 2.2 Problema non omogeneo

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \text{ED: } & Ly = f(x) \quad a \leq x \leq b \\ \text{CB: } & \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \\ & \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove  $f(x)$  è continua ed  $L$  è l'operatore

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y. \quad (2.14)$$

Essendo  $B_a, B_b$  gli operatori al bordo definiti per il problema omogeneo, il problema (2.13) si può scrivere nella forma compatta

$$Ly = f, B_a(y) = B_b(y) = 0 \quad (2.15)$$

**Teorema 2.**  *$Ly = f, B_a(y) = B_b(y) = 0$  ha soluzione unica se e solo il problema omogeneo  $Ly = 0, B_a(y) = B_b(y) = 0$  ha solo la soluzione banale.*

*Dimostrazione.* La soluzione generale di  $Ly = f$  è

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p \quad (2.16)$$

dove  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni linearmente indipendenti di  $Ly = 0$  e  $y_p$  è una soluzione particolare di  $Ly = f$ . Con il metodo di Lagrange delle variazioni delle costanti si ottiene

$$y_p(x) = \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.17)$$

dove

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) \\ y_2(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

è il Wronskiano del sistema fondamentale di soluzioni  $y_1$  e  $y_2$ . Si vede che

$$y_p(a) = y_p'(a) = 0 \quad (2.19)$$

Ora per soddisfare le condizioni al bordo, deve essere

$$\begin{aligned} B_a(y) &= c_1 B_a(y_1) + c_2 B_a(y_2) + B_a(y_p) = 0 \\ B_b(y) &= c_1 B_b(y_1) + c_2 B_b(y_2) + B_b(y_p) = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Se si possono trovare  $c_1, c_2$  in modo che si soddisfino queste equazioni, allora il problema ha soluzione; altrimenti il problema non ha soluzione. Le (2.20)

hanno soluzione se e solo se

$$\begin{vmatrix} B_a(y_1) & B_a(y_2) \\ B_b(y_1) & B_b(y_2) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.21)$$

Ma questo è vero se e solo se il problema omogeneo  $Ly = 0$ ,  $B_a(y) = B_b(y) = 0$ , ha solo la soluzione banale.  $\square$

Nel caso in cui il problema omogeneo ha solo la soluzione banale, si può ottenere una formula semplice per la soluzione. Se  $y_p$  è la soluzione particolare trovata nella dimostrazione sopra, risulta

$$B_a(y_p) = 0. \quad (2.22)$$

Dato che

$$\begin{aligned} y_p(b) &= \int_a^b \frac{y_2(b)y_1(t) - y_1(b)y_2(t)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} f(t) dt \\ y_p'(b) &= y_2'(b) \int_a^b \frac{y_1(t)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} dt - y_1'(b) \int_a^b \frac{y_2(t)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

si ottiene

$$B_b(y_p) = \int_a^b \frac{B_b(y_2)y_1(t) - B_b(y_1)y_2(t)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.24)$$

Ora sia  $y_1(x)$  una soluzione non banale di  $L(y) = 0$  che soddisfa la condizione  $B_a(y_1) = 0$  e sia  $y_2(x)$  una soluzione di  $Ly = 0$  che soddisfa la condizione  $B_b(y_2) = 0$ . Risulta  $B_a(y_2) \neq 0$ , altrimenti  $y_2$  sarebbe soluzione non banale del problema omogeneo, che non esiste per ipotesi. Analogamente si vede che  $B_b(y_1) \neq 0$ .

Si vede anche che le due soluzioni sono linearmente indipendenti, altrimenti  $y_1 = cy_2$  con  $c \neq 0$  costante e  $B_b(y_2) = cB_b(y_1) = 0$ . Dunque la soluzione generale di  $Ly = f$  si può scrivere come in (2.16) e le condizioni al bordo in questo caso diventano

$$\begin{aligned} c_2 B_a(y_2) &= 0 \\ c_1 B_b(y_1) + B_b(y_p) &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ora, dato che  $B_a(y_2) \neq 0$ , deve essere  $c_2 = 0$  e si trova che

$$c_1 = \frac{-B_b(y_p)}{B_b(y_1)} \quad (2.26)$$

Sostituendo la (2.24) si ottiene

$$c_1 = \int_a^b \frac{y_2(t) f(t) dt}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} \quad (2.27)$$

Allora la soluzione di (2.15) è

$$y = c_1 y_1(x) + y_p = \int_a^b \frac{y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.28)$$

$$+ \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.29)$$

Spezzando il primo integrale in due parti si ottiene

$$y = \int_a^x \frac{y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} f(t) dt + \int_x^b \frac{y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.30)$$

$$+ \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.31)$$

che è equivalente a

$$y = \int_x^b \frac{y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} f(t) dt + \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.32)$$

Per scrivere la soluzione in forma compatta sia

$$g(t, x) = \begin{cases} \frac{y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} & x \leq t \\ \frac{y_1(t)y_2(x)}{p(t)W[y_1(t),y_2(t)]} & t \leq x \end{cases}$$

la funzione di Green. Così la (2.32) si può scrivere

$$y(x) = \int_a^b g(x, t) f(t) dt \quad (2.33)$$

### 2.2.1 Caso nel quale il problema omogeneo ha una soluzione non banale

Siano  $y_1$  e  $y_2$  due soluzioni linearmente indipendenti di  $Ly = 0$ , con  $y_1$  soluzione non banale del problema omogeneo. Allora  $y_1(x)$  soddisfa  $B_a(y_1) = B_b(y_1) = 0$  e le condizioni al bordo diventano

$$\begin{aligned} c_2 B_a(y_2) &= 0 \\ c_2 B_b(y_2) + B_b(y_p) &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dato che  $y_1$  e  $y_2$  sono linearmente indipendenti, deve essere  $B_a(y_2) \neq 0$  e  $c_2 = 0$ . Quindi la soluzione generale  $y$  di (2.15), se esiste, è della forma  $y = c_1 y_1 + y_p$ .

