ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Il tensore energia-impulso per un fluido perfetto in Relatività Ristretta e Generale

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Riccardo Reho

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

Con questo lavoro si vuole discutere la connessione esistente tra l' equazione di continuità e l'equazione del moto di un fluido perfetto in Relatività Ristretta e Generale.
Dapprima forniremo una breve introduzione sulle basi della Relatività Ristretta , introducendo il tensore energia-impulso ed analizzando in maniera specifica tale tensore per un fluido perfetto, ricavandone le equazioni del moto.
Forniremo un secondo esempio di tensore Energia-Impulso per la materia incoerente.
Conclusa questa argomentazione ci concentreremo sulla Relatività Generale, analizzandone i principi che sono alla base e privilegiando tra questi il *Principio di Covarianza Generale* come linea guida per le argomentazioni logiche.

In maniera analoga a quanto fatto per la Relatività Ristretta riprenderemo la discussione per il tensore energia-impulso per un fluido perfetto dal punto di vista della Relatività Generale , soffermandoci nel caso di equilibrio idrostatico.

Sempre nel contesto della Relatività Generale verrà in ultima analisi discusso il concetto di fluido incoerente e moto geodetico.

L'ultimo capitolo è dedicato ad una appendice matematica nel quale vengono ricordati alcuni risultati dell'analisi tensoriali utili nel seguire i calcoli effettuati.

Indice

1 Relatività ristretta :Trasformazioni di Lorentz in forma covariante 2

1.1 Trasformazioni di Lorentz 2

2 Tensore energia-impulso 5

2.1 Tensora Energia-impulso per fluido perfetto 7

2.2 Equazione del moto del fluido perfetto 10

2.3 Il tensore energia-impulso per la materia incoerente 13

3 Introduzione alla Relatività Generale 15

3.0.1 Confronto tra Meccanica Newtoniana,Relatività Ristretta e Generale 15

4 Fluido perfetto in Relatività Generale ed equilibrio idrostatico 19

4.1 Equilibrio idrostatico 20

5 Fluido incoerente e moto geodetico 22

6 Appendice: Algebra Vettoriale e Tensoriale 25

6.1 Proprietà di trasformazione vettori e tensori 26

6.2 Operazioni elementari con i tensori 27

6.3 Densità tensoriali 28

6.4 La Connessione affine 28

6.5 Derivata Covariante 31

6.6 Operazioni elementari con derivate covariante dei tensori 33

6.7 Derivata Covariante:Gradiente, Rotore e Divergenza 34

Capitolo 1

Relatività ristretta :Trasformazioni di Lorentz in forma covariante

La teoria della Relatività Ristretta si basa su due solidi postulati :

1. **principio di relatività:** Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali;

2. **costanza della velocità della luce:** La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Il primo postulato è un *principio di simmetria*, stabilisce come le leggi fisiche debbano essere fatte. La ricerca delle simmetrie è una strategia moderna estremamente fruttuosa che ha trovato applicazioni sia in meccanica quantistica che nella teoria quantistica dei campi.
Il secondo postulato stabilisce l'indipendenza della velocità della luce dallo stato di moto della sorgente.
Una conseguenza immediata di ciò è che la simultaneità tra due eventi non è assoluta; due eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo sono necessariamente in un secondo sistema di riferimento.

1.1 Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni delle coordinate, compatibili con i principi relativistici, che permettono di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sono le trasfomrazioni di Lorentz.

Esse vengono definite attraverso una notazione matematica tipica dei tensori che va sotto il nome di forma covariante.

Una trasformazione da un sistema ad un altro è un cambio di coordinate da x^α ad un altro x'^α tale che:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \tag{1.1.1}$$

dove a^α e Λ^α_β sono costanti. Valgono le condizioni vincolanti:

$$\Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \tag{1.1.2}$$

con :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ +1 & \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Utilizziamo le unità naturali per le quali tutte le x^α hanno la dimensione di una lunghezza.

Gli indici ripetuti indicano una somma su tutti i valori dell'indice ripetuto.

In questa notazione scriviamo la *proprietà di invarianza del tempo proprio* dτ come :

$$d\tau^2 = +\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{1.1.4}$$

Secondo questa notazione è facile vedere che per un cambio di coordinate del tipo:

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\gamma dx^\gamma$$

avremo:

$$d\tau'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta x^\gamma dx^\delta$$

per cui:

$$d\tau' = d\tau \tag{1.1.5}$$

Un fronte d'onda di luce nell'unita di misura naturali ha velocità $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ unitaria ed è quindi caratterizzato da:

$$d\tau = 0 \tag{1.1.6}$$

Le trasformazioni di Lorentz formano il gruppo SO(3,1), chiamato *Gruppo di Lorentz*. Questo gruppo si divide in trasformazioni *proprie* per le quali :

$$\Lambda^0_0 \geq 1; \quad Det\Lambda = +1 \tag{1.1.7}$$

e gruppo di Lorentz *improprio* per il quale:

$$\Lambda^0_0 \leq -1; \quad Det\Lambda = -1 \tag{1.1.8}$$

A questo punto risulta utile riportare la forma delle trasformazioni di Lorentz:

$$\Lambda^i_j = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v^2}} \tag{1.1.9}$$

$$\Lambda^0_j = -\gamma v_j \quad \Lambda^0_0 = 0 \tag{1.1.10}$$

dove:

$$\gamma = (1 - \mathbf{v^2})^{-1/2} \tag{1.1.11}$$

Definiamo per comodità la **quadrivelocità U** come il quadri-vettore U^α:

$$U^i \; = \; \frac{dx^i}{d\tau} \; = \; (1 - \mathbf{v^2})^{-1/2} v_i \;\; U^0 \; = \; \frac{dt}{d\tau} \; = \; (1 - \mathbf{v^2})^{-1/2} \tag{1.1.12}$$

Normalizzato in modo tale che:

$$U_\alpha U^\alpha = +1$$

Capitolo 2

Tensore energia-impulso

Consideriamo un sistema formato da n particelle, ognuna con quadri-vettore energia-impulso $p_n^\alpha(\mathrm{t})$ associato ,quest'ultimo ha la forma:

$$p_n^\alpha = (E_n, \mathbf{p_n}) \quad E_n = \frac{m_n}{\sqrt{1-\mathbf{v_n^2}}} \quad \mathbf{p_n} = \frac{m_n \mathbf{v_n}}{\sqrt{1-\mathbf{v_n^2}}} \tag{2.0.1}$$

Dove le quantità $\mathbf{p_n}$,m_n,$\mathbf{v_n}$ sono rispettivamente la massa ,l'energia e la velocità della particella n-esima.

Diamo una definizione della densità e corrente del quadri-vettore p^α.
Definiamo *densità* di p^α il tensore:

$$T^{\alpha 0} = \sum_n p_n^\alpha(t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \tag{2.0.2}$$

e la corrente come:

$$T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \tag{2.0.3}$$

Riassumendo in un unica formula scriviamo:

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \tag{2.0.4}$$

con $x_n^0(t) \equiv t$.
Notiamo che in unità naturali $p_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt}$ Ne consegue che il tensore energia-impulso è simmetrico , ossia:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \tag{2.0.5}$$

Possiamo integrare in dt e sostituire dt con $d\tau$ dato che esso si cancella:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \int d\tau p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(\tau)) \tag{2.0.6}$$

$T^{\alpha\beta}$ è un tensore in quanto prodotto di due 4-vettori p_n^α e $\frac{dx_n^\beta}{d\tau}$, $d\tau$ e δ^4 sono invarianti e dunque sotto trasformazione di Lorentz si trasforma come:

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta} \tag{2.0.7}$$

Vediamo se $T^{\alpha\beta}$ soddisfa la legge di conservazione analizzando la sua derivata nelle componente spaziali.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) &= -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) + \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \end{aligned} \tag{2.0.8}$$

Spostando il termine temporale nella parte sinistra dell'equazione :

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = G^\alpha \tag{2.0.9}$$

Dove G^α è la densità di forza:

$$G^\alpha(x, t) = \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) = \sum_n \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha(t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \tag{2.0.10}$$

$f_n^\alpha = \frac{dp_n^\alpha(t)}{d\tau}$ è la forza relativistica della particella n-esima.

