Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

DIFFUSIONE DI ONDE ELETTROMAGNETICHE

Relatore:
Prof./ Roberto Zucchini

Presentata da:
Alessandro Ciarfella

Anno Accademico 2016/2017

Indice

1 Sommario

In questa tesi, viene considerato il problema della diffusione della radiazione eletromagnetica da parte della materia nell'ambito della elettrodinamica classica. La radiazione diffusa verrà studiata nel regime di campo lontano sotto l'ipotesi che i processi di diffusione siano totalmente elastici e che gli eventi di diffusione multipla siano trascurabili. Ci si soffermerà in particolare su come determinare la sezione di diffusione differenziale e totale trattando in maniera più dettagliata il caso in cui la radiazione incidente è non polarizzata ed interagisce con un grande numero di centri diffusori di dimensioni molto più piccole della sua lunghezza d'onda. Come applicazione verrà esaminata la diffusione della luce solare dalla atmosfera.

2 Introduzione

Sin dagli albori della fisica moderna i fenomeni di diffusione (o scattering) sono stati uno strumento fondamentale per indagare la natura microscopica della materia.
Tale fenomeno, nella sua accezione più generale consiste nell'interazione tra un fascio di particelle proiettile(in movimento rispetto al laboratorio) e una o più particelle bersaglio(ferme rispetto al laboratorio) mediata da un campo di forze. L'effetto globale di questa interazione è la deviazione del fascio incidente dalla traiettoria iniziale.
La letteratura riguardante la teoria dello scattering è immensa e ciò è comprensibile considerando la grande quantità di casistiche che si possono avere a seconda del tipo di particelle coinvolte.
In questa trattazione, in particolare nella prima parte, ci si soffermerà sul fenomeno di diffusione che subisce un fascio di fotoni a seguito dell'interazione con particelle di dimensioni più piccole della lunghezza d'onda della radiazione incidente. Tale fenomeno è più comunemente noto come scattering di Rayleigh, dal nome dello scienziato inglese che per primo lo studiò nel XIX secolo (In realtà il primo in assoluto a studiarlo fu Leonardo Da Vinci il quale ne aveva già individuato gli aspetti salienti durante il Rinascimento).
Un aspetto interessante dello scattering di Rayleigh è che può essere trattato interamente senza ricorrere alla meccanica quantistica, appoggiandosi unicamente ad un modello classico che vede la luce come costituita da campi elettromagnetici oscillanti che, interagendo con gli elettroni all'interno delle molecole li pongono in oscillazione attorno alle rispettive posizioni di equilibrio. A tale oscillazione corrisponde un'accelerazione a causa della quale l'elettrone eccitato genera a sua volta campi elettromagnetici indotti sotto forma di radiazione diffusa. Nella seconda parte della trattazione ci si soffermerà sulla descrizione di alcune applicazioni di questo fenomeno, in particolare su come esso possa essere usato per spiegare l'attenuazione dell'intensità della radiazione solare nell'atmosfera e la conseguente colorazione del cielo nelle varie fasi del giorno o anche per misurare grandezze come la densità di particelle a determinate quote.

3 Trattazione analitica

3.1 Onde elettromagnetiche piane

Per cominciare definiamo un'onda elettromagnetica piana che si propaga nel vuoto lungo la direzione $\vec{n}$.
I campi elettrico e magnetico che la descrivono possono essere scritti rispettivamente come sovrapposizione di onde monocromatiche di ampiezza $\vec{E}_\omega$ e $\vec{B}_\omega$

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_\omega e^{-i\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{x}/c)}\, d\omega, \tag{1}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}_\omega e^{-i\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{x}/c)}\, d\omega \tag{2}$$

Si noti che le ampiezze di Fourier di tali onde non dipendono dalla posizione. Esse inoltre rispettano le seguenti leggi

$$\vec{E}_\omega \cdot \vec{n} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{B}_\omega = \vec{n} \times \vec{E}_\omega \tag{4}$$

Dimostrazione

Per i campi elettrici e magnetici nel vuoto valgono le leggi di Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

Quindi richiamando la (1) e la (2) e sostituendole nella (5) e nella (6) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_\omega \cdot \vec{n}\; e^{-i\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{x}/c)}\, d\omega = 0, \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\vec{B}_\omega - \vec{n} \times \vec{E}_\omega)\; e^{-i\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{x}/c)}\, d\omega \;= 0 \tag{8}$$

Dato che la (7) e la (8) devono valere per ogni t e per ogni $\vec{x}$ i coefficienti di Fourier devono annullarsi separatemente. Da qui si ottengono la (3) e la (4)

Il fatto che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ siano reali implica che

$$\vec{E}^*_\omega = \vec{E}_{-\omega}, \tag{9}$$

$$\vec{B}^*_\omega = \vec{B}_{-\omega} \tag{10}$$

Dimostrazione
Scrivendo la (1) come

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \vec{E}_\omega e^{-i\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{x}/c)} + \vec{E}_{-\omega} e^{i\omega(t-\vec{n}\cdot\vec{x}/c)}\, d\omega \tag{11}$$

e ricordando che i coefficienti di Fourier devono essere reali separaemente affinchè $\vec{E}$ sia reale è evidente che si debba verificare la condizione (9). La dimostrazione della (10) è del tutto analoga a quella per il campo elettrico.