Sostituendo nella (2.34)  $c_2 = 0$  si ottiene che  $B_b(y_p) = 0$  è condizione necessaria e sufficiente per la esistenza di una soluzione di (2.15). Sostituendo

$B_b(y_1) = 0$  nella (2.24) si ottiene la condizione equivalente

$$B_b(y_2) \int_a^b \frac{y_1(t)f(t)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} dt = 0. \quad (2.35)$$

Supponendo che esista una soluzione

$$y = c_1 y_1(x) + y_p = c_1 y_1(x) + \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.36)$$

dove  $c_1$  è arbitraria, si osserva che

$$y = c_1 y_1(x) + \int_a^b \frac{y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} f(t) dt + \int_a^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1(t), y_2(t)]} f(t) dt \quad (2.37)$$

è ancora una soluzione dato che il secondo termine a destra è semplicemente una costante per  $y_1(x)$ . In modo analogo al caso in cui non esiste soluzione non banale, si ottiene la soluzione

$$y = c_1 y_1(x) + \int_a^b g(x, t) f(t) dt \quad (2.38)$$

La  $g(x, t)$  è definita allo stesso modo, ma in questo caso  $y_1$  è una soluzione non banale del problema omogeneo e  $y_2$  è una soluzione di  $Ly = 0$  linearmente indipendente.

## 2.3 Problemi omogenei e autovalori

Un problema ai valori al bordo omogeneo molto importante è

$$\begin{aligned} \text{ED: } & L(y) + \lambda y = 0 \quad a \leq x \leq b \\ \text{CB: } & \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ & \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove  $\lambda$  è un parametro indipendente da  $x$ , ed  $L$  è l'operatore

$$Ly = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \quad (2.40)$$

dove  $a_0, a_1, a_2$  sono funzioni continue e  $a_0 \neq 0$  in  $a \leq x \leq b$ . La soluzione banale esiste sempre per tutti i parametri  $\lambda$ , ma è possibile che per alcuni valori di  $\lambda$  non esista una soluzione non banale del problema. Se esiste una soluzione non banale per un valore  $\lambda = \lambda_i$ , questo valore si chiama autovalore dell'operatore  $L$  (rispetto alle condizioni al bordo) e la soluzione

corrispondente all'autovalore  $\lambda_i$  si chiama anche autofunzione. Si vede come conseguenza del Teorema 1 che una autofunzione è determinata a meno di una costante moltiplicativa.

Per capire in che modo possono essere utili le autofunzioni si consideri il seguente problema non omogeneo

$$\begin{aligned} \text{ED: } & L(y) = f(x) \quad a \leq x \leq b \\ \text{CB: } & \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ & \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Con  $L$  l'operatore di prima ed  $f(x) = \sum_{i=1}^n A_i y_i$ , dove  $y_i$  è l'autofunzione di  $L$  corrispondenti all'autovalore  $\lambda_i$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Supponendo che la soluzione  $y$  del problema sia della forma

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad (2.42)$$

dove le  $c_i$  sono costanti. Sostituendo  $y$  nella prima delle (2.41) e considerando la linearità di  $L$  e il fatto che le  $y_i$  sono autofunzioni, si ottiene

$$L\left(\sum_{i=1}^n c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n A_i y_i \quad (2.43)$$

ma

$$L\left(\sum_{i=1}^n c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i L(y_i) = \sum_{i=1}^n c_i (-\lambda_i) y_i \quad (2.44)$$

e si ottiene

$$\sum_{i=1}^n (A_i + c_i \lambda_i) y_i = 0 \quad (2.45)$$

Supponendo che le  $y_i$  sono funzioni linearmente indipendenti e che i  $\lambda_i$  siano tutti non nulli risulta

$$c_i = \frac{-A_i}{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.46)$$

e

$$y = \sum_{i=1}^n -\left(\frac{A_i}{\lambda_i}\right) y_i \quad (2.47)$$

Si può verificare facilmente che  $y$  non è solo una soluzione della equazione differenziale in (2.41), ma soddisfa anche le condizioni al bordo.

In questo modo si vede come conoscendo gli autovalori e le autofunzioni di  $L$ , si può trovare facilmente una soluzione per il problema non omogeneo dove

la  $f$  è combinazione lineare di autofunzioni. Questo metodo che in principio sembra di avere restrizioni molto forti per la  $f$ , in realtà risulta sufficiente per una classe di funzioni molto ampia. In molti casi la  $f$  si può espandere come una serie infinita di autofunzioni, e si può trovare una soluzione  $y$  del problema supponendo che  $y$  sia una serie di autofunzioni a coefficienti indeterminati. I coefficienti della serie si possono trovare in modo analogo al metodo descritto sopra.

Allora risulta chiaro, che è molto importante studiare i problemi, in cui la  $f$  si possa esprimere come serie di autofunzioni. A questo scopo saranno introdotti i concetti di funzioni ortogonali, e di sistemi completi di funzioni ortogonali. Definiremo poi un tipo di problema per il quale tutte le soluzioni sono limite di una serie di autofunzioni.

### 2.3.1 Funzioni ortogonali

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite in  $[a, b]$ . Allora sia per definizione

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (2.48)$$

È facile vedere che la  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un prodotto scalare nello spazio delle funzioni continue definite in  $[a, b]$ . Cioè soddisfa le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle \\ \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \\ 0 &\leq \langle f, f \rangle \\ \langle f, f \rangle &= 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \end{aligned}$$

Questo prodotto scalare definisce la norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

e se  $\|f\| = 1$  allora la  $f$  si dice normalizzata. Si dice che due funzioni  $f, g$  sono ortogonali se  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , e si dice che un insieme numerabile di funzioni continue  $v_1, v_2, \dots$  è un insieme ortogonale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

Se poi  $\delta_{ij}$  denota il simbolo *delta di Kronecker*, si dice che un insieme numerabile di funzioni continue  $v_1, v_2, \dots$  è un insieme ortonormale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Se un insieme ortonormale di funzioni ha la proprietà che l'unica funzione continua ortogonale a tutte le funzioni dell'insieme è la funzione nulla, allora questo insieme si dice chiuso ortonormale. È chiaro che per ogni insieme ortogonale con tutti gli elementi non nulli esiste in corrispondenza un insieme ortonormale. Infatti, basta dividere ogni elemento dell'insieme per la sua norma.

In uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$ , ogni elemento dello spazio si può scrivere come combinazione lineare di  $n$  vettori ortonormali. Questa idea si può anche estendere allo spazio delle funzioni continue in un intervallo  $a \leq x \leq b$ . Sia  $\phi_1, \phi_2, \dots$  un insieme ortonormale completo di funzioni continue nell'intervallo  $a \leq x \leq b$ , e sia  $f$  una funzione continua definita in  $a \leq x \leq b$ . Supponendo che la  $f$  sia una serie della forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(x). \tag{2.49}$$

e la serie ottenuta moltiplicando per  $\phi_j$  si possa integrare termine a termine, si ottiene

$$\int_a^b f(x)\phi_j(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_j(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{nj} = \alpha_j \tag{2.50}$$

cioè

$$\alpha_i = \langle f, \phi_j \rangle = \int_a^b f(x)\phi_j(x)dx \tag{2.51}$$

Il che significa che nel caso in cui serie converga e si possa integrare termine a termine, i coefficienti della serie possono essere trovati calcolando l'integrale sopra.