Se la particella è libera p_n^α è costante e $T^{\alpha\beta}$ si conserva:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = 0 \tag{2.0.11}$$

$T^{\alpha\beta}$ si conserva anche se le particelle si muovono in una regione spaziale determinata ed interagiscono solo per collisioni che conservano il momento totale ; per questo $\sum_n p_n^\alpha(t)$ è indipendente dal tempo e vale la 2.0.11.
Riprendendo la definizione di densità di p^α 2.0.2 possiamo scrivere che :

$$p^\alpha = \int_V d^3x T^{\alpha 0} \tag{2.0.12}$$

dove V è il volume che racchiude il nostro sistema di n particelle.
Valutiamo la $\frac{dp^\alpha}{dt}$ ricordando la 2.0.11:

$$\frac{dp^\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x T^{\alpha 0} = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0} = -\int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i} = -\int_\Sigma d\sigma T^{\alpha i} n^i \tag{2.0.13}$$

Nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il teorema di Gauss, Σ è la superficie del nostro volume V ,n^i è il vettore normale alla superficie e $d\sigma$ differenziale di superficie.
Prendiamo una superficie che tende all'infinito in modo da annullare la 2.0.13 e concludiamo che:

$$\frac{dp^\alpha}{dt} = 0 \tag{2.0.14}$$

2.1 Tensora Energia-impulso per fluido perfetto

Un fluido è in fisica un tipo speciale di *continuo* , ossia di un insieme di particelle talmente numeroso che la dinamica della singola particella non può essere seguita e studiata separatamente.
Quel che si fa è descrivere il comportamento di questo insieme di particelle attraverso quantità medie quali : il numero di particelle per unità di volume , densità di energia, densità di momento, pressione e temperatura.
Ad esempio il comportamento di un lago e il campo gravitazionale che esso genera non dipende dalla singola molecola ma sola dalle proprietà medie di un grande insieme di particelle
Chiaramente nell'esempio del lago la temperatura e la pressione , insieme ad altre proprietà, possono variare da punto a punto.
Questo ci porta a considerare quali debbano essere le dimensioni del nostro insieme di particelle per poter essere considerato un continuo.
In generale affermiamo che deve essere abbastanza grande in modo che il comportamento della singola particella non conti ma piccolo abbastanza da rendere lo spazio omogeneo.
Il termine omogeneo implica che proprietà quali: energia cinetica,velocità media e la distanza intermolecolare siano ovunque le stesse nella collezione di particelle.

Una collezione che soddisfi quesi requisiti viene chiamato *elemento*.

L'approssimazione del continuo assegna ad ogni elemento un valore di temperatura , pressione ecc.
Questa operazione si traduce matematicamente assegnando ad ogni punto dello spazio un valore numerico di tali quantità attraverso numerosi campi, infatti ogni elemento è abbastanza piccolo ed omogeneo da poter essere approssimato con un punto.

Sebbene queste definizioni non siano rigorosamente precise son utili per capire cosa intendiamo quando ci riferiamo ad un continuo .
Daremo ora una definizione più precisa per il caso di nostro interesse: il **fluido perfetto**.
Dapprima analizziamo il fluido perfetto in Relatività Ristretta.
Una gran parte di sistemi fisici possono essere classificati come *fluidi perfetti*.

Per avere un fludo perfetto si richiede assenza di conduzione di calore e assenza di viscosità.

L'analisi del tensore energia-impulso risulta più agevole se ci si mette nel riferimento inerziale *commovente* con il fluido: fissato un elemento di fluido sono nel riferimento commovente con questo elemento del fluido se in questo riferimento l'elemento di fluido è fermo.
Indichiamo con una $\sim$ le grandezze associate al sistema di riferimento a riposo con il fluido in un istante ($\mathbf{x}$,t).

Per un fluido perfetto valgono alcune equazioni importanti quali:

- Conservazione :
$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\widetilde{T}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.1.1}$$
- il Flusso del momento P^{μ} attraverso una superficie è dato da:
$$\frac{d\widetilde{P}^{\mu}}{dt} = \int_{superficie} d\sigma^{i}\widetilde{T}^{i\mu} \tag{2.1.2}$$
- assenza di conduzione di calore , ossia :
$$\frac{d\widetilde{E}}{dt} = \int_{superficie} \widetilde{d}\sigma^{i}T^{i0} = 0 \;\;\rightarrow\;\; T^{i0} = 0 \tag{2.1.3}$$
- la forza fra due elementi di fluido deve essere ortogonale alla superficie di separazione:

Richiedere che vi siano solo sforzi perpendicolari alla superficie di separazione significa identificare questo sforzo con la pressione agente per cui le componenti del tensore energia-impulso di un fluido perfetto nel sistema di riferimento commovente sono:

$$\widetilde{T}^{ij} = p\delta_{ij} \tag{2.1.4}$$
$$\widetilde{T}^{ij} = \widetilde{T}^{ji} = 0 \tag{2.1.5}$$
$$\widetilde{T}^{00} = \varrho \tag{2.1.6}$$

I coefficienti ϱ e p vengono chiamiati *densità di energia propria* e *pressione* del fluido, inoltre questo tensore energia-impulso è isoptropo non privilegiando particolari direzioni.

Trovandoci in un sistema di riferimento commovente con il fluido è possibile effettuare una trasformazione di Lorentz per ricondurci ad un sistema di riferimento generico rispetto a quello del fluido che si muove con velocità **v** rispetto al fluido, in questo modo avremo che:

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma}(\text{-}\mathbf{v})\Lambda^{\beta}_{\delta}(\text{-}\mathbf{v})\widetilde{T}^{\gamma\delta} \tag{2.1.7}$$

Esplicitiamo scrivendo:

$$T^{ij} = p\delta_{ij} + (p+\varrho)\frac{v_i v_j}{1-\mathbf{v}^2} \tag{2.1.7a}$$

$$T^{i0} = (p+\varrho)\frac{v_i}{1-\mathbf{v}^2} \tag{2.1.7b}$$

$$T^{00} = \frac{\varrho + p\mathbf{v}^2}{1-\mathbf{v^2}} \tag{2.1.7c}$$

Utilizzando la definizione di quadri-velocità 1.1.12 U^α scriviamo brevemente:

$$T^{\alpha\beta} = -p\eta^{\alpha\beta} + (p+\varrho)U^\alpha U^\beta \tag{2.1.8}$$

In generale un fluido conserverà oltre alla sua energia e momento anche altre grandezze come ad esempio il numero di atomi.
Ci riferiamo a questa grandezza con il nome *numero di particelle.*
In un sistema di riferimento commovente con il fluido la densità del numero di particelle n è fissa e la corrente è nulla. Definiamo dunque il 4-vettore corrente N^α in un punto del sistema di riferimento commovente con il fluido e scriviamo :

$$\widetilde{N}^i = 0 \qquad \widetilde{N}^0 = n \tag{2.1.9}$$

In qualsiasi altro sistema di riferimento in cui il fluido si muove con velocità **-v** rispetto a tale punto il tensore N^α avrà componenti:

$$N^i \;=\; \Lambda^i_\beta(-\mathbf{v})\widetilde{N}^\beta \;=\; (1-\mathbf{v^2})^{-1/2}v^i n \tag{2.1.10a}$$

$$N^0 \;=\; \Lambda^0_\beta\widetilde{N}^\beta \;=\; (1-\mathbf{v^2})^{-1/2}n \tag{2.1.10b}$$

