

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

APPROCCIO GEOMETRICO ALLE TEORIE DI GAUGE

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Kevin De Notariis

Anno Accademico 2016/2017

*Dedicato a tutta la mia famiglia
agli amici,
ed alla mia compagna.*

Abstract

In questa tesi verranno presentate le teorie di gauge prima nel senso classico e poi in forma geometrica. Nel primo capitolo verrà discussa la forma generale di una teoria di gauge e successivamente verranno esposte le principali realizzazioni di queste, ossia l'elettromagnetismo ($U(1)$ -teoria di gauge abeliana) e la teoria dell'isospin protone-neutrone ($SU(2)$ -teoria di gauge non-abeliana). Alla fine di questo primo capitolo verranno presentati gli istantoni relativi all'azione di Yang-Mills. Nella seconda parte verranno esplicitati i concetti base della geometria differenziale: varietà, strutture tangenti (cotangenti), campi vettoriali, tensori e k-forme. Strada facendo, verranno mostrate anche le connessioni con la fisica di questi oggetti ed in conclusione verranno esposte le equazioni di Maxwell in forma geometrica. Il terzo capitolo è dedicato alla teoria dei fibrati e delle connessioni, con la costruzione dei fibrati relativi al monopolo magnetico ed agli istantoni. Verrà inoltre mostrato come una teoria di gauge può essere espressa nel formalismo dei fibrati con connessione.

Indice

1	Teorie di gauge	7
1.1	Generalità di una teoria di gauge	7
1.2	Teorie di gauge abeliane - Elettromagnetismo	10
1.2.1	Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell	11
1.2.2	Invarianza di gauge dell'elettromagnetismo	13
1.2.3	Teoria elettromagnetica come teoria di gauge	15
1.2.4	Argomentazione ribaltata: Il principio di gauge	16
1.2.5	Lagrangiana completa di una particella in un campo elettromagnetico - Lagrangiana dell'elettrodinamica	17
1.3	Teorie di gauge non-abeliane	20
1.3.1	SU(2)-Teoria di gauge - Isospin	20
1.3.2	Soluzioni dell'azione di Yang-Mills - Istantoni	22
2	Varietà Differenziabili	26
2.1	Varietà	26
2.1.1	Sfera n-dimensionale	28
2.1.2	Matrici complesse unitarie unidimensionali - U(1)	30
2.1.3	Matrici unitarie 2×2 speciali - SU(2)	30
2.2	Struttura tangente	31
2.2.1	Spazio tangente	31
2.2.2	Spazio cotangente	35
2.2.3	Fibrato tangente e cotangente	36
2.2.4	Campi vettoriali	37
2.2.5	1-forme	42
2.3	Tensori e k-forme	43
2.3.1	Tensori	43
2.3.2	k-forme	45
2.3.3	Equazioni di Maxwell in forma differenziale	49
3	Fibrati e Connessioni	51
3.1	Fibrati	51
3.1.1	Fibrati generali	51
3.1.2	Fibrati vettoriali	54
3.1.3	Fibrati principali	56
3.1.4	Fibrati associati	64
3.2	Connessioni	65
3.2.1	Sottospazi orizzontali	65
3.2.2	Connessione 1-forma	67
3.2.3	Curvatura	69
3.2.4	Trasporto parallelo	71
3.3	Geometria delle teorie di gauge	73
3.3.1	Geometria della U(1)-teoria di gauge	73
3.3.2	Geometria del monopolo magnetico	74
3.3.3	Geometria degli istantoni	75

A	Gruppi e Algebre di Lie	77
A.1	Gruppi di Lie	77
A.2	Algebra di Lie di un gruppo di Lie	78
A.3	Rappresentazioni lineari di algebre di Lie e gruppi di Lie	78
	A.3.1 Rappresentazioni di algebre di Lie	78
	A.3.2 Rappresentazioni dei gruppi di Lie	79
A.4	Mappa esponenziale	80
B	Omotopia	81
B.1	Gruppo fondamentale	81
B.2	Gruppi di omotopia superiori	82

Introduzione

In fisica, la descrizione matematica di un fenomeno, in genere contiene dei gradi di libertà in eccesso; la stessa situazione risulta, dunque, egualmente descritta da molte configurazioni matematiche equivalenti. Le trasformazioni che portano sistemi in corrispondenti stati eguali, si chiamano trasformazioni di simmetria e formano un gruppo di simmetria della teoria. Hermann Weyl, nel tentativo di unificare la relatività generale e l'elettromagnetismo, congetturò che l'invarianza sotto un cambiamento di scala poteva essere una simmetria locale della relatività generale. Dopo lo sviluppo della meccanica quantistica, però, Weyl, Fock e London modificarono questa congettura sostituendo il fattore di scala con un numero complesso e fecero diventare la trasformazione di scala una trasformazione di fase, che è una $\mathbf{U}(1)$ simmetria di gauge. Questo spiegò l'effetto che un campo elettromagnetico aveva sulla funzione d'onda di una particella carica e fu la prima, vera, riconosciuta teoria di gauge. Da quel momento, si svilupparono tutte le teorie di gauge che possiamo apprezzare ai giorni nostri. In particolare, con le teorie di gauge non-abeliane introdotte da Yang e Mills nel 1954, si aprì ai fisici una nuova finestra per descrivere le interazioni fisiche oggi rappresentate dal Modello Standard. Lo sviluppo di queste teorie, però, non si incontrò subito con la struttura che si stava venendo a definire dei fibrati. Questo apparato matematico venne introdotto per formulare e risolvere problemi di topologia di carattere globale. Queste due teorie viaggiarono di pari passo per abbastanza tempo, ed il grande sviluppo delle teorie di gauge avvenuto in assenza di questo formalismo matematico, fa sì che in genere non venga fatto nessun riferimento a fibrati quando si parla di queste teorie. Nonostante ciò, esplorare la rilevanza dei fibrati nelle teorie di gauge, si è dimostrato essere veramente utile per capire alcuni degli aspetti più sottili che si presentavano.

Svilupperemo quindi, prima di tutto, le teorie di gauge in senso classico, ossia senza considerazioni geometriche. Successivamente andremo a considerare il contesto della geometria differenziale. Questa branca della matematica si è rivelata essere essenziale per una ben definita descrizione dei fenomeni fisici. La meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana operano in modo naturale sugli oggetti definiti dalla geometria differenziale. Lo spazio-tempo in relatività generale è da considerarsi come una varietà Riemanniana, dove è dunque definito un campo tensoriale metrico. Masse rappresentate da un tensore energia-impulso deformano lo spazio-tempo, nel senso che ne cambiano la metrica e dunque alterano il modo in cui altre masse si muovono quando sono poste in questa regione di spazio. Ciò di cui ci occuperemo noi, sarà quello di dare una struttura matematica formale ai monopoli magnetici e agli istantoni, e vedremo inoltre una formulazione del tutto geometrica delle equazioni di Maxwell. I monopoli magnetici furono per la prima volta ipotizzati da Dirac, che li descrisse considerando il campo magnetico generato da un monopolo fisso. Utilizzando le equazioni di Maxwell e con considerazioni sulla forma che doveva avere il potenziale vettore, arrivò alla sua famosa condizione di quantizzazione della carica magnetica. Se un monopolo dovesse esistere in natura, allora la carica magnetica sarebbe quantizzata ed allo stesso modo quella elettrica. In un primo momento [1] sembrava che fosse stato individuato un tale monopolo magnetico, ma successivamente, in [2] venne dimostrato come non fosse possibile un tale avvenimento. Ad oggi non vi sono ancora prove sperimentali certe dell'esistenza di monopoli in natura; sono stati però, prodotti in laboratorio utilizzando un campo magnetico sintetico prodotto da un condensato di Bose-Einstein [3]. La descrizione matematica di questi oggetti, vedremo

essere data da un fibrato principale non banale, ossia topologicamente diverso dallo spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Mostremo anche come gli istantoni, che sono soluzioni di campo che minimizzano l'azione finita di Yang-Mills, possono essere visti anch'essi considerando un fibrato sul quale agisce il gruppo di isospin $\mathbf{SU}(2)$. Oltre alla descrizione geometrica di questi due oggetti fisici, il percorso che seguiremo, ci porterà ad identificare le teorie di gauge con la teoria dei fibrati principali e, sia la teoria di Maxwell che la teoria di Yang-Mills, verranno ri-affrontate utilizzando concetti geometrici. Vedremo come ogni elemento di una teoria di gauge classica abbia un naturale corrispettivo nella teoria dei fibrati principali in cui è definita una connessione.

Capitolo 1

Teorie di gauge

Le teorie di campo di gauge sono per prime apparse nella formulazione di Maxwell dell'elettromagnetismo. La teoria di Maxwell è infatti la prima teoria in cui appare il concetto di campo ed il concetto di invarianza di gauge. Nei primi tempi le simmetrie di questa teoria non erano chiare agli scienziati, essa infatti conteneva due importanti simmetrie: invarianza di Lorentz e simmetria di gauge. Fu necessaria la formulazione della teoria della relatività speciale per riconoscere l'invarianza di Lorentz nella formulazione di Maxwell e la relatività generale, insieme alla meccanica quantistica, per far emergere la simmetria di gauge. Quando infatti si considera la Lagrangiana di Dirac di una particella carica accoppiata ad un campo elettromagnetico, questa sarà invariante per trasformazioni di gauge del potenziale elettromagnetico, accoppiata con una appropriata trasformazione di fase della funzione d'onda del campo di Dirac della particella. Queste simmetrie di gauge all'inizio venivano considerate solo una ulteriore complicazione e difficoltà tecnica che andava maneggiata con cautela, in quanto queste simmetrie non erano reali simmetrie della natura. Bisogna infatti distinguere tra simmetrie di gauge (o locali) e globali. Le simmetrie globali, infatti, danno luogo (teorema di Noether) a quantità conservate, chiamate correnti di Noether, le quali integrate danno luogo a delle cariche. Le simmetrie di gauge locali, invece, producono infinite correnti conservate ma danno luogo a cariche identicamente nulle [4]. Associata ad una simmetria locale, dunque, non vi è nessuna nuova simmetria della natura, ma piuttosto queste simmetrie restringono la forma dell'azione e dunque dettano l'aspetto delle interazioni.

Le teorie di gauge sono, ad oggi, le più soddisfacenti teorie che vengono usate per descrivere la fisica delle particelle elementari. In particolare, descrivono in maniera accurata le interazioni elettro-deboli e forti e sono alla base della costruzione del modello standard. Quest'ultimo si può ritenere il maggior successo intellettuale raggiunto dalla fisica del ventesimo secolo, infatti, descrive i fondamentali costituenti della materia e le relative forze che ne governano la dinamica.

1.1 Generalità di una teoria di gauge

Seguendo le linee di [5], le teorie di gauge coinvolgono due tipi di campi: campi di gauge (o potenziali di gauge) e campi di materia. I campi di gauge, per esempio, in fisica delle particelle rappresentano i bosoni che mediano le interazioni date dalle forze fondamentali. Un esempio è il fotone, il bosone che media le interazioni elettromagnetiche, mentre i W^+ , W^- e Z^0 sono i mediatori delle interazioni deboli ed infine i gluoni (ve ne sono 8 differenti) sono i mediatori dell'interazione forte. I campi di materia, invece, rappresentano le particelle che interagiscono attraverso i campi di gauge. Questi sono per esempio il campo elettronico, protonico, ecc.

Possiamo in generale riconoscere i seguenti elementi in una teoria di gauge:

1. Uno spazio dei parametri \mathcal{X} , il quale in genere sarà una varietà differenziabile liscia (vedi capitolo 2), spesso sottoinsieme di \mathbb{R}^3 o dello spazio di Minkowski \mathcal{M}^4 . Le coordinate di un elemento $x \in \mathcal{X}$ saranno denotate x^i con $i = 1, 2, \dots, \dim(\mathcal{X})$.
2. Il gruppo di gauge \mathbf{G} , che definisce localmente tutte le trasformazioni di gauge. Queste trasformazioni formano un gruppo infinito-dimensionale chiamato *gruppo delle trasformazioni di gauge*. Localmente, ossia in un aperto U_α dello spazio dei parametri \mathcal{X} , le trasformazioni di gauge sono delle funzioni che associano ad ogni elemento dell'aperto un elemento del gruppo di gauge \mathbf{G} . Il gruppo delle trasformazioni di gauge ha carattere globale, ma localmente si può identificare come prodotto cartesiano di copie di \mathbf{G} labellate da un parametro $x \in U_\alpha$:

$$\mathbf{G}_{U_\alpha} \equiv \prod_{x \in U_\alpha} \mathbf{G}_x$$

Questo è un prodotto cartesiano di infiniti elementi, infatti il parametro x è un parametro continuo. Si può definire questa operazione in modo più formale come:

$$\prod_{x \in U_\alpha} \mathbf{G}_x := \left\{ f : U_\alpha \rightarrow \prod_{x \in U_\alpha} \mathbf{G}_x \mid \forall x \in U_\alpha : f(x) \in \mathbf{G}_x \right\} \quad (1.1.1)$$

Ma non ci preoccuperemo troppo di questa formalizzazione.

3. Campi di materia, i quali sono rappresentati da una collezione

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix}$$

di funzioni lisce $\psi^i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ e che si trasformano secondo una rappresentazione n -dimensionale unitaria del gruppo di gauge \mathbf{G} (per la definizione di rappresentazione e approfondimenti vedere [7]):

$$U : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{U}(n) \\ g \mapsto U(g)$$

in modo che si ha:

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = U(g(x))\psi(x) \quad (1.1.2)$$

ed in termini di componenti (in notazione di Einstein), $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\psi'^i(x) = U_j^i(g(x))\psi^j(x) \quad (1.1.3)$$

4. Campo di gauge o potenziale di gauge, le quali componenti $A_i^{(g)}(x) = (A_i^{nm}(x))$ sono delle matrici Hermitiane $n \times n$ ed è postulato che trasformino secondo la trasformazione (1.1.2) come:

$$A_i'^{(g)}(x) = U(g(x)) \cdot A_i^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) + \frac{i}{g} (\partial_i U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))) \quad (1.1.4)$$

Inoltre, sotto un cambio di coordinate nello spazio dei parametri \mathcal{X} , $A_i^{(g)}$ si trasforma come le componenti di un vettore covariante (covettore) e dunque possiamo definire una 1-forma a valore nel gruppo delle matrici Hermitiane:

$$A^{(g)} = A_i^{(g)}(x) dx^i \quad (1.1.5)$$

In termini di questa 1-forma, la legge di trasformazione (1.1.4) prende la forma:

$$A'^{(g)}(x) = U(g(x)) \cdot A^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) + \frac{i}{g} (dU(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))) \quad (1.1.6)$$

Nella legge di trasformazione del potenziale di gauge che abbiamo postulato, compare una costante g , la quale ha le dimensioni $\dim(g) = (\dim(x) \cdot \dim(A^{(g)}))^{-1}$. Questa serve, appunto, per aggiustare le dimensioni della seconda parte delle (1.1.2) e (1.1.4) e viene chiamata *Costante di accoppiamento* della teoria di gauge.

Utilizzando il potenziale di gauge, si definisce la *derivata covariante di gauge* come:

$$D_i = \partial_i + igA_i^{(g)}(x) \quad (1.1.7)$$

Si può vedere, utilizzando (1.1.4), come si trasforma:

$$\begin{aligned} D'_i &= \partial_i + igA_i'^{(g)}(x) = \\ &= \partial_i + ig[U(g(x)) \cdot A_i^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) + \frac{i}{g}(\partial_i U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x)))] = \\ &= \partial_i + igU(g(x)) \cdot A_i^{(g)} \cdot U^{-1}(g(x)) - \partial_i U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x)) = \\ &= U(g(x)) \cdot \partial_i U^{-1}(g(x)) + igU(g(x)) \cdot A_i^{(g)} \cdot U^{-1}(g(x)) = \\ &= U(g(x)) \cdot [\partial_i + igA_i^{(g)}] \cdot U^{-1}(g(x)) = \\ &= U(g(x)) \cdot D_i \cdot U^{-1}(g(x)) \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

dove nella terzultima uguaglianza si è fatto uso della regola di Leibnitz: $\partial_i \equiv \partial_i(U \cdot U^{-1}) = \partial_i U \cdot U^{-1} + U \cdot \partial_i U^{-1}$.

Inoltre se applichiamo la derivata covariante ad un campo di materia ψ e vediamo come si trasforma il tutto, scopriamo che $D_i \psi$ e ψ trasformano nella stessa maniera:

$$\begin{aligned} D_i \psi &\rightarrow D'_i \psi' = U(g(x)) \cdot D_i \cdot U^{-1}(g(x))(U(g(x))\psi) = \\ &= U(g(x))D_i \psi \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Abbiamo quindi introdotto il potenziale di gauge e la derivata covariante di gauge, per avere una derivata che si trasformasse come il campo di materia.

Un altro elemento che si può definire utilizzando il potenziale di gauge è il *tensore di campo di forza di gauge*:

$$F_{ij}^{(g)} := \frac{1}{ig}[D_i, D_j] = \partial_i A_j^{(g)} - \partial_j A_i^{(g)} + ig[A_i^{(g)}, A_j^{(g)}] \quad (1.1.10)$$

dove le parentesi quadre indicano il commutatore di matrici $n \times n$, ossia $\forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})^1$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$):

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \rightarrow [A, B]^{ik} = A^{ij} B^{jk} - B^{ij} A^{jk} \quad (1.1.11)$$

Se consideriamo ora la trasformazione (1.1.4), si avrà che il tensore di campo di forza di gauge si trasformerà nel seguente modo:

$$F_{ij}'^{(g)}(x) = \frac{1}{ig}[D'_i, D'_j] = U(g(x)) \cdot F_{ij}^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) \quad (1.1.12)$$

Ciò significa che per teorie di gauge non-abeliane, il tensore di campo di forza è gauge-covariante e non gauge-invariante. Per spiegare questa affermazione ci rifacciamo alla seguente osservazione finale:

Osservazione 1.

Prima di tutto ricordiamo che un gruppo $\mathbf{G} = (G, \circ)$ dove G è un generico insieme e $\circ : G \times G \rightarrow G$ è l'operazione di composizione che soddisfa le tre condizioni della definizione di gruppo (associatività, esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'inverso per ogni elemento) è detto *Abeliano* se $\forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ si ha che $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

¹Dove formalmente $M_{n \times n}(\mathbb{K}) := \{A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}\}$ ossia l'insieme delle matrici $n \times n$ con entrate valori appartenenti al campo \mathbb{K} .

Una teoria di gauge è detta *Abeliana* se il gruppo di gauge è un gruppo Abeliano. Se dunque $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ è una rappresentazione del gruppo abeliano \mathbf{G} nello spazio vettoriale V , allora avremo che $\forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}$:

$$\rho(g_1) \cdot \rho(g_2) = \rho(g_2) \cdot \rho(g_1) \quad (1.1.13)$$

Che si dimostra facilmente considerando:

$$\rho(g_1) \cdot \rho(g_2) \stackrel{(1)}{=} \rho(g_1 \circ g_2) \stackrel{(2)}{=} \rho(g_2 \circ g_1) \stackrel{(3)}{=} \rho(g_2) \cdot \rho(g_1)$$

Dove in (1) e (3) si è fatto uso della definizione di rappresentazione, mentre in (2) del fatto che il gruppo \mathbf{G} è abeliano.

Riprendendo allora (1.1.4), questa per un gruppo di gauge abeliano diventerà semplicemente:

$$A_i^{(g)}(x) = A_i^{(g)}(x) + \frac{i}{g}(\partial_i U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))) \quad (1.1.14)$$

In quanto:

$$U(g(x)) \cdot A_i^{(g)}(x) \cdot U^{-1}(g(x)) = A_i^{(g)}(x) \cdot [U(g(x)) \cdot U^{-1}(g(x))] = A_i^{(g)}(x)$$

Nelle teorie di gauge abeliane, il tensore di campo di forza è definito come:

$$F_{ij}^{(g)} = \frac{1}{ig}(\partial_i A_j^{(g)} - \partial_j A_i^{(g)}) \quad (1.1.15)$$

Esso è invariante per trasformazioni di gauge del tipo (1.1.4) e dunque si usa per costruire l'azione.

Nelle teorie non-abeliane, invece, il tensore di campo (1.1.10) non è, secondo (1.1.12), gauge invariante e dunque si usa la sua traccia per costruire un'azione invariante.

Distingueremo, allora, la Lagrangiana per una teoria di gauge abeliana:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.1.16)$$

(Dove EM sta per elettromagnetica, in quanto la formulazione covariante dell'elettromagnetismo è la principale applicazione delle teorie di gauge abeliane) e la Lagrangiana per una teoria di gauge non-abeliana:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \quad (1.1.17)$$

(Dove Tr è la traccia e YM sta per Yang-Mills).

La Lagrangiana per una teoria di gauge non-abeliana è chiamata di Yang-Mills perchè nei primi del 1954, *Chen Ning Yang* e *Robert Mills* estesero il concetto di teoria di gauge per gruppi abeliani ai gruppi non-abeliani per fornire una spiegazione formale dell'interazione forte [4]. Essa è infatti descritta da una $SU(3)$ -teoria di gauge ed è chiamata *Cromodinamica quantistica* (Quantum Chromodynamics o QCD). Questa estensione a gruppi non-abeliani permise anche di unificare l'interazione debole con la teoria elettromagnetica, diventando un'unica teoria chiamata *elettrodebole*. Quest'ultima è una $SU(2) \times U(1)$ teoria di gauge, in cui il gruppo non-abeliano $SU(2)$ descrive l'interazione debole e il gruppo abeliano $U(1)$ descrive l'interazione elettromagnetica. Il *Modello Standard* non è altro che una $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -teoria di gauge.

1.2 Teorie di gauge abeliane - Elettromagnetismo

La teoria di Maxwell ci fornisce una buona visione di ciò che è l'elettromagnetismo nel suo complesso, le sue equazioni descrivono infatti completamente tutti i fenomeni elettrici e magnetici, ossia come distribuzioni di cariche e correnti generino campi elettrici e magnetici, e come questi siano legati quando se ne considera la dinamica. Le sue equazioni

furono di fondamentale importanza per scoprire l'esistenza di onde elettromagnetiche (un'equazione d'onda di d'Alembert è infatti celata all'interno delle stesse) e quindi la natura elettromagnetica della luce. Questa unificazione della forza elettrica con quella magnetica ha portato a capire che questi ultimi non sono altro che due manifestazioni dello stesso campo, il campo *elettromagnetico*.

Come abbiamo già notato, però, agli arbori della formulazione di Maxwell non erano note due proprietà che questa formulazione presentava, ossia *l'invarianza di Lorentz* e *la simmetria di gauge*. Vediamo a questo punto come viene fuori questa simmetria e ciò che comporta.

1.2.1 Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell

Prima di tutto ricordiamo le equazioni di Maxwell che descrivono la dinamica dei campi elettrici e magnetici nel vuoto in presenza di una densità di cariche elettriche ρ ed di una densità di corrente \vec{J} , in unità Gaussiane [6]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (1.2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.2.4)$$

Nel contesto della relatività speciale siamo in presenza di uno *spazio di Minkowski* \mathcal{M}^4 , i cui punti x^μ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$), corrispondono ad eventi nello spazio-tempo in cui la prima coordinata ($\mu = 0$) corrisponde al tempo e le altre tre alle coordinate spaziali:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (1.2.5)$$

(con c velocità della luce nel vuoto).

In questo spazio abbiamo una metrica, la *Metrica di Minkowski*, che ci permette di calcolare le "distanze" tra due eventi nello spazio-tempo:

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{M}^4 \times \mathcal{M}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^\mu, y^\nu) &\mapsto \eta(x^\mu, y^\nu) = -x^0 \cdot y^0 + x^1 \cdot y^1 + x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot y^3 \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Dal punto di vista matematico questo è un prodotto scalare generalizzato, in quanto soddisfa tutte le proprietà di un prodotto scalare ma non è definito positivo, è chiamata metrica perchè induce una norma che a sua volta induce una metrica, ossia un modo per misurare le distanze (fa diventare \mathcal{M}^4 uno spazio metrico). Se consideriamo gli elementi dello spazio-tempo come vettori colonna:

$$x = x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Allora possiamo pensare alla metrica come una matrice:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E avremo che l'azione della metrica su due elementi dello spazio-tempo non sarà altro che, con $x, y \in \mathcal{M}^4$:

$$\eta(x, y) = x \cdot \eta \cdot y^T = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu \stackrel{\text{Notazione di Einstein}}{=} x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu \quad (1.2.7)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è definito il covettore $y_\mu = \eta_{\mu\nu} y^\nu$ e si dice che la metrica ha abbassato l'indice. Chiaramente la (1.2.7) non è altro che una riformulazione della (1.2.6), nella quale però si sono introdotti dei tipi di vettori chiamati *covettori*. I covettori sono vettori nel senso che appartengono ad uno spazio vettoriale, ma si trasformano in modo covariante e sono da considerare più come applicazioni lineari che come vettori nel senso classico. Quanto appena detto si può capire considerando per $y \in \mathcal{M}^4$:

$$\begin{aligned} \eta_y : \mathcal{M}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \eta_y(x) := \eta(x, y) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Questa è dunque una applicazione lineare che possiamo rappresentare come:

$$\eta_y(x) = \eta(x, y) = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu \stackrel{2}{=} y^\nu \eta_{\mu\nu} x^\mu = y_\mu x^\mu = y_\mu(x^\mu) \quad (1.2.9)$$

Come si può notare possiamo pensare che y_μ agisca sull'evento x^μ come fosse una applicazione lineare che associa ad ogni elemento dello spazio di Minkowski la "distanza" con l'evento y^ν . Ad ogni modo per ora non ci preoccuperemo di questa puntualizzazione e penseremo all'ultima delle (1.2.7) come una semplice convenzione notazionale.

Nell'ambito dello spazio di Minkowski, possiamo definire un quadri-gradiente (covettore):

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.2.10)$$

che contratto con il suo corrispondente $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$, dove $\eta^{\mu\nu} = (\eta^{-1})^{\mu\nu}$ (l'inversa della metrica di Minkowski, si dice che alza l'indice e in forma matriciale è uguale a $\eta_{\mu\nu}$):

$$\partial_\mu \partial^\mu = -\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = -\partial_0^2 + \nabla^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 =: \square \quad (1.2.11)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo definito l'operatore 'box' o dalembertiano \square .