La (2.49) con i coefficienti (2.51) si chiama di solito *serie di Fourier generalizzata* e i coefficienti  $\alpha_i$  *coefficienti di Fourier*. Dato che l'insieme  $\phi_1, \phi_2, \dots$  è completo si vede che l'unica funzione continua che ha tutti i coefficienti di Fourier nulli è la funzione identicamente nulla.

Le stesse idee si possono applicare quando l'insieme  $\phi_1, \phi_2, \dots$  non è ortonormale, ma ortogonale completo (cioè un insieme che ha tutti gli elementi non nulli, e tale che il corrispondente insieme ortonormale è completo). In quel caso i coefficienti di Fourier diventano

$$\alpha_i = \frac{\int_a^b f(x)\phi_i(x)dx}{\int_a^b \phi_i^2 dx} \tag{2.52}$$



Si osservi che il concetto di prodotto interno si può generalizzare. Sia  $0 \leq w(x)$  una funzione continua non nulla definita in  $a \leq x \leq b$ , allora se  $f, g$  sono due funzioni continue definite in  $a \leq x \leq b$ , la

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx \quad (2.53)$$

è un prodotto scalare. La funzione  $w$  si chiama *funzione peso*. Per vedere che questo prodotto interno generalizza quello definito prima basta prendere  $w(x) = 1$ .

A questo punto risulta chiara l'importanza dei problemi del tipo (2.41), dove l'operatore  $L$  abbia come autofunzioni insiemi ortonormali; in questi casi si può pensare di scrivere la  $f$  come serie generalizzata di Fourier, per poi usare un metodo analogo a quello che è stato descritto nel caso in cui la  $f$  era combinazione lineare di un numero finito di autofunzioni. A continuazione si espone un tipo di problema dove questo si può fare per una classe molto ampia di funzioni.

### 2.3.2 Problema di Sturm-Liouville

Sia

$$L(y) = [p(x)y']' + q(x)y \quad (2.54)$$

dove  $p(x), p'(x)$ , e  $q(x)$  sono funzioni continue, e  $p(x) \neq 0$  in un intervallo  $a \leq x \leq b$ . Il problema con condizioni al bordo

$$\begin{array}{ll} \text{ED:} & L(y) + \lambda w(x)y = f(x) \quad a \leq x \leq b \\ \text{CB:} & \begin{array}{ll} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{array} \end{array} \quad (2.55)$$

dove  $0 \leq w(x)$  è una funzione continua diversa dalla funzione nulla, ed  $L$  è l'operatore (2.54) si chiama *problema di Sturm-Liouville*.

**Esercizio 2.3:** Se  $L$  è l'operatore (2.54) e  $u, v$  sono due funzioni due volte differenziabili, dimostrare l'identità di Lagrange.

$$\int_{x_0}^{x_1} [uL(v) - vL(u)] dx = p(x)(uv' - u'v)|_{x_0}^{x_1} \quad (2.56)$$

per ogni  $x_0, x_1$ .

*Soluzione.* Dalla (2.54) si ottiene

$$vL(u) = v[p(x)u']' + q(x)uv$$

$$uL(v) = u[p(x)v']' + q(x)uv$$

e quindi

$$\int_{x_0}^{x_1} [uL(v) - vL(u)]dx = \int_{x_0}^{x_1} u[p(x)v']' - v[p(x)u']'$$

. Integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} u[p(x)v']' &= p(x)uv'|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} u'v'p(x) \\ - \int_{x_0}^{x_1} v[p(x)u']' &= -p(x)vu'|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} u'v'p(x) \end{aligned}$$

e sommando le due equazioni risulta

$$\int_{x_0}^{x_1} [uL(v) - vL(u)]dx = p(x)(uv' - vu')|_{x_0}^{x_1}$$

•

Le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville sono un insieme ortogonale come assicurato dal seguente

**Teorema 3.** : *Autofunzioni del problema (2.55) corrispondenti a diversi autovalori sono ortogonali rispetto alla funzione peso  $w(x)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\lambda_n \neq \lambda_m$  sono autovalori e  $y_n, y_m$  le corrispondenti autofunzioni, allora

$$\begin{aligned} L(y_m) + \lambda_m w(x)y_m &= 0 \\ L(y_n) + \lambda_n w(x)y_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $y_n$  e la seconda per  $(-y_m)$  e sommando, si ottiene

$$y_n L(y_m) - y_m L(y_n) = (\lambda_n - \lambda_m)w(x)y_n y_m. \tag{2.58}$$

Integrando si ha

$$\int_a^b [y_n L(y_m) - y_m L(y_n)]dx = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w(x)y_n y_m dx. \tag{2.59}$$

Usando l'identità di Lagrange (2.56) e le condizioni al bordo si ottiene

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w(x)y_n y_m dx = p(x)(y_n y_m' - y_m y_n')|_a^b = 0 \tag{2.60}$$

Infatti dalle condizioni di bordo si ha che

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_n(a) + \beta_1 y_n'(a) &= 0 \\ \alpha_1 y_m(a) + \beta_1 y_m'(a) &= 0\end{aligned}\tag{2.61}$$

supponendo  $\alpha_1 \neq 0$  e moltiplicando la prima uguaglianza per  $y_m'(a)$ , la seconda per  $-y_n'(a)$  e sommando, si ottiene

$$y_n(a)y_m'(a) - y_n'(a)y_m(a) = 0\tag{2.62}$$

se invece  $\alpha_1 = 0$  risulta  $y_n'(a) = y_m'(a) = 0$  e l'uguaglianza precedente segue lo stesso.

Analogamente si trova che

$$y_n(b)y_m'(b) - y_n'(b)y_m(b) = 0\tag{2.63}$$

quindi se  $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\int_a^b w(x)y_n y_m dx = 0\tag{2.64}$$

□

I seguenti teoremi, che si enunciano senza dimostrazione assicurano che le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville oltre ad essere un insieme ortonormale, permettono di rappresentare una classe molto ampia di funzioni in serie generalizzata di Fourier.