A questo punto è conveniente definire una base ortonormale di vettori $\vec{e}_j(\vec{n})$, $j = 1, 2, 3$ dipendente da $\vec{n}$ con le seguenti propietà

$$\vec{e}_i(\vec{n}) \cdot \vec{e}_j(\vec{n}) = \delta_{ij}, \tag{12}$$

$$\vec{e}_i(\vec{n}) \times \vec{e}_j(\vec{n}) = \sum_{l=1}^{l=3} \epsilon_{ijl} \vec{e}_l(\vec{n}), \tag{13}$$

$$e_3(\vec{n}) = \vec{n} \tag{14}$$

Si definiscono inoltre i **vettori di polarizzazione** $\vec{\epsilon}_\alpha$ come vettori dotati delle seguenti propietà

$$\vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n})^* \cdot \vec{\epsilon}_\beta(\vec{n}) = 0, \tag{15}$$

$$\vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0, \tag{16}$$

La loro propietà principale è che essi formano una base ortonormale per il campo elettromagnetico di un'onda piana che si propaga lungo $\vec{n}$

$$\vec{E}_\omega = \sum_{\alpha=1}^{2} E_{\omega\alpha} \vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n}) \qquad E_{\omega\alpha} = \vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n})^* \cdot \vec{E}_\omega, \tag{17}$$

$$\vec{B}_\omega = \sum_{\alpha=1}^{2} B_{\omega\alpha} \vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n}) \qquad B_{\omega\alpha} = \vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n})^* \cdot \vec{B}_\omega \tag{18}$$

Definita questa base possiamo definire le due basi di vettori di polarizzazione più usate. I **vettori di polarizzazione lineare** sono definiti da

$$\vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n}) = \vec{e}_\alpha(\vec{n}) \qquad \alpha = 1, 2 \tag{19}$$

I **vettori di polarizzazione circolare** sono invece definiti come

$$\vec{\epsilon}_\alpha(\vec{n}) = \vec{e}_1(\vec{n}) + i\alpha \vec{e}_2(\vec{n}) \qquad \alpha = \pm 1 \tag{20}$$

3.2 Teoria dello scattering elastico di onde elettromagnetiche piane

Per trattare la teoria della diffusione di onde elettromagnetiche si definisce innanzitutto un'onda elettromagnetica piana incidente sul centro diffusore che si pone nell'origine del sistema di riferimento. I campi elettrico e magnetico di tale onda sono

$$\vec{E}^0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^0_\omega e^{-i\omega(t - \vec{n}^0 \cdot \vec{x}/c)} \, d\omega, \tag{21}$$

$$\vec{B}^0(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}^0_\omega e^{-i\omega(t-\vec{n}^0\cdot\vec{x}/c)}\, d\omega \tag{22}$$

A questo punto definiamo il **flusso di energia incidente integrato sul tempo** come

$$\Phi^0(\vec{x}) = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}^0(x,t)\, dt\right| \tag{23}$$

dove $\vec{S}^0$ è il vettore di Poynting della radiazione incidente definito come

$$\vec{S}^0 = \frac{c}{4\pi}\vec{E}^0 \times \vec{B}^0 \tag{24}$$

Il suo modulo rappresenta la potenza trasportata dall'onda incidente per unità di superficie mentre la direzione è la stessa in cui si propaga l'onda.

Un calcolo esplicito porta alla seguente relazione

$$\Phi^0(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}^0{}_\omega|^2\, d\omega \tag{25}$$

Dimostrazione

Sostituendo la (21) e la (22) nella (24) si ottiene che la (23) può essere scritta con un opportuno cambio di integrazione come

$$\Phi^0(\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{2\pi}(\vec{E}^0_{\omega_1} \times \vec{B}^0_{\omega_2}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\vec{n}^0\cdot\vec{x}/c)}}{2\pi}\, dt\right)\right| \tag{26}$$

Ricordando che

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-\vec{n}^0\cdot\vec{x}/c)}\, dt\right) = \delta(\omega_1+\omega_2) \tag{27}$$

si ottiene che la (26) diventa

$$\Phi^0(\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi}\ d\omega_2\ \vec{E}^0_{\omega_1} \times \vec{B}^0_{\omega_2}\ \delta(\omega_1+\omega_2)\right| \tag{28}$$

da cui si ottiene

$$\Phi^0(\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\ \vec{E}^{0*}_\omega \times \vec{B}^0_\omega\ \right| \tag{29}$$

Ora, ricordando che per ogni vettore $\vec{n}, \vec{a}$ pependicolari tra loro vale che

$$\vec{a}^* \times (\vec{n} \times \vec{a}) = \vec{n}|\vec{a}|^2 - \vec{a}(\vec{a}^* \cdot \vec{n}) = \vec{n}|\vec{a}|^2 \tag{30}$$

usando le relazioni (3) e (4) si ha che

$$\vec{E}^{0*}_\omega \times (\vec{n}^0 \times \vec{E}^0_\omega) = \vec{n}^0|\vec{E}_\omega|^2 \tag{31}$$

Da qui segue immediatamente la (25)

Si pone in evidenza il fatto che il flusso nel caso di radiazione piana non dipende dalla posizione. Inoltre si può scrivere

$$\Phi^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^0_\omega \, \frac{d\omega}{2\pi} \tag{32}$$

dove

$$\Phi^0_\omega = \frac{c}{4\pi}|\vec{E}_\omega|^2 \tag{33}$$

Il flusso totale può essere scritto come sovrapposizione di singole componenti monocromatiche e ciascuna di queste componenti può essere scritta come combinazione data dalle due possibili polarizzazioni del campo elettrico come segue

$$\Phi^0_\omega = \sum_{\alpha^0} \Phi^0_{\omega\alpha^0} \qquad\qquad \alpha = 1,2 \ o \pm 1 \tag{34}$$

dove

$$\Phi^0_{\omega\alpha^0} = |\vec{\epsilon^*}_{\alpha^0} \cdot \vec{E}^0_\omega|^2 \tag{35}$$

Ora si consideri della materia diffondente con dimensioni più piccole della lunghezza d'onda della radiazione incidente. La radiazione elettromagnetica diffusa ad una grande distanza dall'origine cioè nei punti $\vec{x}$ tali che $|\vec{x}| \gg d$ dove d rappresenta l'ordine di grandezza delle dimensioni del corpo diffusore può essere scritta come