Tornando alle equazioni di Maxwell (1.2.1)-(1.2.2)-(1.2.3)-(1.2.4), possiamo introdurre il *quadri-potenziale* del campo elettromagnetico nel seguente modo:

1. Il campo magnetico \vec{B} è solenoidale, ossia vale la (1.2.2), possiamo allora definire il potenziale di \vec{B} come quel vettore \vec{A} che soddisfa:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (1.2.12)$$

in questo modo, dato che la divergenza di un rotore è sempre nulla (identità vettoriale), la (1.2.2) sarà sempre soddisfatta.

2. Se andiamo a sostituire la (1.2.12) nella (1.2.3), otterremo:

$$\vec{0} = \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (1.2.13)$$

Quest'ultima ci dice che il rotore di ciò che c'è fra parentesi è nullo, possiamo dunque introdurre un altro potenziale, il potenziale elettrico scalare ϕ che soddisfa:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (1.2.14)$$

dove il segno meno è stato messo per convenzione.

²Chiaramente x^μ , $\eta_{\mu\nu}$ e y^ν sono numeri e dunque il loro prodotto è commutativo e posso scambiare a piacimento i termini.

3. Avremo dunque le seguenti definizioni per i potenziali:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -c^{-1} \partial_t \vec{A} - \nabla \phi \end{cases} \quad (1.2.15)$$

Possiamo allora creare il quadri-potenziale A^μ definendolo come:

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (1.2.16)$$

Ora che abbiamo a disposizione A^μ possiamo utilizzarlo per creare il fondamentale *Tensore di Faraday* o *Tensore del campo elettromagnetico* $F_{\mu\nu}$ come:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.2.17)$$

Come si può notare, quest'ultima è precisamente della forma della (1.1.15) ed infatti il tensore di Faraday non sarà altro che il tensore di campo di forza di gauge. Riscriveremo le equazioni di Maxwell in forma covariante nel seguente modo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \quad (1.2.18)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (1.2.19)$$

dove $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$ e avrà componenti $\forall \mu, \nu : F_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$.

La (1.2.19) è identicamente soddisfatta e porterà al set di equazioni di Maxwell (1.2.2) e (1.2.3). Questo è dovuto al fatto che il tensore di Faraday è dato dalla (1.2.17) che è a sua volta definito grazie all'invarianza di gauge.

1.2.2 Invarianza di gauge dell'elettromagnetismo

Prendiamo una particella senza spin, non relativistica, soggetta ad un campo elettromagnetico, che si muove nello spazio euclideo 3-dimensionale. Nella rappresentazione di Schroedinger, la particella è descritta da una funzione d'onda $\psi = \psi(t, \vec{x})$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ e la sua dinamica è dettata dall'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H^{(el)} \psi \quad (1.2.20)$$

dove l'Hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad un campo elettromagnetico con quadri-potenziale $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ non è altro che:

$$H^{(el)} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right)^2 + e\phi \quad (1.2.21)$$

Considerando ora le definizioni dei potenziali (1.2.15), si può notare che i campi \vec{E} e \vec{B} rimangono inalterati se si trasformano ϕ e \vec{A} utilizzando una funzione scalare $\chi(t, \vec{x})$ nel seguente modo:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad (1.2.22)$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1.2.23)$$

Infatti, andando a sostituire i potenziali trasformati ϕ' e \vec{A}' nelle (1.2.15), si vede subito che:

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (1.2.24)$$

in quanto il rotore di un gradiente è sempre nullo ($\nabla \times (\nabla \chi) = 0$). Inoltre anche la seconda è facilmente verificata:

$$-\nabla \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad (1.2.25)$$

La (1.2.22) e (1.2.23) si possono compattare in una unica scrittura considerando il quadri-potenziale $A^\mu = (\phi, \vec{A})$:

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (1.2.26)$$

in quanto $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = (-\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Quando però andiamo a considerare l'Hamiltoniana (1.2.21), questa non rimane invariata sotto le trasformazioni (1.2.22) e (1.2.23). Chiaramente se queste trasformazioni devono descrivere la stessa fisica (infatti lo fanno, dato che \vec{E} e \vec{B} rimangono invariati) allora dovremmo ipotizzare che la funzione d'onda cambi anch'essa. L'equazione di Schroedinger non è dunque gauge invariante, ma dato che $\psi(t, \vec{x})$ non è osservabile direttamente, per fare sì che queste trasformazioni non cambino la forma dell'equazione, dovremmo trasformare la funzione d'onda nel seguente modo:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi \cdot e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})} \quad (1.2.27)$$

Chiaramente, essendo quest'ultima una trasformazione di fase, non influisce sull'osservabile $|\psi(t, \vec{x})|^2$ che rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella nel punto \vec{x} al tempo t . Il cambiamento di fase della funzione d'onda di una particella, però, può alle volte essere misurata, infatti nell'effetto di Aharanov-Bohm è proprio questa variazione di fase data dai possibili cammini attorno ad una regione in cui è presente un campo magnetico che fanno sì che si abbia uno shift delle frange di interferenza sul piano di osservazione (per un approfondimento di questo fenomeno, si fa riferimento a [5]). Si potrebbe però essere interessati anche ad altri osservabili che coinvolgono l'operatore ∇ o la derivata rispetto al tempo: la corrente $\vec{j} = \psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi)^*\psi$ per esempio. Si vede facilmente che questa non rimane inalterata dalla trasformazione di gauge della funzione d'onda, in quanto $\chi(t, \vec{x})$ che compare nell'esponentiale immaginario è appunto dipendente dalle coordinate (t, \vec{x}) . Per fare sì che questa sia gauge invariante basterà sostituire la derivata ordinaria ∇ con la derivata covariante che andremo ad introdurre a breve [9].

L'insieme delle (1.2.22), (1.2.23) e (1.2.27) sono chiamate *trasformazioni di gauge elettromagnetiche*.

L'equazione di Schroedinger (1.2.20), può essere riscritta come:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \psi = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi \quad (1.2.28)$$

e possiamo definire le derivate covarianti di gauge in analogia con la trattazione teorica fatta in precedenza come:

$$-i\hbar \vec{D} = -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \implies \vec{D} = \nabla - i \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \quad (1.2.29)$$

e

$$i\hbar D_t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \implies D_t = \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{e}{\hbar} \phi \quad (1.2.30)$$

Se vado a considerare le trasformazioni di gauge elettromagnetiche, queste possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\vec{D}' \psi' = \vec{D}' (\psi \cdot e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi}) = e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi} \cdot \vec{D} \psi \quad (1.2.31)$$

e

$$D'_t \psi' = D'_t (\psi \cdot e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi}) = e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi} \cdot D_t \psi \quad (1.2.32)$$

Queste uguaglianze si dimostrano facilmente per calcolo diretto e se definiamo la quadri-derivata D_μ :

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) + i \frac{e}{\hbar c} (-\phi, \vec{A}) \quad (1.2.33)$$

(dove $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (-A^0, A^1, A^2, A^3)$)
avremo la stessa forma della derivata covariante di gauge (1.1.7) e queste due trasformazioni potranno essere compattate nell'unica scrittura:

$$D'_\mu \psi' = D'_\mu (\psi \cdot e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi}) = e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi} \cdot D_\mu \psi \quad (1.2.34)$$

e dato che deve valere per ogni funzione d'onda ψ , si ha che D_μ deve trasformare proprio come (1.1.8):

$$D'_\mu = e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi} \cdot D_\mu \cdot e^{-i \frac{e}{\hbar c} \chi} \quad (1.2.35)$$

La (1.2.34) ci dice che $D_\mu \psi$ trasforma nello stesso modo di ψ , come richiesto dalla teoria generale. In questo caso la *costante di accoppiamento* g sarà uguale a:

$$g = \frac{e}{\hbar c} \quad (1.2.36)$$

e ci da l'ordine di grandezza della forza dell'interazione elettromagnetica.

Le derivate covarianti sono direttamente collegate anche al tensore di Faraday, infatti si può facilmente calcolare il commutatore:

$$[D_\mu, D_\nu] = i \frac{e}{\hbar c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = i \frac{e}{\hbar c} F_{\mu\nu} \quad (1.2.37)$$

dove $F_{\mu\nu}$ è proprio il tensore del campo elettromagnetico (1.2.17).

1.2.3 Teoria elettromagnetica come teoria di gauge

Ora che abbiamo introdotto l'invarianza di gauge, il quadri-potenziale elettromagnetico, il tensore di Faraday, la derivata covariante di gauge e le leggi di trasformazione, possiamo tradurre tutto questo nel linguaggio utilizzato nella prima sezione del presente capitolo, ossia nel linguaggio matematico delle teorie di gauge.

Nella teoria elettromagnetica lo spazio dei parametri \mathcal{X} non è altro che lo spazio quadri-dimensionale di Minkowski \mathcal{M}^4 nel quale gli elementi sono denotati come x^μ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$). Il gruppo di gauge è il gruppo delle matrici unitarie unidimensionale $\mathbf{U}(1)$ dato dalle trasformazioni (1.2.27). Possiamo denotare queste trasformazioni come:

$$U : \mathcal{M}^4 \rightarrow U(1) \\ (t, \vec{x}) \mapsto U(\chi(t, \vec{x})) = e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi(t, \vec{x})} \quad (1.2.38)$$

e avremo che il campo di materia (la funzione d'onda) trasformerà secondo:

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi(t, \vec{x})' = U(\chi(t, \vec{x})) \psi(t, \vec{x}) \quad (1.2.39)$$

Introducendo la 1-forma *potenziale di gauge* come:

$$A^{(el)} = A_\mu dx^\mu = -A^0 dx^0 + A^1 dx^1 + A^2 dx^2 + A^3 dx^3 \quad (1.2.40)$$

le trasformazioni di gauge (1.2.22) e (1.2.23) prenderanno la seguente forma:

$$A^{(el)} \longrightarrow A'^{(el)} = A^{(el)} + d\chi \quad (1.2.41)$$

dove d rappresenta la derivata esterna, che in questo caso non è altro che la "normale" operazione di differenziazione:

$$d\chi = \partial_\mu \chi dx^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} + (\nabla \chi) \cdot d\vec{x} \quad (1.2.42)$$

Richiedendo che la derivata covariante D_μ definita in (1.2.33), applicata al campo di materia ψ , si trasformi come:

$$D'_\mu \psi' = U(\chi) \cdot D_\mu \psi \quad (1.2.43)$$

e dunque:

$$D'_\mu = U(\chi) \cdot D_\mu \cdot U^{-1}(\chi) \quad (1.2.44)$$

Grazie ad un calcolo diretto, si può arrivare a trovare la seguente legge di trasformazione per il potenziale di gauge elettromagnetico (1.2.40):

$$A^{(el)} \longrightarrow A'^{(el)} = U(\chi) \cdot A^{(el)} \cdot U^{-1}(\chi) - i \frac{\hbar c}{e} U^{-1}(\chi) \cdot dU(\chi) \quad (1.2.45)$$

che è proprio uguale alla (1.1.6) ed in particolare, dato che $\mathbf{U}(1)$ è un gruppo abeliano, sarà uguale alla (1.1.14):

$$A'^{(el)} = A^{(el)} - i \frac{\hbar c}{e} U^{-1}(\chi) \cdot dU(\chi) \quad (1.2.46)$$

Ma se consideriamo la forma della trasformazione di gauge (1.2.38), ritroveremo la (1.2.41):

$$\begin{aligned} A'^{(el)} &= A^{(el)} - i \frac{\hbar c}{e} e^{-i \frac{e}{\hbar c} \chi} \cdot d(e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi}) = \\ &= A^{(el)} - i \frac{\hbar c}{e} e^{-i \frac{e}{\hbar c} \chi} \cdot i \frac{e}{\hbar c} e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi} d\chi \\ &= A^{(el)} + d\chi \end{aligned} \quad (1.2.47)$$

Siamo quindi riusciti a vedere come la teoria elettromagnetica sia a tutti gli effetti una teoria di gauge abeliana con gruppo di struttura $\mathbf{U}(1)$. Partendo dalle equazioni per i potenziali, abbiamo visto come questi presentavano una invarianza per trasformazioni del tipo (1.2.22) e (1.2.23) e come questo fatto portasse alla modificazione locale della fase della funzione d'onda del campo di materia interagente con questo campo elettromagnetico. Abbiamo quindi definito una derivata covariante e ricavato il tensore di Faraday dal commutatore di quest'ultima.

1.2.4 Argomentazione ribaltata: Il principio di gauge

Come presentato in [9] e [11], al posto di partire dall'equazione di Schroedinger:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right] \psi = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right]^2 \psi \quad (1.2.48)$$

possiamo invece postulare che la nostra teoria sia invariante sotto la trasformazione di fase locale:

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi'(t, \vec{x}) = e^{i\alpha(t, \vec{x})} \psi(t, \vec{x}) \quad (1.2.49)$$

Questo farà sì che la teoria non possa essere libera, ma richiederà una interazione con un quadri-vettore A_μ che sarà appunto il quadri-potenziale del campo elettromagnetico.

In meccanica quantistica, la fase assoluta di una funzione d'onda non può essere misurata, ciò che può essere osservato, invece, sono le differenze di fase attraverso esperimenti di interferenza. Il riuscire a cambiare la funzione d'onda senza riscontrare effetti osservabili, è proprio ciò che sta alla base del concetto di *principio di simmetria o invarianza* in meccanica quantistica. In questo caso, se applichiamo una trasformazione di fase globale, non si avrà nessun riscontro sperimentale ed osservabile di questo avvenimento. Quando, dunque, ci si riduce a fare dei calcoli, la scelta di fase è puramente convenzionale ed il principio di invarianza garantisce che ogni scelta sia perfettamente equivalente. Una trasformazione del tipo:

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \quad (1.2.50)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, sarà una trasformazione globale e determina una invarianza globale nella meccanica quantistica. Quando una scelta convenzionale della fase è stata fatta, ossia

fissato α , questa deve essere mantenuta in ogni punto dello spazio-tempo. Se per esempio consideriamo una esperienza di interferenza di elettroni che passano attraverso due fenditure e andiamo a mettere un filtro polarizzatore dopo una delle due fenditure, questo avrà l'effetto di trasformare localmente la fase degli elettroni che passano da quella fenditura e vi saranno sicuramente effetti osservabili. Per avere una invarianza globale, bisognerebbe estendere il filtro a tutto lo spazio, oppure non metterlo proprio. Ciò che si può fare, però, è chiedersi a cosa porta la richiesta di invarianza locale per una trasformazione di fase. Questo, in pratica, significa adottare una convenzione diversa per ogni punto spazio-temporale. Se quindi richiediamo che:

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi'(t, \vec{x}) = e^{i\alpha(t, \vec{x})} \psi(t, \vec{x}) \quad (1.2.51)$$

possiamo subito notare che l'equazione di Schroedinger per particella libera:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.2.52)$$

non è invariante sotto questa trasformazione. Vi sono infatti le derivate ∇ e $\partial/\partial t$ che chiaramente agiscono sulla fase $\alpha(t, \vec{x})$, facendo venire fuori quindi dei termini della forma:

$$\partial_\mu \psi'(t, \vec{x}) = e^{i\alpha(t, \vec{x})} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(t, \vec{x})] \psi(t, \vec{x}) \quad (1.2.53)$$

Queste derivate della fase possono essere eliminate, in modo da ottenere una equazione di Schroedinger invariante, al prezzo di modificarne la forma. Questo comporta che la particella non sarà più libera, ma soggetta ad un qualche tipo di forza. In altre parole, la libertà di modificare localmente la fase di una particella, comporta l'introduzione di un campo di forze nel quale la particella si muove.

Se prendiamo $\alpha(t, \vec{x}) = g\chi(t, \vec{x})$ con g dato da (1.2.36), allora questa trasformazione di fase non sarà altro che quella associata all'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo e basterà introdurre un quadri-potenziale A_μ che entrerà nella definizione di derivata covariante. La particella si muoverà obbedendo all'equazione di Schroedinger (1.2.20) con il potenziale A_μ che si trasformerà come (1.2.26).

Il principio che l'interazione sia dettata da una invarianza di fase è detto *principio di gauge* e ci ha permesso di scrivere l'equazione d'onda per una particella interagente direttamente dall'equazione della particella libera attraverso la sostituzione:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \quad (1.2.54)$$

Bisogna notare che non c'è nessuna logica motivazione per questo salto dall'invarianza "globale" alla "locale". Tuttavia, il principio di gauge fornisce una buona motivazione concettuale all'unificazione delle interazioni del Modello Standard.

1.2.5 Lagrangiana completa di una particella in un campo elettromagnetico - Lagrangiana dell'elettrodinamica

Nel tentativo di unire la meccanica quantistica alla relatività ristretta, ma soprattutto nel cercare di spiegare l'esistenza di energie negative (come nell'equazione di Klein-Gordon) e mantenere il senso fisico del modulo quadro della funzione d'onda come densità di probabilità, evitando probabilità negative, Dirac riuscì a derivare la sua famosa equazione che descrive tutte le particelle di spin 1/2, massive ed invarianti per parità. Questa equazione è consistente sia con i principi della meccanica quantistica, sia con i postulati della teoria della relatività e fu convalidata dagli effetti di struttura fine che prediceva sull'atomo di idrogeno.

Semplicemente provando a considerare la radice quadrata dell'operatore box (1.2.11) che compariva nell'equazione di Klein-Gordon, che ricordiamo essere:

$$(\square - \mu^2)\psi = 0 \quad (\text{con } \mu = \frac{mc}{\hbar}) \quad (1.2.55)$$

ha notato che poteva scomporlo come:

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \left(\frac{i}{c} A \partial_t + B \partial_x + C \partial_y + D \partial_z \right) \left(\frac{i}{c} A \partial_t + B \partial_x + C \partial_y + D \partial_z \right) \quad (1.2.56)$$

Questi termini A, B, C e D devono soddisfare, però, certe proprietà ed ammettendo che siano matrici, l'unico modo per far sì che vengano rispettate è che siano delle matrici 4×4 . Chiaramente a questo punto si dovrà ammettere che agiscano su funzioni d'onda a quattro componenti, il che non coincide nè con il formalismo di Pauli (spinori a due componenti) nè con la funzione d'onda di Schroedinger (una componente). Considerando le proprietà che queste matrici devono soddisfare, ed applicando questo nuovo operatore del primo ordine (uno dei due termini dell'ultima uguaglianza della (1.2.56) a cui è sottratto μ della (1.2.55)) alla funzione d'onda, Dirac giunse alla formulazione della:

$$(i\hbar\rlap{-}\not{\partial} - mc)\psi = 0 \quad (1.2.57)$$

dove $\rlap{-}\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), con le matrici γ^μ che appartengono all'algebra di Clifford, le quali soddisfano:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4 \quad (\text{dove } \{\cdot, \cdot\} \text{ indica l'anticommutatore}) \quad (1.2.58)$$

e possono essere riscritte in funzione delle matrici di Pauli nel seguente:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & \mathbb{0} \end{pmatrix} \quad (1.2.59)$$

La teoria di Dirac è riconducibile alla teoria di Pauli in approssimazione di interazione debole. Se infatti consideriamo l'equazione di Dirac, *accoppiata minimamente*³ con un campo elettromagnetico dato dal quadri-potenziale A_μ , la (1.2.57) prenderà la forma:

$$\left(i\hbar\rlap{-}\not{\partial} - \frac{e}{c} \rlap{-}\not{A} - mc \right) \psi = 0 \quad (\text{dove } \rlap{-}\not{A} = \gamma^\mu A_\mu) \quad (1.2.60)$$

A questo punto considerando la funzione d'onda come scomposta in due spinori, la (1.2.60) si può dividere in due equazioni accoppiate, una delle quali in approssimazione di campo debole (approssimando l'energia totale dell'elettrone come la sua energia di riposo mc^2 e il suo momento come il suo valore classico $\vec{p} = m\vec{v}$), da come risultato uno spinore della funzione d'onda totale di Dirac trascurabile rispetto all'altra componente. L'equazione che rimane non è altro che l'equazione della teoria di Pauli e dunque si può identificare la parte della funzione d'onda di Dirac come lo spinore di Pauli.

Se definiamo lo spinore di Dirac *aggiunto* come:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.2.61)$$

e notando che:

$$(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu \quad (1.2.62)$$

si può ottenere l'*equazione di Dirac aggiunta* prendendo il coniugato Hermitiano della (1.2.57) e moltiplicando per γ^0 a destra:

$$\bar{\psi}(i\hbar\rlap{-}\not{\partial} + mc) = 0 \quad (1.2.63)$$

Se ora moltiplichiamo a sinistra la (1.2.57) per $\bar{\psi}$ e la (1.2.63) a destra per ψ , e le sottraiamo, otteniamo l'equazione che regola la conservazione della *corrente di Dirac*:

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (1.2.64)$$

³Nella teoria elettrodinamica, l'accoppiamento minimale consiste nella sostituzione formale $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c} A_\mu$ che in pratica non è altro che introdurre la derivata covariante di gauge.

Avremo quindi la quadri-corrente di Dirac:

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.2.65)$$

e la sua componente 0 sarà proprio la densità di probabilità solita:

$$J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi \stackrel{(1.2.61)}{=} \psi^\dagger\psi \quad (1.2.66)$$

La teoria di Dirac, perciò, prevede che la densità di probabilità sia vista come componente di una quadri-corrente conservata, non come semplice scalare definito, per esempio, nella teoria di Schroedinger. Sarà dunque soggetta agli effetti dati dalle trasformazioni di Lorentz, come una dilatazione temporale.

La densità di Lagrangiana, che permette di costruire un'azione, la quale variata consente di ricavare le equazioni di Dirac (1.2.57) e (1.2.63) sarà della forma:

$$\mathcal{L}_{free} = \bar{\psi}(i\hbar c\rlap{-}\not{D} - mc^2)\psi \quad (1.2.67)$$

dove il pedice "free" sta ad indicare che non è presente nessun tipo di interazione.

Come abbiamo visto, quando introduciamo un campo elettromagnetico a cui è associato un quadri-potenziale A_μ , per mantenere l'invarianza di gauge si va a sostituire la quadri-derivata con la derivata covariante di gauge (1.2.54). Se andiamo ad operare questa trasformazione alla (1.2.67), otterremo [11]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hbar c\rlap{-}\not{D} - mc^2)\psi = \bar{\psi}(i\hbar c\rlap{-}\not{D} - eA_\mu - mc^2)\psi = \mathcal{L}_{free} - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.2.68)$$

e se definisco la quadri-corrente elettromagnetica:

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.2.69)$$

allora:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} - A_\mu j^\mu \quad (1.2.70)$$

Per arrivare alla *Lagrangiana completa dell'elettrodinamica quantistica*, bisogna aggiungere un termine di energia cinetica per il campo, il quale descrive la propagazione dei fotoni liberi. Questo termine non sarà altro che la (1.1.16) dove $F_{\mu\nu}$ sarà il tensore di Faraday definito dalla (1.2.17). Avremo quindi la:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{free} - A_\mu j^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{EM} - A_\mu j^\mu \quad (1.2.71)$$

In questa densità di Lagrangiana compaiono 3 termini, il primo è una Lagrangiana di particella di spin 1/2, massiva e libera, il secondo termine è, come detto qualche riga sopra, il termine di energia cinetica del campo elettromagnetico, mentre il terzo termine non è altro che l'interazione data dall'accoppiamento del campo di forza con il campo di materia.

Un termine di fotone massivo, avrebbe la forma:

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu \quad (1.2.72)$$

ma chiaramente distruggerebbe l'invarianza di gauge locale in quanto:

$$A^\mu A_\mu \longrightarrow A'^\mu A'_\mu = (A^\mu - \partial^\mu\chi(x^\mu))(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\mu)) \neq A^\mu A_\mu \quad (1.2.73)$$

Possiamo pertanto dire che l'invarianza locale di gauge ci ha portato all'esistenza di *fotoni non massivi*.

1.3 Teorie di gauge non-abeliane

La trattazione finora seguita ha permesso di descrivere in maniera completa l'elettrodinamica quantistica, la quale può essere vista come una teoria di gauge abeliana con gruppo di gauge $U(1)$. Quando però andiamo a considerare altri tipi di simmetrie, queste possono essere descritte dall'azione di un gruppo che non è abeliano.

La quasi uguaglianza della massa del protone con quella del neutrone, non permette di distinguerli quando si esclude l'interazione elettromagnetica. Questo è dato in ultima analisi dalla similitudine delle masse dei quark up (2.4 Mev) e down (4.8 Mev), infatti un protone è composto da due quark up e uno down, mentre un neutrone da un quark up e due down. I due nucleoni differiscono, dunque, per una sostituzione $up \leftrightarrow down$. L'oscillazione dei quark up-down è una realtà fisica, una coppia up-antiup può trovarsi con eguale probabilità nello stato down-antidown. Questa simmetria in realtà non è una simmetria esatta, le masse, infatti, non sono del tutto uguali, ma si può trascurare la presente differenza e, al massimo, trattare perturbativamente il sistema se si vogliono risultati più precisi.

Costruiremo una $SU(2)$ -teoria di gauge, ed essendo chiaramente il gruppo di gauge un gruppo non commutativo, la teoria risulterà non-abeliana. Questa teoria è stata per la prima volta sviluppata da Yang e Mills nel cercare appunto di estendere le teorie abeliane e nel tentare di descrivere con il formalismo delle teorie di gauge le interazioni deboli e forti (quest'ultime saranno $SU(3)$ -teorie di gauge). Successivamente ci concentreremo sulle soluzioni dell'azione definita a partire dalla Lagrangiana di Yang-Mills (1.1.17) e arriveremo ad introdurre il concetto di *istantoni* come configurazioni di campo non banali che minimizzano l'azione e che non possono essere deformati continuamente l'uno nell'altro.

1.3.1 $SU(2)$ -Teoria di gauge - Isospin

Introduciamo il concetto di isospin, il quale fu presentato come una nuova quantità conservata che avrebbe permesso al protone di diventare un neutrone e viceversa. Il termine stesso rievoca il concetto di spin, ed infatti i quark up e down hanno valore totale di isospin $I = 1/2$, mentre la proiezione sulla terza componente $I_3 = \pm 1/2$ (con il + per i quark up e - per i down). Il vettore di isospin $\hat{\mathbf{I}}$ è dunque da considerare un vettore operatoriale a tre componenti che agisce sullo spazio di isospin.

Le rotazioni all'interno dello spazio di isospin devono lasciare le leggi della fisica invariate e se pensiamo alla Lagrangiana di Dirac per un nucleone libero, questa sarà esattamente uguale alla (1.2.67):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hbar c\hat{\mathcal{D}} - mc^2)\psi \quad (1.3.1)$$

dove però la funzione d'onda è interpretata come lo spinore composto:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{protone} \\ \psi_{neutrone} \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

Chiaramente la (1.3.1) è invariante per rotazioni di isospin globali (dunque sotto l'azione del gruppo $SU(2)$):

$$\psi \longrightarrow e^{\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}\psi \quad (1.3.3)$$

dove le $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ sono le matrici di Pauli che però agiscono nello spazio di isospin (per quello non sono denotate come σ), mentre $\vec{\alpha}$ non è altro che un vettore tridimensionale costante, parametro della trasformazione.