**Teorema 4.** : *Il problema (2.55) possiede infiniti autovalori nonnegativi. L'insieme di tutti gli autovalori può essere ordinato in una successione crescente*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

*tale che  $\lambda_n \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$ .*

**Teorema 5.** : *Per ogni autovalore esiste una sola autofunzione (a meno di una costante moltiplicativa).*

**Teorema 6.** : *L'insieme di autofunzioni corrispondenti agli autovalori formano un insieme ortogonale completo in  $a \leq x \leq b$  rispetto alla funzione peso  $w(x)$ .*

**Teorema 7.** : *Se  $f(x)$  è una funzione continua a tratti con derivata continua a tratti in  $a \leq x \leq b$ , allora  $f(x)$  si può scrivere come somma di Fourier uniformemente convergente generalizzata e che converge ad  $f(x)$  in ogni*

punto dell'intervallo  $a \leq x \leq b$  dove  $f(x)$  è continua, e che converge alla media dei limiti a destra e sinistra in ogni punti di discontinuità della  $f(x)$  in  $a \leq x \leq b$ . Cioé,

$$\frac{1}{2}[\lim_{x \rightarrow x^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x^-} f(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.65)$$

dove

$$\gamma_n = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \phi_n(x) dx}{\int_a^b w(x) \phi_n^2(x) dx} \quad (2.66)$$

**Esercizio 2.4:** Dimostrare che gli autovalori del problema di Sturm-Liouville sono tutti reali.

*Soluzione.* Siano  $u(x) = \mathbf{Re}(y(x))$ ,  $v(x) = \mathbf{Im}(y(x))$  e sia  $\lambda = a + ib$  ( $a$  e  $b$  reali) un suo autovalore. Si ha

$$L(u) + iL(v) + (a + ib)(u + iv) = L(u) + au - bv + i(L(v) + bu + av) = 0,$$

dato che devono essere zero la parte reale e la parte immaginaria risulta

$$L(u) + au - bv = 0,$$

$$L(v) + av + bu = 0;$$

moltiplicando la prima per  $-v$ , la seconda per  $u$  e sommando si ottiene

$$vL(u) - uL(v) + b(u^2 + v^2) = 0.$$

Integrando da  $a$  a  $b$  e usando l'identità di Lagrange (2.56) si ottiene

$$\int_a^b b(u^2 + v^2) dx = 0,$$

e dato che  $(u^2 + v^2)$  è una funzione positiva continua deve essere  $b = 0$  •

### 2.3.3 Condizioni al bordo periodiche e punti del bordo singolari

Alcuni dei cinque teoremi descritti nella sezione precedente continuano ad essere veri anche se cambiano alcune delle ipotesi nel problema di Sturm-Liouville (2.55). Se le condizioni al bordo omogenee di (2.55) si sostituiscono per le condizioni al bordo periodiche

$$y(a) = y(b) \quad y'(a) = y'(b)$$

supponendo  $p(a) = p(b)$ , i teoremi 4,6 e 7 sono ancora veri. In questo caso però, il teorema 5 non è più vero ed è possibile che due soluzioni linearmente indipendenti corrispondano allo stesso autovalore.

Se si toglie la condizione  $p(a) \neq 0$ , la condizione che la soluzione deva essere limitata in  $x = a$  sostituisce la condizione al bordo nel punto  $x = a$ . Allora i teoremi 4,5,6,7 restano ancora validi. Analogamente succede se  $p(b) \neq 0$ . Allora la condizione in  $x = b$  diventa che la soluzione sia limitata in  $x = b$ .

### Esempio: Serie di Fourier-Legendre

Sia  $Ly = (1 - x^2)y'' - 2xy'$ ; osservando che  $Ly = [(1 - x^2)y']'$ , si vede che il problema

$$\begin{aligned} \text{ED: } & L(y) + a(a+1)y = f(x) & -1 \leq x \leq 1 \\ \text{CB: } & y \text{ e } y' \text{ finite in } x = 1 \text{ e in } x = -1. \end{aligned} \quad (2.67)$$

è un problema di Sturm-Liouville. Infatti basta prendere nel problema (2.55)  $p(x) = 1 - x^2$ ,  $q(x) = 0$ ,  $w(x) = 1$ . Questo problema ha come soluzioni tutte le soluzioni della equazione di Legendre che sono finite in  $x = 1$  e in  $x = -1$ , cioè tutti i polinomi di Legendre. Dunque, i teoremi 6 e 7 assicurano che i polinomi di Legendre  $P_n(x)$  costituiscono un insieme ortogonale completo nell'intervallo  $-1 \leq x \leq 1$  rispetto alla funzione peso  $w(x) = 1$ . Quindi se  $f(x)$  è una funzione continua a tratti e con derivata continua a tratti, si può scrivere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad (2.68)$$

dove

$$A_n = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx}. \quad (2.69)$$

Si dimostra che

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (2.70)$$

e quindi

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (2.71)$$

Usando la formula di Rodrigues si ottiene

$$A_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] dx \quad (2.72)$$

che, integrando per parti, diventa

$$A_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \left[ f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2-1)^n] \right]_{-1}^1 - \frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \left[ \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2-1)^n] dx \right], \quad (2.73)$$

il primo termine a destra si annulla e si ottiene

$$A_n = -\frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2-1)^n] dx. \quad (2.74)$$

Se la  $f$  ha  $n$  derivate continue si può continuare ad integrare per parti e alla fine si ottiene

$$A_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) (1-x^2)^n dx \quad (2.75)$$

**Esercizio 2.5:** Calcolare  $\|P_n\|$ .

*Soluzione.* Facendo il prodotto scalare della (1.74) e  $P_n$  si ottiene

$$n \langle P_n, P_n \rangle = (2n-1) \langle xP_{n-1}, P_n \rangle - (n-1) \langle P_{n-2}, P_n \rangle.$$

Dato che i  $P_n$  sono ortogonali risulta  $\langle P_{n-2}, P_n \rangle = 0$ , e osservando che  $\langle xP_{n-1}, P_n \rangle = \int_{-1}^1 xP_{n-1}(x)P_n(x)dx = \langle P_{n-1}, xP_n \rangle$  si ottiene

$$\langle P_n, P_n \rangle = \frac{(2n-1)}{n} \langle xP_{n-1}, P_n \rangle.$$

Facendo il prodotto scalare della (1.73) e  $P_{n-1}$  si vede che l'equazione sopra si può scrivere

$$\langle P_n, P_n \rangle = \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle.$$

e per induzione risulta che

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

Infatti  $P_0(x) = 1$  e quindi  $\|P_0\| = \int_{-1}^1 dx = 2$ , e supponendo

$$\|P_k\|^2 = \langle P_k, P_k \rangle = \frac{2}{2k+1}$$

si ottiene

$$\langle P_{k+1}, P_{k+1} \rangle = \frac{(2k+1)}{(2k+3)} \langle P_k, P_k \rangle = \frac{2}{2(k+1)+1}$$

•

## Capitolo 3

# Limitatezza delle soluzioni per operatori lineari degeneri

Ora passiamo a studiare il caso generale di un operatore lineare del secondo ordine. Si studia il comportamento delle autofunzioni nei punti del bordo e si espongono alcuni criteri affinché le autofunzioni di un operatore siano tutte finite nei punti del bordo.