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{|\vec{x}|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}_\omega(\hat{x}) \ e^{-i\omega(t-|\vec{x}|/c)} \, d\omega + \ \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^2}), \tag{36}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{1}{|\vec{x}|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{b}_\omega(\hat{x}) \ e^{-i\omega(t-|\vec{x}|/c)} \, d\omega + \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^2}) \tag{37}$$

dove si è usata la notazione

$$\vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^{n+1}}) = \frac{1}{|\vec{x}|^n}\vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|}) \tag{38}$$

Inoltre considerando trascurabili i termini che decrescono più rapidamente di $1/|\vec{x}|$ si può dimostrare in maniera analoga a quanto fatto con la radiazione incidente tramite le equazioni di Maxwell che

$$\vec{e}_\omega(\hat{x}) \cdot \hat{x} = 0, \tag{39}$$

$$\vec{b}_\omega(\hat{x}) = \hat{x} \times \vec{e}_\omega(\hat{x}) \tag{40}$$

Si noti che in questo caso le ampiezze di Fourier dei campi dipendono dalla posizione e di conseguenza anche il flusso diffuso dipenderà dalla posizione. A questo punto definiamo il **flusso di energia diffuso integrato sul tempo** come

$$\Phi^0(\vec{x}) = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(x,t)\,dt\right| \tag{41}$$

dove $\vec{S}$ è il vettore di Poynting della radiazione elettromagnetica diffusa definito come

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} \tag{42}$$

Il suo modulo rappresenta la potenza trasportata dall'onda diffusa per unità di superficie mentre la direzione è la stessa in cui si propaga l'onda. Un calcolo esplicito porta alla seguente relazione

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{x}|^2}\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{e}_\omega(\hat{x})|^2\,d\omega \tag{43}$$

Dimostrazione
Sostituendo la (36) e la (37) nella (42) la (41) diventa con un opportuno cambio di integrazione

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_1 d\omega_2}{2\pi}\frac{\vec{e}_{\omega_1}(\hat{x})\times\vec{b}_{\omega_2}(\hat{x})}{|\vec{x}|^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-|\vec{x}|/c)}\frac{dt}{2\pi}\right)\right| + \vec{O}\left(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^3}\right) \tag{44}$$

Ricordando che

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega_1+\omega_2)(t-|\vec{x}|/c)}\,dt\right) = \delta(\omega_1+\omega_2) \tag{45}$$

si ottiene

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}d\omega_1\;d\omega_2\;\vec{e}_{\omega_1}(\hat{x})\times\vec{b}_{\omega_2}(\hat{x})\;\delta(\omega_1+\omega_2)\right| + \vec{O}\left(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^3}\right) \tag{46}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\;\vec{e}_\omega(\hat{x})\times\vec{b}^*_\omega(\hat{x})\;| + \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^3}) \tag{47}$$

Ora, ricordando che per ogni vettore $\vec{n},\vec{a}$ pependicolari tra loro vale che

$$\vec{a}^*\times(\vec{n}\times\vec{a}) = \vec{n}|\vec{a}|^2 - \vec{a}(\vec{a}^*\cdot\vec{n}) = \vec{n}|\vec{a}|^2 \tag{48}$$

Considerando le relazioni (39) e (40) si ottiene

$$\vec{e_\omega}(\hat{x})^*\times(\hat{x}\times\vec{e}_\omega) = \hat{x}|\vec{e}_\omega|^2 \tag{49}$$

Da qui segue immediatamente la (43)

Si nota che a differenza di quanto accade per un'onda elettromagnetica piana il flusso dipende dalla posizione $\vec{x}$.
Ponendosi a grande distanza dal centro di diffusione vediamo che nella relazione precedente si può omettere il termine $\vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^3})$. Quindi si scriverà

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\omega(\vec{x}) \; \frac{d\omega}{2\pi} \tag{50}$$

dove

$$\Phi_\omega(\vec{x}) = \frac{c}{4\pi} \frac{|\vec{e}_\omega(\hat{x})|^2}{|\vec{x}|^2} \tag{51}$$

Riscrivendo la (43) in questa forma è evidente che il flusso totale è dato dalla sovrapposiziome dei flussi dovuti alle singole componenti monoromatiche come nel caso di un'onda piana. Inoltre ciascuna componente monocromatica del flusso può essere scritta come somma di flussi dovuti alle due possibili polarizzazione del campo elettrico

$$\Phi_\omega(\vec{x}) = \sum_\alpha \Phi_{\omega\alpha}(\vec{x}) \qquad\qquad \alpha = 1,2 \; o \pm 1 \tag{52}$$

dove

$$\Phi_{\omega\alpha}(\vec{x}) = \left| \vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \frac{\vec{e}_\omega(\hat{x})}{|\vec{x}|} \right|^2 \tag{53}$$

Usando il concetto di polarizzazione si sta assumendo che le onde sferiche generate per diffusione siano approssimabili in una qualche misura come onde piane. In questo caso tale approssimazione è corretta se ci si limita a considerare punti nello spazio lontani dal centro diffusore. In questo caso, infatti $|\vec{x}| \gg \lambda$. Di conseguenza si ha

$$\lambda \left| \frac{1}{1/|\vec{x}|} \nabla(1/|\vec{x}|) \right| \approx \lambda/|\vec{x}| \ll 1 \tag{54}$$

che vuol dire che la variazione relativa del prefattore $\frac{1}{|\vec{x}|}$ sulla distanza di una lunghezza d'onda è trascurabile a grandi distanze quindi si ottiene in buona approssimazione

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}_\omega(\hat{x}) \; e^{-i\omega(t - \vec{x}\cdot\hat{x}/c)} \, d\omega, \tag{55}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{b}_\omega(\hat{x}) \; e^{-i\omega(t - \vec{x}\cdot\hat{x}/c)} \, d\omega \tag{56}$$

Si specializza la trattazione precedente al caso in cui l'energia totale dovuta ad ogni componente monocromatica si conserva nel processo di diffusione. In questo caso si parla di **diffusione elastica**.