Come abbiamo già avuto modo di vedere nelle sezioni precedenti, il principio di gauge ci porta a cercare una lagrangiana invariante per trasformazioni di gauge locali, in particolare ammetteremo che il vettore $\vec{\alpha}$ possa dipendere dalle coordinate x^μ :

$$\psi \longrightarrow e^{\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}(x^\mu)}\psi \quad (1.3.4)$$

La trasformazione $G(x^\mu) = e^{\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}(x^\mu)}$ è chiaramente una generale trasformazione del gruppo $\mathbf{SU}(2)$, in quanto è la mappa esponenziale che va dalla sua algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ a se stesso (vedere appendice A).

Per avere l'invarianza locale di gauge della teoria, andremo a considerare la derivata covariante di gauge:

$$D_\mu = \mathbb{1}\partial_\mu + igB_\mu \quad (1.3.5)$$

dove $\mathbb{1}$ è la matrice identica 2×2 , g è la costante di accoppiamento e B_μ è definita come:

$$B_\mu = \frac{1}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{b}_\mu \quad (1.3.6)$$

con i tre campi di gauge $\vec{b}_\mu = (b_{1\mu}, b_{2\mu}, b_{3\mu})$.

La legge di trasformazione del potenziale B_μ , sarà come richiesto dalla teoria, pari a:

$$B'_\mu = G(x^\mu) \cdot B_\mu \cdot G^{-1}(x^\mu) + \frac{i}{g}\partial_\mu G(x^\mu) \cdot G^{-1}(x^\mu) \quad (1.3.7)$$

Questo ci permette di verificare che la derivata di gauge trasformata, applicata alla funzione d'onda trasformata, si trasformi come la funzione d'onda:

$$D'_\mu\psi' = G(x^\mu)(D_\mu\psi) \quad (1.3.8)$$

Per costruire la Lagrangiana della teoria di gauge dell'isospin dei nucleoni ci rifacciamo al *principio di gauge* e andiamo ad operare la sostituzione della derivata ordinaria in (1.3.1) con la derivata covariante di gauge (1.3.5):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hbar c\not{D} - mc^2)\psi = \mathcal{L}_{free} - g\hbar c\bar{\psi}B_\mu\gamma^\mu\psi = \mathcal{L}_{free} - \frac{g\hbar c}{2}\vec{b}_\mu \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \quad (1.3.9)$$

Come per l'elettrodinamica, possiamo definire la corrente di isospin (conservata) in termini delle funzioni d'onda e matrici dell'algebra di Clifford (ed in questo caso anche in funzione delle matrici di Pauli), la quale sarà un vettore di isospin a tre componenti:

$$\vec{J}^\mu = \frac{g\hbar c}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \quad (1.3.10)$$

La (1.3.9) è la somma di una Lagrangiana di particella libera più un termine di interazione che accoppia i campi di gauge di isospin con la corrente conservata di isospin dei nucleoni. Questa struttura è dunque del tutto simile a ciò che abbiamo ricavato anche per l'elettrodinamica. Ciò che ci resta da fare è costruire il campo di forza di gauge, e dunque il termine cinetico del campo.

Costruiamo, quindi, il commutatore delle derivate covarianti di gauge, che come sappiamo già dalla teoria, sarà:

$$F_{\mu\nu} := \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig[B_\mu, B_\nu] \quad (1.3.11)$$

Considerando la (1.3.6), possiamo riscrivere questo campo di forza come:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\lambda\tau_\lambda = \frac{1}{2}(\partial_\mu b_\nu^\lambda - \partial_\nu b_\mu^\lambda + g\epsilon_{\alpha\beta}^\lambda b_\mu^\alpha b_\nu^\beta)\tau_\lambda \quad (1.3.12)$$

Il fatto che il gruppo di gauge $\mathbf{SU}(2)$ non sia un gruppo abeliano, fa sì che il commutatore nella (1.3.11) non si annulli. Il tensore di campo di forza di gauge di questa teoria, non sarà un invariante, ma si trasformerà in modo covariante, ossia:

$$F'_{\mu\nu} = G(x^\mu) \cdot F_{\mu\nu} \cdot G^{-1}(x^\mu) \quad (1.3.13)$$

Questo tensore, dunque, ha le proprietà richieste di covarianza rispetto ad una trasformazione di gauge. Possiamo quindi andare a considerare il termine cinetico del campo come l'invariante definito:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\lambda F_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (1.3.14)$$

ed allora la Lagrangiana che definisce questo fattore non sarà altro che la (1.1.17):

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (1.3.15)$$

Andando ad unire la (1.3.15) alla (1.3.1), otterremo la Lagrangiana che descrive un nucleone (campo di materia), la propagazione dei relativi campi di gauge B_μ , ed il loro accoppiamento:

$$\mathcal{L}_{I_{sospin}} = \bar{\psi}(i\hbar c\not{D} - mc^2)\psi - \frac{g\hbar c}{2}b_\mu^a\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_a\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (1.3.16)$$

Anche in questo caso, un termine di massa non nulla dei campi di gauge B_μ porterebbe alla rottura della simmetria per le trasformazioni locali di gauge e perciò anche in questo caso i campi saranno *non massivi*.

Se facciamo un confronto tra la teoria elettrodinamica e quella di Yang-Mills, la prima cosa che si può notare è che, nella prima, in assenza di sorgenti, la teoria è libera (non interagente). Un fotone libero, infatti, si propaga seguendo una Lagrangiana in cui compaiono solo termini bilineari rispetto al quadri-potenziale A_μ . Per descrivere questo fenomeno basterà il propagatore del fotone [11].

Nella teoria di Yang-Mills, al contrario, anche in assenza di sorgenti fermioniche, saranno comunque presenti termini di interazione dati dalla non linearità del commutatore che compare del tensore di campo di forza. Verranno alla luce dunque termini trilineari e quadrilineari dal "prodotto" $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, i quali indicheranno la presenza di vertici a 3 e 4 bosoni di gauge oltre al propagatore del campo.

Come ultima considerazione si può notare che la presenza di questi vertici è implicata dal fatto che i campi di gauge sono auto-interagenti, inoltre se si considera un Adrone (stato legato di quark), questo avrà una carica di colore nuda, la quale verrà schermata da effetti di creazione quark e anti-quark virtuali e, col fatto che i gluoni (quanti del campo forte) sono auto-interagenti, si avrà anche una anti-schermatura. Per la cromodinamica quantistica (QCD), l'effetto di anti-schermatura prevale su quello di schermatura e dunque la teoria presenta la proprietà nota come: *libertà asintotica*. Ciò vuol dire che l'interazione tra particelle diventa asintoticamente più debole mano a mano che la scala energetica aumenta e la corrispondente scala spaziale diminuisce. Un'altra proprietà legata a quest'ultima è il *confinamento dei quark negli adroni*. In parole povere la libertà asintotica porta i quark a trovarsi sempre e solo in stati legati. Non sono ancora stati osservati direttamente quark liberi in natura e se questa congettura è corretta, allora sarà impossibile riuscire a vederli direttamente non in stati legati. Per avere una visione storica e tecnica di come sono avvenute queste formulazioni si può fare riferimento ad un articolo del premio Nobel Gerard 't Hooft [14].

1.3.2 Soluzioni dell'azione di Yang-Mills - Istantoni

Il termine *istantone* viene usato per indicare soluzioni localizzate di azioni finite delle equazioni di campo classiche Euclidee di una teoria.

Per prima cosa bisogna specificare cosa si intende per versione Euclidea di una teoria. Come abbiamo già avuto modo di vedere in precedenza, il nostro spazio dei parametri è lo spazio di Minkowski \mathcal{M}^4 , ma si può pensare di renderlo Euclideo nel senso di [15]:

1. Sostituire la metrica di Minkowski (1.2.6) con la normale metrica Euclidea:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle = \sum_i x^i y^i \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

2. Rendere il quadri-vettore delle coordinate spazio-temporali $(x^\mu)_{Min}$ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$), un normale vettore $(x^\mu)_{Euc} \in \mathbb{R}^4$ (con $\mu = 1, 2, 3, 4$) e con tutte le componenti reali, quindi.

3. La teoria non sarà più invariante per trasformazioni di Lorentz, ma sarà invariante per rotazioni del gruppo ortogonale $\mathbf{O}(4)$, e quindi:

$$\langle x', x' \rangle = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle \quad (1.3.18)$$

con $U \in \mathbf{O}(4)$.

Bisogna notare che questo processo non è semplicemente un cambio di notazione, ma piuttosto si può pensare di prolungare analiticamente la coordinata temporale nello spazio di Minkowski e poi prendere come quarta componente nello spazio Euclideo la parte reale di questo prolungamento (chiamata rotazione di Wick):

$$(x^4)_{Euc} = it \quad (1.3.19)$$

mentre le altre componenti spaziali rimangono inalterate.

Ci si può legittimamente chiedere come mai si opera questa manovra quando sappiamo che i sistemi fisici sono immersi in spazi-tempo di Minkowski. La risposta a questa domanda sta nel fatto che nelle teorie quantistiche dei campi, alle volte può essere utile esplorare le soluzioni delle equazioni di campo della versione classica di una teoria. Un esempio è il fenomeno delle transizioni per effetto tunneling tra stati fondamentali (*ground state*) classici degeneri.

Vogliamo a questo punto cercare le incognite soluzioni delle equazioni di Yang-Mills nello spazio Euclideo 4-dimensionale. In particolare cercheremo i minimi assoluti dell'azione. Bisognerà specificare anche le condizioni al contorno.

La Lagrangiana di Yang-Mills per una teoria di gauge non-abeliana, come abbiamo già visto è nella forma:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (1.3.20)$$

La corrispondente azione sarà dunque l'integrale:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x \quad (1.3.21)$$

Le equazioni di campo che derivano da questa azione saranno:

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} + ig[B_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (1.3.22)$$

e un istantone di Yang-Mills non è altro che una soluzione di queste equazioni.

Chiaramente, affinché l'integrale (1.3.21) abbia senso (ossia presenti soluzioni a energia finita), bisognerà richiedere che il tensore di campo di forza vada a zero per $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, in particolare che abbia un comportamento asintotico del tipo:

$$|F_{\mu\nu}| \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\vec{x}|^{2+\epsilon}} \quad (1.3.23)$$

con $\epsilon \in \mathbb{R}$ e $\epsilon \geq 0$. Se il campo di forza tende a zero all'infinito, allora il quadri-potenziale di gauge deve tendere ad un *gauge puro*, che per definizione non è altro che:

$$B_\mu \longrightarrow \frac{i}{g} \partial_\mu (G(g(x^\mu))) \cdot G^{-1}(g(x^\mu)) \quad (1.3.24)$$

Se consideriamo il bordo di \mathbb{R}^4 come una sfera S^3 , allora ogni campo B_μ produce una mappa G che ha come dominio S^3 e codominio le matrici del nostro gruppo di gauge $\mathbf{SU}(2)$.

Queste mappe $G : S^3 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$ sono caratterizzate dalla loro classe di omotopia a cui appartengono (vedi appendice B) ed ogni classe è labellata da un numero intero. Le mappe appartenenti a differenti classi non possono essere deformate in modo liscio l'una nell'altra e le classi sono quindi topologicamente sconnesse. Si può dire che questo numero intero che caratterizza le classi, indica il numero di volte che S^3 all'infinito si avvolge attorno al gruppo $\mathbf{SU}(2)$ che è pensato topologicamente come S^3 stesso [13].

Il fatto che si possa considerare "il bordo" di \mathbb{R}^4 come la sfera S^3 con raggio che tende all'infinito, sta nel fatto che, come è ben noto, la proiezione stereografica sullo spazio \mathbb{R}^n , di una S^n sfera immersa in \mathbb{R}^{n+1} , è una mappa conforme e dunque tutti i punti della n-sfera vengono mappati in modo conforme al piano \mathbb{R}^n (piano nel senso che è di una dimensione minore rispetto allo spazio \mathbb{R}^{n+1} dove vive la n-sfera). Tutti i punti vengono mappati, tranne uno dei due poli (quello da dove si decide di far la proiezione). Si può pensare, però, che il polo escluso corrisponda al punto all'infinito $|\vec{x}| = +\infty$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Alternativamente si può pensare che la sfera S^n sia la compattificazione conforme di \mathbb{R}^n , dopo aver aggiunto il punto all'infinito.

Quindi, nelle teorie di gauge non-abeliane su \mathbb{R}^4 , potenziali che sono asintoticamente piatti (campo di forze di gauge che tende a zero), cadono in categorie distinte e indicizzate da un intero n . Se questo intero non è uguale a zero, non potremmo descrivere il nostro potenziale usando solo un gauge, dovremmo usare un gauge nella regione "vicina" e un gauge nella regione vicino all'infinito. Come avremo modo di vedere, questo fatto farà sì che il fibrato non sarà più banale, ossia rappresentabile come prodotto cartesiano di altri due spazi, ma avrà una struttura topologicamente non banale [12].

In particolare, dimostreremo nei capitoli successivi che la seguente grandezza è un intero che appunto caratterizza la classe di appartenenza delle mappe da $S^3 \rightarrow SU(2)$:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} (F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu}) d^4x = n \quad (1.3.25)$$

dove abbiamo introdotto il duale del tensore di campo di forza:

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} \quad (1.3.26)$$

con $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ tensore totalmente antisimmetrico e $\epsilon_{1234} = 1$. L'operazione $*$ (star) od *operatore di Hodge*, vedremo successivamente che sarà un isomorfismo tra k -forme e $(n - k)$ -forme (dove n indica la dimensione dello spazio vettoriale nel quale vivono le k -forme).

A questo punto possiamo considerare la disuguaglianza:

$$-\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}[(F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu})^2] d^4x \geq 0 \quad (1.3.27)$$

che chiaramente è saturata se vale:

$$F_{\mu\nu} = \mp *F_{\mu\nu} \quad (1.3.28)$$

Quando il segno '+' nella soluzione precedente è scelto, F è detta *auto-duale*, mentre se è scelto il segno '-' sarà detta *anti-auto-duale*. Quando (1.3.28) è soddisfatta, le equazioni di campo (1.3.22) sono automaticamente soddisfatte [8]:

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \pm D_\mu (*F_{\mu\nu}) = 0 \quad (1.3.29)$$

Riprendendo la (1.3.27), essa può essere maneggiata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}[(F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu})^2] d^4x = \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + *F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} \pm 2F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}) d^4x = \\ \boxed{4} \Rightarrow &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(2F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \pm 2F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}) d^4x = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x \mp \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}) d^4x \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Possiamo portare il primo termine della disuguaglianza al primo membro e avremo:

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x \geq \mp \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}) d^4x \quad (1.3.31)$$

${}^4 *F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon^{\gamma\delta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = \frac{1}{4} \cdot (2\delta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}) F^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} - \delta^{\gamma} \delta_{\beta} \delta_{\alpha}^{\delta}) F_{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}) = \frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$

Si può riconoscere in quest'ultima come il primo membro sia esattamente l'azione di Yang-Mills che abbiamo definito precedentemente, mentre il secondo termine è riconducibile all'intero n definito dalla (1.3.25):

$$S_{YM} \geq \mp 4n\pi^2 \tag{1.3.32}$$

Siamo così arrivati a definire l'estremo inferiore dell'azione di Yang-Mills come la (1.3.32) nella quale vale l'uguaglianza, quando si verifica questa condizione saremo in presenza di minimi dell'azione e sarà soddisfatta la (1.3.28). Questi minimi sono chiaramente un numero infinito, dato che n è un intero qualunque. Questa formula fornisce quindi un estremo inferiore delle energie possedute dalle pseudo-particelle in ogni classe di omotopia soluzioni delle equazioni di campo [8][13].

Come già menzionato, gli istantoni sono utili per spiegare e modellare gli effetti di tunneling tra diversi stati di vuoto corrispondenti a diverse classi topologiche. Si può infatti vedere come nelle teorie di gauge non-abeliane, il vuoto sia una sovrapposizione di stati di vuoto con differente indice topologico di avvolgimento (*winding number*). La configurazione di campo di un istantone corrisponderebbe allora al cammino che condurrebbe dal vuoto iniziale a quello finale, i quali possiedono, però, indici di avvolgimento diversi.

Capitolo 2

Varietà Differenziabili

Il concetto di varietà differenziabile generalizza il concetto di superficie ma senza un esplicito riferimento ad una immersione in \mathbb{R}^n . Piuttosto generalizzerà il concetto di rappresentazione parametrica di una superficie e dunque di omeomorfismo che mappa aperti della superficie in aperti di \mathbb{R}^n . Queste parametrizzazioni non saranno altro che le carte di una varietà, i cui domini ricopriranno tutto lo spazio e si avranno delle condizioni di compatibilità nelle regioni in cui le carte si sovrappongono. Ad ogni punto della varietà avremo dei "piani" tangenti che saranno gli spazi vettoriali dove vivranno appunto i vettori. L'interpretazione di questi, però, sarà quella di derivazioni, in particolare saranno quegli enti che ci definiranno le derivate (parziali) sulla varietà. Con un'assegnazione univoca (liscia) di un vettore tangente ad ogni punto della varietà, si avrà un campo vettoriale, una delle nozioni più importanti in fisica.

2.1 Varietà

Le varietà differenziali forniscono l'ideale ambiente in cui considerare processi fisici che vanno dalla meccanica classica (Lagrangiana ed Hamiltoniana) alla teoria dei campi quantistici. Alla base del concetto di varietà c'è la necessità di riuscire a ridurre ogni spazio in cui si lavora, almeno localmente, a \mathbb{R}^n . Una varietà differenziabile sarà infatti uno spazio tale che ogni punto possieda un intorno approssimabile ad un aperto di \mathbb{R}^n . Per poter fare dei conti e descrivere le traiettorie degli enti fisici che stiamo considerando, dovremmo anche riuscire a rappresentarli in coordinate locali e per questo motivo verrà introdotto il concetto di carte. Per tutta la parte che riguarderà le varietà differenziabili faremo riferimento ai testi [16] [17] [18].

Definizione 2.1 (Varietà topologica). Sia (\mathcal{M}, τ) spazio topologico di Hausdorff e paracompatto, diremo che esso è una *varietà topologica di dimensione n* se $\forall p \in \mathcal{M}$ esiste un suo intorno aperto $U \in \tau$ ed una mappa $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ tali che:

- (i) $p \in U$
- (ii) $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ aperto
- (iii) ϕ è un omeomorfismo di spazi topologici

Questa definizione ci dice che uno spazio topologico è una varietà topologica se per ogni punto dello spazio esiste un aperto che è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n . Possiamo allora considerare l'unione di questi aperti per avere un ricoprimento della nostra varietà, bisognerà però richiedere alcune condizioni di compatibilità tra questi insiemi e queste mappe. Veniamo allora alle seguenti definizioni:

Definizione 2.2 (Carte locali). Sia (\mathcal{M}, τ) una varietà topologica di dimensione n , definiremo una sua *carta locale* come una coppia (U, ϕ) con U e ϕ che soddisfano le condizioni (ii), (iii) della definizione precedente.

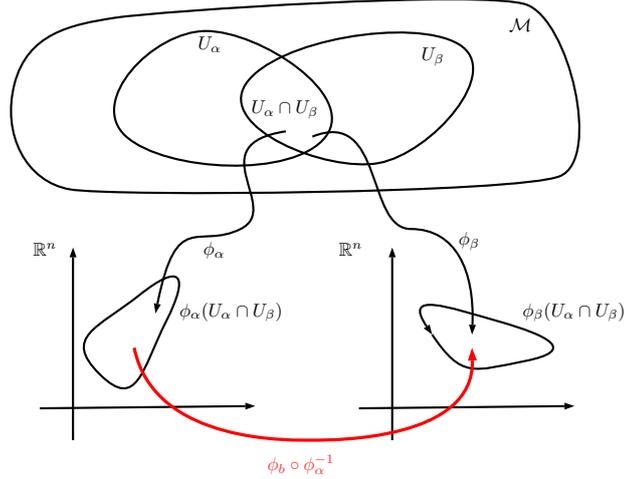


Figura 2.1: Rappresentazione della condizione di compatibilità delle carte locali nell'intersezione dei domini.

Definizione 2.3 (Atlante). Sia (\mathcal{M}, τ) una varietà topologica di dimensione n , definiremo un suo atlante \mathcal{A} di classe C^k come una collezione di carte locali $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ (dove A è un insieme di indici) tale che:

- (i) $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
- (ii) $\forall (U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta) \in \mathcal{A}$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si ha che $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sono aperti in \mathbb{R}^n ;
- (iii) $\forall (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ e $(U_\beta, \phi_\beta) \in \mathcal{A}$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ la mappa:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è un diffeomorfismo da \mathbb{R}^n ad \mathbb{R}^n di classe C^k .

Un atlante non è altro, dunque, che un collezione di carte C^k compatibili (dove la condizione di compatibilità è data dal punto (iii) dell'ultima definizione), ciò vuol dire che si può passare da una carta all'altra in modo differenziabile. Per vedere visivamente questa condizione di compatibilità si può fare riferimento alla figura 2.1.

Per semplicità considereremo solo atlanti lisci, ovvero, di classe C^∞ . Il concetto che sta alla base di questa assunzione è che utilizzeremo funzioni che siano differenziabili quanto basta (in quel dato contesto) per fare ciò che ci serve. Chiaramente vi possono essere diversi atlanti associati ad una stessa varietà topologica, vogliamo a questo punto cercare di avere un atlante massimale nel quale siano comprese tutte le possibili carte compatibili.

Definizione 2.4 (Atlante massimale). Consideriamo (\mathcal{M}, τ) varietà topologica di dimensione n e consideriamo lo spazio \mathfrak{A} di tutti gli atlanti lisci su \mathcal{M} :

$$\mathfrak{A} := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ è un atlante liscio per } \mathcal{M}\}$$

Possiamo, allora, definire una relazione di equivalenza in questo insieme nel seguente modo, $\forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{A}$:

$$(\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{A})$$

A questo punto se consideriamo lo spazio quoziente degli atlanti lisci con questa relazione di equivalenza:

$$\mathfrak{A} / \sim := \{[\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$$

gli elementi della classe di equivalenza $[\mathcal{A}]$ saranno tutti quegli atlanti la cui unione con l'atlante rappresentante darà ancora un atlante per la varietà. L'unione di tutti gli atlanti in una classe di equivalenza sarà anch'esso contenuto nella classe di equivalenza e sarà per definizione il nostro *atlante massimale*.

Costruiti i concetti di *varietà topologica*, *carte locali* e *atlante massimale*, possiamo definire cosa sarà per noi lo spazio base in cui lavoreremo:

Definizione 2.5 (Varietà differenziabile). Diremo che la tri-upla $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}_{max})$ è una *varietà differenziabile* di dimensione n e classe C^k se (\mathcal{M}, τ) è una varietà topologica di dimensione n e \mathcal{A}_{max} è il suo atlante massimale di classe C^k .

La principale varietà che incontreremo e che si incontra in fisica è lo spazio-tempo di Minkowski \mathcal{M}^4 . In meccanica classica, il moto di una particella può essere vincolato ad una varietà, per esempio su una sfera o un iperboloido. La traiettoria sarà una curva sulla varietà e possono esserci delle forze che agiscono sulla particella, rappresentabili come campi vettoriali sulla varietà. Vediamo ora di costruire qualche varietà che utilizzeremo nel corso della trattazione.

2.1.1 Sfera n-dimensionale

L'insieme che definisce una n-sfera (prendiamola di raggio unitario), come ben risaputo è:

$$S^n := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1 \right\} \quad (2.1.1)$$

Ciò che dobbiamo fare è costruire un insieme di carte che ricopra la sfera e che siano compatibili. Consideriamo allora i seguenti aperti:

$$U_N := S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \quad (2.1.2)$$

$$U_S := S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\} \quad (2.1.3)$$

Questi due insiemi rappresentano due domini che uniti danno tutta la n-sfera:

$$U_N \cup U_S = S^n \quad (2.1.4)$$

Questa non è altro che la prima condizione della definizione di atlante 2.3. Definiamo ora delle mappe che prendono punti da questi insiemi e li mappano omeomorficamente ad \mathbb{R}^n . Considereremo la proiezione stereografica (vedi figura 2.2):

$$\begin{aligned} \phi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto \phi_N(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

definiamo quindi:

$$(\phi_N)^i = \frac{x^i}{1 - x^{n+1}} \quad (2.1.6)$$

e analogamente per il dominio U_S :

$$\begin{aligned} \phi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto \phi_S(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 + x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

e:

$$(\phi_S)^j = \frac{x^j}{1 + x^{n+1}} \quad (2.1.8)$$

Avremo quindi due carte (U_N, ϕ_N) e (U_S, ϕ_S) , le quali ci permettono di dire che $(S^n, \tau_{indotta})$ è una varietà topologica. La topologia che stiamo considerando sulla n-sfera non è altro che la topologia indotta da quella usuale di \mathbb{R}^{n+1} .

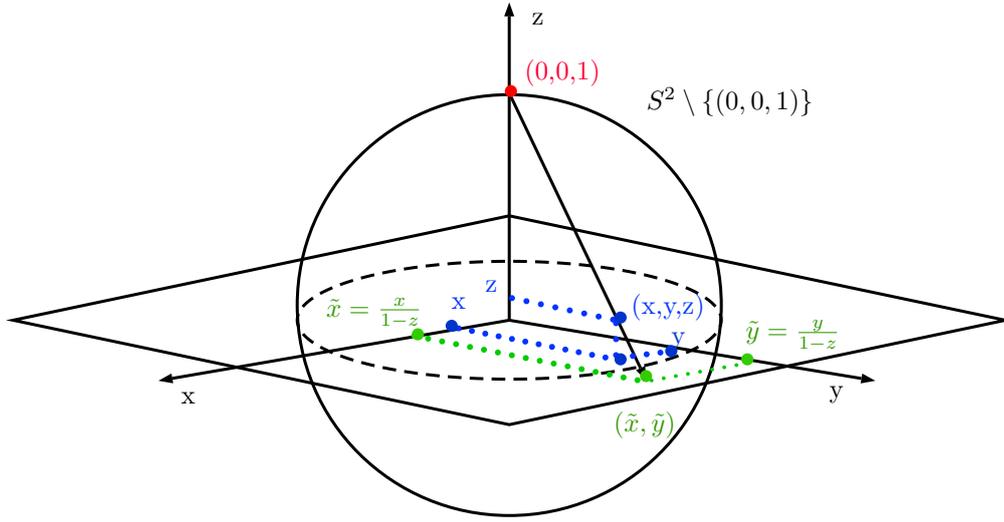


Figura 2.2: Coordinate della proiezione stereografica utilizzata per una 2-sfera immersa in \mathbb{R}^3

Per verificare che $\mathcal{A} = \{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ sia effettivamente un atlante per S^n ci basta verificare la compatibilità delle carte, ossia la condizione (iii) della definizione 2.3, in quanto la condizione (i) è già stata verificata, mentre la condizione (ii) è immediata.