Sia  $J = (r_1, r_2)$ ,  $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ . Siano  $m, q : J \rightarrow \mathbf{R}$  funzioni continue con  $m$  strettamente positiva in  $J$ , senza alcuna condizione nei punti  $r_1, r_2$  del bordo. Si consideri l'equazione differenziale

$$\lambda u - (mu'' + qu') = f \quad (3.1)$$

dove  $f \in C(\bar{J})$  per  $\lambda > 0$ .

La soluzione generale della (3.1) si può scrivere nella forma  $u = F + c_1v_1 + c_2v_2$ , dove  $F$  è una soluzione particolare di (3.1) e  $v_1, v_2$  sono soluzioni linearmente indipendenti di

$$\lambda u - (mu'' + qu') = 0 \quad (3.2)$$

**Esercizio 3.1.** Siano  $u_1, u_2$  due soluzioni della omogenea (3.2) che siano linearmente indipendenti; allora fissato  $x_0$ , dimostrare che

$$W[u_1, u_2] = w_0 \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{q(s)}{m(s)}\right), \quad x \in J \quad w_0 \text{ costante}, \quad (3.3)$$

dove  $W[u_1, u_2]$  è il Wronskiano (2.18) di  $u_1, u_2$ .

*Soluzione:* Si ha che

$$W' = \begin{vmatrix} u_1' & u_1'' \\ u_2 & u_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2' & u_2'' \end{vmatrix} = u_1 u_2'' - u_2 u_1'' \quad (3.4)$$

e dato che  $u_1, u_2$  sono soluzioni della (3.2) risulta

$$\begin{aligned} m u_1'' + q u_1' - \lambda u_1 &= 0 \\ m u_2'' + q u_2' - \lambda u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Moltiplicando le due uguaglianze per  $-u_2, u_1$  rispettivamente e sommando si ottiene

$$m(u_1 u_2'' - u_2 u_1'') = m W' = (v u' - u v') q = -q W \quad (3.6)$$

cioè

$$\frac{W'}{W} = (v u' - u v') q = \frac{-q}{m}. \quad (3.7)$$

Integrando si ottiene il risultato●

Siano  $u_1, u_2$  soluzioni indipendenti della omogenea. Per trovare una soluzione  $F$  di (3.1) si pone  $F = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2$  e  $W = \frac{W_1[u_1, u_2]}{w_0}$  (dove  $W_1$  è il Wronskiano di  $u_1, u_2$  e  $w_0 = u_1' u_2 - u_2' u_1$ ). Usando il metodo di variazione delle costanti e il risultato dimostrato nell'esercizio precedente si ottiene (formalmente)

$$\gamma_1(x) = \int_x^{r_2} \frac{u_2(s) f(s)}{w_0 m(s) W(s)} ds \quad \gamma_2(x) = \int_{r_1}^x \frac{u_1(s) f(s)}{w_0 m(s) W(s)} ds \quad (3.8)$$

Qui la convergenza degli integrali deve essere giustificata, perché in questo caso non si sono imposte condizioni a  $m$  e  $q$  sul bordo.

Sia  $G(x, s)$  la funzione di Green, e cioè sia

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{u_2(s) u_1(x)}{w_0 W(s) m(s)} & \text{per } x, s \in J \quad x \leq s \\ \frac{u_1(s) u_2(x)}{w_0(s) W(s) m(s)} & \text{per } x, s \in J \quad s \leq x \end{cases}$$

Così la  $F$  si può rappresentare (ancora formalmente) come l'immagine di  $f$  sotto l'operatore integrale  $T_\lambda$  definito in questo modo

$$F(x) = T_\lambda f(x) := \int_{r_1}^{r_2} G(x, s) f(s) ds. \quad (3.9)$$

Si osservi che se  $u$  è una soluzione positiva della omogenea (3.2), allora  $\frac{u'}{W}$  è crescente e ha limite nei punti del bordo (i limiti possono essere anche  $-\infty$



o  $+\infty$ ). Infatti basta osservare che la (3.2) si può scrivere

$$\left(\frac{u'}{W}\right)' = \lambda \frac{u}{mW}. \quad (3.10)$$

In particolare si ha che per ogni soluzione positiva

$$u \quad \text{decescente} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'(x)}{W(x)} \leq 0, \quad (3.11)$$

perché il limite è il sup di  $\frac{u'}{W}$  e  $W$  è positivo.

Inoltre, il seguente lemma assicura che è sempre possibile costruire due soluzioni monotone positive  $u_1, u_2$  della omogenea, in modo che  $w_0$  e la funzione di Green  $G$  diventino positive.

Prima di procedere con la dimostrazione del lemma seguente bisogna osservare alcune cose. Le soluzioni di (3.2) non possono avere un massimo positivo nè un minimo negativo in  $J$  (Infatti  $u(x)u''(x) > 0$  se  $u'(x) = 0$  e  $u(x) \neq 0$ ), e quindi non si annullano in più di un punto di  $J$ . Se una soluzione non nulla di (3.2) si annulla in un punto, allora è monotona in tutto  $J$ . Infatti, se  $u(x_1) \neq 0$  allora  $u'(x_1) \neq 0$  (altrimenti  $u$  sarebbe nulla). Assumendo  $u'(x_1) > 0$ , si supponga che  $u'$  si annulla in un punto, e sia  $x_2$  il punto più vicino ad  $x_1$  tale che  $u'(x_2) = 0$ . Allora se  $x_2 > x_1$ ,  $u$  è strettamente crescente in  $(x_1, x_2)$ , e  $x_2$  non può essere un minimo relativo. D'altra parte, si ha che  $u(x_2) > 0$ , quindi  $u''(x_2) > 0$  e questo implica che  $x_2$  è un minimo relativo di  $u$ . Dunque  $u'$  non si annulla in  $J$  e la funzione è monotona. Analogamente si ottiene lo stesso risultato se  $x_2 < x_1$ .