Dalla definizione di 4-velocità U^α segue che:

$$N^\alpha = nU^\alpha \tag{2.1.11}$$

2.2 Equazione del moto del fluido perfetto

Il moto del fluido è determinato dalle equazioni 2.0.11 di conservazione dell'energia e impulso per il tensore $T^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} &= -\frac{\partial}{\partial x^\beta} p\eta^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\varrho)U^\alpha U^\beta] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} p + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\varrho)U^\alpha U^\beta] \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

e per il numero di particelle N:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} N^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(nU^\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}(n(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}) + \bigtriangledown \cdot (n\mathbf{v}(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}) \tag{2.2.2}$$

L' equazione 2.2.2 prende il nome di **equazione di continuità**.
La equazione 2.2.1 è separabile in una equazione vettoriale e una scalare. La parte vettoriale si ottiene ponendo $\alpha = i$, $U^i = v^i U^0$ e utilizzando la 2.2.1 per $\alpha = 0$.
Scriviamo dunque per $\alpha = i$ la parte vettoriale della 2.2.1 come :

$$0 = +\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\varrho)U^0 U^\beta v^i] \tag{2.2.3}$$

e la parte scalare come :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\varrho)U^0 U^\beta] \tag{2.2.4}$$

Sviluppiamo ancora la 2.2.3 prendendo per semplicità $i = 1$ e sfruttando la 2.2.4:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\varrho)U^0 U^\beta]v^1 + (p+\varrho)U^0 U^\beta \frac{\partial v^1}{\partial x^\beta} \tag{2.2.5a}$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x^1} + \frac{\partial p}{\partial t} v^i + (p+\varrho)U^0 U^0 \frac{\partial v^1}{\partial t} + (p+\varrho)U^0 U^0 v^j \frac{\partial v^1}{\partial x^j} \tag{2.2.5b}$$

dove j indica somma su indici spaziali analogalmente ad i.
Discorso analogo vale per i=2,3 e quindi scriviamo tale equazione in forma vettoriale esplicitando il valore $U^0 U^0$ e portando l'ultimo termine a sinistra dell'equazione come:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \bigtriangledown)\mathbf{v} = -\frac{(1-\mathbf{v}^2)}{p+\varrho}[\bigtriangledown p + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial t} p] \tag{2.2.6}$$

Queste equazioni prendono il nome di **equazioni di Eulero relativistica**.
Notiamo che esse si riconducono al caso classico nel limite $1 - v^2 \simeq 1$ e $p + \varrho \simeq \varrho$.
La parte scalare si ottiene moltiplicando la 2.2.1 per U_α ed utilizzando la relazione:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\beta} U_\alpha U^\alpha = 2U_\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} \tag{2.2.7}$$

otteniamo dunque :

$$0 = U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = -U^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} p + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\varrho)U^\beta] \tag{2.2.8}$$

Ricordando la 2.2.2 possiamo ancora esprimere il tutto in funzione di n :

$$\begin{aligned} 0 &= -U^\beta [\frac{\partial}{\partial x^\beta} p - n \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\frac{p+\varrho}{n})] \\ &= -nU^\beta [p \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\frac{1}{n}) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\frac{\varrho}{n})] \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Vediamo adesso il comportamento dell'entropia di questo fluido sfruttando la seconda legge della termodinamica.
Grazie ad essa otteniamo una relazione tra: la pressione p , la densità di energia ϱ ,il volume per particella *1/n*, la Temperatura T e l'entropia della particella σk.
k è la costante di Boltzmann mentre σ è l'entropia specifica adimensionale.

$$kT d\sigma = pd\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\varrho}{n}\right) \tag{2.2.10}$$

A questo punto tramite la 2.2.9 ricaviamo la **equazione dell'energia** :

$$0 = U^\beta \frac{\partial}{x^\beta}\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\sigma + (\mathbf{v}\cdot \bigtriangledown)\sigma \tag{2.2.11}$$

Una forma di equazione del transporto la quale ci assicura che l'entropia specifica σ rimane costante nel moto lungo la direzione di scorrimento del fluido.

Forniamo adesso un esempio di equazioni di stato che danno p e ϱ in termini di n e σ.
Consideriamo un fluido composto da particelle puntuali che interagiscono solo mediante collisioni spaziali.
Il tensore energia-impulso $T^{\alpha\beta}$ avrà la forma:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_N \frac{p_N^\alpha p_N^\beta}{E_N} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x_N}) \tag{2.2.12}$$

In un sistema di riferimento commovente con il fluido otteniamo dalle 2.1.1-2.1.3 la pressione e la densità di energia :

$$p = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} T^{ii} = \frac{1}{3}\sum_N \frac{\mathbf{p_N^2}}{E_N}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x_N}) \tag{2.2.13}$$

$$\varrho = T^{00} = \sum_N E_N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x_N}) \tag{2.2.14}$$

$$n = \sum_N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x_N}) \tag{2.2.15}$$

Ricordando che in unità naturali c=1 segue che :

$$0 \leq p \leq \frac{\varrho}{3} \tag{2.2.16}$$

A seconda delle proprietà del sistema studiato possiamo notare alcune distinzioni a seconda che la materia sia non relativistica o estremamente relativistica.
Consideriamo l'approssimazione di un gas freddo,non relativistico, l'energia E_N di ogni particella è la somma del termine di riposo e cinetico:

$$E_N \simeq m + \frac{\mathbf{p_N^2}}{2m} \tag{2.2.17}$$

con

$$\varrho \simeq nm + \frac{3}{2}p \tag{2.2.18}$$

come segue immediatamente dalla 2.2.11.

Nell'approssimazione di gas molto caldo , estramemente relativistico con $E_N \simeq |\mathbf{p_N}| >> m$ avremo:

$$\varrho \simeq 3p >> nm \tag{2.2.19}$$

Queste due casistiche vengono incorporate in una singola equazione tramite :

$$\varrho - nm \simeq (\gamma - 1)^{-1} p \tag{2.2.20}$$

γ può assumere due valori, γ= 5/3 per una gas non relativistico e γ=4/3 per un gas molto relativistico.
Grazie alla 2.2.20 ricaviamo il differziale di ϱ/n e ricordando la 2.2.10 possiamo scrivere:

$$kTd\sigma = pd\frac{1}{n} + (\gamma - 1)^{-1} d(\frac{p}{n}) = \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma - 1} d(\frac{p}{n^\gamma}) \tag{2.2.21}$$

Siamo adesso in grado di scrivere l'equazione scalare 2.2.11 in termini di ϱ e n:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{p}{n^\gamma}) + (\mathbf{v} \cdot \bigtriangledown)\frac{p}{n^\gamma} \tag{2.2.22}$$

Per fluidi di natura diversa in generale quest'ultima formula continua a valere insieme alla relazione 2.2.20 tra ϱ e p con diversi valori di γ.
Queste equazioni sopra elencate permettono , in Relatività Ristretta, di determinare il moto del fluido partendo da grandezze semplici quali pressione e densità di energia.