Consideriamo allora le composizioni:

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1} \quad e \quad \phi_S \circ \phi_N^{-1} \quad (2.1.9)$$

Le inverse sono definite come:

$$\begin{aligned} \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow U_N \\ (\xi^1, \dots, \xi^n) &\mapsto \phi_N^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) = (\xi^1(1-R), \dots, \xi^n(1-R), R) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

dove l'ultima variabile R è definita tramite la relazione:

$$R = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n [(\xi^i)(1-R)]^2} \quad (2.1.11)$$

e analogamente per ϕ_S^{-1} :

$$\begin{aligned} \phi_S^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow U_S \\ (\xi^1, \dots, \xi^n) &\mapsto \phi_S^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) = (\xi^1(1+R), \dots, \xi^n(1+R), R) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

con R uguale (2.1.11).

Per verificare la differenziabilità della prima delle (2.1.9) costruiamo:

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) = \left(\frac{\xi^1(1+R)}{1-R}, \dots, \frac{\xi^n(1+R)}{1-R} \right) \quad (2.1.13)$$

possiamo allora dire che:

$$(\phi_N \circ \phi_S^{-1})^i = \frac{\xi^i(1+R)}{1-R} = (\phi_N(\vec{\alpha}))^i \quad (2.1.14)$$

con $\alpha^j = \xi^j(1+R)$.

Si può facilmente vedere come:

$$(\phi_N(\vec{\alpha}))^i = \frac{\alpha^i}{\sum_{i=0}^n (\alpha^i)^2} \quad (2.1.15)$$

e questa forma mostra l'infinita differenziabilità della funzione di transizione $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$ nell'intersezione dei domini $U_N \cap U_S = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, -1)\}$ e codomini $\mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$.

Con un percorso del tutto analogo si dimostra che anche $\phi_S \circ \phi_N^{-1}$ è una applicazione differenziabile infinite volte.

Ora che sappiamo che \mathcal{A} è un atlante, tutte le carte che saranno C^∞ compatibili con questo, potranno essere usate. Basterà prendere la classe di equivalenza di questo atlante per avere l'atlante massimale. Abbiamo così definito la varietà differenziabile liscia n-dimensionale:

$$\mathcal{S}^n := (S^n, \tau_{indotta}, \mathcal{A}_{max}) \quad (2.1.16)$$

2.1.2 Matrici complesse unitarie unidimensionali - $U(1)$

Il sottoinsieme delle matrici 1×1 a coefficienti complessi e unitarie non è altro che:

$$U(1) := \{A \in M_{1 \times 1}(\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}\} \quad (2.1.17)$$

Con l'operazione di moltiplicazione righe per colonne, questo insieme diventerà un gruppo, che, come abbiamo già visto, sarà denotato come $\mathbf{U}(1) := (U(1), \cdot)$.

Per introdurre una topologia su questo gruppo, definiamo le palle aperte in \mathbb{C} :

$$B_r(z) := \{\tilde{z} \in \mathbb{C} \mid |z - \tilde{z}| < r\} \quad (2.1.18)$$

Avremo lo spazio topologico $(\mathbb{C}, \tau_{\mathbb{C}})$ e dato che $U(1) \subset \mathbb{C}$, possiamo considerare la topologia indotta:

$$\tau_{U(1)} := \tau_{\mathbb{C}|_{U(1)}} := \{U \cap U(1) \mid U \in \tau_{\mathbb{C}}\} \quad (2.1.19)$$

A questo punto bisogna cercare un atlante per questo spazio topologico. Prendiamo i due aperti:

$$U_N := \{A = (a) \in U(1) \mid a \neq i\} \equiv U(1) \setminus \{A = (a) \mid a = i\} \quad (2.1.20)$$

$$U_S := \{A = (a) \in U(1) \mid a \neq -i\} \equiv U(1) \setminus \{A = (a) \mid a = -i\} \quad (2.1.21)$$

dove $i = \sqrt{-1}$ unità immaginaria di \mathbb{C} .

Questi aperti ricopriranno tutto $U(1)$ e possiamo definire le relative mappe coordinate:

$$\begin{aligned} \phi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \phi_N(A) := \frac{x}{1-y} \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

e:

$$\begin{aligned} \phi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \phi_S(A) := \frac{x}{1+y} \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

dove $A = (a)$ e $a = x + iy$.

Queste sono della stessa forme delle mappe coordinate definite per una n-sfera. Infatti, si può dimostrare che gli spazi topologici $U(1)$ e S^1 sono omeomorfi. Non staremo quindi a ripetere ciò che abbiamo già visto nella parte precedente.

In conclusione avremo che $\mathcal{U}(1) := (U(1), \tau_{U(1)}, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A} := \{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ sarà una varietà differenziabile liscia unidimensionale.

2.1.3 Matrici unitarie 2×2 speciali - $SU(2)$

L'insieme delle matrici unitarie speciali è il sottoinsieme delle matrici 2×2 a coefficienti complessi la cui inversa è uguale al complesso coniugato trasposto della stessa, e con determinante uguale a +1:

$$SU(2) := \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}, \det(A) = 1\} \quad (2.1.24)$$

Dotato dell'operazione di moltiplicazione riga per colonna, questo insieme prende la struttura di gruppo:

$$\mathbf{SU}(2) := (SU(2), \cdot) \quad (2.1.25)$$

Le matrici appartenenti all'insieme $SU(2)$ dovranno essere nella forma:

$$SU(2) \ni A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ tali che: } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.1.26)$$

Se consideriamo $\alpha = x + iy$ e $\beta = z + it$, allora la condizione di determinante unitario si tradurrà nella:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \quad (2.1.27)$$

la quale mostra una naturale identificazione di questo insieme $SU(2)$ con la 3-sfera S^3 . Possiamo anche in questo caso fare riferimento alle carte definite sulla sfera e avremo che $SU(2)$ sarà una varietà differenziabile 3-dimensionale liscia:

$$SU(2) := (SU(2), \tau_{SU(2)}, \mathcal{A}_{max}) \quad (2.1.28)$$

dove in questo caso la topologia è indotta da \mathbb{C}^4 .

2.2 Struttura tangente

Data una varietà, vorremmo poterne associare ad ogni punto uno spazio vettoriale ad esso tangente, in questo modo si potranno definire vettori, campi vettoriali e forme differenziali.

Come facciamo, per esempio, a definire la velocità di una particella che si muove su di una sfera? Si potrebbe considerare la curva che la particella descrive sulla sfera e prendere come velocità la derivata della curva in ogni punto (prendere dunque i vettori tangenti alla curva). Ma come viene tradotto il concetto di tangenzialità in geometria differenziale? Cosa vuol dire derivare una curva che ha valori in una varietà?

Vediamo prima di tutto come si può interpretare il concetto di differenziabilità di una funzione che mappa punti tra due varietà (anche diverse in generale).

Siano allora $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}_{1max})$ varietà di dimensione m e classe C^k e $(\mathcal{N}, \theta, \mathcal{A}_{2max})$ varietà di dimensione n e classe C^h . Diremo che una mappa $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ è di classe C^d (con $d \leq \min\{k, h\}$) se e solo se per definizione, $\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}_{1max}$ carta in \mathcal{M} , e $\forall (V, \psi) \in \mathcal{A}_{2max}$ carta in \mathcal{N} con $f(U) \subseteq V$, si ha che la seguente mappa è di classe C^d :

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(f(U))$$

Il che è equivalente a richiedere che il seguente diagramma commuti, con $\psi \circ f \circ \phi^{-1} \in C^d$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \phi^{-1}} & \psi(f(U)) \end{array}$$

La condizione di differenziabilità per una mappa definita su varietà a valori in varietà è dunque trasportata alla differenziabilità di una funzione tra \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n .

Definiamo:

$$C^d(\mathcal{M}, \mathcal{N}) := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \mid f \text{ è di classe } C^d\}$$

in particolare quando la varietà bersaglio è \mathbb{R} avremo:

$$C^d(\mathcal{M}) := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è di classe } C^d\}$$

2.2.1 Spazio tangente

Ci sono diversi modi equivalenti per definire lo spazio tangente in un punto di una varietà, in questo estratto ne verranno citati due.

Da ora in avanti considereremo sempre $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}_{max})$ varietà n dimensionale di classe C^∞ e la indicheremo semplicemente con \mathcal{M} .

$$\forall f \in C^\infty(\mathcal{M}) : (v_p + w_p)f := v_p(f) + w_p(f)$$

e

$$\cdot : \mathbb{R} \times (T_p\mathcal{M})^{der} \rightarrow (T_p\mathcal{M})^{der}$$

$$\forall f \in C^\infty(\mathcal{M}) : (\lambda \cdot v_p)f := \lambda \cdot v_p(f)$$

Si può vedere subito come con questa seconda definizione di spazio tangente, la sua struttura di spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} emerga in modo assolutamente naturale.

“Derivata parziale” di una funzione

Come piccola parentesi vogliamo soffermarci un attimo sul significato della scrittura:

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_0} (f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Dai corsi di analisi questa scrittura è ben nota ed in particolare è definita da:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_0} (f(x_1, x_2, \dots, x_n)) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{0_1}, \dots, x_{0_i} + t, \dots, x_{0_n}) - f(x_{0_1}, \dots, x_{0_n})}{t} \quad (2.2.5)$$

Vorremmo avere una sorta di definizione di derivata parziale anche in questo contesto in cui sono presenti varietà differenziabili. Sia $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ e (U, ϕ) carta locale, definiamo allora la derivata della funzione f in un punto $p \in U$ come:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p f := \partial_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \quad (2.2.6)$$

Dove chiaramente $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ in quanto è una mappa coordinata che ha come codominio un aperto di \mathbb{R}^n e ∂_i rappresenta la classica derivata parziale rispetto alle coordinate di \mathbb{R}^n calcolata nel punto $\phi(p)$.

Equivalenza tra $(T_p\mathcal{M})^{curve}$ e $(T_p\mathcal{M})^{der}$

Possiamo notare immediatamente come la prima definizione di spazio tangente fornisca una derivazione nel seguente modo: sia $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ una curva passante per $p \in \mathcal{M}$, avremo dunque che $[\gamma] \in (T_p\mathcal{M})^{curve}$ e definiamo $\forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$ la mappa $v_p : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$v_p f := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \gamma)(t) \quad (2.2.7)$$

Si verifica facilmente che $v_p \in (T_p\mathcal{M})^{der}$, in quanto la derivata usuale rispetta la regola di Leibniz.

Viceversa possiamo considerare una derivazione $v_p \in (T_p\mathcal{M})^{der}$ e costruire una classe di equivalenza di curve passanti per $p \in \mathcal{M}$. $\forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$ e (U, ϕ) carta locale di \mathcal{M} , definiamo $v^i = v_p \phi^i$ e quindi $v \in \mathbb{R}^n$ come $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$, allora:

$$\gamma_v : I \rightarrow \mathcal{M}$$

$$t \mapsto \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$$

Con I intervallo di \mathbb{R} abbastanza piccolo da fare in modo che $(\phi(p) + tv) \in \phi(U)$. In questo modo $\gamma_v(0) = \phi^{-1}(\phi(p)) = p$ e $[\gamma_v] \in (T_p\mathcal{M})^{curve}$.

Si verifica che queste relazioni inducono un isomorfismo tra $(T_p\mathcal{M})^{curve}$ e $(T_p\mathcal{M})^{der}$. Da ora in poi non faremo distinzione tra queste due definizioni di spazio tangente, e lo indicheremo in generale come $T_p\mathcal{M}$.

Definizione 2.6 (Mappa tangente in un punto). Se abbiamo un funzione $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tra due varietà, definiamo la sua *mappa tangente* in un punto $p \in \mathcal{M}$ (o push-forward), la seguente applicazione lineare:

$$T_p f : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)} \mathcal{N}$$

tale che

$$\forall g \in C^\infty(\mathcal{N}) : (T_p f(v_p))(g) := v_p(g \circ f) \quad (2.2.8)$$

Indicheremo equivalentemente $T_p f \equiv f_{p*}$.

Se $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, allora chiameremo la mappa tangente nel punto p ‘differenziale di f in p ’ e la indicheremo con df_p . In questo caso si ha semplicemente che $\forall v_p \in T_p \mathcal{M} : df_p(v_p) = v_p f$.

Base per $T_p \mathcal{M}$

Come abbiamo già visto, lo spazio tangente in un punto di una varietà è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} . È stato inoltre accennato che la sua dimensione è proprio uguale alla dimensione della varietà stessa. Possiamo infatti enunciare il seguente teorema che non verrà dimostrato (si può fare riferimento a [16] o [17]).

Teorema 2.2.1. *Sia \mathcal{M} una varietà di dimensione n di classe C^k , sia (U, ϕ) una carta locale e $p \in U$. Allora il seguente insieme di derivazioni:*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \phi^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \phi^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi^n} \Big|_p \right\}$$

è una base per $T_p \mathcal{M}$ e $\forall v_p \in T_p \mathcal{M}$ si ha la seguente decomposizione (in notazione di Einstein):

$$v_p = v_p(\phi^i) \frac{\partial}{\partial \phi^i} \Big|_p \equiv v^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} \Big|_p \quad (2.2.9)$$

Dato che lo spazio tangente è uno spazio vettoriale (di dimensione finita e pari alla dimensione della varietà stessa), ogni suo elemento può essere rappresentato in una opportuna base. Questo teorema ci dice come deve essere fatta una suddetta base per ogni spazio tangente attaccato ad ogni punto della varietà.

Invarianza per cambio di coordinate

I vettori così definiti non dovrebbero essere dipendenti dalle coordinate che si scelgono sulla varietà, ossia dovrebbero presentare un’invarianza per cambio di carte. Questo fatto deve essere intuitivamente vero, infatti, se si pensa alla velocità di una particella che si muove su una superficie, questa non può essere diversa se considero sistemi di coordinate diverse. Questa invarianza si ricava dal fatto che le componenti si trasformano in modo opposto rispetto ai vettori di base.

Consideriamo allora una varietà liscia n -dimensionale \mathcal{M} e due carte locali che si sovrappongono (U, ϕ) e (V, ψ) . Prendiamo un $v_p \in T_p \mathcal{M}$ e vediamo come si trasformano gli elementi di base ed i coefficienti della decomposizione di v_p nella base $\{\partial/\partial \phi^i|_p\}_{i=1, \dots, n}$:

$$\begin{aligned} v^i = v_p(\phi^i) &= \frac{d}{dt} \Big|_0 (\phi^i \circ \gamma)(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 (\phi^i \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma)(t) \\ &= \partial_j (\phi^i \circ \psi^{-1})(\psi(\gamma(0))) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_0 (\psi^j \circ \gamma)(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial \psi^j} \Big|_p \phi^i \cdot v_p(\psi^j) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

dove $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ è tale che $v_p = [\gamma]$.

Mentre i vettori di base trasformano come:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p f &= \partial_i (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \\
&= \partial_i (f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \\
&= \partial_j (f \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p \psi^j \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p \psi^j \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right|_p f
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Si avrà allora che un vettore v_p sarà invariante rispetto a cambi di coordinate in quanto:

$$\begin{aligned}
v_p = v_p(\phi^i) \left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p &= \left(v_p(\psi^j) \left. \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right|_p \phi^i \right) \cdot \left(\left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p \psi^h \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \psi^h} \right|_p \right) \\
&= v_p(\psi^j) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right|_p \phi^i \right)^{-1} \cdot \left(\left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p \psi^h \right) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \psi^h} \right|_p \\
&= v_p(\psi^j) \cdot \delta_j^i \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right|_p \\
&= v_p(\psi^j) \left. \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right|_p
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

I nostri vettori tangenti, dunque, hanno la desiderata proprietà di invarianza per cambio di coordinate. Si può notare, inoltre, che la (2.2.11) fornisce il modo in cui si trasformano le derivate parziali per cambio di coordinate. In particolare si può notare come il primo termine dell'ultima uguaglianza non è altro che lo Jacobiano della trasformazione $\phi \rightarrow \psi$.

2.2.2 Spazio cotangente

Dato che lo spazio tangente è uno spazio vettoriale, possiamo considerare il suo duale algebrico, ossia lo *spazio cotangente* in un punto.

Definizione 2.7. Sia \mathcal{M} varietà differenziabile di dimensione n e classe C^k , $p \in \mathcal{M}$ e $T_p\mathcal{M}$ il suo spazio tangente. Definiamo lo spazio cotangente in p come:

$$T_p\mathcal{M}^* := \{ \omega_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega_p \text{ è lineare} \} \tag{2.2.13}$$

Come per ogni spazio duale finito dimensionale, possiamo definire una base duale a quella dello spazio vettoriale di partenza con la stessa cardinalità. Sia dunque $\{ \partial/\partial \phi^i|_p \}_{i=1, \dots, n}$ base per $T_p\mathcal{M}$ nel punto p rispetto alla carte locale (U, ϕ) , allora definiamo le seguenti applicazioni:

$$\forall j = 1, \dots, n : d\phi_p^j : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.2.14}$$

tali che:

$$\forall i = 1, \dots, n : d\phi_p^j \left(\left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p \right) = \delta_i^j \tag{2.2.15}$$

con δ_i^j delta di Kronecker.

Avremo allora la base duale $\{ d\phi_p^1, d\phi_p^2, \dots, d\phi_p^n \}$ dello spazio cotangente nel punto p ed una decomposizione degli elementi $\omega \in T_p\mathcal{M}^*$ in:

$$\omega_p = \omega_i \cdot d\phi_p^i$$

con $\omega_i \in \mathbb{R}$.

Gli elementi dello spazio cotangente saranno chiamati *covettori* e saranno appunto delle applicazioni lineari che ad ogni vettore assegneranno uno scalare. Quando in fisica si fa questa distinzione, si sta implicitamente facendo riferimento a elementi di uno spazio tangente (vettori) e ad elementi del suo corrispondente spazio cotangente (covettori).

Se consideriamo la base classica per lo spazio tangente $T_p\mathcal{M}$ e la sua base duale per $T_p\mathcal{M}^*$ su una carta (U, ϕ) della varietà \mathcal{M} , possiamo vedere come agisce un covettore applicato ad un vettore. Siano dunque $\omega_p \in T_p\mathcal{M}^*$ e $v_p \in T_p\mathcal{M}$:

$$\omega_p(v_p) = \omega_i d\phi^i \left(v_j \frac{\partial}{\partial \phi^j} \Big|_p \right) = \omega_i v^j dx_p^i \left(\frac{\partial}{\partial \phi^j} \Big|_p \right) = \omega_i v^j \delta_j^i = \omega_i v^i \quad (2.2.16)$$

Si può notare una certa somiglianza con la contrazione (1.2.7) che abbiamo visto nel primo capitolo. Come già accennato, infatti, si poteva trattare x_μ come un covettore e quindi una applicazione lineare. Effettivamente le ω_i sono le componenti del covettore ω_p .

2.2.3 Fibrato tangente e cotangente

I concetti di fibrato tangente e cotangente sono alla base della meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana. La Lagrangiana è infatti definita come una funzione $C^\infty(T\mathcal{M})$, con $T\mathcal{M}$ fibrato tangente associato ad una varietà \mathcal{M} . Questa varietà sarà lo spazio delle configurazioni e quando si definirà il suo fibrato cotangente $T\mathcal{M}^*$ (duale del fibrato tangente), questo si identificherà con lo spazio delle fasi. La Hamiltoniana è dunque una applicazione che va dal fibrato cotangente ad \mathbb{R} , ossia appartiene a $C^\infty(T\mathcal{M}^*)$. Vediamo ora come costruire questi due spazi.

Ciò che possediamo è uno spazio tangente (cotangente) in ogni punto di una varietà differenziabile \mathcal{M} . Possiamo allora considerare l'unione disgiunta di questi spazi. Il termine 'disgiunta' riferito al sostantivo 'unione', significa che ogni elemento appartenente a questa unione di spazi vettoriali apparterrà ad uno ed uno solo di questi spazi, in particolare definiamo:

- Fibrato tangente:

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} \quad (2.2.17)$$

- Fibrato cotangente

$$T\mathcal{M}^* := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}^* \quad (2.2.18)$$

Queste due strutture ci vengono fornite direttamente con una mappa suriettiva (mai iniettiva), chiamata proiezione, definita in modo naturale come:

$$\begin{aligned} \pi : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ \pi(v) &= p \in \mathcal{M} \text{ se } v \in T_p\mathcal{M} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

e

$$\begin{aligned} \pi : T\mathcal{M}^* &\rightarrow \mathcal{M} \\ \pi(\omega) &= p \in \mathcal{M} \text{ se } \omega \in T_p\mathcal{M}^* \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Queste mappe sono chiaramente suriettive, in quanto, per definizione, i fibrati contengono tutti i vettori tangenti (cotangenti) degli spazi tangenti (cotangenti), i quali sono definiti in ogni punto della varietà stessa. Queste applicazioni non saranno mai iniettive, in quanto $\forall p \in \mathcal{M}$, $T_p\mathcal{M}$ contiene tutte le combinazioni lineari di ogni vettore. Se per esempio consideriamo $v_p \in T_p\mathcal{M}$, allora $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists (\lambda v_p) \in T_p\mathcal{M}$ e chiaramente $\pi(v_p) = \pi(\lambda v_p) = p$ con $v_p \neq \lambda v_p$. Per definizione di iniettività, dunque, le π non sono 1-1.

Se prendiamo una carta (U, ϕ) di \mathcal{M} , possiamo ottenere una carta $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ per il fibrato tangente ponendo:

- $\tilde{U} := TU = \pi^{-1}(U)$
- $\tilde{\phi}(v) := (\phi^1(p), \dots, \phi^n(p), v^1, \dots, v^n)$ se $v \in T_p\mathcal{M}$

Se organizziamo le componenti del vettore $v \in T_p\mathcal{M}$ in un vettore n -dimensionale (se n è la dimensione della varietà e quindi di ogni spazio tangente associato ad ogni punto) $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, allora l'ultimo punto si può riscrivere in maniera più compatta come:

$$\tilde{\phi}(v) = (\phi(p), \vec{v}) \quad (2.2.21)$$

Se consideriamo l'espansione di v_p nella base $\{\partial/\partial\phi^i|_p\}_{i=1,\dots,n}$ e prendiamo $\{d\phi_p^j\}_{j=1,\dots,n}$ come la base duale, dato che $v^i = d\phi_p^i(v_p)$, allora si avrà:

$$\tilde{\phi} = (\phi^1 \circ \pi, \dots, \phi^n \circ \pi, d\phi_p^1, \dots, d\phi_p^n)$$

In modo del tutto analogo si costruiscono delle carte per il fibrato cotangente. Questi fibrati saranno dunque delle varietà differenziabili di dimensione $2n$ se lo spazio base su cui sono costruiti ha dimensione n . Un modo per rappresentare vettori del fibrato è anche quello di vederli come delle coppie in cui è presente il punto della varietà ed il vettore tangente ad esso corrispondente. Come vedremo più avanti, la struttura di un fibrato è proprio quella di essere assimilabile ad un prodotto cartesiano almeno in un intorno di ogni elemento dello spazio base. Se consideriamo allora un elemento $p \in \mathcal{M}$ e un suo intorno $U \subset T\mathcal{M}$, allora se v è "attaccato" al punto $p \in U$ ($v \in T_p\mathcal{M}$), potremmo vedere questo vettore come un elemento del fibrato tangente $T\mathcal{M}$:

$$v = (p, \vec{v}) \in U \times \mathbb{R}^n \quad (2.2.22)$$

Come vedremo più avanti, lo spazio $T\mathcal{M}$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale, in quanto lo spazio $\pi^{-1}(p)$ (chiamata fibra), per ogni punto, è isomorfa ad \mathbb{R}^n . Discorsi analoghi, chiaramente, valgono per il fibrato cotangente $T\mathcal{M}^*$.

Mappa tangente

Ad ogni funzione $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, possiamo associare una mappa tra i relativi fibrati tangenti:

$$Tf : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$$

data dalla unione delle singole mappe tangenti $T_p f$. Questa viene chiamata *mappa tangente o sollevamento tangente* di f . Anche questa funzione viene spesso chiamata push-forward ed indicata con f_* .

Definizione 2.8 (Differenziale). Consideriamo una $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, allora la sua mappa tangente non sarà altro che:

$$df := Tf : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$$

$$df(p)(v) := v(f) \quad \text{con } v \in T_p\mathcal{M}$$

e sarà chiamata *differenziale* di f .

2.2.4 Campi vettoriali

Nel contesto dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , i campi vettoriali non sono altro che delle applicazioni che ad ogni punto dello spazio associano un vettore (dunque funzioni $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Mentre in geometria differenziale, abbiamo una varietà e vogliamo associare ad ogni punto di quest'ultima un vettore (tangente). In ogni punto di quest'ultima c'è uno spazio tangente diverso che non ha nulla a che fare con gli altri, abbiamo, però, una mappa (la proiezione) che ci associa ad ogni vettore tangente il punto a cui appartiene lo spazio (tangente) in cui vive.

Definiremo dunque un campo vettoriale globale come un'applicazione:

$$X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} \quad (2.2.23)$$

tale che:

$$\pi \circ X = id_{\mathcal{M}} \quad (2.2.24)$$

dove π è la proiezione canonica del fibrato tangente.

Consideriamo ora un $p \in \mathcal{M}$ e una carta (U, ϕ) con $p \in U$, abbiamo allora i seguenti campi vettoriali locali:

$$\forall i = 1, \dots, n : \frac{\partial}{\partial \phi^i} : p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p \quad (2.2.25)$$

ossia tali che $\pi \circ \frac{\partial}{\partial \phi^i} = id_U$.

Se consideriamo un campo vettoriale X , allora per certe funzioni lisce $X^i \in C^\infty(\mathcal{M})$:

$$X(p) = X^i(p) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right|_p \quad (2.2.26)$$

e dunque avremo la seguente rappresentazione locale:

$$X|_U = X^i \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^i} \quad (2.2.27)$$

In generale tralascieremo l'indicazione della restrizione del campo vettoriale al dominio della carta locale, i.e., $X|_U = X$. Diremo, inoltre, che il campo vettoriale è di classe C^k se le X^i sono di classe C^k .