Inoltre la  $u'$  si annulla al massimo una volta in  $J$ . Questo vuol dire che le soluzioni sono monotone in un intorno degli estremi dell'intervallo, dove quindi hanno sicuramente un limite (possibilmente anche non finito).

**Lemma 1.** *Esiste una soluzione positiva crescente  $u_1$  e una soluzione positiva decrescente  $u_2$  di (3.2). I limiti  $l_{ij} := \lim_{x \rightarrow r_i} \frac{u'_j(x)}{W(x)}$  esistono per  $i, j = 1, 2$  e se per  $i \neq j$  si ha  $\lim_{x \rightarrow r_i} u'_j(x) = \infty$ , allora  $l_{ij} = 0$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni  $\gamma \in \mathbf{R}$  sia  $u_\gamma$  la soluzione di (3.2) con la condizione  $u_\gamma(x_0) = 1$  e  $u'_\gamma(x_0) = \gamma$ . Sia

$$\Upsilon := \{\gamma : u_\gamma \text{ si annulla in un punto di } (x_0, r_2)\}, \quad (3.12)$$

L'insieme  $\Upsilon$  è non vuoto. Infatti siano  $v_1, v_2$  due soluzioni linearmente indipendenti di (3.2), per ogni  $x_1 \in (x_0, r_2)$  è possibile determinare  $c_1, c_2$  in

modo che per  $v := c_1v_1 + c_2v_2$  si ha  $v(x_0) = 1, v(x_1) = 0$  (e quindi  $v'(x_0) \in \Upsilon$ ). Infatti basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{aligned} c_1v_1(x_0) + c_2v_2(x_0) &= 1 \\ c_1v_1(x_1) + c_2v_2(x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

che ha sicuramente soluzione, dato che quello omogeneo (cioè quello in cui  $v(x_0) = v(x_1) = 0$ ) ha solo la soluzione banale.

Ora considerando le ossevizioni fatte prima del enunciato del lemma si ottiene che, se  $\gamma \in \Upsilon$ , allora  $u_\gamma$  è decrescente perchè si annulla in un punto  $x_1 > x_0$ . Poi, se  $\gamma_1 < \gamma_2$  allora  $u_{\gamma_1} > u_{\gamma_2}$  in  $(r_1, x_0)$  e  $u_{\gamma_1} < u_{\gamma_2}$  in  $(x_0, r_2)$ . Infatti,  $u_{\gamma_1}$  e  $u_{\gamma_2}$  non possono avere lo stesso valore in un punto  $x_1 \neq x_0$  altrimenti la loro differenza sarebbe nulla in due punti diversi. Allora  $\gamma_2 \in \Upsilon$  implica  $\gamma_1 \in \Upsilon$  e  $\Upsilon$  è un intervallo.

La soluzione  $u$  di (3.2) con  $u(x_0) = 1$  e  $u'(x_0) = 0$  ha un minimo assoluto in  $x_0$  perchè  $u''(x_0) > 0$  ed  $u'$  si può annullare al massimo una volta. Di conseguenza si ottiene che  $0 \notin \Upsilon$ , e quindi  $c := \sup \Upsilon \leq 0$ .

Sia ora  $u_2 := u_c$ . La continuità rispetto al valore iniziale  $u'(x_0)$  implica che  $u_c$  è il limite delle soluzioni  $u_\gamma$ ,  $\gamma \in \Upsilon$ , e quindi è decrescente. Finalmente, se ci fosse un  $x_1 \in (x_0, r_2)$  con  $u_c(x_1) = 0$ , si può trovare per ogni  $x_2 \in (x_1, r_2)$  una soluzione  $u_d$  con  $u_d(x_0) = 1$  e  $u_d(x_2) = 0$  e risulta  $u'_d(x_0) \in \Upsilon$  e  $u'_d(x_0) > c$ , ma questo non è possibile. In modo analogo per  $(r_1, x_1)$  si può costruire  $u_1$ . Supponendo  $u_1(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow x_2$ , si vede che  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'_2(x)}{W(x)} = 0$ . Infatti,  $u'_1u_2 - u_1u'_2 = w_0W$ , e dunque

$$0 \leq \frac{-u_1u'_2}{W} \leq w_0 \quad (3.14)$$

e il teorema segue. □

Dal teorema precedente si vede che  $T_\lambda$  è un operatore positivo. Ora si dimostra che è anche limitato.

**Proposizione 1.** *Per ogni  $\lambda > 0$  l'operatore  $T_\lambda : \mathbf{C}(\bar{J}) \rightarrow \mathbf{C}(\bar{J})$  è limitato e soddisfa  $\|T_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ .*

*Dimostrazione.* Si dimostra prima che  $T_\lambda$  è un operatore limitato da  $\mathbf{C}(\bar{J})$  a  $\mathbf{L}^\infty(\bar{J})$ . Perchè  $T_\lambda$  è positivo, basta dimostrare che la funzione  $T_\lambda \mathbf{1}$  è limitata. Si ha

$$T_\lambda \mathbf{1}(x) = \int_{r_1}^{r_2} G(x, s) ds = \frac{u_2(x)}{w_0\lambda} \int_{r_1}^x \left( \frac{u'_1(s)}{W(s)} \right)' ds +$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_1(x)}{w_0\lambda} \int_x^{r_2} \left( \frac{u_2'(s)}{W(s)} \right)' ds + \frac{u_2(x)}{w_0\lambda} \left( \frac{u_1'(x)}{W(x)} - \lim_{s \rightarrow r_1} \frac{u_1'(s)}{W(s)} \right) \\ & + \frac{u_1(x)}{w_0\lambda} \left( \lim_{s \rightarrow r_2} \frac{u_2'(s)}{W(s)} - \frac{u_2'(x)}{W(x)} \right) = \frac{u_1(x)}{w_0\lambda} \lim_{s \rightarrow r_2} \frac{u_2'(s)}{W(s)} - \\ & \quad \frac{u_2(x)}{w_0\lambda} \lim_{s \rightarrow r_1} \frac{u_1'(s)}{W(s)} + \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

I limiti sopra sono sempre finiti come conseguenza delle proprietà elementari di  $u_1, u_2$ . Inoltre, dal lemma precedente,  $\lim_{s \rightarrow r_2} \frac{u_2'(s)}{W(s)} = 0$  se  $u_1$  è non limitata in  $s = r_2$ . Si può usare un argomento simile in  $r_1$ . Questo dimostra che  $T_\lambda \mathbf{1} \in C(\bar{J})$  e  $\|T_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ .

Sia ora  $f \in \mathbf{C}(\bar{J})$  tale che  $f \equiv 0$  in un intorno di  $r_2$ . Allora  $u = T_\lambda f$  è una soluzione limitata di (3.2) vicino a  $r_2$ , quindi questa è eventualmente monotona e ha un limite finito. La esistenza del  $\lim_{x \rightarrow r_2} T_\lambda f(x) \in \mathbf{R}$  per le funzioni  $f$  che si annullano in  $r_2$  segue da un argomento di densità e il fatto che  $T_\lambda$  sia limitata. Scrivendo  $f = (f - l) + l$ , con  $l \equiv f(r_2)$ , si ottiene il risultato generale per linearità.  $\square$

Come conseguenza della precedente proposizione, gli integrali in (3.4) sono convergenti, e per ogni  $f \in \mathbf{C}(\bar{J})$  la formula  $F = T_\lambda f$  dà una soluzione della equazione (2.1) che appartiene a  $\mathbf{C}(\bar{J}) \cap \mathbf{C}^2(J)$ . Inoltre, se  $f$  ha supporto compatto in  $J$ , la funzione  $F$  coincide con una combinazione lineare di  $u_1$  e  $u_2$  vicino a  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente. Quindi, studiare il comportamento sul bordo delle soluzioni della equazione (3.1) equivale a studiare il comportamento delle soluzioni della omogenea (3.2). Per fare ciò si introducono le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} Q(x) &:= \frac{1}{m(x)W(x)} \int_{x_0}^x W(S) ds, \\ R(x) &:= W(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{m(S)W(s)} ds \quad \text{per } x \in J. \end{aligned}$$

Da questo punto in poi si lavora solo con il punto  $r_2$  del bordo.

Nota: se  $R \in L^1(x_0, r_2)$ , allora  $W \in L^1(x_0, r_2)$ . Analogamente,  $Q \in L^1(x_0, r_2)$  implica  $(mW)^{-1} \in L^1(x_0, r_2)$ . Inoltre, se  $W \in L(x_0, r_2)$  e  $(mW) \in L^1(x_0, r_2)$ , allora  $R, Q \in L^1(x_0, r_2)$ .

Per cominciare si espongono alcuni lemmi che danno delle condizioni per la esistenza di una soluzione limitata in  $x = r_2$  della equazione (3.2). Si vedrà come l'esistenza di una soluzione limitata per tutti i valori di  $\lambda$  possibili dipende dalla integrabilità delle funzioni  $R(x)$  e  $Q(x)$ .

**Lemma 2.** *Tutte le soluzioni di (3.2) sono limitate intorno a  $r_2$  se e solo se  $R \in L^1(x_0, r_2)$ .*

*Dimostrazione.* Dato che  $u_2$  è sicuramente limitato intorno a  $r_2$ , basta far vedere che  $u_1$  è limitata se e solo se  $R \in L^1(x_0, r_2)$ . Usando la (3.10) si scrive

$$u_1'(x) = W(x) \left[ u_1'(x_0) + \lambda \int_{x_0}^x \frac{u_1(s)}{m(s)W(s)} ds \right] \quad (3.15)$$

e si osserva che  $u_1$  è limitata se e solo se  $u_1' \in L^1(x_0, r_2)$ . Si noti che tutti i termini a destra di (3.14) sono positivi, e che  $u(x_0) = 1$  e  $u_1$  è crescente. Dunque risulta

$$\lambda R(x) \leq \lambda W(x) \int_{x_0}^x \frac{u_1(s)}{m(s)W(s)} ds \leq u_1'(x) \leq u_1'(x_0)W(x) + \lambda u_1(x)R(x) \quad \text{per } x \geq x_0.$$

Questo fa vedere che  $u_1' \in L^1(x_0, r_2)$  implica  $R \in L^1(x_0, r_2)$ . Viceversa  $R \in L^1(x_0, r_2)$  implica  $W \in L^1(x_0, r_2)$ , e si conclude che  $u_1$  è limitata intorno a  $r_2$  paragonando alla soluzione del problema di Cauchy

$$v'(s) = u_1'(x_0)W(s) + \lambda R(s)v(s), \quad v(x_0) = 1, \quad (3.16)$$

data da

$$v(x) = e^{\lambda \int_{x_0}^x R(s) ds} \left[ 1 + u_1'(x_0) \int_{x_0}^x W(s) e^{-\lambda \int_{x_0}^s R(\tau) d\tau} \right] \quad (3.17)$$

**Lemma 3.** *Una soluzione decrescente  $u$  di (3.2) con  $l := \lim_{x \rightarrow r_2} u(x) > 0$  esiste se e solo se  $Q \in L^1(x_0, r_2)$ . Se  $Q \in L^1(x_0, r_2)$ , e  $R \notin L^1(x_0, r_2)$ , allora  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'(x)}{W} = 0$ , per ogni soluzione positiva e decrescente di (3.2).*

*Dimostrazione.* Supponendo  $l > 0$ . Siccome  $u' \leq 0$ , si deduce da (3.10) che

$$l \int_{x_0}^x \frac{1}{m(s)W(s)} ds \leq \int_{x_0}^x \frac{u(s)}{m(s)W(s)} ds \leq \frac{|u'(x_0)|}{\lambda}; \quad (3.18)$$

e allora  $(mW)^{-1} \in L^1(x_0, r_2)$ . Integrando (3.6) su  $(x, r_2)$  si ottiene

$$-u'(x) = W(x) \left[ k + \lambda \int_x^{r_2} \frac{u(s)}{m(s)W(s)} ds \right] \quad (3.19)$$

dove il limite  $k := -\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'(x)}{W(x)} \geq 0$  è finito perché  $u(mW)^{-1}$  è integrabile.

Dato che la funzione  $u$  è decrescente e  $k \geq 0$  si deduce che  $\lambda W(x) \int_x^{r_2} \frac{1}{m(s)W(s)} ds \leq -\frac{u'(x)}{l}$ , e questo implica  $Q \in L^1(x_0, r_2)$ .