2.3 Il tensore energia-impulso per la materia incoerente

Uno dei tensori energia-impulso più importanti , nonchè più semplice, è il *tensore materia incoerente non interagente* , o *polvere.*
Questo tensore è caratterizzato da due quantità : il campo vettoriale della 4-velocità di flusso $\mathbf{U}^{\alpha}$e la densità propria del flusso $\varrho_{\mathbf{0}}$.
Entrambe queste quantità son associate ad un sistema di riferimento commovente con il flusso.
Avremo che :

$$\mathbf{U}^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \tag{2.3.1}$$

$$\varrho_0 = \varrho_0(x) \tag{2.3.2}$$

Il più semplice tensore di rango 2 che possiamo costruire con queste due quantità è:

$$T^{\alpha\beta} = \varrho_0 u^{\alpha} u^{\beta} \tag{2.3.3}$$

Precisiamo che in questa sezione ,diversamente da quanto fatto nella sezione 2.1, distinguiamo con ϱ_0 la densità del flusso propria del sistema commovente e con ϱ la densità di un sistema generale che si muove con velocità $\mathbf{v}$.
Vediamo che la componente 00 del tensore T presenta una forma semplice :

$$T^{00} = \varrho_0 U^0 U^0 = \gamma^2 \varrho_0 = \varrho \tag{2.3.4}$$

Interpretiamo questa quantità come la **densità di energia relativistica** ϱ , infatti un osservatore fisso rispetto ad uno commovente vede la densità crescere di un fattore γ^2 ; ciò è dovuto al fatto che un elemento di volume tri-dimensionale in moto è soggetto alla contrazione di Lorentz e la massa ivi contenuta è maggiore della massa a riposo di un fattore γ.

Per le altre componenti del tensore T^{ab} scriviamo facilmente :

$$T^{\alpha\beta} = \varrho \begin{bmatrix} 1 & U_x & U_y & U_z \\ U_x & U_x^2 & U_x U_y & U_x U_z \\ U_y & U_y U_x & U_y^2 & U_{yz} \\ U_z & U_z U_x & U_z U_y & U_z^2 \end{bmatrix} \tag{2.3.5}$$

Ricordiamo l'equazione 2.0.11 che in questo caso vale in quanto descriviamo il moto in assenza di forze :

$$\partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.3.6}$$

Prendendo α =0 otteniamo la classica *equazione di continuità* :

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \bigtriangledown \cdot \varrho \mathbf{U} = 0 \tag{2.3.7}$$

per le altre componenti α=1,2,3 scriviamo :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho U_x\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho U_y\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho U_z\mathbf{U}) \tag{2.3.8}$$

E sintetizzando in un'unica formula la 2.3.7 e 2.3.8 scriviamo:

$$\varrho[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{U}] = 0 \tag{2.3.9}$$

La 2.3.9 è un'equazione vettoriale con la quale è possibile descrivere il moto del campo materiale di polvere.

Capitolo 3

Introduzione alla Relatività Generale

La Relatività Generale sfrutta degli strumenti matematici propri della geometria differenziale per introdurre una teoria che non dipende da uno specifico osservatore e che allo stesso tempo riproduca i risultati della Relatività Ristretta.

3.0.1 Confronto tra Meccanica Newtoniana,Relatività Ristretta e Generale

La meccanica Newtoniana si appoggia sul *Principio di Invarianza Galileiana*:

Principio di Invarianza Galileiana : Le leggi della meccanica Newtoniana sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e il tempo è assoluto

Notiamo alcuni aspetti di tale principio :

1. La legge di Gravità di Newton (e tutte le forze conservative) è compatibile con questo principio;

2. L'elettromagnetismo di Maxwell è incompatibile;

3. il principio prevede l'esistenza di un sistema di riferimento inerziale senza definire cosa esso sia.

Col fine di inglobare in unico principio le leggi di Maxwell è stato storicamente introdotto il *Principio di Relatività Speciale*:

Principio Relatività Speciale : Le leggi della fisicasono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e la velocità della luce nel vuoto è invariante.

Vediamo come per tale principio:

1. La Legge di Gravità di Newton (ed in generale le forze a distanza) è incompatibile con questo principio;

2. Elettromagnetismo di Maxwell è compatibile;

3. introduce il concetto di velocità limite;

4. fa ancora uso del concetto ambiguo di sistema di riferimento inerziale.

Precisiamo dunque che dal punto di vista matematico la Relatività Ristretta assume l'esistenza di sistemi di riferimento inerziali globali connessi tra loro tramite le *Trasformazioni di Lorentz*.
Da questo deduciamo che l'asserzione che leggi della fisica siano le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali si traduce matematicamente asserendo che le quantità rilevanti per le leggi fisiche sono dei tensore invarianti sotto trasformazioni di Lorentz.

La Relatività Generale si spinge oltre essa infatti si libera dall'assunzione che sistema di riferimento e osservatore siano equivalenti , asserendo che :

Principio di Relatività Generale Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento (per tutti gli osservatori)

Puntualizziamo che in quest' ottica :

1. Ogni osservatore fisico è associato ad un sistema di riferimento , gli osservatori vengono pensati come apparati fisici che si muovono lungo traiettorie nello spazio tempo dalle quali possono essere definiti sistemi di riferimento che ricoprono porzioni di spazio più grandi.
   In particolare tali osservatori sono locali.

2. Il principio di Relatività Generale viene tradotto matematicamente richiedendo che le leggi della fisica coinvolgano solo quantità tensoriali nel senso della geometria differenziale, nella quale i tensori sono oggetti indipendenti dal sistema di coordinate scelto.

La forza gravitazionale è una forza solo attrativa essa quindi non può svanire tra due corpi , possiamo scegliere un osservatore in **caduta libera** il quale non misura accellerazione gravitazionale in qualsiasi esperimento egli effettui. Tale affermazione è contenuta nel :

Principio di Equivalenza In ogni punto dello spazio-tempo , in un campo gravitazionale arbitrario, è possibile scegliere un sistema di coordinate localmente inerziale tale che, in un intorno sufficientemente piccolo del punto in questione, le leggi della natura prendono la stessa forma di un sistema di coordinate Cartesiano non accellerato in assenza di gravità.

Con il termine *la stessa forma di un sistema di coordinate Cartesiano non accellerato* intendiamo dire che le leggi della natura assumono la forma data dalla Relatività Speciale.

Proponiamo ora una versione alternativa del Principio di Equivalenza, il Principio di Covarianza Generale, sfruttando le conoscenze sulla geometria differenziale riportate in appendice.
Il **Principio di Covarianza Generale** consiste di due affermazioni:

1. Una equazione fisica è valida in presenza di gravità se è valida in Relatività Ristretta quando la gravità è assente, ossia se il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ eguaglia il tensore di Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ e la connessione affine $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ è nulla;

2. Una equazione fisica è covariante , ossia preserva la sua forma se soggetta ad una trasformazione di coordinate generale x$\rightarrow x'$.
In pratica questo significa che una legge fisica in un sistema di riferimento locale in un punto P è data dalla Relatività Ristretta su di essa vengono effettuate tre operazioni:

1. gli indici di tensoriali del gruppo di Lorentz vengono interpretati come indici appartenenti a una trasformazione delle coordinate generale;

2. La metrica di Minkowski viene rimpiazzata dal tensore metrico

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \tag{3.0.1}$$

3. le derivate parziali vengono sostituite dalla derivata covariante:

$$\partial_{\mu} \rightarrow \bigtriangledown_{\mu} \tag{3.0.2}$$

Precisiamo che il principio di Covarianza Generale è privo di contenuto fisico.
Esso è significativo in quanto esplicita l'effetto della gravitazione : una legge fisica se è vera in assenza di gravitazione allora in virtù della sua covarianza generale sarà vera anche in un campo gravitazionale.

Nel quadro della Relatività Generale il Tensore Energia-Impulso rivela tutta la sua importanza, com'è evidente dalle equazioni di campo complete:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.0.3}$$

dove G è la costante di Newton e $G_{\mu\nu}$ una combinazione lineare della metrica e delle sue derivate prime e seconde.