Definizione 2.9. Indicheremo con $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ l'insieme di tutti i campi vettoriali lisci su \mathcal{M} :

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M}) := \{X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} \mid \pi \circ X = id_{\mathcal{M}}, X \text{ liscio}\} \quad (2.2.28)$$

I campi vettoriali sono dunque delle assegnazioni lisce di vettori tangenti ad ogni punto della varietà. Se pensiamo al campo elettrico generato da una carica (positiva) nello spazio euclideo 3-dimensionale, questo, come ben noto, potrà essere rappresentato assegnando ad ogni punto dello spazio un vettore la cui lunghezza indica l'intensità del campo, mentre direzione e verso indicano dove è diretto. In questo caso saranno vettori disposti su rette uscenti dalla carica in modo isotropo. Si parla appunto di *campi* elettrici e magnetici perchè non sono altro che campi vettoriali nello spazio \mathbb{R}^3 (o comunque componenti di campi vettoriali). Se prendiamo un campo elettrico classico $\vec{E} = (E^x, E^y, E^z)$, questo in geometria differenziale può essere rappresentato come un campo vettoriale globale $E = E^x \partial_x + E^y \partial_y + E^z \partial_z$, dove si è presa una unica carta di \mathbb{R}^3 uguale a $(\mathbb{R}^3, \phi = (x, y, z))$.

Struttura di spazio vettoriale

Se consideriamo le operazioni:

$$+ : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall p \in \mathcal{M} : (X + Y)(p) := X(p) + Y(p) \quad (2.2.29)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

$$\forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathcal{M} : (\lambda \cdot X)(p) := \lambda \cdot X(p) \quad (2.2.30)$$

Allora $(\mathfrak{X}(\mathcal{M}), +, \cdot)$ sarà uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} .

Se definiamo anche:

$$\odot : C^\infty(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

$$\forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall p \in \mathcal{M} : (f \odot X)(p) := f(p) \cdot X(p) \quad (2.2.31)$$

Allora $(\mathfrak{X}(\mathcal{M}), +, \odot)$ sarà un modulo sull'anello delle funzioni lisce $C^\infty(\mathcal{M})$. Useremo il simbolo del prodotto usuale (ossia il puntino \cdot) per indicare \odot .

Lo spazio dei campi vettoriali è dunque uno spazio vettoriale, si potranno quindi combinare linearmente campi diversi.

Derivata di Lie di una funzione

Se abbiamo un funzione liscia dalla varietà ai numeri reali ed un campo vettoriale, possiamo chiederci come varia questa funzione in relazione al campo vettoriale. Dato che i campi vettoriali non sono altro che vettori tangenti e dunque derivazioni, si tratterà di derivate direzionali nella direzione data dal campo vettoriale. Definiamo quindi la *derivata di Lie* di una funzione rispetto ad un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, come:

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$$

tale che:

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = X(p)f =: X_p f \quad (2.2.32)$$

Ricordando la definizione di differenziale df_p possiamo vedere che:

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = X_p f = df_p(X_p) \quad (2.2.33)$$

e quindi $\mathcal{L}_X = df \circ X$ con $df : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sollevamento tangente di f (anch'esso differenziale di f).

Commutatore

Se consideriamo l'insieme delle derivazioni delle funzioni lisce su una varietà come:

$$\text{Der}(C^\infty(\mathcal{M})) := \{\mathcal{D} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \mid \mathcal{D} \text{ è una derivazione}\} \quad (2.2.34)$$

allora dato che anche \mathcal{L}_X soddisfa la regola di Leibnitz, apparterrà a $\text{Der}(C^\infty(\mathcal{M}))$. Si può inoltre dimostrare che se due funzionali di Lie \mathcal{L}_X e \mathcal{L}_Y , definiti per due campi vettoriali diversi X e Y , sono uguali alla stessa derivazione \mathcal{D} , allora necessariamente i due campi vettoriali dovranno essere uguali e vale anche il viceversa. In formalismo matematico, quanto appena detto si traduce in:

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{D} \in \text{Der}(C^\infty(\mathcal{M})), X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) : \\ (\mathcal{L}_X = \mathcal{D}) \Rightarrow ((\mathcal{L}_Y = \mathcal{D}) \Leftrightarrow (Y = X)) \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Questo teorema ci permette di identificare ogni campo vettoriale con una derivazione e potremmo scrivere senza ambiguità:

$$\mathcal{L}_X f = Xf \quad (2.2.36)$$

Si avrà inoltre che per ogni coppia di campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, ne esisterà uno, $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, tale che valga la seguente relazione:

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Z \quad (2.2.37)$$

Indicheremo questo campo vettoriale Z , come $[X, Y]$. Questa notazione deriva dal fatto che nell'insieme delle derivazione si può definire il commutatore, che sarà anch'esso una derivazione, nel solito modo come:

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 \quad (2.2.38)$$

e si può facilmente dimostrare che:

$$\mathcal{L}_Z f = [X, Y]f \quad (2.2.39)$$

(per questo chiameremo $Z = [X, Y]$)

Definiamo allora la mappa bilineare $[\cdot, \cdot]$ che associa ad ogni coppia di campi vettoriali il loro commutatore, nel senso che:

$$[X, Y]f = (X(Yf) - Y(Xf)) \quad (2.2.40)$$

e potremo scrivere $[X, Y] = XY - YX$.

Questa operazione bilineare nello spazio dei campi vettoriali introduce una nuova struttura, infatti $(\mathfrak{X}(\mathcal{M}), +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ con:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

sarà un'algebra di Lie, in quanto l'applicazione $[\cdot, \cdot]$ è bilineare (su \mathbb{R}), antisimmetrica e rispetta l'identità di Jacobi.

Flusso di un campo vettoriale

Se pensiamo ad un campo vettoriale come ad una assegnazione liscia di vettori tangenti su una varietà, allora possiamo pensare di seguire una certa direzione, nel senso di scegliere un vettore tangente e in base a dove punta, scegliere il successivo e così via (vedere figura 2.4). Questa considerazione molto euristica, si formalizza nel concetto di *curva integrale*, la quale non sarà altro che la curva definita sulla varietà "seguendo" un dato vettore iniziale. Successivamente si potrà pensare di associare ad ogni punto la sua curva integrale e definiremo così il concetto di *flusso*. Vedremo che definire un flusso, corrisponde in modo univoco a definire il campo vettoriale. Il concetto di flusso, però, spesso è più utile in quanto può essere visto come gruppo ad un parametro che agisce su punti della varietà.

Definizione 2.10 (Curva integrale). Sia $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, e $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ curva con origine in $p \in \mathcal{M}$, diremo che essa è una *curva integrale* per X se:

$$X \circ \gamma = \dot{\gamma} \tag{2.2.41}$$

dove $\dot{\gamma}$ è per definizione il vettore velocità della curva γ in un generico $t \in I$ appartenente allo spazio tangente $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$, ossia:

$$\forall f \in C^\infty(\mathcal{M}) : \dot{\gamma}(t)f := \left. \frac{d}{dt} \right|_t (f \circ \gamma)(t) \tag{2.2.42}$$

Se si guarda la (2.2.41) in coordinate locali, si noterà come essa nasconda un'equazione differenziale. Prendiamo infatti una carta locale (U, x) per \mathcal{M} e come abbiamo già visto, possiamo scomporre un vettore tangente nelle sue componenti:

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}(t))(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_t (x^i \circ \gamma) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} \tag{2.2.43}$$

e

$$X(\gamma(t)) = X^i(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} \tag{2.2.44}$$

Perchè (2.2.41) sia rispettata, le loro componenti espresse nella stessa base devono coincidere, ossia:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t (x^i \circ \gamma) = X^i \circ \gamma \tag{2.2.45}$$

che è proprio una equazione differenziale ordinaria del primo ordine.

Ora che abbiamo introdotto il concetto di curva integrale per un campo vettoriale, possiamo definire il flusso. Se si volesse essere precisi, bisognerebbe definire il flusso locale (flow box) che si dimostra esistere in ogni intorno di ogni punto di una varietà sulla quale è definito il campo vettoriale. Noi ci limiteremo a definire il *flusso globale*, il quale esiste sempre per un campo vettoriale *completo* (la completezza di un campo vettoriale non è altro che la richiesta che le curve integrali siano definite non solo per un intervallo, ma su tutto \mathbb{R}). Useremo questo fatto in quanto ogni campo vettoriale definito su una varietà *compatta* è completo, e noi considereremo sempre varietà compatte.

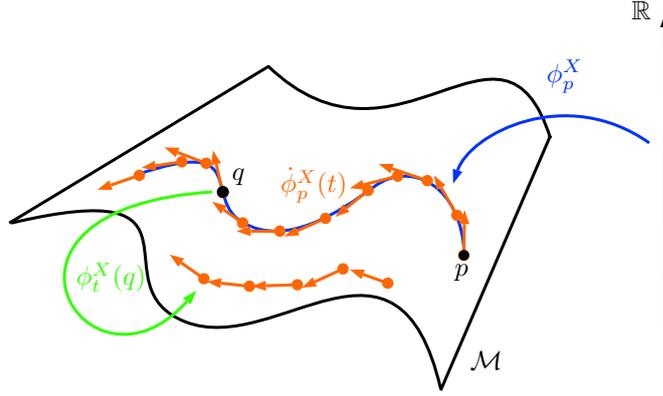


Figura 2.4: Flusso di un campo vettoriale definito su una varietà 2-dimensionale \mathcal{M}

Definizione 2.11 (flusso globale). Prendiamo un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e definiamo il suo *flusso globale* come l'applicazione:

$$\phi^X : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.2.46)$$

tale che soddisfi i seguenti requisiti:

- (i) ϕ^X è di classe C^∞
- (ii) l'applicazione che fissato un punto $p \in \mathcal{M}$, associa ad ogni elemento $t \in \mathbb{R}$ un altro punto di \mathcal{M} , è una curva integrale del campo vettoriale con origine in p . In pratica:

$$t \mapsto \phi_p^X(t) := \phi^X(t, p) \quad \text{è una curva integrale di } X \quad (2.2.47)$$

con $\phi_p^X(0) = p$.

- (iii) l'applicazione che fissato un $t \in \mathbb{R}$, associa ad ogni punto $p \in \mathcal{M}$ un altro punto della varietà, è un diffeomorfismo. In pratica:

$$p \mapsto \phi_t^X(p) := \phi^X(t, p) \quad \text{è un diffeomorfismo} \quad (2.2.48)$$

Questi requisiti fanno sì che $\phi_t^X(\phi_s^X(p)) = \phi_{t+s}^X(p)$ e $\phi_{-t}^X = (\phi_t^X)^{-1}$. Queste nuove proprietà rendono l'applicazione $t \mapsto \phi_t^X$ un omomorfismo di gruppi, da $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo dei diffeomorfismi su \mathcal{M} .

Se abbiamo un campo vettoriale X su una varietà \mathcal{M} , sarà quindi definito il suo flusso ϕ^X e avremo che:

$$X(p) = X(\phi_p^X(0)) = \dot{\phi}_p^X(0) \quad (2.2.49)$$

e quindi agirà su una generica funzione $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ come:

$$X(p)f = (\mathcal{L}_X f)(p) = \dot{\phi}_p^X(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \phi_p^X)(t) \quad (2.2.50)$$

Siamo pronti per definire un'importante endomorfismo dello spazio dei campi vettoriali, ossia la *derivata di Lie di un campo vettoriale*. All'inizio potrebbe sembrare nulla di nuovo, ma ora che abbiamo introdotto il concetto di flusso, verranno fuori importanti risultati.

Definizione 2.12 (Derivata di Lie di un campo vettoriale). Prendiamo un campo vettoriale X definito sulla varietà \mathcal{M} , definiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ Y &\mapsto \mathcal{L}_X(Y) := [X, Y] \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

e sarà chiamata la *derivata di Lie* di Y rispetto ad X .

Questa derivata di Lie è dunque semplicemente il commutatore tra i due campi vettoriali presi in considerazione. Se però si considera una linearizzazione (che si dimostra essere possibile) della composizione di una funzione con il flusso di un campo vettoriale:

$$(f \circ \phi^X)(t, q) = f(q) + g(t, q)t \quad \text{per una specifica funzione } g \quad (2.2.52)$$

si può dimostrare che la derivata di Lie di un campo vettoriale Y rispetto ad un altro X può essere riscritta come:

$$\mathcal{L}_X(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\phi_t^X)^* Y \quad (2.2.53)$$

dove ϕ^X è il flusso del campo vettoriale X e $(\phi_t^X)^* Y$ è il *pull-back* di Y rispetto alla funzione ϕ_t^X . Quest'ultimo è definito nel seguente modo:

Definizione 2.13 (pull-back e push-forward). Prendiamo una funzione tra due varietà $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ e due campi vettoriali $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$. Definiamo due nuovi campi vettoriali come:

1. Pull-back:

$$\varphi^* Y := T\varphi^{-1} \circ Y \circ \varphi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (2.2.54)$$

2. Push-forward:

$$\varphi_* X := T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \quad (2.2.55)$$

Si può dire che la derivata di Lie misura la mancanza di commutatività di due campi vettoriali. Quando infatti questa è uguale a zero, si dimostra che i relativi flussi commutano e che X è Y -invariante e Y è X -invariante. Queste due affermazioni significano che c'è una equivalenza tra le seguenti:

(i)

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y] = 0$$

(ii)

$$\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$$

(iii)

$$Y = (\phi_t^X)^* Y \quad X = (\phi_s^Y)^* X$$

Quando infatti si pensa all'operazione di commutazione tra due campi X e Y , si pensa di "seguire" per un certo tratto X e poi Y , viceversa, partendo dallo stesso punto, si prova a "seguire" Y e poi X . In generale non si arriverà nel medesimo punto di arrivo, questo accadrà solo se il commutatore è nullo. Questa visione di "seguire" i campi vettoriali non è altro che "seguire" le curve integrali e per questo se il commutatore è nullo, i flussi commuteranno, perchè sarà indifferente l'ordine di "percordanza".

2.2.5 1-forme

Per ora abbiamo considerato solo delle associazioni di vettori tangenti ad ogni punto della varietà, ma dato che disponiamo anche di un fibrato cotangente, possiamo associare ad ogni punto della varietà un covettore. Questa definizione ci permetterà, in pratica, di poter associare ad ogni punto della varietà una applicazione lineare che prenderà come argomento un vettore tangente e ne restituirà un numero reale.

Definizione 2.14 (1-forme). Sia \mathcal{M} una varietà e $T\mathcal{M}^*$ il suo fibrato cotangente con $\pi : T\mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}$ proiezione. Definiremo una *1-forma* la seguente applicazione:

$$\omega : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}^*$$

tale che soddisfi:

$$\pi \circ \omega = \text{id}_{\mathcal{M}} \quad (2.2.56)$$

Come per i campi vettoriali, se prendiamo una carta (U, ϕ) , possiamo avere una rappresentazione in coordinate di una 1-forma nel seguente modo:

$$\omega = \omega_i d\phi^i \quad (2.2.57)$$

dove la base $\{d\phi_p^i\}_{i=1, \dots, n}$ è la base duale della base standard di $T\mathcal{M}$, $d\phi^i : p \mapsto d\phi_p^i$ sono 1-forme e $\omega_i \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Denoteremo l'insieme delle 1-forme definite sulla varietà \mathcal{M} come:

$$\Omega^1(\mathcal{M}) := \{\omega : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}^* \mid \pi \circ \omega = \text{id}_{\mathcal{M}}\} \quad (2.2.58)$$

Questa notazione diventerà più chiara quando definiremo le *k-forme*.

Possiamo osservare che il differenziale di una funzione che abbiamo definito precedentemente, non è altro che una 1-forma.

Una importante operazione sulle 1-forme è quella del pull-back che è definito nel seguente modo:

Definizione 2.15 (pull-back di 1-forme). Consideriamo una mappa tra due varietà $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ e una 1-forma ω definita su \mathcal{N} , definiamo il pull-back di ω rispetto a φ come:

$$(\varphi^* \omega)_p(v_p) := \omega_{\varphi(p)}(\varphi_{p*} v_p) \in \Omega^1 \mathcal{M} \quad (2.2.59)$$

con $p \in \mathcal{M}$ e $v_p \in T_p \mathcal{M}$.

2.3 Tensori e k-forme

La nozione di tensore generalizza ed ingloba tutte le definizioni di vettori, covettori, applicazioni lineari, ecc. In relatività, la metrica è anche chiamata *tensore metrico*, perchè a tutti gli effetti è un tensore (in realtà è un campo tensoriale) che associa ad ogni coppia di vettori che vivono in un punto dello-spazio tempo il loro prodotto scalare secondo la metrica che vi sarà in quel dato punto. In elettromagnetismo, il tensore dielettrico ed il tensore di permeabilità magnetica relazionano i campi elettrici e magnetici nella materia ad altre grandezze come il vettore di induzione elettrica e il vettore di magnetizzazione. Un ultimo esempio può essere quello del tensore di inerzia, che come ben noto "misura" l'inerzia del corpo al variare della sua velocità angolare e sarà un tensore 2-volte covariante.

2.3.1 Tensori

Considereremo sempre spazi vettoriali finito-dimensionali, in particolare sia V spazio vettoriale di dimensione n e V^* il suo duale. Un *tensore* $\binom{r}{s}$ è un'applicazione multilineare:

$$\tau : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-volte}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{s\text{-volte}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.1)$$

che potrà essere anche chiamata r -volte controvariante e s -volte covariante.

Lo spazio di tutti i tensori $\binom{r}{s}$ su V sarà denotato come:

$$T_s^r(V) := \left\{ \tau : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-volte}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{s\text{-volte}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \tau \text{ è multilineare} \right\} \quad (2.3.2)$$

Si può definire in modo formale il prodotto tensoriale di spazi vettoriali e vedere come:

$$T_s^r(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{s\text{-volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r\text{-volte}} \quad (2.3.3)$$

Questo sarà quindi uno spazio vettoriale e se $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ e $\{\epsilon^j\}_{j=1, \dots, n}$ sono basi di V e V^* , allora la seguente è una base per $T_s^r(V)$:

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_s} \mid i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n\} \quad (2.3.4)$$

Le componenti di un tensore saranno allora definite come:

$$\tau_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} := \tau(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \in \mathbb{R} \quad (2.3.5)$$

e avremo l'espansione nella base:

$$\tau = \tau_{j_1, \dots, j_n}^{i_1, \dots, i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_n} \quad (2.3.6)$$

Possiamo estendere il prodotto tensoriale anche a tensori che appartengono a spazi tensoriali diversi. Questo produrrà un nuovo tensore che vivrà in uno spazio diverso da quelli di partenza. Siano allora $\tau \in T_s^r(V)$ e $\tilde{\tau} \in T_q^p(V)$, definiamo il *prodotto tensoriale* tra τ e $\tilde{\tau}$ come un elemento che appartiene a $T_{s+q}^{r+p}(V)$:

$$(\tau \otimes \tilde{\tau})(v_1, \dots, v_{r+p}, \omega_1, \dots, \omega_{s+q}) := \tau(v_1, \dots, v_r, \omega_1, \dots, \omega_s) \tilde{\tau}(v_{r+1}, \dots, v_{r+p}, \omega_{s+1}, \dots, \omega_{s+q}) \quad (2.3.7)$$

Possiamo vedere ora che forma prendono i tensori definiti su una varietà \mathcal{M} n-dimensionale. Chiaramente lo spazio vettoriale V sarà lo spazio tangente in un punto $T_p\mathcal{M}$ e se prendiamo una carta (U, x) e le solite basi per spazio tangente e cotangente, un tensore $\tau_p \in T_s^r(T_p\mathcal{M})$ sarà rappresentato come:

$$\tau_p = \tau_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \Big|_p \otimes dx_p^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_p^{j_s} \quad (2.3.8)$$

Per poter definire campi tensoriali dobbiamo definire il fibrato dei $\binom{n}{m}$ -tensori su \mathcal{M} come:

$$\mathcal{T}_m^n \mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_m^n(T_p\mathcal{M}) \quad (2.3.9)$$

e la sua proiezione:

$$\pi : \mathcal{T}_m^n \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.3.10)$$

$$(\tau) \mapsto \pi(\tau) = p \quad \text{se } \tau \in T_m^n(T_p\mathcal{M}) \quad (2.3.11)$$

Possiamo subito notare che $\mathcal{T}_0^1 \mathcal{M} = T\mathcal{M}$ e $\mathcal{T}_1^0 \mathcal{M} = T\mathcal{M}^*$.

Denoteremo con $\mathfrak{X}_m^n(\mathcal{M})$ lo spazio dei campi tensoriali lisci su \mathcal{M} , ossia lo spazio delle applicazioni che associano in modo univoco ad ogni punto della varietà liscia un tensore di rango $\binom{n}{m}$:

$$\mathfrak{X}_m^n(\mathcal{M}) := \{\Upsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_m^n \mathcal{M} \mid \pi \circ \Upsilon = \text{id}_{\mathcal{M}}\} \quad (2.3.12)$$

Se consideriamo la metrica di Minkowski in relatività generale, questa è un tensore di rango $\binom{0}{2}$ su \mathbb{R}^4 o analogamente un'applicazione bilineare. Il tensore η soddisfa tutte le proprietà di un prodotto scalare tranne per il fatto che non è definito positivo, si dice infatti che è uno pseudo-prodotto scalare. Se volessimo rappresentare questo tensore in coordinate locali di \mathbb{R}^4 (che è banalmente una varietà liscia 4-dimensionale) avremo:

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 = \eta_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (2.3.13)$$

dove $\{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3\}$ è la base di $(\mathbb{R}^4)^*$ duale della $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ base standard di \mathbb{R}^4 .

In generale, però, non si hanno varietà piatte e banali come \mathbb{R}^n , dobbiamo infatti considerare il caso di una generica varietà liscia n-dimensionale \mathcal{M} . A questo punto diremo che è una varietà Riemanniana se è definito un campo tensoriale $g \in \mathfrak{X}_2^0(\mathcal{M})$ tale che $\forall p \in \mathcal{M}$ si ha che $g(p) \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{M})$ è:

(i) *Non-degenere*:

$$\forall v, w \in T_p\mathcal{M} : (g(p)(v, w) = 0) \implies (v = 0) \quad (2.3.14)$$

(ii) *Simmetrica*:

$$\forall v, w \in T_p\mathcal{M} : g(p)(v, w) = g(p)(w, v) \quad (2.3.15)$$

(iii) *Definita positiva*:

$$\forall v, w \in T_p \mathcal{M} : g(p)(v, v) \geq 0 \text{ con } = 0 \iff v = 0 \quad (2.3.16)$$

Chiameremo g metrica Riemanniana e (\mathcal{M}, g) *varietà Riemanniana*. Se g non soddisfa (iii), allora (\mathcal{M}, g) sarà una varietà pseudo-Riemanniana.

In generale indicheremo $\langle X_p, Y_p \rangle$ al posto di $g(p)(X_p, Y_p)$.

2.3.2 k-forme

Considerando l'insieme delle forme antisimmetriche (o alternanti) k -multilineari su uno spazio vettoriale n -dimensionale V :

$$\begin{aligned} L_{\text{alt}}^k(V) &:= \{ \alpha : \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k\text{-volte}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ è alternante } k\text{-multilineare} \} \\ &= \{ \alpha : \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k\text{-volte}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall v_i = v_j \in V : \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0 \} \end{aligned}$$

Se si definisce la *mapa di antisimmetrizzazione* come:

$$\begin{aligned} \text{Alt}^k : T_k^0(V) &\rightarrow L_{\text{alt}}^k(V) \\ \text{Alt}^k(\omega)(v_1, \dots, v_k) &:= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

dove S_k è l'insieme delle permutazioni di k elementi e $\text{sgn}(\sigma)$ è il segno della permutazione, allora potremmo definire il *prodotto esterno* o *prodotto wedge* di due elementi $\omega \in L_{\text{alt}}^{k_1}(V)$ e $\eta \in L_{\text{alt}}^{k_2}(V)$ come:

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \text{Alt}^{k_1+k_2}(\omega \otimes \eta) \quad (2.3.18)$$

Si può dimostrare che questo prodotto è antisimmetrico (graduato), \mathbb{R} -lineare e associativo.

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base per V e $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ la base duale di V^* , allora si dimostra che la seguente è una base per $L_{\text{alt}}^k(V)$:

$$\{\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\} \quad (2.3.19)$$

dunque ogni elemento di $\omega \in L_{\text{alt}}^k(V)$ può essere espresso come:

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum \omega_{i_1, \dots, i_k} \epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} \epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k} \quad (2.3.20)$$

Si può formalmente definire il prodotto wedge di spazi vettoriali e l'algebra di Grassmann, ossia si può costruire lo spazio:

$$\bigwedge^k V := \underbrace{V \wedge \cdots \wedge V}_{k\text{-volte}} \quad (2.3.21)$$

ed in particolare si può dimostrare che ci sono i seguenti isomorfismi:

$$\bigwedge^k V^* \cong L_{\text{alt}}^k(V) \cong \left(\bigwedge^k V \right)^* \quad (2.3.22)$$

Definizione 2.16 (k-forme). Sia \mathcal{M} varietà differenziabile liscia di dimensione n , consideriamo allora gli spazi $\bigwedge^k T_p \mathcal{M}^*$ per ogni $p \in \mathcal{M}$. Avremo quindi un fibrato $\bigwedge^k T \mathcal{M}^* = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p \mathcal{M}^*$.

Definiamo come $\Omega^k(\mathcal{M})$ l'insieme delle sezioni globali lisce di $\bigwedge^k T\mathcal{M}^*$, ossia:

$$\Omega^k(\mathcal{M}) := \{\omega : \mathcal{M} \rightarrow \bigwedge^k T\mathcal{M}^* \mid \pi \circ \omega = \text{id}_{\mathcal{M}}\} \quad (2.3.23)$$

dove π è la proiezione canonica del fibrato $\bigwedge^k T\mathcal{M}^*$ su \mathcal{M} .

Diremo allora che una $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ è una *k-forma differenziale* o semplicemente una *k-forma*.