Data questa premessa ha senso definire la **sezione d'urto differenziale** nel seguente modo.

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\omega\alpha\alpha^0} = \frac{|\vec{x}|^2\Phi_{\omega\alpha}(|\vec{x}|\hat{x})}{\Phi^0_{\omega\alpha_0}} \tag{57}$$

Questa grandezza rappresenta la frazione di energia diffusa nella direzione $\hat{x}$ per una data frequenza ω e per stati di polarizzazione della radiazione incidente e diffusa dati rispettivamente da α_0 e α. Per il proseguo della trattazione conviene porsi nel caso in cui la radiazione incidente è polarizzata lungo una direzione $\vec{\epsilon}_0$
Quindi si può scrivere

$$\vec{E}^0_\omega = W^0_\omega \ \vec{\epsilon}_{0\alpha_0}, \tag{58}$$

$$\vec{B}^0_\omega = W^0_\omega \ \vec{n}_0 \times \vec{\epsilon}_{0\alpha_0} \tag{59}$$

A questo punto la sezione d'urto differenziale diventa

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\omega\alpha\alpha^0} = \frac{\left|\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \vec{e}_\omega(\hat{x})\right|^2}{|W^0_\omega|^2} \tag{60}$$

La sezione d'urto totale è per definizione

$$\sigma_{\omega\alpha^0} = \oint d^2\hat{x} \sum_\alpha (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\omega\alpha\alpha^0} \tag{61}$$

Un calcolo esplicito ci porta alla seguente espressione della sezione d'urto totale.

$$\sigma_{\omega\alpha^0} = \oint d^2\hat{x} \frac{\left|\vec{e}_\omega(\hat{x})\right|^2}{|W^0_\omega|^2} \tag{62}$$

Il prossimo passo consiste nel valutare cosa accade nel caso in cui si considerino un numero N di centri diffusori con cui la radiazione incidente interagisce. In generale valutare il comportamento di un sistema di questo genere è molto difficile. Per questa ragione ci si avvale dell'**approssimazione di Born** che consiste nel considerare sottodominanti i termini derivanti da diffusioni multiple della radiazione incidente.
Si considerino dei centri diffusori di diverso tipo indicizzati con la lettera j e $\vec{x}_j$ le relative posizioni che si considerano costanti durante il processo di scattering. I campi diffusi dal centro diffusore j $\vec{E}_j, \vec{B}_j$ per la natura delle onde elettromagnetiche piane sono dati da

$$\vec{E}_j(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x} - \vec{x}_j, t - \vec{x}_j \cdot \vec{n}^0/c), \tag{63}$$

$$\vec{B}_j(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(\vec{x} - \vec{x}_j, t - \vec{x}_j \cdot \vec{n}^0/c) \tag{64}$$

Dimostrazione
La dimostrazione si basa sulla seguenta propietà dei campi elettromagnetici di onde piane

$$\vec{E}^0(\vec{x}_j, t) = \vec{E}^0(0, t - \vec{x}_j \cdot \vec{n}^0/c), \tag{65}$$

$$\vec{B}^0(\vec{x}_j, t) = \vec{B}^0(0, t - \vec{x}_j \cdot \vec{n}^0/c) \tag{66}$$

Quindi il campo elettromagnetico agente sul centro j in posizione $\vec{x}_j$ al tempo t corrisponde a quello che agisce su un centro dello stesso tipo in 0 al tempo
$t - \vec{x}_j \cdot \vec{n}^0/c$ da cui si deduce che anche i relativi campi diffusi saranno identici nei due casi.

I campi elettrico e magnetico prodotti dai centri diffusori a grande distanza da $\vec{x}_j$ sono dati da

$$\vec{E}_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{|\vec{x}|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}_{j\omega}(\hat{x})\ e^{-i\omega(t-|\vec{x}|/c)}\,d\omega + \ \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^2}), \tag{67}$$

$$\vec{B}_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{|\vec{x}|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{b}_{j\omega}(\hat{x})\ e^{-i\omega(t-|\vec{x}|/c)}\,d\omega + \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^2}) \tag{68}$$

Inoltre vale

$$\vec{e}_{j\omega}(\hat{x}) \cdot \hat{x} = 0, \tag{69}$$

$$\vec{b}_{j\omega}(\hat{x}) = \hat{x} \times \vec{e}_{j\omega}(\hat{x}) \tag{70}$$

dove $\vec{e}_{j\omega}, \vec{b}_{j\omega}$ sono dati da

$$\vec{e}_{j\omega}(\hat{x}) = \vec{e}_{0\omega}(\hat{x})e^{i\omega\vec{x}_j\cdot(n^0-\hat{x})/c}, \tag{71}$$

$$\vec{b}_{j\omega}(\hat{x}) = \vec{b}_{0\omega}(\hat{x})e^{i\omega\vec{x}_j\cdot(n^0-\hat{x})/c} \tag{72}$$

Dimostrazione
Usando le espansioni in serie di Taylor si ricava che

$$|\vec{x} - \vec{x}_j| = |\vec{x}| - \vec{x}_j \cdot \hat{x} + \vec{O}(\frac{|\vec{x}_j|^2}{|\vec{x}|}) \tag{73}$$

Essendo $|\vec{x}_j| \approx d \approx \lambda$ si ha

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^2}), \tag{74}$$

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}_j}{|\vec{x}-\vec{x}_j|} = \hat{x} + \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|}), \tag{75}$$

$$e^{i\omega(|\vec{x}-\vec{x}_j|)/c} = e^{i\omega(|\vec{x}|-\vec{x}_j\cdot\hat{x})/c} + O(\frac{\lambda}{|\vec{x}|}) \tag{76}$$