Le equazioni di campo 3.0.3 consistono di dieci equazioni differenziali che legano venti quantità (10 componenti di $g_{\mu\nu}$ e dieci di $T_{\mu\nu}$, la parte più interessante è che esse possono essere lette in almeno 3 modi differenti. Se lette da destra verso sinistra determiniamo il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ a partire da $T_{\mu\nu}$.
In quest'ottica si specifica la distribuzione di materia e si risolvono le equazioni per determinare che geometria ne risulta.

Possiamo leggere le 3.0.3 anche da sinistra verso destra ossia vorremmo determinare il tensore energia-impulso partendo da un dato tensore metrico $g_{\mu\nu}$.
Questo metodo risulta raramente applicabile dal punto di vista pratico dato che i tensori energia-impulso che ne risultano sono spesso fisicamente non rilevanti.

L'ultimo metodo è quello di considerare le dieci equazioni come vincoli sulla scelta simultanea di $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$.

Capitolo 4

Fluido perfetto in Relatività Generale ed equilibrio idrostatico

Utilizziamo gli strumenti matematici introdotti nell'appendice insieme al principio di Relatività Generale per ricavare l'equazione che determina la conservazione del tensore energia-impulso in fluidodinamica.
Ricordiamo la 2.1.8 ed effettuiamo le sostituzioni minime dettate appunto dal principio di Covarianza Generale, derivata ordinaria→derivata covariante , tensore metrico $\eta_{\alpha\beta}$tensore metrico $g_{\mu\nu}$.
Scriviamo dunque in presenza di gravità:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \varrho)\, \varrho U^{\mu} U^{\nu} \tag{4.0.1}$$

Utilizziamo dunque la 2.0.11 in forma covariante :

$$0 = T^{\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g^{1/2}\, (p + \varrho)\, U^{\mu} U^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} (p + \varrho) U^{\nu} U^{\lambda} \tag{4.0.2}$$

Dato che $\eta_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} = +1$,in assenza di gravità, dal principio di Covarianza Generale avremo:

$$g_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} = +1 \tag{4.0.3}$$

Dimostrazione Tenendo conto che $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$ e notando che il termine $(p + \varrho) U^{\mu} U^{\nu}$ è un tensore di rango 2 ne effettuaiamo la divergenza covariante sfruttando la formula in Appendice 6.7.9b

$$[(p + \varrho) U^{\mu} U^{\nu}]_{;\nu} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g^{1/2} (p + \varrho) U^{\mu} U^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} (p + \varrho) U^{\nu} U^{\lambda} \tag{4.0.4}$$

In questo modo è immediato ricondurci alla 4.0.2.■

4.1 Equilibrio idrostatico

Consideriamo il caso di un fluido perfetto in equilibrio idrostatico.
Vogliamo quindi studiare quali sono le equazioni che descrivono, in Relatività Generale,un fluido quand'esso non è in movimento. Dire che il fluido non è in movimento implica che la parte spaziale del 4-vettore velocità U^μ è nulla, allora riprendendo la 4.0.3:

$$U^0 = (+g_{00})^{-1/2} \qquad U^\lambda = 0 \; per \; \lambda \neq 0 \tag{4.1.1}$$

Inoltre tutte le derivate temporali di $g_{\mu\nu}$,p e ϱ sono nulle. Il termine Γ^μ_{00} diventa:

$$\Gamma^\mu_{00} = \begin{Bmatrix} \mu \\ 00 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \tag{4.1.2}$$

anche il termine $\frac{\partial}{\partial x^\nu}[(p+\varrho)U^\mu U^\nu]$ si annulla , proprio per l'ipotesi di staticità.

Riprendiamo dunque, sotto queste condizioni, la 4.0.2 diventa:

$$-\frac{\partial p}{\partial x^\lambda} = (p+\varrho)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} ln(g_{00})^{1/2} \tag{4.1.3}$$

Questa equazione è banale per λ=0 mentre per $\lambda = i$ si riduce all'equazione ordinaria non-relativistica di equilibrio idrostatico, eccetto che la densità è sostituita con $p + \varrho$ e il termine $ln(g_{00})^{1/2}$ compare al posto del potenziale gravitazionale.

Dimostrazione Dimostriamo la formula 4.1.3 a partire dalla 4.0.2 ,4.1.2 e sfruttando le condizioni 4.1.1 ,moltiplichiamo inoltre la 4.0.2 per $g_{\mu\lambda}$:

$$
\begin{aligned}
0 &= g_{\mu\lambda} T^{\mu\nu}_{;\nu} && (4.1.4a)\\
&= g_{\mu\lambda}\left\{ \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{1/2}(p+\varrho)U^\mu U^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(p+\varrho)U^\nu U^\lambda \right\} && (4.1.4b)\\
&= \frac{\partial p}{x^\lambda} + 0 + \delta^\nu_\lambda \frac{-1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}(p+\varrho)(g_{00})^{-1} && (4.1.4c)\\
&= \frac{\partial p}{\partial x^\lambda} + (p+\varrho)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} ln(g_{00})^{-1/2} && (4.1.4d)
\end{aligned}
$$

Spostando il primo termine dalla parte sinistra dell'equazione otteniamo la 4.1.3.■

Diventa interessante discutere la 4.1.3 nella forma integrale che scriviamo come:

$$\int \frac{dp(\varrho)}{p(\varrho)+\varrho} = -ln(\sqrt{g_{00}}) + cost \tag{4.1.5}$$

Forniamo a questo punto un esempio per una dipendenza del tipo:

$$p(\varrho) = \varrho^N \tag{4.1.6}$$

con N numero intero e diverso da 1.
Prendiamo il termine sinistro della 4.1.5 insieme alla definizione 4.1.6,consideriamo il differenziale $dp(\varrho)$ e scriviamo:

$$\int d\varrho \frac{N\varrho^{N-1}}{\varrho^N + \varrho} = \int d\varrho (N+1-1)\frac{N\varrho^{N-2}}{\varrho^{N-1}+1} = ln(\varrho^{N-1}+1) + \frac{1}{N-1} ln(\varrho^{N-1}+1) \tag{4.1.7}$$

Considerando le prorpietà dei logaritmi e con pochi passaggi algebrici otteniamo che:

$$\frac{p+\varrho}{\varrho} \propto (-g_{00})^{\frac{1-N}{2N}} \tag{4.1.8}$$

Mentre per N=1 e immediato verificare che:

$$\varrho \propto (g_{00})^{-\frac{(p+\varrho)}{2p}} \tag{4.1.9}$$

Questa equazione ci mostra che l'equilibro idrostatico non può mai essere raggiunto solo attraverso la gravitazione in un fluido estremamente relativistico.
Infatti per $p = \varrho/3$ otteniamo:

$$\varrho \propto (g_{00})^{-2} \tag{4.1.10}$$

e dato che ϱ deve essere nulla nella regione esterna al fluido g_{00} diverge sulla superficie del fluido.

Capitolo 5

Fluido incoerente e moto geodetico

Senza addentrarci nello studio della formulazione assiomatica della Relatività Generale è possibile studiare quali sono le equazioni del moto per un fluido incoerente.

Consideriamo il moto di una particella di prova o di un fotone , a rigore essa fa parte dell'energia e della materia presenti nel campo e dovrebbe quindi essere inclusa nel tensore energia-impulso.
Sottolineiamo dunque che il tensore energia-impulso determina la struttura geodetica e la geometria dello spazio-tempo in quanto è difatti il termine sorgente delle equazioni di campo.

Il moto della particella dovrebbe quindi essere contenuto nelle equazioni di campo ed in effetti è quel che accade, in particolare l'idendità di Bianchi porta alla condizione:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \tag{5.0.1}$$

Vediamo dunque che la divergenza del tensore-energia impulso è una condizione sufficiente a specificare in modo univoco le equazioni del moto per una particella puntiforme in campo gravitazionale.