Consideriamo ora una carta (U, x) di \mathcal{M} e $p \in U$. Avremo una rappresentazione locale di una k-forma $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ come:

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k}(p) \cdot dx_p^{i_1} \wedge dx_p^{i_2} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k} \quad (2.3.24)$$

dove $\{dx_p^i\}_{i=1, \dots, n}$ è una base del fibrato cotangente in $p \in \mathcal{M}$ e $\omega_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Definizione 2.17 (Prodotto esterno di forme). Siano $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{M})$ e $\beta \in \Omega^l(\mathcal{M})$ due forme differenziali. Definiremo il loro prodotto esterno ' \wedge ' come:

$$(\alpha \wedge \beta)(p) := \alpha(p) \wedge \beta(p) \quad (2.3.25)$$

Definizione 2.18 (pull-back). La nozione di pull-back di 1-forme si estende facilmente al caso di k-forme, sia infatti $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una funzione liscia tra due varietà lisce \mathcal{M} e \mathcal{N} , definiamo il pull-back di ϕ come:

$$\phi^* : \Omega^k(\mathcal{N}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{M})$$

$$\phi^*(\omega)(n)(v_1, \dots, v_k) := \omega(\phi(n))(\phi_{n*}v_1, \dots, \phi_{n*}v_k) \equiv \omega_{\phi(n)}(d\phi_n(v_1), \dots, d\phi_n(v_k)) \quad (2.3.26)$$

Si dimostra che il pull-back è naturale rispetto al prodotto esterno di forme, ossia risulta un omomorfismo dell'anello $(\Omega(\mathcal{M}), +, \wedge)$ in se' stesso:

$$\forall \phi \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N}), \alpha, \beta \in \Omega(\mathcal{N}) : \quad \phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta \in \Omega(\mathcal{M}) \quad (2.3.27)$$

Differenziale esterno

Vogliamo ora introdurre la nozione di differenziale per k-forme. Possiamo notare prima di tutto che una 0-forma non è altro che una funzione $f \in \Omega^0(\mathcal{M}) \equiv C^\infty(\mathcal{M})$ in quanto $f : \mathcal{M} \rightarrow \bigwedge^0 T\mathcal{M}^* \equiv \mathbb{R}$ e il suo differenziale è dato dall'usuale differenziale introdotto precedentemente.

Prendiamo una carta (U, x) della varietà liscia n-dimensionale \mathcal{M} e una funzione $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Possiamo rappresentare il differenziale di f in questa carta locale come:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \in \Omega^1(\mathcal{M}) \quad (2.3.28)$$

che è una 1-forma. L'operazione di differenziazione ci porta dunque da una 0-forma ad una 1-forma. Altre proprietà che dovremmo richiedere sono la linearità, una sorta di regola di Leibniz rispetto al prodotto esterno e che l'applicazione doppia di questo operatore dia zero. Queste regole ci permettono di definire un unico operatore di derivazione (tecnicamente si chiamerebbe una derivazione graduata di ordine 1) che sia compatibile con l'usuale differenziale.

Definizione 2.19 (differenziale esterno). Definiremo *differenziale esterno* o *derivata esterna*, l'unica applicazione:

$$d : \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M}) \quad (2.3.29)$$

tale che soddisfa:

- (i) $\forall a, b \in \mathbb{R}; \alpha, \beta \in \Omega(\mathcal{M}) : d(a \cdot \alpha + b \cdot \beta) = a \cdot d\alpha + b \cdot d\beta$
- (ii) $\forall \alpha \in \Omega^k(\mathcal{M}), \beta \in \Omega(\mathcal{M}) : d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$
- (iii) $\forall \alpha \in \Omega(\mathcal{M}) : (d \circ d)\alpha \equiv d(d\alpha) = 0$
- (iv) $d : \Omega^0(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M})$ è esattamente dato da $d : f \mapsto df$ dove df è il differenziale introdotto precedentemente.

Possiamo inanzitutto vedere cosa succede applicando il differenziale esterno ad una 1-forma. Ricordando che $\wedge : \Omega^k(\mathcal{M}) \times \Omega^l(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+l}(\mathcal{M})$, si ha nel caso particolare di $k = 0$ e $l = 1$:

$$(f \wedge \omega)(p) := f(p) \wedge \omega(p) = f(p) \cdot \omega(p) \quad (2.3.30)$$

L'azione di d su una 1-forma sarà allora, in coordinate locali (U, x) :

$$d\left(\sum_i \omega_i \cdot dx^i\right) = \sum_i (d\omega_i \wedge dx^i) = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i\right) \quad (2.3.31)$$

Se ora prendiamo una k -forma $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$, allora generalizzando l'equazione precedente otterremo:

$$d\left(\sum \omega_{i_1, \dots, i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.3.32)$$

dove le sommatorie sono prese con indici in $\{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \dim(\mathcal{M})\}$.

Un altro utile risultato è che si dimostra che il differenziale esterno è naturale rispetto al pull-back, dunque per $\phi \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ e $\omega \in \Omega(\mathcal{N})$ si ha:

$$\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega) \quad (2.3.33)$$

Forme chiuse e forme esatte

Si definisce una k -forma *chiusa* se il suo differenziale esterno è nullo, mentre si definisce *esatta* se esiste una $(k-1)$ -forma tale che essa è il differenziale esterno di quest'ultima. In altre parole, se $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ diremo che:

- ω è *chiusa* $\iff d\omega = 0$
- ω è *esatta* $\iff \exists \alpha \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M}) : d(\alpha) = \omega$

Come si può facilmente notare, ogni forma esatta è anche chiusa grazie al fatto che $d \circ d = 0$.

Questa considerazione porta a definire $Z^k(\mathcal{M})$ lo spazio delle k -forme chiuse su \mathcal{M} e $B^k(\mathcal{M})$ lo spazio delle k -forme esatte. Dato che $B^k(\mathcal{M}) \subset Z^k(\mathcal{M})$, possiamo considerare lo spazio quoziente:

$$H^k(\mathcal{M}) := \frac{Z^k(\mathcal{M})}{B^k(\mathcal{M})} \quad (2.3.34)$$

e sarà chiamato *k-esimo spazio comologico di De Rham*. Non andremo nel dettaglio della omologia di De Rham, possiamo però vedere come lo spazio delle forme chiuse non è altro che il kernel dell'applicazione $d : \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})$ mentre lo spazio delle forme esatte è l'immagine dell'applicazione $d : \Omega^{k-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{M})$.

Orientazione

Sia \mathcal{M} varietà differenziabile liscia di dimensione n . Diremo che il suo fibrato cotangente è orientabile se esiste una n -forma liscia $\omega \in \Omega^n(\mathcal{M})$ tale che non sia mai nulla. Chiameremo ω una *top-form* od equivalentemente una forma di volume su \mathcal{M} . Se esiste una tale n -forma, diremo che la varietà differenziabile \mathcal{M} è orientabile. Possiamo considerare una relazione di equivalenza tra queste n -forme:

$$\omega_1 \sim \omega_2 \iff \omega_1 = f\omega_2 \quad \text{per } f \in C^\infty(\mathcal{M}) \text{ positiva} \quad (2.3.35)$$

Se denotiamo con $[\omega]$ una loro classe di equivalenza, allora diremo che $[\omega]$ è una orientazione per \mathcal{M} .

Forma di volume

Come abbiamo appena visto, una forma di volume non è altro che una forma differenziabile di rango massimo definibile su una varietà differenziabile. Prendiamo una carta (U, x) di \mathcal{M} , allora scriveremo $\text{vol} \in \Omega^n(\mathcal{M})$:

$$\text{vol} := dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (2.3.36)$$

Che è chiaramente una forma di volume in quanto è una n -forma mai nulla su \mathcal{M} .

Operatore di Hodge

Introduciamo ora un importante operatore che si dimostra essere un isomorfismo. Prendiamo uno spazio vettoriale V di dimensione n e definiamo l'*operatore di Hodge* come l'applicazione lineare:

$$* : \bigwedge^k V \rightarrow \bigwedge^{n-k} V$$

tale che se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale per V tale che $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, allora:

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n \quad (2.3.37)$$

dove (i_1, \dots, i_n) è una permutazione pari di $\{1, \dots, n\}$.

Integrazione su varietà

Consideriamo una varietà n -dimensionale \mathcal{M} . Definiamo l'integrale di una n -forma α a supporto compatto su un dominio di una carta (U, x) come:

$$\int_U \alpha = \int_U a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n := \int_U a(x) dx^1 \cdot dx^n \quad (2.3.38)$$

Possiamo definire l'integrale su tutta la varietà come la somma di tutti i contributi degli integrali rispetto alle carte di un atlante. Per evitare di sommare più contributi che derivano dalla sovrapposizione delle carte si inserisce una partizione dell'unità $\{(\rho_i, U_i)\}$ subordinata a $\{U_i\}$, e avremo:

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha = \sum_i \int_{U_i} \rho_i \alpha \quad (2.3.39)$$

Possiamo allora enunciare il *teorema di Stokes*:

Teorema 2.3.1 (Teorema di Stokes). *Sia \mathcal{M} una varietà orientata di dimensione n con bordo $\partial\mathcal{M}$. Allora per ogni $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathcal{M})$ a supporto compatto, vale:*

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega \quad (2.3.40)$$

Se ora consideriamo una varietà Riemanniana (\mathcal{M}, g) , possiamo dire che una forma di volume, in una carta (U, x) , sarà:

$$\text{vol} = \sqrt{|\det[g_{ij}]|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (2.3.41)$$

e se f è una funzione liscia a supporto compatto, allora possiamo integrarla sulla varietà \mathcal{M} :

$$\int_{\mathcal{M}} f \text{vol} \quad (2.3.42)$$

Mentre il volume di una varietà Riemanniana compatta non sarà altro che:

$$\text{vol}(\mathcal{M}) := \int_{\mathcal{M}} \text{vol} \quad (2.3.43)$$

Se ci mettiamo in \mathbb{R}^3 , possiamo vedere come se f è una 0-forma, allora:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{x} \quad (2.3.44)$$

Mentre se A è una 1-forma:

$$*dA = (\nabla \times A) \cdot d\vec{x} \quad (2.3.45)$$

inoltre:

$$*d * A = \nabla \cdot A \quad (2.3.46)$$

Abbiamo quindi ritrovato gli operatori differenziali vettoriali di *gradiente*, *rotore* e *divergenza*.

2.3.3 Equazioni di Maxwell in forma differenziale

Ora che abbiamo sviluppato il formalismo delle forme differenziali su varietà, vogliamo riuscire a riscrivere le equazioni di Maxwell in un modo ancora più intrinseco rispetto all'usuale forma covariante di (1.2.18) e (1.2.19).

Possiamo inanzitutto convertire i campi vettoriali elettrici:

$$E = E^x \partial_x + E^y \partial_y + E^z \partial_z \quad (2.3.47)$$

e magnetici:

$$B = B^x \partial_x + B^y \partial_y + B^z \partial_z \quad (2.3.48)$$

che vivono in \mathbb{R}^3 , in forme differenziali. Definiremo quindi la 1-forma del campo elettrico come:

$$\mathcal{E} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (2.3.49)$$

e la 2-forma del campo magnetico:

$$\mathcal{B} = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (2.3.50)$$

Queste forme differenziali si trovano considerando l'operatore di abbassamento. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , la metrica è data dalla matrice identità:

$$\delta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.51)$$

$$(x, y) \mapsto \delta(x, y) = x \cdot y = x^i \delta_{ij} y^j = x^i y_i \quad (2.3.52)$$

dove le $y_i = y^i$. Si può quindi far riferimento all'operatore $\delta_{\flat} : \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$ tale che $\delta_{\flat}(x)(y) = \delta(x, y)$ come all'operatore di abbassamento degli indici e spesso sarà indicato con solo \flat .

Avremo allora che:

$$\mathcal{E} = \flat E \quad (2.3.53)$$

e

$$\mathcal{B} = *(\flat B) \quad (2.3.54)$$

Dato che la metrica è euclidea, avremo che $E_x = E^x$, $E_y = E^y$, $E_z = E^z$, $B_x = B^x$, $B_y = B^y$ e $B_z = B^z$.

A questo punto considereremo i campi elettrici e magnetici come definiti nello spazio-tempo e assumeremo che \mathcal{M} sia una varietà semi-Riemanniana equipaggiata della metrica di Minkowski. Supporremo inoltre, che lo spazio-tempo si possa dividere in una varietà 3-dimensionale, lo spazio, con metrica Riemanniana, e uno spazio \mathbb{R} per il tempo. I punti in questa varietà saranno parametrizzati da coordinate (x^0, x, y, z) .

Definiamo ora la 2-forma \mathcal{F} a partire dalle \mathcal{E} e \mathcal{B} come la combinazione:

$$\mathcal{F} = \mathcal{B} + \mathcal{E} \wedge dx^0 \quad (2.3.55)$$

Dato che questa è una 2-forma, in componenti dovrà essere uguale a:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.3.56)$$

con chiaramente le $F_{\mu\nu}$ date dalla solita forma del tensore di Faraday.

Se definiamo la 4-corrente a partire dalla corrente \vec{j} e dalla densità di carica ρ :

$$J = \rho \partial_t + j^1 \partial_x + j^2 \partial_y + j^3 \partial_z \quad (2.3.57)$$

e gli applichiamo l'operatore di abbassamento, otterremo la 1-forma:

$$\mathcal{J} = -\rho dt + j_1 dx + j_2 dy + j_3 dz \quad (2.3.58)$$

dove il meno è dato dalla metrica di Minkowski.

Le equazioni di Maxwell, allora, saranno riscritte come:

$$d\mathcal{F} = 0 \quad (2.3.59)$$

$$*d*\mathcal{F} = \mathcal{J} \quad (2.3.60)$$

La prima delle due rappresenta le equazioni (1.2.2) e (1.2.3), mentre la seconda rappresenta la (1.2.1) e (1.2.4).

Capitolo 3

Fibrati e Connessioni

3.1 Fibrati

Con l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi da parte di Zermelo e Fraenkel, si è finalmente arrivati ad una formulazione consistente e che evita tutti i famosi paradossi che ne risultavano da una mal formulata teoria insiemistica (il più famoso paradosso era quello del barbiere). Facendo quindi riferimento a questa teoria, si può definire il concetto di funzione senza incappare in problemi relativi al fatto che non si poteva definire per bene l'istruzione che una funzione usava per correlare due insiemi. Se infatti pensiamo ad una funzione che va da un insieme \mathbb{X} ad un altro \mathbb{Y} :

$$f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$$

Come una 'legge' che ad ogni elemento x di \mathbb{X} associa un elemento $y = f(x)$ di \mathbb{Y} , allora incapperemo in problemi relativi, appunto, all'identificazione di questa 'legge'.

Oggi giorno una funzione è definita mediante il suo grafico, ossia come sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Si dice infatti che $y = f(x)$ se $(x, f(x))$ appartiene al grafico di f .

In questo modo stiamo analizzando più approfonditamente ciò che lega gli insiemi \mathbb{X} , \mathbb{Y} e $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Dunque una struttura del tipo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{X} \times \mathbb{Y} & \\ \pi_x \swarrow & & \searrow \pi_y \\ \mathbb{X} & & \mathbb{Y} \end{array}$$

dove π_x è la funzione proiezione sull'insieme \mathbb{X} e π_y è la proiezione su \mathbb{Y} :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : \quad \pi_x((x, y)) = x$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : \quad \pi_y((x, y)) = y$$

Dietro il formalismo dei fibrati vi è la ricerca di una generalizzazione del prodotto cartesiano, infatti, si continuano ad investigare \mathbb{X} , \mathbb{Y} e $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, ma si tralascia la proiezione π_y sul secondo fattore \mathbb{Y} . Questo avviene perchè si sottointende una struttura aggiuntiva posseduta dall'insieme \mathbb{Y} che deve essere utilizzata per determinare i valori della funzione f [24].

Nella trattazione seguente, faremo riferimento principalmente ai seguenti testi: [16] [17] [19] [20].

3.1.1 Fibrati generali

Un *fibrato* di classe C^k è una 4-upla $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ dove \mathcal{E} , \mathcal{M} e \mathcal{F} sono varietà chiamate rispettivamente "Spazio totale", "Spazio base", "Fibra tipica" e π è un'applicazione

suriettiva $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ chiamata “proiezione”, tali che $\forall p \in \mathcal{M}$ e $U \ni p$ aperto di \mathcal{M} , $\exists \Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathcal{F}$, diffeomorfismo di classe C^k , tale che $\pi = pr_1 \circ \Phi$ dove $pr_1 : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$ è la proiezione sul primo fattore ($pr_1(m, f) = m$). In altre parole il seguente diagramma deve commutare:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathcal{F} \\ & \searrow \pi & \downarrow pr_1 \\ & & U \end{array}$$

La mappa Φ è chiamata *banalizzazione locale*, questo perchè rende il fibrato localmente diffeomorfo ad un prodotto cartesiano. In particolare si può pensare che un fibrato sia l’assegnazione di una fibra $\mathcal{E}_p := \pi^{-1}(p)$ ad ogni punto p nella varietà base \mathcal{M} . La banalizzazione locale Φ si può vedere come una mappa della forma $\Phi = (\pi|_{\pi^{-1}(U)}, \phi)$, dove $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{F}$ si chiama “parte principale della ”banalizzazione e $\phi|_{\mathcal{E}_p} : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{F}$ è un diffeomorfismo.

Solitamente indicheremo un fibrato con $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, oppure anche solamente come \mathcal{E} nel momento in cui il resto sia sottointeso.

Morfismo tra fibrati

Diremo che due fibrati $(\mathcal{E}_1, \pi_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{F}_1)$ e $(\mathcal{E}_2, \pi_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_2)$ sono *isomorfi*, se esiste una coppia di funzioni lisce (\tilde{f}, f) con $\tilde{f} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ e $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{E}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_2 \end{array}$$

Diremo che un fibrato $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ è *banale* se è isomorfo ad un fibrato prodotto del tipo $(\mathcal{M} \times \mathcal{F}, pr_1, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ (si vede immediatamente che questo è un fibrato), ossia se esiste una banalizzazione globale del fibrato:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M} \times \mathcal{F} \\ & \searrow \pi & \downarrow pr_1 \\ & & \mathcal{M} \end{array}$$

In questo caso la coppia $(\Phi, id_{\mathcal{M}})$ rappresenta l’isomorfismo.

Un esempio di fibrato prodotto (fibrato banale) è il cilindro, ossia $(S^1 \times \mathbb{R}, \pi \equiv pr_1, S^1, \mathbb{R})$.

Carte di un fibrato

Dato un fibrato $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathcal{F})$, diremo che una coppia (U, Φ) è una *carta del fibrato* se U è un aperto dello spazio base \mathcal{M} e Φ è una banalizzazione locale su U .

Diremo che una famiglia $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ è un’atlante del fibrato se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento aperto di \mathcal{M} e le Φ_α sono banalizzazioni locali sui rispettivi aperti.

Considerate due carte (U_α, Φ_α) e (U_β, Φ_β) del fibrato tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, abbiamo allora che la composizione:

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathcal{F} \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathcal{F} \quad (3.1.1)$$

deve indurre $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$ un diffeomorfismo di \mathcal{F} in \mathcal{F} ; le applicazioni:

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F}) \quad (3.1.2)$$

dove:

$$\text{Diff}(\mathcal{F}) = \{f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \mid f \text{ è un diffeomorfismo}\} \quad (3.1.3)$$

saranno chiamate *funzioni di transizione*.

Queste mappe dovranno soddisfare delle condizioni dette di cociclo:

- (i) $\phi_{\alpha\alpha}(p) = id \quad \forall p \in U_\alpha$
- (ii) $\phi_{\alpha\beta}(p) = \phi_{\beta\alpha}^{-1}(p) \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$
- (iii) $\phi_{\alpha\beta}(p) \circ \phi_{\beta\gamma}(p) \circ \phi_{\gamma\alpha}(p) = id \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$

Sezioni di un fibrato

Definizione 3.1 (Sezione). Sia $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ un fibrato e $U \in \mathcal{M}$, diremo che un'applicazione liscia

$$\sigma : U \rightarrow \sigma(U) \subset \mathcal{E}$$

è una *sezione liscia locale* del fibrato se:

$$\pi \circ \sigma = id_U \quad (3.1.4)$$

Chiameremo $\Gamma(\mathcal{E})$ l'insieme delle sezioni lisce sul fibrato. Il punto fondamentale è che non tutti i fibrati possiedono una sezione globale (definita su tutta la varietà base).

Esempio di un fibrato non banale: Nastro di Moebius

Possiamo inanzitutto vedere che la 1-sfera (o cerchio) S^1 può essere visto come \mathbb{R}/\sim dove la relazione di equivalenza è data da:

$$(x \sim y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z} : y = x + 2k\pi) \quad (3.1.5)$$

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ e lo quozientiamo con la relazione di equivalenza data da:

$$(x, t) \sim_{MB} (y, s) \iff (\exists k \in \mathbb{Z} : (y, s) = (x + 2k\pi, (-1)^k t)) \quad (3.1.6)$$

Denoteremo lo spazio quoziente come lo spazio totale del fibrato che descrive il nastro di Moebius:

$$\frac{\mathbb{R} \times (-1, 1)}{\sim_{MB}} =: \mathcal{E}_{MB} \quad (3.1.7)$$

Prendiamo la proiezione $\pi : \mathcal{E}_{MB} \rightarrow S^1$ definita come $\pi([(x, t)]) := [x]$ e consideriamo tre carte del fibrato come:

$$(U_i, \Phi_i) \longrightarrow \begin{cases} U_1 := S^1 \cap (-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \\ U_2 := S^1 \cap (0, \frac{4\pi}{3}) \\ U_3 := S^1 \cap (\frac{2\pi}{3}, 2\pi) \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Chiaramente si ha $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \mathbb{R}/\sim = S^1$ e definiamo le banalizzazioni locali $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times (-1, 1)$ come:

$$\Phi_1([(x, t)]) := ([x], t)$$

$$\Phi_2([(x, t)]) := ([x], t)$$

$$\Phi_3([(x, t)]) := ([x], t)$$

dove in Φ_2 e Φ_3 , (x, t) è l'unico rappresentante di $[(x, t)]$ nell'insieme $(0, 2\pi) \times (-1, 1)$, mentre in Φ_1 , (x, t) è l'unico rappresentante di $[(x, t)]$ nell'insieme $(-2\pi/3, 2\pi/3) \times (-1, 1)$. Si dimostra che le funzioni di transizione non sono altro che:

$$\phi_{12}(p) = id_{(-1, 1)}$$

$$\begin{aligned}\phi_{2,3}(p) &= id_{(-1,1)} \\ \phi_{13}(p) &= -id_{(-1,1)}\end{aligned}$$

e quindi l'intreccio si ha proprio nella sovrapposizione $\pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_3)$.

Il nastro di Moebius è infatti localmente assimilabile al prodotto cartesiano $S^1 \times (-1, 1)$, globalmente, però, non è possibile dire lo stesso. La presenza dell'intreccio, infatti, lo rende topologicamente diverso rispetto, per esempio, ad un cilindro o ad un nastro senza il 'twist'.

3.1.2 Fibrati vettoriali

Un fibrato vettoriale non è altro che un fibrato in cui le fibre sono spazi vettoriali. Questo ci permetterà di sommare elementi di una fibra e riscalarli rimanendo sempre all'interno della stessa.

Definizione 3.2 (Fibrato vettoriale). Sia $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathbb{R}^r)$ un fibrato, diremo che è un *fibrato vettoriale* di rango r se:

- (i) $\forall p \in \mathcal{M}, \pi^{-1}(p) \equiv \mathcal{E}_p$ è uno spazio vettoriale di dimensione r ;
- (ii) $\forall p \in \mathcal{M}$, la banalizzazione locale $\Phi : \mathcal{E}_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^r$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Potremmo dunque rappresentare un elemento in \mathcal{E}_p come una coppia $(p, v) \in \{p\} \times \mathbb{R}^r$.

Per un fibrato vettoriale si ha che le funzioni di transizione non sono altro che delle applicazioni che prendono i punti dell'intersezione di due aperti dello spazio base e restituiscono una matrice in $GL(r, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow GL(r, \mathbb{R}) \\ p &\mapsto \phi_{\alpha\beta}(p) \in GL(r, \mathbb{R})\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

In pratica, quindi, nel passare da una carta all'altra, si ha che:

$$(p, v) \mapsto (p, \phi_{\alpha\beta}(p)v)\tag{3.1.10}$$

ed anche queste dovranno soddisfare le condizioni di cociclo.

Riferimento locale

Se prendiamo un fibrato vettoriale $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}, \mathbb{R}^r)$, possiamo definire delle sezioni locali tali che valutate in un punto della varietà base, queste diano una base per la fibra (che è spazio vettoriale) 'sopra' quel punto.

Definiremo quindi una r -upla $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ con $\sigma_i \in \Gamma(\mathcal{E}) \forall i = 1, \dots, r$ come *riferimento locale per \mathcal{E} su U* se per ogni punto $p \in \mathcal{E}$, si ha che $\{\sigma_1(p), \dots, \sigma_r(p)\}$ è una base per \mathcal{E}_p .

Possiamo osservare come dare un riferimento locale equivale a dare una banalizzazione locale. Infatti, se $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ è una banalizzazione locale, allora possiamo definire un riferimento locale definendo delle sezioni locali, chiamate *sezioni banali*, come:

$$\begin{aligned}\sigma_i : U &\rightarrow \sigma_i(U) \\ p &\mapsto \sigma_i(p) := \Phi^{-1}(p, e_i)\end{aligned}\tag{3.1.11}$$

dove $\{e_1, \dots, e_r\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^r .