Utilizzando la (67) e la (68) si ottiene

$$\vec{E}_j(\vec{x},t) = \frac{1}{|\vec{x}|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}_{0\omega}(\hat{x})\ e^{-i\omega(t-|\vec{x}|/c-\vec{x}_j\cdot(\vec{n}^0-\hat{x})/c)}\, d\omega +\ \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^2}), \tag{77}$$

$$\vec{B}_j(\vec{x},t) = \frac{1}{|\vec{x}|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{b}_{0\omega}(\hat{x})\ e^{-i\omega(t-|\vec{x}|/c-\vec{x}_j\cdot(\vec{n}^0-\hat{x})/c)}\, d\omega +\ \vec{O}(\frac{\lambda}{|\vec{x}|^2}) \tag{78}$$

Comparando queste espressioni con la (71) e la (72) il risultato è immediato. Il campo elettromagnetico totale generato da un processo di diffusione è dato da

$$\vec{E} = \sum_{tipi\ p}\sum_j \vec{E}_{pj}, \tag{79}$$

$$\vec{B} = \sum_{tipi\ p}\sum_j \vec{B}_{pj} \tag{80}$$

dove p indica il tipo di centro diffusorio. Sostituendo la (67), (71) nella (79) e la (68) e (72) nella (80) si ricava

$$\vec{e}_\omega(\hat{x}) = \sum_{tipi\ p} F_{p\omega}(\hat{x})\vec{e}_{p0\omega}(\hat{x}) \tag{81}$$

dove $F_{p\omega}(\hat{x})$ è chiamato **fattore di forma** ed è definito come

$$F_{p\omega}(\hat{x}) = \sum_j e^{i\omega\vec{x}_j\cdot(n^0-\hat{x})/c} \tag{82}$$

Sostituendo l'espressione trovata nella (60) e nella (62) si ottiene

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\omega\alpha\alpha^0} = \frac{\left|\sum_{tipi\ p} F_{p\omega}(\hat{x})\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \vec{e}_{p0\omega}(\hat{x})\right|^2}{|W^0_\omega|^2}, \tag{83}$$

$$\sigma_{\omega\alpha^0} = \oint d^2\hat{x}\frac{\left|\sum_{tipi\ p} F_{p\omega}(\hat{x})\vec{e}_{p0\omega}(\hat{x})\right|^2}{|W^0_\omega|^2} \tag{84}$$

dove si è posto in evidenza il fatto che in generale $e_{0\omega}$ dipende dal tipo di particella considerato usando l'indice p.

3.3 Scattering di Rayleigh nell'atmosfera terrestre

Da ora in avanti ci si concentrerà sulla trattazione dello scattering nel caso dell'atmosfera che si tratterà come un gas rarefatto di molecole apolari di O_2 e N_2. Inoltre si prenderà in considerazione la sola componente ottica dello spettro visibile. In questo caso la radiazione diffusa contiene solo il termine di dipolo elettrico, perchè i momenti di ordine successivo sono trascurabili. Inoltre trattandosi di molecole apolari il momento di dipolo è diretto nella stessa direzione del campo elettrico della radiazione incidente. Si avrà allora che

$$\vec{e}_\omega(\hat{x}) = (\frac{\omega}{c})^2 \; W^0_\omega \; \beta_\omega \; [(\hat{x} \times (\vec{\epsilon}_{0\alpha_0} \times \hat{x})], \tag{85}$$

$$\vec{b}_\omega(\hat{x}) = \hat{x} \times \vec{e}_\omega(\hat{x}) \tag{86}$$

dove β_ω è dato dalla relazione

$$\vec{p}_\omega = W^0_\omega \; \beta_\omega \; \vec{\epsilon}_{0\alpha_0} \tag{87}$$

dove $\vec{p}_\omega$ è la trasformata di Fourier di $\vec{p}$.

Dimostrazione

La radiazione appartenente allo spettro ottico ha una lunghezza d'onda di circa $10^{-7}m$, molto maggiore di quella delle particelle che comongono l'atmosfera che invece hanno dimensioni di circa $10^{-10}m$. Inoltre considerando di voler valutare i campi elettromagnetici ad una distanza $|\vec{x}| \gg \lambda$ sono soddisfatte tutte le condizioni necessarie per poter sviluppare i campi elettromagnetici tramite le **espansioni di multipolo in regime di campo lontano**. Non essendoci cariche libere nell'atmosfera e considerando trascurabili i momenti di quadripolo elettrico e di dipolo magnetico tale espansione è data approssimativamente da

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{|\vec{x}|}[\frac{1}{c^2}\hat{x} \times (\ddot{\vec{p}}(t_-) \times \hat{x})]_{t_-=t-|\vec{x}|/c}, \tag{88}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \hat{x} \times \vec{E}(\vec{x},t) \tag{89}$$

Dimostrzione

L'espansione di Fourier del campo elettrico diffuso è dato dalla (36) mentre quella di $\ddot{\vec{p}}(t_-)$ è data da

$$\ddot{\vec{p}}(t_-) = \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 \vec{p}_\omega e^{-i\omega(t-|\vec{x}|/c)} \, d\omega \tag{90}$$

Egualiando ad uno a uno i coefficienti delle due espansioni si ottiene

$$\vec{e}_\omega(\hat{x}) = (\frac{\omega}{c})^2 \; [\hat{x} \times (\vec{p}_\omega \times \hat{x})] \tag{91}$$

Sostituendo la (87) nella (91) si ottiene la (85).