La condizione $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ è una equazione di conservazione.
Forniamo un esempio prendendo un caso particolarmente semplice, riprendiamo la 2.3.3 per un fluido incoerente e imponiamo le equazioni di conservazione 5.0.1.

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = (\varrho_0 U^\mu U^\nu)_{;\nu} 0 \tag{5.0.2}$$

Applichiamo la regola di Leibniz al prodotto $[(\varrho_0 U^\mu) U^\nu)]$ ottenendo:

$$U^\mu(\varrho_0 U^\nu)_{;\nu} + \varrho_0 U^\nu (U^\mu_{;\nu}) = 0 \tag{5.0.3}$$

Contraiamo questa equazione per U_μ ricordando che:

$$U_\mu U^\nu = 1 \quad \rightarrow \quad U_\mu (U^\mu_{;\nu}) = 0 \tag{5.0.4}$$

Questo implica che il secondo termine della 6.0.3 si annulla mentre:

$$(\varrho_0 U^\nu)_{;\nu} = 0 \tag{5.0.5}$$

Adesso risostituiamo questo risultato nella 5.0.3 dividiamo per ϱ_0 e otteniamo:

$$U^\nu U^\mu_{;\nu} = 0 \tag{5.0.6}$$

che è la condizione perchè U^μ sia tangente ad una geodetica , da confrontare con la 6.5.15, quindi le equazioni di conservazione richiedono il moto geodetico per le particelle di polvere.

Conclusioni

Le argomentazioni sviluppate in questo elaborato permettono di avere una visione chiara dell'approccio utilizzato in fisica teorica.
In particolare le definizioni di Tensore Energia-Impulso con le sue applicazioni nel caso di materia incoerente e fluido perfetto vengono riprese nell'ambito della cosmologia moderna; questa utilizzando la metrica di Robertson-Walker e le equazioni di Friedman punta a determinare l'evoluzione del nostro Universo dai suoi primi istanti ai giorni nostri.

All'interno di questo quadro lo scopo di questa tesi è stato da un lato familiarizzare con gli strumenti matematici propri della Relatività Ristretta e Generale, dall'altro si son viste le principali relazioni matematiche che descrivono il moto di un fluido perfetto e della materia incoerente.
Nello specifico dato il sistema oggetto di studio, qualora fosse fluido perfetto o materia incoerente, si è definito il Tensore Energia-Impulso e, sfruttando la legge di conservazione 2.0.11, si sono ricavate le equazioni di Eulero relativistiche.
Questi risultati sono analizzati sia nell'ambito della Relatività Ristretta sia in quello della Relatività Generale,sottolineando come sia possibile passare dal primo al secondo attraverso il Principio di Covarianza Generale.
Sfruttando questi risultati sono state discusse alcune applicazioni: in Relatività Ristretta si è vista la relazione esistente tra pressione e densità di un fluido perfetto con volume ed entropia, sfruttando il secondo principio della Termodinamica, in Relatività Generale è stato trattato l'equilibrio idrostatico ricavando la relazione che lega il gradiente di pressione alla metrica.

Capitolo 6

Appendice: Algebra Vettoriale e Tensoriale

Viene proposta di seguito un'appendice sull' algebra tensoriale utilizzata in questo elaborato.
Daprrima, nel paragrafo 6.1 e 6.2, vengono definite le proprietà di trasformazione di alcuni oggetti matematici nel passare da un sistema di riferimento ad un altro.
Il processo di interpretazione fisica associa tali oggetti matematici a quantità fisiche reali e misurabili, in particolare sottolineiamo che siamo interessati ad oggetti invarianti sotto tali trasformazioni e leggi fisiche che siano covarianti ,secondo quanto enunciato nel Principio di Covarianza Generale.

Si prosegue nel capitolo 6.3 con la definizione di oggetti non tensoriali quali le *densità tensoriali*; essi non si trasformano come i normali tensori ma presentano un fattore extra ,quale lo Jacobiano, che può essere eclissato attraverso un semplice passaggio matematico descritto in seguito.

La parte principale di questa appendice è contenuta negli ultimi paragrafi dove si introduce il concetto di *derivata covariante* e *Trasformazione affine*,definendo anche il *simbolo di Christoffel* Γ.
La definizione di Trasformazione affine e derivata covariante è indispensabile per uno studio completo della Relatività Generale, questo perchè come enunciato nell'Introduzione alla Relatività Generale, necessitiamo di strumenti matematici capaci di definire quantità indipendenti dal sistema di coordinate scelto e che tengano conto degli effetti della gravitazione sullo spazio-tempo.

L'appendice si conclude con alcuni casi particolari di derivata covariante.

6.1 Proprietà di trasformazione vettori e tensori

In questa sezione descriviamo le proprietà di trasformazione di una classe di oggetti basilari.

Scalari: Gli *scalari* sono oggetti per i quali la regola di trasformazione è particolarmente semplice , essi infatti non cambiano sotto trasformazione di coordinate.
Generalmente li indichiamo con una letterla latina maiuscola non indicizzata.

Vettori Controvarianti i vettori controvarianti V^μ sono oggetti che soggetti alla trasformazione $x^\mu \to x'^\mu$ si trasformano in:

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \tag{6.1.1}$$

Un esempio di questi vettori controvarianti è il differenziale delle coordinate dx^μ per il quale:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{6.1.2}$$

Vettori Covarianti un vettore covariante U_μ si trasforma sotto trasformazione di coordinate $x^\mu \to x'^\mu$ in :

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} U_\nu \tag{6.1.3}$$

Un esempio di vettore Covariante è il gradiente di un campo scalare ϕ ossia $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ per il quale dalla regola della catena segue che:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \tag{6.1.4}$$

Tensori: i Tensori sono oggetti che si trasformano come il prodotto di vettori covarianti e controvarianti.
Ad esempio il tensore $T^{\mu\lambda}_\nu$ si trasforma come il prodotto dei vettori $U^\mu V_\nu W^\lambda$.

$$T'^{\mu\lambda}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^{\kappa\sigma}_\varrho \tag{6.1.5}$$

Un esempio di ciò è il **tensore metrico** che per definizione scriviamo:

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{6.1.6}$$

dove η è il tensore di Minkowski e ξ^α è un sistema di coordinate localmente inerziale.
Definiamo l'inverso di $g_{\mu\nu}$ il tensore $g^{\lambda\mu}$ per il quale:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu \tag{6.1.7}$$

A questo punto è facile riconoscere che una equazione scritta mediante il formalismo tensoriale risulterà invariante per una generica trasformazione di coordinate.
Ad esempio se $A^{\mu\lambda}_\nu = B^{\mu\lambda}_\nu$ allora nel sistema di coordinate x'^μ risulterà : $A'^{\mu\lambda}_\nu = B'^{\mu\lambda}_\nu$

6.2 Operazioni elementari con i tensori

Abbiamo visto che una generica quantità $T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ è un tensore se si trasforma bene nel senso appena definito.

Elenchiamo alcune operazioni consentite con i tensori:

Combinazione lineare: Una combinazione lineare di tensori con gli stessi indici in alto e in basso è ancora un tensore con gli stessi indici.
Dati i tensori A^μ_ν e B^μ_ν

$$T^\mu_\nu \equiv a A^\mu_\nu + b B^\mu_\nu \tag{6.2.1}$$

è ancora un tensore.