Viceversa, se prendiamo $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ come riferimento locale, allora possiamo definire una banalizzazione come:

$$\begin{aligned}\Phi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^r \\ (\xi^1 \cdot \sigma_1(p), \dots, \xi^r \cdot \sigma_r(p)) &\mapsto (p, \xi)\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

Esempio: il fibrato tangente

Consideriamo il fibrato tangente definito come nella sottosezione 1.2.3, il quale si traduce in termini di fibrati vettoriali come una 4-upla $(T\mathcal{M}, \pi, \mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ e dunque una struttura del tipo:

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \downarrow pr_1 \\ & & \mathcal{M} \end{array}$$

Possiamo infatti costruire facilmente delle banalizzazioni locali considerando carte (U_α, x_α) su \mathcal{M} come:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ v_p &\mapsto \Phi_\alpha(v_p) \stackrel{(1.2.4)}{=} \Phi_\alpha \left(v^j \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \Big|_p \right) := (p, v) \quad \text{dove } v = (v^1, \dots, v^n) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Le funzioni di transizione saranno allora:

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(p, v) &= \Phi_\alpha \left(v^j \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} \Big|_p \right) \\ \boxed{(U_\alpha, x_\alpha) \rightarrow (U_\beta, x_\beta)} &\longrightarrow = \Phi_\alpha \left(v^j \cdot \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} \Big|_p x_\alpha^i \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right) \\ &= \left(p, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \Big|_p x_\alpha \cdot v \right) \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

dove $\frac{\partial}{\partial x_\beta} \Big|_p x_\alpha$ è lo Jacobiano della trasformazione delle coordinate. Quindi:

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (3.1.15)$$

Esempio: il fibrato cotangente

Consideriamo il fibrato cotangente descritto nella sottosezione 1.2.3, avremo quindi $(T\mathcal{M}^*, \pi, \mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ e:

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M}^* & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \downarrow pr_1 \\ & & \mathcal{M} \end{array}$$

Se (U, x) è una carta di \mathcal{M} e $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i=1, \dots, n}$ è una base di $T_p\mathcal{M}$, allora avremo la base duale di $T_p\mathcal{M}^*$ ed indicata come al solito da $\{dx_p^i\}_{i=1, \dots, n}$. Definiamo come nel caso del fibrato tangente le banalizzazioni locali $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ come:

$$w_p \mapsto \Phi_\alpha(w_p) = \Phi_\alpha(w_j \cdot dx_\alpha^j|_p) := (p, w^T) \quad (3.1.16)$$

dove w^T è il vettore colonna appartenente ad \mathbb{R}^n , trasposto del vettore riga $(w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Si può dimostrare che in questo caso le funzioni di transizione saranno l'inverso trasposto di quelle del fibrato tangente:

$$\phi_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^T \quad (3.1.17)$$

3.1.3 Fibrati principali

I fibrati principali sono dei fibrati sui quali agisce un gruppo di Lie, chiamato *gruppo di struttura*, la cui azione permette di muoversi lungo le fibre, in quanto, le fibre stesse, sono isomorfe al gruppo. La struttura di fibrato principale è la fondamentale costruzione di questo scritto, in quanto nelle applicazioni fisiche andremo a considerare sempre questo tipo di ‘scheletro’ come base. Per un accenno sui gruppi di Lie e algebre di Lie si fa riferimento all’appendice A.

Definizione 3.3 (Fibrato principale). Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie che agisce da destra¹ mediante l’azione \triangleleft , su una varietà \mathcal{P} , che è lo spazio totale di un fibrato $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$. Diremo che $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ è un \mathbf{G} -fibrato principale se:

(i) l’azione è libera² e transitiva³ sulle fibre;

(ii) $\forall g \in \mathbf{G}, p \in \mathcal{P}$:

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \quad (3.1.20)$$

equivalentemente:

$$\text{se } x \in \mathcal{M} \text{ allora } \forall p \in \mathcal{E}_x, g \in \mathbf{G}: \quad (p \triangleleft g) \in \mathcal{E}_p \quad (3.1.21)$$

(iii) Se (U, Φ) è una carta del fibrato, allora si ha che:

$$\Phi(p \triangleleft g) = (\pi(p \triangleleft g), \phi(p \triangleleft g)) = (\pi(p), \phi(p) \triangleleft g) \quad (3.1.22)$$

Si ha quindi che il seguente diagramma deve commutare:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbf{G} \\ \triangleleft \mathbf{G} \uparrow & & \uparrow \triangleleft \mathbf{G} \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbf{G} \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

Ossia devono valere:

$$\begin{cases} \Phi(p \triangleleft g) = \Phi(p) \triangleleft g & \forall g \in \mathbf{G}, p \in \pi^{-1}(U) \\ pr_1 \circ \Phi = \pi \end{cases} \quad (3.1.23)$$

dove si definisce la scrittura $\Phi(p) \triangleleft g$ per $\Phi(p) = (\pi(p), \phi(p)) \in U \times \mathbf{G}$ come:

$$\Phi(p) \triangleleft g = (\pi(p), \phi(p)) \triangleleft g := (\pi(p), \phi(p) \triangleleft g) \quad (3.1.24)$$

¹Un’azione destra da parte di un gruppo \mathbf{G} su una varietà \mathcal{P} è assimilabile ad una operazione:

$$\begin{aligned} \triangleleft : \mathcal{P} \times \mathbf{G} &\rightarrow \mathcal{P} \\ (p, g) &\mapsto \triangleleft(p, g) =: p \triangleleft g \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

tale che soddisfa:

(i) $(p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 \bullet g_2)$

(ii) $p \triangleleft e = p$

dove \bullet è l’operazione del gruppo \mathbf{G} ed e è il suo elemento neutro.

²Un’azione \triangleleft è libera se per ogni $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ e $p \in \mathcal{P}$, si ha che:

$$(p \triangleleft g_1 = p \triangleleft g_2) \iff (g_1 = g_2) \quad (3.1.19)$$

³Un’azione \triangleleft è transitiva se per ogni $p, q \in \mathcal{P}$, esiste un elemento g del gruppo \mathbf{G} tale che $p = q \triangleleft g$

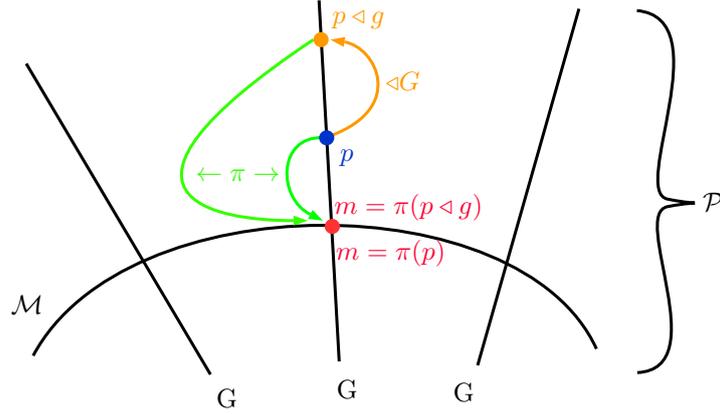


Figura 3.1: Rappresentazione locale di un fibrato principale con spazio base unidimensionale al quale è attaccato il gruppo (fibra) ad ogni punto

Una visualizzazione grafica di un fibrato principale si può avere facendo riferimento alla figura 3.1.

Come può essere dimostrato [16], un fibrato principale deve essere isomorfo ad un fibrato del tipo $(\mathcal{P}, \rho, \mathcal{P}/\mathbf{G})$ dove:

$$\mathcal{P}/\mathbf{G} := \{[p] \mid [p] := \{q \in \mathcal{P} \mid \exists g \in \mathbf{G} : p = q \triangleleft g\}\} \quad (3.1.25)$$

è lo spazio delle orbite di \mathcal{P} sotto l'azione di \mathbf{G} , mentre $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}/\mathbf{G}$ è la proiezione che associa ad ogni elemento $p \in \mathcal{P}$, la sua classe di equivalenza $[p] \in \mathcal{P}/\mathbf{G}$.

In altre parole deve esistere una applicazione liscia $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}/\mathbf{G}$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \rho \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{u} & \mathcal{P}/\mathbf{G} \end{array}$$

In questo caso si avrà che la funzione u è un diffeomorfismo e dunque si potrà identificare lo spazio base con lo spazio delle orbite: $\mathcal{M} \cong_{diff} \mathcal{P}/\mathbf{G}$.

Isomorfismo di fibrati principali

Chiaramente un fibrato principale porta con se varie strutture, che sono: 3 varietà differenziabili, un gruppo di struttura e un'azione destra del gruppo sullo spazio totale. Avremo quindi da richiedere varie condizioni sulle mappe preservanti la struttura di fibrato principale (isomorfismi). In particolare, se $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ è un fibrato principale su cui agisce l'azione \triangleleft e $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\pi}, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{G}})$ è un altro fibrato principale su cui agisce $\tilde{\triangleleft}$, allora diremo che sono isomorfi se esiste una coppia di applicazioni lisce (u, f) con $u : \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ e $f : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{u} & \tilde{\mathcal{P}} \\ \triangleleft \mathbf{G} \uparrow & & \uparrow \tilde{\triangleleft} \tilde{\mathbf{G}} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{u} & \tilde{\mathcal{P}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

e quindi se:

$$\begin{cases} \forall p \in \mathcal{P}, g \in \mathbf{G} : & u(p \triangleleft g) = u(p) \tilde{\triangleleft} g \\ f \circ \pi = \tilde{\pi} \circ u \end{cases} \quad (3.1.26)$$

Diremo quindi che i due fibrati principali sono isomorfi e scriveremo:

$$(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G}) \cong_{PB} (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\pi}, \tilde{\mathcal{M}}, \mathbf{G}) \quad (3.1.27)$$

Se avessimo un gruppo di struttura diverso tra i due fibrati \mathbf{G} e $\tilde{\mathbf{G}}$, dovremmo avere un omomorfismo tra i due gruppi di Lie $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ in modo che la prima relazione nell'equazione 3.1.26 diventi:

$$u(p \triangleleft g) = u(p) \tilde{\triangleleft} \rho(g) \quad (3.1.28)$$

Teorema 3.1.1. *Un isomorfismo tra due fibrati principali $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ e $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\pi}, \tilde{\mathcal{M}}, \mathbf{G})$ che hanno stesso gruppo di struttura \mathbf{G} e stessa varietà di base \mathcal{M} è un diffeomorfismo (possiede dunque inversa con stesso grado di differenziabilità). Il che si riduce ad un diffeomorfismo $u : \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ che faccia commutare il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{u} & \tilde{\mathcal{P}} \\ \triangleleft \mathbf{G} \uparrow & & \uparrow \tilde{\triangleleft} \mathbf{G} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{u} & \tilde{\mathcal{P}} \\ & \searrow \pi & \swarrow \tilde{\pi} \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

Fibrati principali banali

Diremo che un fibrato principale $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ è banale se è isomorfo al fibrato principale prodotto $(\mathcal{M} \times \mathbf{G}, pr_1, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ con l'azione \triangleleft definita su $\mathcal{M} \times \mathbf{G}$ come:

$$(x, g) \triangleleft \tilde{g} := (x, g \bullet \tilde{g}) \quad (3.1.29)$$

dove \bullet è l'operazione definita nel gruppo \mathbf{G} .

In altre parole deve esistere un'applicazione $u : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbf{G}$ tale che faccia commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{u} & \mathcal{M} \times \mathbf{G} \\ \triangleleft \mathbf{G} \uparrow & & \uparrow \triangleleft \mathbf{G} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{u} & \mathcal{M} \times \mathbf{G} \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

Dal teorema 3.1.1 sappiamo che questa u è un diffeomorfismo.

Teorema 3.1.2.

Un fibrato principale è banale se e soltanto se esiste una sezione globale.

Dimostrazione. Consideriamo un fibrato principale $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ banale, esisterà dunque un diffeomorfismo $u : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbf{G}$ tale che si possa definire una sezione globale $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ semplicemente ponendo:

$$\sigma(p) = u^{-1}(p, e) \quad (3.1.30)$$

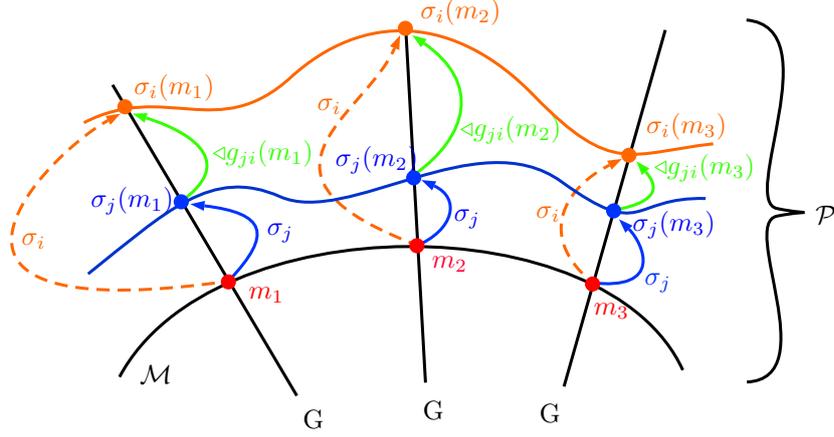


Figura 3.3: Rappresentazione locale di come una sezione σ_i può essere espressa mediante un'altra sezione σ_j sulla quale agisce una funzione di transizione g_{ji} in un fibrato principale $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$

(ii)

$$\begin{aligned}
 u_\sigma(p \triangleleft g) &= (\pi(p \triangleleft g), \chi_\sigma(p \triangleleft g)) = (\pi(p), \chi_\sigma(p) \bullet g) \\
 \boxed{\text{azione def. in 3.1.29}} &\longrightarrow = (\pi(p), \chi_\sigma(p)) \triangleleft g = u_\sigma(p) \triangleleft g
 \end{aligned} \tag{3.1.38}$$

□

Se ricordiamo la definizione di sezione banale o canonica data da una banalizzazione locale vista nella sottosezione 3.1.2, considerata però nel contesto dei fibrati principali, allora se $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ è fibrato principale e $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in A}$ un suo atlante, per ogni carta (U_i, Φ_i) possiamo definire una sezione locale $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ come:

$$m \mapsto \sigma_i(m) := \Phi_i^{-1}(m, e) \quad \text{dove } e \text{ è elemento neutro di } \mathbf{G} \tag{3.1.39}$$

Due sezioni locali canoniche σ_i e σ_j sono dunque relazionate sull'intersezione dei loro domini $(U_i \cap U_j)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i(m) &= \Phi_i^{-1}(m, e) = (\Phi_j^{-1} \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1})(m, e) \\
 \boxed{\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} = (id_{\mathcal{M}}, \phi_{ji})} &\longrightarrow = \Phi_j^{-1}(m, \phi_{ji}(m, e)) \\
 \boxed{\exists g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{G} : \phi_{ji}(m, e) = g_{ji}(m)} &\longrightarrow = \Phi_j^{-1}(m, g_{ji}(m)) \\
 \boxed{\forall g \in \mathbf{G} : g \bullet e = g} &\longrightarrow = \Phi_j^{-1}(m, e \bullet g_{ji}(m)) \\
 \boxed{\text{azione def. in (3.1.29)}} &\longrightarrow = \Phi_j^{-1}(m, e) \triangleleft g_{ji}(m) \\
 \boxed{\sigma_j = \Phi_j^{-1}(m, e)} &\longrightarrow = \sigma_j(m) \triangleleft g_{ji}(m)
 \end{aligned}$$

Siamo dunque arrivati al fatto che nella sovrapposizione dei domini, le sezioni sono interconnesse dall'azione di funzioni a valori nel gruppo di struttura (vedere figura 3.3):

$$\sigma_i = \sigma_j \triangleleft g_{ji} \tag{3.1.40}$$

Esistono quindi delle $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{G}$ che permettono di esprimere una sezione definita sulla carta (U_i, Φ_i) nella carta (U_j, Φ_j) , in particolare di esprimere una sezione in funzione dell'altra. Queste mappe saranno caratteristiche del fibrato considerato in quanto derivano direttamente dalle trivializzazioni locali che sono peculiari di ogni fibrato.

Ricordando la dimostrazione del teorema sulla banalità di un fibrato principale 3.1.2, se abbiamo una generica sezione σ definita su U_i , allora ogni punto $p \in \mathcal{P}$ può essere espresso come (o raggiunto da):

$$p = \sigma(m) \triangleleft g(p) \quad (3.1.41)$$

Per una qualche funzione $g : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbf{G}$.

In questo modo se abbiamo una sezione locale, come per i fibrati vettoriali, possiamo definire delle banalizzazioni locali:

$$\Phi(p) = (m, g(p)) \iff p = \sigma(m) \triangleleft g(p) \quad (3.1.42)$$

Dunque per ogni carta (U_i, Φ_i) del fibrato principale, se abbiamo delle sezioni σ_i corrispondenti, avremo delle mappe $g_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbf{G}$ che permettono di raggiungere ogni punto in una fibra $\mathcal{P}_{\pi(p)} = \pi^{-1}(\pi(p))$ partendo dalla sezione locale ed agendoci da destra con queste g_i . Si avrà che, $\forall m \in U_i$:

$$\sigma_i(m) \triangleleft g_i(\sigma_i(m)) \stackrel{\text{eq. (3.2.14)}}{\iff} \sigma_i(m) \underbrace{\implies}_{\text{azione è libera}} g_i(\sigma_i(m)) \equiv e \text{ (identità di } \mathbf{G}) \quad (3.1.43)$$

Esempio: fibrato dei riferimenti

Possiamo pensare di associare ad ogni punto di una varietà differenziabile liscia n dimensionale \mathcal{M} , l'insieme dei riferimenti per lo spazio tangente in quel punto:

$$L_x \mathcal{M} := \{(e_1, \dots, e_n) \in T_x \mathcal{M} \mid (e_1, \dots, e_n) \text{ è base di } T_x \mathcal{M}\} \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

Definiamo lo spazio totale del fibrato dei riferimenti come l'unione disgiunta di questi insiemi:

$$L\mathcal{M} := \bigcup_{x \in \mathcal{M}} L_x \mathcal{M} \quad (3.1.44)$$

E la proiezione:

$$\begin{aligned} \pi : L\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ \pi((e_1, \dots, e_n)) &= x \iff (e_1, \dots, e_n) \in L_x \mathcal{M} \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Stabiliamo a questo punto un'azione destra \triangleleft del gruppo di Lie $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ su $L\mathcal{M}$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \triangleleft : L\mathcal{M} \times \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow L\mathcal{M} \\ (e_1, \dots, e_n) \triangleleft g &:= (g_1^m \cdot e_m, g_2^m \cdot e_m, \dots, g_n^m \cdot e_n) \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

Si vede che questa è un'azione libera, transitiva e preserva le fibre, dunque il fibrato dei riferimenti $(L\mathcal{M}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ è un fibrato principale.

Esempio: monopolio magnetico

Sia $(\mathcal{P}, \pi, S^2, \mathbf{U}(1))$ un fibrato principale. Questo sarà il setting topologico di un *monopolio magnetico* [8]. Prendiamo un $\{U_N, U_S\}$ ricoprimento di S^2 . Possiamo parametrizzare S^2 con gli angoli polari e azimutali (θ, ϕ) e avremo (vedere figura 3.4):

$$U_N := \{(\theta, \phi) \mid \theta \in [0, \pi/2 + \epsilon], \phi \in [0, 2\pi]\} \quad (3.1.47)$$

$$U_S := \{(\theta, \phi) \mid \theta \in [\pi/2 - \epsilon, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\} \quad (3.1.48)$$

L'intersezione $U_N \cap U_S$ sarà dunque una striscia sottile di spessore ϵ , in pratica l'equatore. Prendiamo delle banalizzazioni locali ϕ_N e ϕ_S tali che:

$$\phi_N(p) := (m, e^{i\alpha_N}) \quad (3.1.49)$$

$$\phi_S(p) := (m, e^{i\alpha_S}) \quad (3.1.50)$$

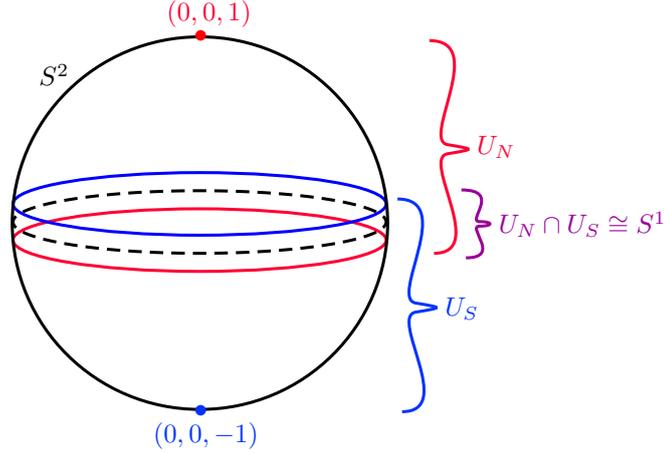


Figura 3.4: Rappresentazione dei domini scelti per il ricoprimento della 2-sfera e la relativa intersezione

dove $m = \pi(p)$. Prendiamo una funzione di transizione $g_{NS}(m)$ della forma $e^{in\phi}$ dove n è un intero tale che $g_{NS}(m)$ può essere definita univocamente all'equatore. Dato che g_{NS} mappa punti dell'equatore S^1 ad elementi del gruppo $\mathbf{U}(1)$, questo intero n caratterizza il gruppo di omotopia $\pi_1(\mathbf{U}(1)) = \mathbb{Z}$ (vedere appendice B). Le coordinate delle fibre α_N e α_S sono relate all'equatore:

$$e^{i\alpha_N} = e^{in\phi} e^{i\alpha_S} \quad (3.1.51)$$

Se $n = 0$, la funzione di transizione è l'elemento neutro del gruppo $\mathbf{U}(1)$ e abbiamo un fibrato banale $\mathcal{P}_0 = S^2 \times S^1$. Mentre, se $n \neq 1$, allora il fibrato \mathcal{P}_n è intrecciato. La struttura topologica di questo fibrato è dunque caratterizzato da un intero, il quale indica come due sezioni locali sono incollate insieme all'equatore. Dato che $\mathbf{U}(1)$ è abeliano, l'azione destra corrisponde alla sinistra, e se $g = e^{i\chi}$, allora:

$$\phi_N(p \triangleleft g) = (p, e^{i(\alpha_N + \chi)}) \quad (3.1.52)$$

$$\phi_S(p \triangleleft g) = (p, e^{i(\alpha_S + \chi)}) \quad (3.1.53)$$

Questa azione corrisponde alle $\mathbf{U}(1)$ -trasformazioni di gauge.

Esempio: istantoni

Come abbiamo già visto, possiamo compattificare lo spazio Euclideo \mathbb{R}^n ad una sfera S^n aggiungendo il punto all'infinito. Se quindi abbiamo un \mathbf{G} -fibrato banale definito su \mathbb{R}^n , dopo la compattificazione, questo può risultare non più banale [8].

Consideriamo ora $(\mathcal{P}, \pi, S^4, \mathbf{SU}(2))$ fibrato principale con S^4 ottenuto dalla compattificazione di \mathbb{R}^4 . Questo fibrato rappresenta un $\mathbf{SU}(2)$ -istante.

Prendiamo un ricoprimento $\{U_N, U_S\}$ della 4-sfera S^4 :

$$U_N := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2 + \epsilon\} \quad (3.1.54)$$

$$U_S := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq R^2 - \epsilon\} \quad (3.1.55)$$

Con R costante positiva e ϵ numero positivo infinitesimo. L'intersezione di questi domini è essenzialmente la 3-sfera S^3 . Sia $g_{NS}(m)$ la funzione di transizione definita per un $m \in U_N \cap U_S$. Questa sarà una mappa $g_{NS} : S^3 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$ e sarà dunque caratterizzata da un intero, in quanto queste mappe rientrano nella classe di omotopia $\pi_3(\mathbf{SU}(2)) = \mathbb{Z}$. L'intero caratterizzante questo fibrato sarà chiamato *numero di istantone*.

Esempio: fibrazione di Hopf

Hopf dimostrò che la sfera S^3 è un $\mathbf{U}(1)$ -fibrato principale su S^2 [8]. La 3-sfera immersa nello spazio euclideo 4-dimensionale può essere espressa, come già visto, dalla seguente relazione:

$$S^3 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\} \quad (3.1.56)$$

Se introduciamo le variabili complesse:

$$z = x + iy \quad \tilde{z} = z + it \quad (3.1.57)$$

si può rappresentare la condizione (3.1.56) nel seguente:

$$|z|^2 + |\tilde{z}|^2 = 1 \quad (3.1.58)$$

Se parametrizziamo S^2 come:

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1 \quad (3.1.59)$$

La *mappa di Hopf* sarà la proiezione $\pi_H : S^3 \rightarrow S^2$ definita come:

$$(x, y, z, t) \mapsto \pi_H(x, y, z, t) := (2(xz + yt), 2(yz - xt), x^2 + y^2 - z^2 - t^2) \quad (3.1.60)$$

Si verifica facilmente che questa applicazione mappa tutto S^3 in S^2 , in quanto:

$$(\pi_H^1)^2 + (\pi_H^2)^2 + (\pi_H^3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \quad \text{dove } \pi_H^i = (\phi_H(x, y, z, t))^i \quad (3.1.61)$$

Possiamo ora vedere come è data la struttura di fibrato. Definimo le banalizzazioni locali:

$$\begin{aligned} \phi_S : \pi^{-1}(U_S) &\rightarrow U_S \times \mathbf{U}(1) \\ (z, \tilde{z}) &\mapsto \left(\frac{z}{\tilde{z}}, \frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|} \right) \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_N : \pi^{-1}(U_N) &\rightarrow U_N \times \mathbf{U}(1) \\ (z, \tilde{z}) &\mapsto \left(\frac{\tilde{z}}{z}, \frac{z}{|z|} \right) \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

Queste mappe sono entrambe ben definite su ciascuna carta e sull'equatore $\xi^3 = 0$ e $|z| = |\tilde{z}| = 1/\sqrt{2}$. Le due banalizzazioni saranno dunque sull'equatore:

$$\phi_S(z, \tilde{z}) = \left(\frac{z}{\tilde{z}}, \tilde{z}\sqrt{2} \right) \quad (3.1.64)$$

$$\phi_N(z, \tilde{z}) = \left(\frac{\tilde{z}}{z}, z\sqrt{2} \right) \quad (3.1.65)$$

e la funzione di transizione sarà:

$$g_{NS}(\xi) = \frac{z\sqrt{2}}{\tilde{z}\sqrt{2}} = \xi^1 + i\xi^2 \in U(1) \quad (3.1.66)$$

Se si circumnaviga l'equatore, g_{NS} attraverserà il cerchio unitario nel piano complesso una volta, dunque il $\mathbf{U}(1)$ -fibrato $\pi_H : S^3 \rightarrow S^2$ sarà caratterizzato dalla classe di omotopia $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$.

3.1.4 Fibrati associati

La costruzione dei fibrati principali permette di associare ad ognuno di questi un altro fibrato con lo stesso gruppo di struttura ma che sia un fibrato vettoriale.

Consideriamo, allora, una varietà \mathcal{F} sulla quale agisce da sinistra il gruppo di struttura \mathbf{G} di un fibrato principale $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$:

$$\triangleright : \mathbf{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \quad (3.1.67)$$

Definiamo allora una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathcal{P} \times \mathcal{M}$ come:

$$((p, f) \sim_{AB} (\tilde{p}, \tilde{f})) \iff (\exists g \in \mathbf{G} : (\tilde{p}, \tilde{f}) = (p \triangleleft g, g^{-1} \triangleright f)) \quad (3.1.68)$$

Denoteremo come $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ lo spazio quoziente:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} := (\mathcal{P} \times \mathcal{F}) / \sim_{AB} \quad (3.1.69)$$

e la proiezione:

$$\begin{aligned} \pi_{AB} : \mathcal{P}_{\mathcal{F}} &\rightarrow \mathcal{M} \\ ([p, f]) &\mapsto \pi_{AB}([p, f]) := \pi(p) \end{aligned} \quad (3.1.70)$$

Questa definizione di π_{AB} è bene definita, ossia non dipende dal rappresentante scelto, infatti se consideriamo un altro elemento nella classe di equivalenza $[(p, f)]$, questo potrà essere scritto come $[(p \triangleleft g, g^{-1} \triangleright f)]$ per un qualche $g \in \mathbf{G}$ e si avrà:

$$\pi_{AB}([(p \triangleleft g, g^{-1} \triangleright f)]) = \pi(p \triangleleft g) = \pi(p) = \pi_{AB}([(p, f)]) \quad (3.1.71)$$

Definizione 3.4 (Fibrato associato). Sia $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ un fibrato principale, definiremo il suo fibrato associato come $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \pi_{AB}, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ con gruppo di struttura \mathbf{G} .