La sezione d'urto differenziale sarà data da

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\omega\alpha\alpha^0} = (\frac{\omega}{c})^4|\beta_\omega|^2|\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \vec{\epsilon}_0|^2 \tag{92}$$

Dimostrazione

$$\hat{x} \times (\vec{\epsilon_0} \times \hat{x}) = \vec{\epsilon_0} - \hat{x}(\vec{\epsilon_0} \cdot \hat{x}) \tag{93}$$

Ricordando che $\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \hat{x} = 0$

$$\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot [\hat{x} \times (\vec{\epsilon}_0 \times \hat{x})] = \vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \vec{\epsilon}_0 \tag{94}$$

La dimostrazione della (92) è immediata sostituendo la (85) e tenendo conto della (94)

La radiazione solare incidente sull'atmosfera terrestre è non polarizzata. Di conseguenza per ottenere la sezione d'urto differenziale si deve mediare la (92) su tutti i possibili stati di polarizzazione. Il risultato è dato da

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_\omega = (\frac{\omega}{c})^4|\beta_\omega|^2\frac{(1+cos^2\theta)}{2} \tag{95}$$

dove θ è l'angolo compreso tra la direzione della radiazione incidente e quella diffusa

Dimostrazione
Si definisce il versore $\vec{k}$ tramite la relazione

$$\vec{k}\ \sin\theta = \hat{x} \times \vec{n_0}, \tag{96}$$

$$\cos\theta = \hat{x} \cdot \vec{n_0} \tag{97}$$

Si definiscono i vettori di polarizzazione della radiazione incidente e diffusa come

$$\vec{\epsilon}_{1^0} = \vec{k} \qquad\qquad \vec{\epsilon}_{2^0} = \vec{k} \times \vec{n}_0, \tag{98}$$

$$\vec{\epsilon}_1 = \vec{k} \qquad\qquad \vec{\epsilon}_2 = \vec{k} \times \hat{x} \tag{99}$$

Adesso si effettua la media del termine $|\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \vec{\epsilon}_0|^2$ che compare nella (92) su tutte le possibili polarizzazione iniziali

$$< |\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \vec{\epsilon}_0|^2 >= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\alpha_0}|\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{\epsilon}_{\alpha^0}|^2 \tag{100}$$

Calcolando i termini esplicitamente si ottiene

$$\sum_{\alpha,\alpha_0} |\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{\epsilon}_{\alpha^0}|^2 = |\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_{1^0}|^2 + |\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_{2^0}|^2 + |\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_{1^0}|^2 + |\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_{2^0}|^2, \tag{101}$$

$$\sum_{\alpha,\alpha_0} |\vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{\epsilon}_{\alpha^0}|^2 = |\vec{k} \cdot \vec{k}|^2 + |\vec{k} \cdot (\vec{k} \times \vec{n_0})|^2 + |(\vec{k} \times \hat{x}) \cdot \vec{k}|^2 + |(\vec{k} \times \hat{x}) \cdot (\vec{k} \times \vec{n_0})|^2 \tag{102}$$

A questo punto è evidente che il secondo e terzo termine si annullino, il primo è semplicemente $|\vec{k}|^2 = 1$ mentre invece per l'ultimo si ha che $|(\vec{k} \times \hat{x}) \cdot (\vec{k} \times \vec{n_0})|^2 = |\hat{x} \cdot \vec{n}_0|^2 = cos^2\theta$. Sostituendo questi risultati nella (92) si ottiene immediatamente la (95).

A questo la sezione d'urto totale risulta essere

$$\sigma_\omega = \frac{8\pi}{3}(\frac{\omega}{c})^4|\beta_\omega|^2 \tag{103}$$

Dimostrazione

$$\sigma_\omega = \oint d^2\hat{x}(\frac{d\sigma}{d\Omega})_\omega, \tag{104}$$

$$\sigma_\omega = (\frac{\omega}{c})^4|\beta_\omega|^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad \sin\theta \frac{(1+\cos^2\theta)}{2} \tag{105}$$

Il risultato dell'integrale è banalmente dato da $8\pi/3$ quindi la (103) è verificata.

Ora si discute come determinare il coefficiente β_ω che compare nella (87). Sapendo che quando un campo elettrico monocromatico di frequenza ω incide su una molecola apolare il momento di dipolo indotto $\vec{p}$ è dato da

$$<\vec{p}>= \gamma_{pol}(\vec{E} + \vec{E}_{int}) \tag{106}$$

dove $\vec{E}_{int}$ è il campo elettrico interno che agisce su ciascuna molecola mentre $\vec{E}$ è il campo elettrico macroscopico dato dalla radiazione incidente. A sua volta $\vec{E}_{int}$ può essere scritto come

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{loc} - \vec{E}_P \tag{107}$$

dove $\vec{E}_{loc}$ rappresenta l'effettivo contributo al campo elettrico dato dalle molecole prossime a quella considerata mentre $\vec{E}_P$ rappresenta la stessa grandezza, ma calcolata con un'approssimazione media del continuo che tiene conto della polarizzabilità tramite $\vec{P}$. Si può dimostrare che $\vec{E}_{loc} \approx 0$ per la maggior parte dei materiali mentre $\vec{E}_P = -\vec{P}/3\epsilon_0$ dove $\vec{P}$ è il vettore di polarizzazione elettrica definito come

$$\vec{P} = N <\vec{p}> \tag{108}$$

Esso rappresenta il comportamento macroscopico di un materiale sotto l'azione di un campo elettrico esterno. Moltiplicando entrambi i membri della (106) per la densità molecolare N si ottiene

$$\vec{P} = \gamma_{pol}\ N\,(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}) \tag{109}$$