Prodotto diretto: Il prodotto di due tensore A^μ_ν e B^ϱ è un nuovo tensore:

$$T^{\mu\varrho}_\nu \equiv A^\mu_\nu B^\varrho \tag{6.2.2}$$

Contrazione: Se un Tensore T possiede un indice alto e uno basso uguali sommando su questi valori otteniamo un nuovo tensore con gli indici uguali assenti:

$$T^{\mu\varrho} \equiv T^{\mu\varrho\nu}_\nu \tag{6.2.3}$$

Queste tre operazioni possono essere combinate insieme.
In particolare degna di interesse è l'operazione di *alzamento/abbassamento degli indici* attraverso il tensore metrico $g_{\mu\nu}$.
Forniamo un esempio per delucidare in cosa consista questa operazione.
Prendiamo un tensore$T^{\mu\varrho}_\sigma$.

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\varrho}_\sigma \equiv T^\varrho_{\nu\sigma} \tag{6.2.4}$$

$$g^{\mu\nu} S^\varrho_{\mu\sigma} \equiv T^{\nu\varrho}_\sigma \tag{6.2.5}$$

6.3 Densità tensoriali

Definiamo in questo paragrafo il concetto di densità tensoriali.
Precisiamo che la legge di trasformazione di un tensore non è banale e non tutte le quantità si trasformano come dei tensori.
Ad esempio il determinante g del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ si trasforma secondo le regole del calcolo integrale come:

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g \tag{6.3.1}$$

dove $\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$ è l'inverso dello Jacobiano della trasformazione $x' \to x$.
Si può vedere ciò prendendo il determinante del tensore metrico trasformato $g'_{\mu\nu}$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\mu} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'\nu} \tag{6.3.2}$$

Chiamiamo *densità scalari* le quantità che si trasformano come uno scalare eccetto che per un fattore extra dello Jacobiano.
Chiamo *densità tensoriali* le quantità che si trasformano come dei tensori eccetto che per un fattore extra dello Jacobiano.
Dato lo Jacobiano della trasformazione $x \to x'$,che indichiamo con $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$, ed una densità tensoriale chiamiamo *peso W* il numero di fattori extra dello Jacobiano $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^W$ presenti nella legge di trasformazione.
Ad esempio g ha peso -2.

Vediamo che qualsiasi densità tensoriale di peso W può essere espressa come un tensore ordinario moltiplicandolo per un fattore $g^{W/2}$.
Infatti se T^μ_ν è un densità tensoriale questa si trasforma secondo la regola appena definita come:

$$T'^\mu_\nu = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^W \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} T^\lambda_\kappa \tag{6.3.3}$$

Moltiplicando per il fattore $g^{W/2}$ ed utilizzando la 6.3.2 vediamo che:

$$g'^{W/2} T'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} g^{W/2} T^\lambda_\kappa \tag{6.3.4}$$

In particolare l'elemento di volume $\sqrt{g} d^4x$ è invariante.

6.4 La Connessione affine

L'operazione di derivazione di un tensore non dà come risultato,in generale, un altro tensore.

Per un tensore controvariante V^μ la legge di trasformazione è:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \tag{6.4.1}$$

Differenziamo rispetto a x'^λ e otteniamo:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\varrho}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\lambda} V^\nu \tag{6.4.2}$$

Il primo termine è quello che ci aspetteremmo se $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda}$ fosse un tensore ,il secondo termine è quello che distrugge il comportamento tensoriale.

Per correggere questo termine definiamo la quantità non tensoriale **connessione affine**.

Connessione affine: Definiamo connessione affine il non-tensore $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ come:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv= \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{6.4.3}$$

dove $\xi^\alpha(x)$ è un sistema di coordinate localmente inerziale.
Γ viene chiamato anche *Simbolo di Christoffel*.

Passando da un sistema di coordinate x^μ a x'^ν troviamo che la legge di trasformazione per Γ è :

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\varrho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\varrho_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\varrho}\frac{\partial^2 x^\varrho}{\partial x'^\mu x'^\nu} \tag{6.4.4}$$

Dimostrazione Legge di Trasformazione Γ: Giustifichiamo la 6.4.4 attraverso i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} &\equiv \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} && \text{(6.4.5a)}\\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\varrho}\frac{\partial x^\varrho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\right) && \text{(6.4.5b)}\\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\varrho}\frac{\partial x^\varrho}{\partial \xi^\alpha}\left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\right] && \text{(6.4.5c)}\\
& && \text{(6.4.5d)}
\end{aligned}$$

Segue immediatamente dalla 6.4.3 la 6.4.4.■

L'analisi tensoriale permette di trovare una relazione tra $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$, per fare ciò definiamo dapprima la quantità:

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right] \tag{6.4.6}$$

segue che la trasformazione di questa quantità è simile a quella del simbolo Γ:

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}' = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\varrho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} \begin{Bmatrix} \varrho \\ \tau\sigma \end{Bmatrix} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\varrho} \frac{\partial^2 x^\varrho}{\partial x'^\mu \partial x' \nu} \tag{6.4.7}$$

Sottraendo la 6.4.7 dalla 6.4.4 otteniamo:

$$\left[\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \right]' = \frac{x'^\lambda}{x^\varrho} \frac{x^\tau}{x'^\mu} \frac{x^\sigma}{x'^\nu} \left[\Gamma^\varrho_\tau - \begin{Bmatrix} \varrho \\ \tau\sigma \end{Bmatrix} \right] \tag{6.4.8}$$

Il principio di equivalenza ci assicura che in un sistema di riferimento in cui la gravità è assente e quindi localmente inerziale non vi può essere forza gravitazione e quindi $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ si annulla , così come le derivate prima di $g_{\mu\nu}$ in quanto è assente il red shift tra punti separati infinitesimamente.
Questo significa che la quantità in 6.4.8 è nulla non solo nel sistema di coordinate inerziale ma , essendo invariante anche in tutti gli altri sistemi, da ciò segue che:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \tag{6.4.9}$$

L'equazione del moto per una particella in caduta libera
Forniamo un esempio che utilizzi il Principio di Covarianza Generale per dimostrare che una particella in caduta libera obbedisce l'equazione del moto:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{6.4.10}$$

dove :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{6.4.11}$$

Questa equazione è infatti valida in assenza di gravità , infatti ponendo $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$ e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ abbiamo:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{6.4.12}$$

Queste equazioni sono valide in Relatività Ristretta.
Adesso dimostrando che la 6.4.10 è in realtà una quantità covariante sfrutteremo il

Principio di Covarianza Generale il quale ci assicura che se essa è vera nel sistema di coordinate localmente inerziali allora è vera in un sistema di coordinate generale e quindi in un campo gravitazionale generale.
Vediamo che la 6.4.10 è covariante:

$$\frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{6.4.13}$$

Mentre scrivendo in una forma alternativa la 6.4.4:

$$\Gamma'^\mu_{\sigma\tau}\frac{dx'^\sigma}{d\tau}\frac{dx'^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\varrho}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\varrho}{d\tau} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{6.4.14}$$

Vediamo dunque che la 6.4.10 si trasforma secondo la seguente regola:

$$\frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} + \Gamma'^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}(\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\sigma\varrho}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\varrho}{d\tau}) \tag{6.4.15}$$

Tale relazione è evidentemente scritta in forma covariante.

6.5 Derivata Covariante

Abbiamo visto che secondo l'equazione 6.4.2 , in generale, la derivata di un vettore controvariante non è un tensore.
Giustifichiamo l'introduzione del termine di connessione affine Γ sottolineando come esso cancelli il termine inomogeneo della 6.4.2.
Utilizziamo la regola di trasformazione di $\Gamma^\mu_{\lambda\kappa}$ e $\frac{\partial V'^\kappa}{\partial x^\lambda}$ per costruire il tensore:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma'^\mu_{\lambda\kappa}V'^\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\varrho} + \Gamma^\nu_{\varrho\sigma}V^\sigma\right) \tag{6.5.1}$$

Questo tensore si trasforma bene dunque per cambio di coordinate $x \to x'$.