Viceversa, si prende una soluzione positiva decrescente di (3.2). Se  $Q$  (e

quindi anche  $(mW)^{-1}$  è integrabile, allora è vera la (3.14). Se  $k = 0$ , allora

$$-u'(x) \leq \lambda u(x)W(x) \int_x^{r_2} \frac{1}{m(s)W(s)} ds, \quad (3.20)$$

quindi  $\frac{u'}{u}$  è integrabile e  $-\log u$  è limitata, in modo che sia  $l > 0$ . Se  $k > 0$ , la limitatezza di  $u$  e (3.14) implicano che  $W \in L^1(x_0, r_2)$ , e la esistenza di una soluzione  $u$  con le proprietà richieste viene dimostrata nel lemma seguente. Finalmente, sia  $Q \in L^1(x_0, r_2)$ ,  $R \notin L^1(x_0, r_2)$  (e quindi anche  $Q \notin L^1(x_0, r_2)$ ) e sia  $u$  una soluzione positiva decrescente di (3.2). Allora la equazione (3.14) viene soddisfatta, e  $k = -\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'(x)}{W(x)} = 0$ , dato che altrimenti si otterrebbe  $W \in L^1(x_0, r_2)$ .  $\square$

**Lemma 4.** *Se  $Q, R \in L^1(x_0, r_2)$ , allora per ogni soluzione di (3.2) i limiti  $\lim_{x \rightarrow r_2} u(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'(x)}{W(x)}$  sono finiti. Inoltre, esistono due soluzioni decrescenti  $\bar{u}, \bar{v}$  di (3.2) tali che*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow r_2} \bar{u}(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{\bar{u}'(x)}{W(x)} &= -1, \\ \lim_{x \rightarrow r_2} \bar{v}(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{\bar{v}'(x)}{W(x)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

*Dimostrazione.* Per il Lemma 2, tutte le soluzioni  $u$  della (3.10) sono limitate; quindi il limite  $\lim_{x \rightarrow r_2} u(x)$  è finito. Inoltre, l'identità (3.10) implica che  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'(x)}{W(x)}$  è finito. Siano  $u_1, u_2$  le soluzioni costruite nel lemma 1 e sia  $u := u_2 - cu_1$ , dove  $c \geq 0$  viene scelta in modo che  $u$  si annulli in  $r_2$ . Dato che  $u_1 > u_2$  in  $(x_0, r_2)$ , si ha che  $c < 1$  e  $u(x_0) > 0$ . Quindi la non esistenza di un massimo né di un minimo negativo per  $u$  implica che  $u$  è decrescente in tutto  $J$ . Come nel lemma 3, il limite  $-k := \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{u'(x)}{W(x)}$  esiste e non si annulla perchè altrimenti sarebbe  $u(x) \rightarrow l > 0$  quando  $x \rightarrow r_2$ .

Allora si può prendere  $\bar{u} := \frac{u}{k}$ .

Ora sia  $w$  la soluzione di (3.2) con  $w(x_0) = 0$  e  $w'(x_0) = 1$ . Perchè questa soluzione è crescente e positiva in  $[x_0, r_2)$ , si ottiene da (3.7) che  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{w'(x)}{W(x)} > 0$ . Si sceglie  $\tau > 0$  in modo che la funzione  $v := \bar{u} + \tau w$  soddisfi  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v'(x)}{W(x)} = 0$ . Allora  $v$  è positiva in  $[x_0, r_2)$  e decrescente per (3.7), quindi positiva e decrescente in  $J$ , e si può prendere  $\bar{v} := \frac{v(x)}{v(r_2)}$ .  $\square$

Dunque, il comportamento delle soluzioni di (3.2) vicino ai punti del bordo dipende dalla integrabilità delle funzioni  $Q$  e  $R$ . Così i punti del bordo si possono classificare nel modo seguente:

Il punto del bordo  $r_2$  è

regular(regolare)	se	$Q \in L^1(x_0, r_2), R \in L^1(x_0, r_2),$
exit(uscita)	se	$Q \notin L^1(x_0, r_2), R \in L^1(x_0, r_2),$
ingresso(entrance)	se	$Q \in L^1(x_0, r_2), R \notin L^1(x_0, r_2),$
natural(naturale)	se	$Q \notin L^1(x_0, r_2), R \notin L^1(x_0, r_2).$

Definizioni analoghe si possono fare per  $r_1$  considerando l'intervallo  $(r_1, x_0)$ .

I risultati finora trovati si possono riassumere nel seguente

**Teorema 8.** (i) Il punto del bordo  $r_2$  è regolare se e solo se esistono due soluzioni positive, decrescenti  $v_1, v_2$  di (3.2) che soddisfino

$$\lim_{x \rightarrow r_2} v_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v_1'(x)}{W(x)} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow r_2} v_2(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v_2'(x)}{W(x)} = 0. \quad (3.22)$$

In questo caso, tutte le soluzioni di (3.2) sono limitate in  $r_2$ .

(ii) Il punto del bordo  $r_2$  è di uscita se e solo se tutte le soluzioni di (3.2) sono limitate

in  $r_2$  e tutte le soluzioni decrescenti positive  $v_1$  soddisfano

$$\lim_{x \rightarrow r_2} v_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v_1'(x)}{W(x)} \leq 0. \quad (3.23)$$

(iii) Il punto del bordo  $r_2$  è di ingresso se e solo se esiste una soluzione positiva, decrescente  $v_1$  di (3.2) che soddisfi

$$\lim_{x \rightarrow r_2} v_1(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v_1'(x)}{W(x)} = 0 \quad (3.24)$$

e tutte le soluzioni di (2) indipendenti da  $v_1$  sono non limitate in  $r_2$ . In questo caso, nessuna soluzione diversa da zero tende a 0 quando  $x \rightarrow x_2$ .

(iv) Il punto del bordo  $r_2$  è naturale se e solo se esiste una soluzione positiva, decrescente  $v_1$  di (2.2) che soddisfi

$$\lim_{x \rightarrow r_2} v_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v_1'(x)}{W(x)} = 0, \quad (3.25)$$

e tutte le soluzioni di (2.2) indipendenti da  $v_1$  sono non limitate in  $r_2$ .

Un teorema analogo al precedente vale anche per il punto al bordo  $r_1$ . Infatti basta sostituire decrescente per crescente, la condizione  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v_1'(x)}{W(x)} = -1$  per  $\lim_{x \rightarrow r_1} \frac{v_1'(x)}{W(x)} = 1$  in (i), e finalmente  $\lim_{x \rightarrow r_2} \frac{v_1'(x)}{W(x)} \leq 0$  per  $\lim_{x \rightarrow r_1} \frac{v_1'(x)}{W(x)} \geq 0$  in (ii).





# Bibliografia

- [1] Churchill R.V., Fourier series and boudary value problems 2d ed., McGrawHill, 1963
- [2] Ritger P. Rose N., Differential equations with applications, McGrawHill, 1968
- [3] Engel K. Nagel R., One parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, 2000
- [4] Hille E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley Pub. Co., 1968