da cui si ottiene

$$< \vec{p} >= \frac{\gamma_{pol}}{1 - N\gamma_{pol}}\vec{E} \tag{110}$$

Quindi è evidente dalla (63) che β è dato da

$$\beta = \frac{\gamma_{pol}}{1 - N\gamma_{pol}} \tag{111}$$

Nel caso dell'atmosfera $N \approx 10^{25} mol/m^3$ mentre γ_{mol} è dell'ordine di grandezza di un volume molecolare quindi $\approx 10^{-29} m^3$. Ciò implica che il mezzo considerato è abbastanza rarefatto da poter omettere il coefficiente $N\gamma_{pol}$ al denominatore così da ottenere $\beta \approx \gamma_{mol}$
È utile a questo punto definire un modello grazie al quale si possa stimare γ_{pol}. Si consideri un elettrone legato all'interno di un atomo da una forza elastica di costante elastica $m\omega_0^2$ dove m è la massa dell'elettrone mentre ω_0 è la frequenza di risonanza del sistema. Consideriamo ora un campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana monocromatica di frequenza ω. Se le dimensioni della molecola sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione incidente come si è supposto all'inizio si può considerare il campo elettrico variabile solo nel tempo all'interno della molecola ma uguale in ogni suo punto. Per semplificare ulteriormente la trattazione si consideri un modello di interazione unidimensionale in cui le forze agiscono solo su un asse. La forma che assumerà il campo elettrico sarà data da

$$E = E_0 e^{i\omega t} \tag{112}$$

Quindi di può scrivere l'equazione differenziale

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - eE_0 e^{i\omega t} \tag{113}$$

dove x rappresenta lo spostamento rispetto alla distanza di equilibrio ed e è la carica di un protone. Si verifica facilmente che essendo le condizioni iniziali di equilibrio l'equazione omogenea associata alla (113) ha soluzioni nulle. Quindi si cerca una soluzione particolare dell'equazione differenziale della forma

$$x = x_0 e^{i\omega t} \tag{114}$$

Sostituendo la (114) nella (113) si ottiene la seguente soluzione dell'equazione differenziale

$$x = \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 e^{i\omega t} \tag{115}$$

A questo punto si ottiene il momento di dipolo indotto moltiplicando x per la carica dell'elettrone ottenendo così

$$p = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E \tag{116}$$

Quindi

$$\gamma_{mol} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{117}$$

Si è dimostrata questa relazione per un modello monodimensionale, ma essa è valida anche per un modello tridimensionale. La generalizzazione della (117) a più elementi oscillanti della molecola è

$$\gamma_{mol} = \sum_j \frac{e_j^2}{m(\omega_{0j}^2 - \omega_j^2)} \tag{118}$$

dove e_j, m_j, ω_{0j} sono rispettivamente la carica elettrica la massa e la frequenza di risonanza della j-esima particella.

Per calcolare la sezione d'urto totale nel caso dell'atmosfera non si possono usare i risultati (83) e (84) senza fare delle dovute osservazioni. Queste due formule valgono se la radiazione incidente ha la stessa intensità per ogni centro di diffusione. Nell'atmosfera, tuttavia l'intensità dell'onda incidente decresce proprio perchè parte dell'energia viene consumata in processi di scattering. Tuttavia se si prende un volume δV sufficientemente piccolo con una densità di molecole di azoto N_1 e di ossigeno N_2 si può scrivere

$$\delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\omega\alpha\alpha^0} = \frac{\sum_{tipi} \delta N_p |\vec{\epsilon}_\alpha(\hat{x})^* \cdot \vec{e}_{p0\omega}(\hat{x})|^2}{|W_\omega^0|^2}, \tag{119}$$

$$\delta\sigma_{\omega\alpha^0} = \oint d^2\hat{x} \frac{\sum_{tipi} \delta N_p |\vec{e}_{p0\omega}(\hat{x})|^2}{|W_\omega^0|^2} \tag{120}$$

dove $\delta N_p = N_p \delta V$

Dimostrazione

Calcolando esplicitamente il quadrato del numeratore all'interno dell'integrale della (82) si ottiene

$$\sum_{i,l} \vec{e}_{l0\omega}(\hat{x})^* \vec{e}_{i0\omega}(\hat{x}) (\sum_{j,k} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}_j - \vec{x}_k)}) \tag{121}$$

Questa sommatoria può essere scomposta nella somma di tre termini trattabili separatamente.

Primo termine

$$\sum_{i \neq l} \vec{e}_{l0\omega}(\hat{x})^* \vec{e}_{i0\omega}(\hat{x}) (\sum_{j,k} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}_j - \vec{x}_k)}) \tag{122}$$

Secondo termine
$$\sum_{i=l} |\vec{e}_{l0\omega}(\hat{x})|^2 (\sum_{j\neq k} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}_j - \vec{x}_k)}) \tag{123}$$
Terzo termine
$$\sum_{i=l} |\vec{e}_{l0\omega}|^2 N_i \tag{124}$$
dove $\vec{q} = (\omega/c)(\vec{n}_0 - \hat{x})$. In un gas rarefatto come l'atmosfera le molecole sono totalmente libere di muoversi quindi sono disposte casualmente nello spazio in ogni istante di tempo. Di conseguenza il primo e il secondo termine danno un contributo trascurabile al fattore di forma, perchè la disposizione aleatoria dei centri di scattering implica che ogni termine nella sommatoria in k e j ha la stessa probabilità di comparire del suo opposto. Il terzo termine invece conta esclusivamente termini con fattore di fase nullo perchè $\vec{x}_j = \vec{x}_k$. La somma dei tre termini si riduce alla 124 quindi la sezione d'urto totale è data dalla 120. La dimostrazione della 119 è del tutto analoga alla precedente.
Si pone in evidenza che in realtà nella sommatoria in j e k dei termini di secondo tipo sono contemplati anche tutti quei termini con un fattore di fase $(2m+1)\pi$ con m numero intero che annullano i termini di terzo tipo con fattore di fase nullo. Tuttavia considerando che i centri di scattering possono occupare con continuità ogni posizione all'interno del volume dV considerato la probabilità che la fase che compare nell'espressione del fattore di forma sia esattamente un multiplo dispari di π è 0.