Questo ci porta a definire un nuovo operatore che chiamiamo **derivata covariante**:

$$V^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}V^\kappa \tag{6.5.2}$$

che è immediato verificare si trasforma effettivamente come un tensore :

$$V'^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\lambda}V^\nu_{;\varrho} \tag{6.5.3}$$

Dimostrazione Utilizziamo la legge di trasformazione per $\Gamma^\mu_{\lambda\kappa}$:

$$\Gamma'^\mu_{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}\Gamma^\nu_{\varrho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\varrho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\varrho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \tag{6.5.4}$$

Da questo segue che :

$$\Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa}V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\varrho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}}\Gamma^{\nu}_{\varrho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\varrho}\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\varrho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}}\frac{\partial x'\kappa}{\partial x^{\eta}}V^{\eta} \tag{6.5.5a}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{x^{\varrho}}{x'^{\lambda}}\Gamma^{\nu}_{\varrho\sigma}V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\varrho}x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\varrho}}{\partial x'^{\lambda}}V^{\sigma} \tag{6.5.5b}$$

Addizionando la 6.5.5b con la 6.4.2 troviamo la 34.■

In maniera analoga definiamo la derivata covariante di un vettore covariante:

$$V_{\mu;\lambda} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V_{\lambda} \tag{6.5.6}$$

La regola di derivata covariante si estende in modo naturale per un tensore di ordine generale,ogni indice in alto comporta un termine Γ in più con segno positivo mentre ogni indice in basso comporta un termine Γ in più con segno negativo:

$$T^{\mu\sigma}_{\lambda;\varrho} = \frac{\partial T^{\mu\sigma}_{\lambda}}{\partial \varrho} + \Gamma^{\mu}_{\varrho\nu}T^{\nu\sigma}_{\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\varrho\nu}T^{\mu\nu}_{\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\varrho}T^{\mu\sigma}_{\kappa} \tag{6.5.7}$$

Giustifichiamo la formula 5.0.6 con le seguenti argomentazioni.
Sappiamo che il campo vettoriale x^{μ} determina una congruenza locale di curve tramite il parametro τ:

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\tau) \tag{6.5.8}$$

ed è possibile individuare campo vettoriale tangente alla congruenza U^{μ} :

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \tag{6.5.9}$$

Poniamoci il problema di effettuare la derivata covariante di un tensore qualunque $T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ rispetto a U^{μ}.
Per fare ciò introduciamo la notazione:

$$T^{\alpha\dots}_{\beta\dots;U} = U^{\mu}T^{\alpha\dots}_{\beta\dots;\mu} \tag{6.5.10}$$

e definiamo la derivata assoluta di $T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ lungo una curva della congruenza come:

$$\frac{D}{D\tau}T^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = T^{\alpha\dots.}_{\beta\dots;U} \tag{6.5.11}$$

A questo punto diremo che il tensore $T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ è propagato parallelamente se:

$$\frac{D}{D\tau}T^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = 0 \tag{6.5.12}$$

. Usando quesa notazione una **geodetica** è definita come una curva privilegiata lungo il quale il vettore tangente viene trasportato parallelo a se stesso ossia:

$$\frac{D}{D\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \lambda(\tau)\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{6.5.13}$$

Applichiamo tale notazione al casa in cui U^μ è la velocità della particella e $x^\mu(\tau)$ posizione della particella lungo una curva.
Per λ=0 dalla 6.5.13 otteniamo:

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = 0 \tag{6.5.14}$$

che si riduce tramite la 6.5.11 e la 6.5.10 alla:

$$U^\nu U^\mu_{;\nu} = 0 \tag{6.5.15}$$

evidentemente equivalente alla 6.4.10.

6.6 Operazioni elementari con derivate covariante dei tensori

In maniera analoga a quanto studiato per i tensori , la derivata covariante di un tensore gode di alcune operazioni lecite:

Linearità: La derivata covariante della combinazione lineare di due tensori è la somma della derivata covariante dei singoli tensori:

$$(\alpha A^\mu_\nu + \beta B^\mu_\nu)_{;\lambda} = \alpha A^\mu_{\nu;\lambda} + \beta B^\mu_{\nu;\lambda} \tag{6.6.1}$$

Regola Leibniz derivata covariante: La derivata covariante del prodotto di tensori obbedisce l'usuale regola di Leibnizi per le derivate:

$$(A^\mu_\nu B^\lambda)_{;\varrho} = A^\mu_{\nu;\varrho} B^\lambda + A^{\mu\nu} B^\lambda_{;\varrho} \tag{6.6.2}$$

Contrazione: La derivata covariante di un tensore contratto è la contrazione della derivata covariante:

$$T^{\mu\lambda}_{\lambda;\varrho} = \frac{\partial}{\partial x^\varrho} T^{\mu\lambda}_\lambda + \Gamma^\mu_{\varrho\nu} T^{\nu\lambda}_\lambda \tag{6.6.3}$$

L'introduzione generale sulla derivata covariante giustifica le operazioni citate nel principio di covarianza generale che permettono di passare dalla Relatività Ristretta a quella Generale.

6.7 Derivata Covariante:Gradiente, Rotore e Divergenza

Di seguito vengono elencati le operazioni che possono essere utilizzate con la derivata covariante riprendendo la struttura della derivata ordinaria per la quale abbiamo operatori di:Gradiente ,Rotore e Divergenza.
La più semplice operazione che si può effettuare con la derivata covariante è la derivazione di uno scalare per la quale il gradiente assume la forma di un gradiente ordinario. Dato uno scalare S avremo che:

$$S_{;\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \tag{6.7.1}$$

Analizziamo il caso dell'operatore **rotore**.
rotore covariante : Il rotore di un vettore covariante V_μ è semplicemente il rotore ordinario:

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} \tag{6.7.2}$$

Infatti ricordiamo che la derivata covariante di un vettore covariante è :

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda \tag{6.7.3}$$

Il termine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ è simmetrico in μ e ν dunque nella differenza presente nel gradiente si semplifica.

Una prima operazione non banale è la divergenza covariante di un vettore controvariante.
Divergenza Covariante :La derivata covariante di un vettore controvariante V_μ è:

$$V^\mu_{;\mu} \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{6.7.4}$$

Notiamo che $\Gamma^\mu_{\mu\lambda}$è dato dalla 6.4.9 :

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\lambda \end{Bmatrix} \tag{6.7.5a}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\varrho} \left\{ \frac{\partial g_{\varrho\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\varrho\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\varrho} \right\} \tag{6.7.5b}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\varrho} \frac{\partial g_{\varrho\mu}}{\partial x^\lambda} \tag{6.7.5c}$$

Per valutare il termine presente nella 6.7.5c ricordiamo che per una matrice arbitraria M:

$$Tr\left\{ M^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial} x^\lambda M(x) \right\} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} lnDetM(x) \tag{6.7.6}$$

Dove Det indica il determinante e Tr la traccia.
Dunque è possibile scrivere le 6.7.5c come:

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} ln\ g = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\sqrt{g} \tag{6.7.7}$$

g indica il determinante di $g_{\mu\nu}$.
Dunque la divergenza covariante 6.7.4 diventa:

$$V^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{g}V^{\mu}\right) \tag{6.7.8}$$

Concludiamo fornendo un esempio di divergenza covariante per un tensore $T^{\mu\nu}$. Scriviamo,ricordando la 6.5.7 e la 6.7.4:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} \equiv \ + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda} \tag{6.7.9a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{g}T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda} \tag{6.7.9b}$$

Bibliografia

1. Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology*
2. Ray d'Inverno, *Introduzione alla Relatività di Einstein*
3. Vincenzo Barone, *Relatività.Principi e applicazioni*