Questa relazione non è molto utile nella pratica avendo a che fare con un grande numero di particelle, tuttavia mostra come l'energia dispersa per diffusione dalla radiazione incidente sia direttamente proporzionale sia alla sezione d'urto totale della singola particella sia alla densità di molecole presente nel mezzo di propagazione. Inoltre l'intensità della radiazione diffusa è ovviamente direttamente proporzionale a quella della radiazione incidente e trattandosi di un processo elastico l'energia totale si conserva per ogni frequenza. Questo ci porta a scrivere

$$dI_\omega = -k(\sigma_\omega^{N_2} N_{N_2} + \sigma_\omega^{O_2} N_{O_2}) I_\omega dx \tag{125}$$

dove k è un opportuno coefficiente positivo, dI_ω rappresenta la variazione dell'intensità della radiazione incidente e dx rappresenta lo spostamento infinitesimo della radiazione all'interno dell'atmosfera. Si può dimostrare che $k = 1$. La soluzione dell' equazione differenziale è quindi

$$I_\omega(x) = I_{0\omega}\ exp(-\sigma_\omega^{N_2} \int_0^x N_{N_2}(R) dy - \sigma_\omega^{O_2} \int_0^x N_{O_2}(R) dy) \tag{126}$$

Dove x rappresenta la distanza percorsa dalla radiazione all'interno dell'atmosfera per arrivare al punto in cui si effettua la misura di intensità. Si noti che negli integrali che compaiono nella 126 si è esplicitata la dipendenza della densità di molecole dalla distanza rispetto al centro della Terra. Ovviamente dato un punto della traiettoria è possibile sempre conoscere la distanza dal centro della Terra di quel punto cioè $R = R(y)$. Quindi se si definiscono una funzione $\hat{N}_{N_2}(y)$ e una funzione $\hat{N}_{O_2}(y)$ tali che $N_{N_2}(R(y)) = \hat{N}_{N_2}(y)$, $N_{O_2}(R(y)) = \hat{N}_{O_2}(y)$ e si esplicita $I_{0\omega}$ usando l'espressione

$$I_{0\omega} = \frac{\omega^3}{2(2\pi)^3 R_{T-S}^2} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \tag{127}$$

dove β è legato alla temperatura di emissione del sole T_S dalla relazione $\beta = \frac{1}{k_b T_S}$ e R_{T-S} è la distanza tra la Terra e il Sole. La 126 diventa quindi

$$I_\omega(x) = \frac{\omega^3}{2(2\pi)^3 R_{T-S}^2} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \; exp(- \sigma_\omega^{N_2} \int_0^x \hat{N}_{N_2}(y)dy - \sigma_\omega^{O_2} \int_0^x \hat{N}_{O_2}(y)dy) \tag{128}$$

Le espressioni (95) e (103) della sezione d'urto differenziale e totale indicano come la radiazione con frequenza più alta venga diffusa maggiormente. Questo il motivo per cui nonostante la radiazione solare abbia un picco di emissione intorno alla frequenza del giallo il cielo appare agli occhi di un osservatore di colore blu durante il giorno. Per la stessa ragione il colore del cielo è rosso durante il tramonto e all'alba. Infatti in tale contesto la radiazione solare deve attraversare uno strato di atmosfera più spesso e quindi come si evince dalla (126) la componente blu della radiazione sarà attenuata molto di più di quella rossa che quindi viene percepita maggiormente. Un altro aspetto interessante della diffusione di onde elettromagnetiche nell'atmosfera terrestre è che tramite questo fenomeno è possibile studiare la composizione dell'atmosfera. Per mettere in luce questo aspetto si riscrive la sezione d'urto totale dovuta ad una singola particella di tipo p come

$$\sigma_\omega = \frac{32\pi}{3} (\frac{\omega}{c})^4 \frac{|n-1|^2}{N_p^2} \tag{129}$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo considerato.

Dimostrazione
Si tratta di una diretta conseguenza delle seguenti due relazioni valide per un gas rarefatto come l'atmosfera terrestre $\beta_\omega \approx \gamma_{mol}$, $n^2 \approx 1 + N_p\gamma_{mol}$.

Si definisce quindi il **coefficiente di attenuazione** come

$$k_p^{att} = N_p\sigma_\omega = \frac{32\pi}{3} (\frac{\omega}{c})^4 \frac{|n-1|^2}{N_p} \tag{130}$$

Questo coefficiente rappresenta la percentuale di radiazione diffusa per unità di lunghezza. Si vede come la (130) dipenda da soli parametri macroscopici che possono essere misurati senza conoscere quali tipi di particelle compongono il gas considerato. Quindi, misurando il coefficiente di attenuazione della luce proveniente dalle stelle e conoscendo tutte le altre grandezze in gioco è possibile risalire al valore di N_p a varie quote inaccessibili a misure dirette. I risultati ottenuti usando questo modo si trovano in accordo con le misure attuali fatte con metodi più sofisticati.

Riferimenti bibliografici

[1] Feynman, Richard P. (2005). The Feynman Lectures on Physics. 2 (2nd ed.). Addison-Wesley

[2] Jackson, J. D. (1999). Classical Electrodynamics (3rd ed.). Wiley

[3] Panofsky, Wolfgang K. H.; Phillips, Melba (2005). Classical Electricity and Magnetism (2nd ed.)

[4] Lifshitz, Evgeny; Landau, Lev (1980). The Classical Theory of Fields (4th ed.). Butterworth-Heinemann

[5] Lifshitz, Evgeny; Landau, Lev; Pitaevskii, L. P. (1984). Electrodynamics of Continuous Media (2nd ed.)

[6] Pollack, Gerald L.; Stump, Daniel R. (2002). Electromagnetism. Addison Wesley