Esempio: fibrato dei riferimenti

Riconsideriamo il fibrato dei riferimenti visto in precedenza $(LM, \pi, \mathcal{M}, (\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})))$ e andiamo a considerare la varietà \mathbb{R}^n su cui agisce un'azione sinistra \triangleright tale che:

$$\begin{aligned} \triangleright : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (g, f) &\mapsto g \triangleright f := (g^1_m \cdot f^m, g^2_m \cdot f^m, \dots, g^n_m \cdot f^m) \end{aligned} \quad (3.1.72)$$

Avremo allora che $(LM_{\mathbb{R}^n}, \pi_{AB}, \mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ sarà un fibrato associato al fibrato dei riferimenti. Ciò che stiamo facendo è definire come si trasformano i vettori del sistema di riferimento (ossia i vettori che usiamo come base) e le componenti. Stiamo, in pratica, facendo in modo che vettori tangenti siano invarianti per cambi di carte, ossia stiamo trasformando componenti e riferimenti in maniera opposta. Possiamo infatti dimostrare che $(LM_{\mathbb{R}^n}, \pi_{AB}, \mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ è isomorfo a $(TM, \pi, \mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{ccc} LM_{\mathbb{R}^n} & \xrightarrow{u} & TM \\ & \searrow \pi_{AB} & \swarrow \pi \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

Prendiamo:

$$\begin{aligned} u : LM_{\mathbb{R}^n} &\equiv LM \times \mathbb{R}^n / \sim_{AB} \rightarrow TM \\ [(e, f)] &\mapsto u([(e, f)]) := (f^a \cdot e_a) \in TM \end{aligned} \quad (3.1.73)$$

Questa u è invertibile, infatti $\forall X \in TM$ possiamo scegliere un riferimento $(e_1, \dots, e_n) \in TM$ tale che $X = f^a \cdot e_a$, allora chiaramente la $u^{-1}(f^a \cdot e_a) = [(e, f)]$.

3.2 Connessioni

Quando consideriamo uno spazio in fisica, ciò di cui non possiamo fare a meno è un modo per confrontare diversi elementi/vettori di questo spazio. Siamo, infatti, abituati a calcolare distanze ed angoli tra vettori, in particolare se consideriamo lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}, \langle, \rangle)$ abbiamo che la distanza tra due punti è semplicemente data da: $d(x, y) := \|x - y\| := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$, mentre l'angolo tra di essi è:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Quando però siamo in una varietà, i vettori tangenti in punti diversi vivono in spazi vettoriali diversi. Se infatti consideriamo v_{p_1} e v_{p_2} vettori tangenti alla varietà \mathcal{M} in due punti p_1 e p_2 distinti, abbiamo che v_{p_1} apparterrà allo spazio tangente $T_{p_1}\mathcal{M}$ mentre v_{p_2} vivrà nello spazio $T_{p_2}\mathcal{M}$. Questi due spazi vettoriali non si parlano tra di loro, ognuno è a sé stante, non possiamo, perciò, fare combinazioni lineari di questi vettori e dunque confrontarli in modo banale. Ciò che possiamo fare è, però, in analogia con lo spazio euclideo, considerare una nozione di parallelismo e trasportare, in questo caso, v_{p_2} parallelamente in p_1 , in modo da avere un nuovo vettore \tilde{v}_{p_2} che vive anch'esso in $T_{p_1}\mathcal{M}$ così da poterlo confrontare con v_{p_1} . Chiaramente si possono definire diverse nozioni di parallelismo, le quali, però, diventano una unica se è definita una struttura aggiuntiva chiamata: *connessione*.

3.2.1 Sottospazi orizzontali

Per motivare la definizione che andremo a considerare di connessione, consideriamo un fibrato principale $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ ed una curva $\gamma_{\mathcal{M}} : I \rightarrow \mathcal{M}$ che giace sullo spazio base \mathcal{M} . Vedremo come il concetto di parallelismo si traduce nel cercare una curva $\gamma_{\mathcal{P}} : I \rightarrow \mathcal{P}$ che giace in \mathcal{P} e che segue la curva $\gamma_{\mathcal{M}}$ mentre il parametro t prende i valori nell'intervallo I , nel senso che:

- La curva $\gamma_{\mathcal{P}}$ si proietta sulla $\gamma_{\mathcal{M}}$ mediante la $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$;
- I vettori v_p tangenti alla curva $\gamma_{\mathcal{P}}$ si proiettano sui vettori tangenti $w_{\pi(p)}$ della $\gamma_{\mathcal{M}}$ mediante il push-forward della proiezione $\pi_* : T\mathcal{P} \rightarrow T\mathcal{M}$.

Queste condizioni non sono, però, sufficienti a definire unicamente la curva $\gamma_{\mathcal{P}}$. La struttura che permette di definirla in modo univoco, data $\gamma_{\mathcal{M}}$ e una condizione iniziale $\gamma_{\mathcal{P}}(0) = p$ (da dove vogliamo far 'partire' la curva su \mathcal{P}), è chiamata *connessione*.

Consideriamo ora il sottospazio vettoriale $\mathcal{V}_p\mathcal{P}$ di $T_p\mathcal{P}$ generato dai vettori verticali (normali) alla varietà base \mathcal{M} , ossia (tenendo conto delle considerazioni precedenti) quei vettori che vengono portati nel vettore nullo mediante il push-forward della proiezione:

$$\mathcal{V}_p\mathcal{P} := \ker\{\pi_*\} := \{v_p \in T_p\mathcal{P} \mid \pi_*(v_p) = 0\} \quad (3.2.1)$$

Si può vedere che i vettori nello spazio verticale non sono altro che quei vettori tangenti alla fibra. Possiamo infatti considerare un campo vettoriale $X^A : \mathcal{P} \rightarrow T\mathcal{P}$ generato da un elemento A dell'algebra di Lie \mathfrak{g} (del gruppo di Lie \mathbf{G}) definito $\forall f \in C^\infty(\mathcal{P}), p \in \mathcal{P}$ come:

$$X_p^A(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(p \triangleleft \exp(tA)) \quad (3.2.2)$$

Definito, dunque, mediante il suo flusso:

$$\begin{aligned} \phi^{X^A} : \mathbb{R} \times \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ (t, p) &\mapsto \phi^{X^A}(t, p) := p \triangleleft \exp(tA) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Come si può notare, dato che l'azione \triangleleft fa muovere punti delle fibre in altri punti della stessa fibra, fissato un punto $p \in \mathcal{P}$, la curva integrale del campo vettoriale X^A :

$$\phi_p^{X^A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$t \mapsto \phi_p^{X^A}(t) = \phi^{X^A}(t, p) = p \triangleleft \exp(tA) \quad (3.2.4)$$

sarà una curva che giacerà interamente nella fibra $\pi^{-1}(\pi(p)) \equiv \mathcal{P}_{\pi(p)}$. Quando allora andremo a considerare il vettore dato dal push-forward di X^A rispetto alla proiezione otterremo $\forall f \in C^\infty(\mathcal{P})$:

$$\pi_*(X_p^A)f \stackrel{(2.2.8)}{=} X_p^A(f \circ \pi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\pi(p \triangleleft \exp(tA))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\pi(p)) = 0 \quad (3.2.5)$$

I vettori associati al campo vettoriale X^A appartengono quindi al sottospazio vettoriale verticale $\mathcal{V}_p\mathcal{P}$. In certi casi, si segue il processo inverso, ossia si definisce:

- Lo spazio verticale come sottospazio dello spazio $T_p\mathcal{P}$ costituito dai vettori tangenti alla fibra $\mathcal{P}_{\pi(p)}$ (ossia dai vettori del tipo X_p^A);
- Un isomorfismo di spazi vettoriali (ed omomorfismo di algebre)

$$i : (\mathfrak{g}, +, \cdot, \llbracket, \rrbracket) \rightarrow (\mathcal{V}_p\mathcal{P}, +, \cdot, \llbracket, \rrbracket)$$

$$A \mapsto i(A) := X^A \quad (3.2.6)$$

e dunque soddisfa:

$$i(\llbracket A, B \rrbracket) = \llbracket i(A), i(B) \rrbracket \quad (3.2.7)$$

- Ed infine si dimostra che il push-forward dei vettori di $\mathcal{V}_p\mathcal{P}$ attraverso la proiezione π è uguale al vettore nullo di $T_{\pi(p)}\mathcal{M}$.

Abbiamo dunque costruito un insieme di spazi vettoriali, sottospazi dello spazio tangente, in ogni punto di \mathcal{P} . Possiamo ora pensare di associare ad ogni spazio verticale costruito, uno spazio orizzontale, tale che lo spazio tangente sia scomponibile come somma diretta di questi due. La scelta di questi spazi orizzontali sarà proprio ciò che chiameremo *connessione*.

Definizione 3.5 (Connessione). Sia $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ un fibrato principale, chiameremo *connessione* la scelta di una famiglia di $\{\mathcal{H}_p\mathcal{P}\}_{p \in \mathcal{P}} \subset T\mathcal{P}$ di sottospazi vettoriali di $T_p\mathcal{P}$, tali che:

- (i) $T_p\mathcal{P} = \mathcal{H}_p\mathcal{P} \oplus \mathcal{V}_p\mathcal{P}$;
- (ii) $\forall g \in \mathbf{G} : (\triangleleft g)_* \mathcal{H}_p\mathcal{P} = \mathcal{H}_{p \triangleleft g}\mathcal{P}$;
- (iii) Per ogni campo vettoriale liscio X su \mathcal{P} , questo si può scomporre in due campi vettoriali lisci:

$$X = X^{hor} + X^{ver}$$

con $X^{hor} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{P}$ e $X^{ver} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}\mathcal{P}$.

La prima e la terza condizione sono abbastanza chiare (vedere figura 3.5), mentre la seconda ci dice che si può considerare equivalentemente o il vettore orizzontale in un punto $p \triangleleft g$, oppure prendere un vettore orizzontale in p e poi portarlo in $p \triangleleft g$ mediante il push-forward dell'azione destra. Il risultato in entrambi i caso è sempre lo stesso. In particolare i sottospazi $\mathcal{H}_p\mathcal{P}$ e $\mathcal{H}_{p \triangleleft g}\mathcal{P}$ sono in relazione mediante la mappa $(\triangleleft g)_*$, e dunque, il sottospazio orizzontale in un punto $p \in \mathcal{P}$ genera ogni sottospazio orizzontale nella fibra $\mathcal{P}_{\pi(p)}$.

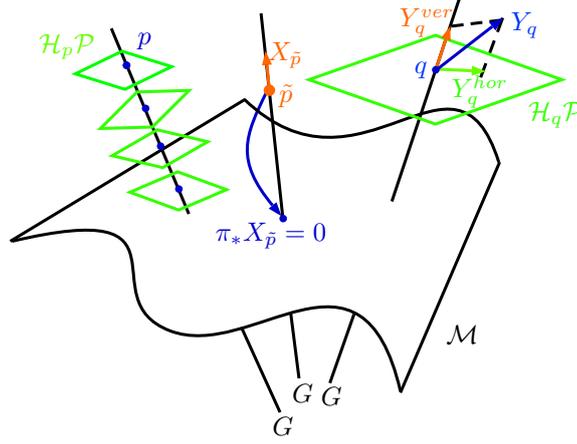


Figura 3.5: Rappresentazione della scomposizione di vettori tangenti in parte verticale ed orizzontale, visualizzazione della distribuzione dei sottospazi orizzontali (che dovranno essere 2-dimensionali dato che il gruppo è 1-dimensionale) e presentazione del push-forward della proiezione di un vettore verticale. Il tutto in un fibrato con spazio base 2-dimensionale

3.2.2 Connessione 1-forma

La definizione data di connessione è di carattere puramente geometrico, infatti stiamo considerando lo spazio tangente di \mathcal{P} , definendo i vettori verticali ed assegnando sottospazi orizzontali in modo che lo spazio tangente si possa decomporre in una somma diretta. Vorremmo, però, un modo più ‘diretto’ per valutare questi sottospazi orizzontali, in particolare, vorremmo un modo algebrico per assegnare gli $\mathcal{H}_p \mathcal{P}$ ai $\mathcal{V}_p \mathcal{P}$. Questa assegnazione è esemplificata da una 1-forma a valori nell’algebra di Lie \mathfrak{g} , ossia una $\omega \in \Omega^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$.

Definizione 3.6 (Connessione 1-forma). Sia $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ un fibrato principale, diremo che una $\omega \in \Omega^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ è una *connessione 1-forma* sul fibrato se soddisfa:

- (i) $\forall A \in \mathfrak{g}, p \in \mathcal{P} : \omega_p(X_p^A) = A$;
- (ii) $\forall g \in \mathbf{G}, p \in \mathcal{P}, X_p \in T_p \mathcal{P} : ((\lrcorner g)^* \omega)_p(X_p) = Ad_{g^{-1}}(\omega_p(X_p))$;
- (iii) $p \mapsto \omega_p$ è liscia.

In pratica ω è una proiezione di $T_p \mathcal{P}$ sul sottospazio verticale $\mathcal{V}_p \mathcal{P} \cong \mathfrak{g}$, mentre avremo che lo spazio orizzontale sarà dato dal suo nucleo:

$$\mathcal{H}_p \mathcal{P} := \ker(\omega_p) := \{v_p \in T_p \mathcal{P} \mid \omega_p(v_p) = 0\} \quad (3.2.8)$$

In molti testi la funzione $Ad_{g^{-1}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è indicata semplicemente come $Ad_{g^{-1}}$, questo però è fuorviante in quanto $Ad_g : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$. Inoltre, la (ii) viene anche scritta come:

$$((\lrcorner g)^* \omega)_p(X_p) = g^{-1} \cdot \omega_p(X_p) \cdot g \quad (3.2.9)$$

la quale, però, sottointende l’uso di un gruppo di struttura che è sottogruppo di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, infatti in questo caso, dato che $Ad_{g^{-1}}$ non è altro che il differenziale (push-forward) della mappa $Ad_{g^{-1}} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ e per matrici la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$ non è altro che l’esponenziale di matrici, si avrà:

$$Ad_{g^{-1}}(\exp(tA)) = g^{-1} \cdot \exp(tA) \cdot g \quad (3.2.10)$$

e

$$Ad_{g^{-1}}(A) = d|_0(Ad_{g^{-1}}(\exp(tA))) = g^{-1} \cdot A \cdot \exp(tA)|_0 \cdot g = g^{-1} \cdot A \cdot g \quad (3.2.11)$$

Chiaramente si può verificare che il sottospazio orizzontale definito in questo modo coincide esattamente con quello definito nel modo precedente, in particolare si possono dimostrare le (i)-(ii)-(iii) della definizione 3.5.

Connessioni locali sullo spazio base

Ora che abbiamo una connessione sullo spazio totale \mathcal{P} del fibrato, possiamo usarla per costruire delle 1-forme a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} sulla varietà base \mathcal{M} . Se infatti prendiamo un aperto $U \subset \mathcal{M}$ ed una sezione locale σ del fibrato su U , allora possiamo definire una $A^\sigma \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ come il pull-back della connessione rispetto a questa sezione:

$$\mathcal{A}^\sigma := \sigma^* \omega \longrightarrow (\sigma^* \omega)_m(X_m) = \omega_{\sigma(m)}(\sigma_*(X_m)) \quad \forall m \in \mathcal{M}, X_m \in T_m \mathcal{M} \quad (3.2.12)$$

e si può fare riferimento al seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \dashrightarrow & T\mathcal{P} \xrightarrow{\omega_p} \mathfrak{g} \\ \sigma \uparrow \downarrow \pi & & \sigma_* \uparrow \downarrow \sigma^* \omega \\ \mathcal{M} & \dashrightarrow & T\mathcal{M} \xrightarrow{\mathcal{A}_m^\sigma} \mathfrak{g} \end{array}$$

La \mathcal{A}^σ sarà chiamata *1-forma di connessione locale* o *potenziale di gauge*. Ciò che si può dimostrare è che data una 1-forma di connessione locale $\mathcal{A}_i \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g})$, e una sezione locale $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, allora esiste ed è unica una connessione 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ tale che la connessione locale ne è il pull-back rispetto alla sezione:

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega \quad (3.2.13)$$

Ricordando la dimostrazione del teorema sulla banalità di un fibrato principale 3.1.2, se abbiamo una generica sezione σ definita su U_i , allora ogni punto $p \in \mathcal{P}$ può essere espresso come (o raggiunto da):

$$p = \sigma(m) \triangleleft g(p) \quad (3.2.14)$$

Per una qualche funzione $g : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbf{G}$.

In questo modo se abbiamo una sezione locale, come per i fibrati vettoriali, possiamo definire delle banalizzazioni locali:

$$\Phi(p) = (m, g(p)) \iff p = \sigma(m) \triangleleft g(p) \quad (3.2.15)$$

Dunque per ogni carta (U_i, Φ_i) del fibrato principale, se abbiamo delle sezioni σ_i corrispondenti, avremo delle mappe $g_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbf{G}$ che permettono di raggiungere ogni punto in una fibra $\mathcal{P}_{\pi(p)} = \pi^{-1}(\pi(p))$ partendo dalla sezione locale ed agendoci da destra con queste g_i . Si avrà che, $\forall m \in U_i$:

$$\sigma_i(m) \triangleleft g_i(\sigma_i(m)) \stackrel{\text{eq. (3.2.14)}}{\iff} \sigma_i(m) \underset{\text{azione è libera}}{\rightrightarrows} g_i(\sigma_i(m)) \equiv e \text{ (identità di } \mathbf{G} \text{)} \quad (3.2.16)$$

A questo punto definiamo la connessione 1-forma come:

$$\omega|_{\pi^{-1}(U_i)} := Ad_{g_i^{-1}}(\pi^* \mathcal{A}_i) + g_i^* \Theta \quad (3.2.17)$$

dove Θ è la forma di Maurer-Cartan⁴. In formalismo matriciale (se \mathbf{G} è un sottogruppo del gruppo generale lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$) si avrà:

$$\omega|_{\pi^{-1}(U_i)} = g_i^{-1} \cdot (\pi^* \mathcal{A}_i) \cdot g_i + g_i^{-1} dg_i \quad (3.2.18)$$

Si può verificare che:

⁴La forma di Maurer-Cartan è definita come quell'applicazione che associa ad ogni vettore nello spazio tangente di un gruppo di Lie, un vettore nello spazio tangente all'identità, ossia un elemento dell'algebra di Lie. Ciò vuol dire che è definita come:

$$\begin{aligned} \Theta_g &: T_g G \rightarrow T_e G \\ X_g &\mapsto \Theta_g(X_g) = \ell_{g^{-1}}^* X_g \end{aligned}$$

- Il pull-back di questa 1-forma rispetto alla sezione σ_i ci da come risultato la nostra connessione locale \mathcal{A}_i :

$$(\sigma_i^* \omega)_m(X_m) = \omega_{\sigma_i(m)}(\sigma_{i*} X_m) \quad (3.2.19)$$

- ω soddisfa le (i)-(ii)-(iii) della definizione di connessione 3.6.
- Le $\omega|_{\pi^{-1}(U_i)}$ devono essere uguali nelle sovrapposizioni di domini $U_i \cap U_j$. Per fare sì che questo sia vero, bisogna che le forme locali \mathcal{A}_i soddisfino delle peculiari leggi di trasformazione. Queste si possono trovare considerando due sezioni $\sigma_i : U_i \rightarrow \sigma(U_i)$ e $\sigma_j : U_j \rightarrow \sigma(U_j)$ che sono relazionate dalle funzioni $g_{ij}, g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{G}$ nel modo che abbiamo visto:

$$\sigma_j = \sigma_i \triangleleft g_{ij} \quad \sigma_i = \sigma_j \triangleleft g_{ji} \quad (3.2.20)$$

ed allora questa compatibilità porta al fatto che:

$$\sigma_j^* \omega_p(X_p) = Ad_{g_{ij}^*}(\sigma_i^* \omega)_p(X_p) + (g_{ij}^* \Theta)(X_p) \quad (3.2.21)$$

ma dato che deve valere per ogni $X_p \in T_p \mathcal{P}$ e $\sigma_i \omega = \mathcal{A}_i$, allora:

$$\mathcal{A}_j = Ad_{g_{ij}^*} \mathcal{A}_i + g_{ij}^* \Theta \quad (3.2.22)$$

Quest'ultimo punto, nel formalismo matriciale si traduce proprio nella:

$$\mathcal{A}_j = g_{ij}^{-1} \cdot \mathcal{A}_i \cdot g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \quad (3.2.23)$$

che come si può notare è uguale alla legge di trasformazione del potenziale di gauge (1.1.6).

3.2.3 Curvatura

Derivata covariante

Ricordando la definizione di derivata esterna di una k -forma, possiamo analogamente definire una *derivata covariante* per k -forme definite su un fibrato principale \mathcal{P} a valori in \mathfrak{g} . Questa definizione si potrebbe dare per qualsiasi k -forma a valori in qualsiasi spazio \mathcal{X} , ma a noi interessa solo il caso in cui questo spazio sia l'algebra di Lie del gruppo di struttura del fibrato principale.

Prendiamo quindi un \mathbf{G} -fibrato $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ sul quale è definito una 1-forma di connessione ω e una k -forma $\zeta \in \Omega^k(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$. Definiamo la *derivata covariante* di ζ come l'applicazione lineare:

$$D : \Omega^k(\mathcal{P}, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{P}, \mathfrak{g}) \quad (3.2.24)$$

tale che:

$$(D\zeta)_p(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\zeta(X_1^{hor}, \dots, X_{k+1}^{hor}) \quad (3.2.25)$$

dove $p \in \mathcal{P}$, $X_1, \dots, X_{k+1} \in T_p \mathcal{P}$, d è la derivata esterna di k -forme e X_i^{hor} sono le componenti orizzontali dei vettori X_i , ossia sono tali che $\omega_p(X_i^{hor}) = 0$.

2-forma di curvatura

Ora che abbiamo introdotto la derivata covariante, definiremo la *2-forma di curvatura* $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ di un fibrato principale con connessione 1-forma ω , come:

$$\Omega = D\omega \quad (3.2.26)$$

Questo oggetto non sarà altro che il tensore di campo di forza di una teoria di gauge, ma quando è visto trascinato indietro da una sezione sulla varietà base del fibrato.

Si può dimostrare [8] che questa curvatura soddisfa la seguente:

$$(\langle g \rangle)^* \Omega = Ad_{g^{-1}*} \Omega \quad (3.2.27)$$

e se il gruppo di struttura è un gruppo di matrici:

$$(\langle g \rangle)^* \Omega = g^{-1} \cdot \Omega \cdot g \quad (3.2.28)$$

Inoltre una importante forma della curvatura è data dall'*equazione di struttura di Cartan*:

$$\Omega_p(X_p, Y_p) = d\omega_p(X_p, Y_p) + [\omega_p(X_p), \omega_p(Y_p)] \quad (3.2.29)$$

con $X_p, Y_p \in T_p \mathcal{P}$.

Si può notare che il commutatore non è nullo in generale in quanto la connessione è a valori nell'algebra di Lie e questi elementi non è detto che commutino. Quando siamo in presenza di un gruppo Abelian, invece, la curvatura si ridurrà al differenziale esterno della connessione.

Il significato geometrico della curvatura è quello di misurare la distanza tra il punto iniziale e quello finale di una curva chiusa *sollevata parallelamente* dalla varietà base, la quale non sarà più per forza chiusa. Ci occuperemo del trasporto parallelo di una curva nella prossima parte della presente sezione.

Come abbiamo fatto per la connessione 1-forma, possiamo considerare una sezione locale del fibrato principale e fare il pull-back della curvatura rispetto a quest'ultima. Definiremo quindi la *forma locale della curvatura* nel seguente modo:

Definizione 3.7. Sia $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ un fibrato principale con connessione 1-forma ω (e quindi una curvatura Ω). Prendiamo un aperto dello spazio base U ed una sezione definita su esso σ , chiameremo *forma locale della curvatura* o *campo di forza* il seguente:

$$\mathcal{F}_i = \sigma^* \Omega \quad (3.2.30)$$

Data l'equazione di Cartan (3.2.29), possiamo scrivere la forma di curvatura locale come:

$$\mathcal{F}(X_m, Y_m) = d\mathcal{A}(X_m, Y_m) + [\mathcal{A}(X_m), \mathcal{A}(Y_m)] \quad (3.2.31)$$

dove la \mathcal{A}_i è la connessione 1-forma locale, data dalla (3.2.13).

Se prendiamo una carta (U, x) , possiamo esprimere la forma locale della curvatura in componenti. Sia quindi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i dx^i$ la connessione locale e la curvatura, essendo una 2-forma, potremmo scriverla come:

$$\mathcal{F} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{F}_{ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad (3.2.32)$$

Si può vedere che le componenti devono avere la seguente forma:

$$\mathcal{F}_{ij} = \partial_i \mathcal{A}_j - \partial_j \mathcal{A}_i + [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] \quad (3.2.33)$$

la quale è proprio uguale alla (1.1.10), ossia alla definizione del tensore di campo di forza in funzione del potenziale di gauge.

Le componenti di queste forme differenziali, sono delle funzioni a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} del gruppo di struttura \mathbf{G} del fibrato. Possiamo quindi espanderle in una base dell'algebra (che è uno spazio vettoriale, in quanto non è altro che lo spazio tangente del gruppo nell'identità - vedere appendice A. Se $\{T_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, \dim(\mathfrak{g})}$, allora:

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i^\alpha T_\alpha \quad (3.2.34)$$

e

$$\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}^\alpha T_\alpha \quad (3.2.35)$$

Se i vettori di base dell'algebra di Lie soddisfano le relazioni di commutazione, con costanti di struttura dell'algebra $\xi_{\alpha\beta}{}^\gamma$, ossia:

$$[T_\alpha, T_\beta] = \xi_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \quad (3.2.36)$$

allora potremmo riscrivere le componenti di (3.2.33) come:

$$\mathcal{F}_{ij}{}^\alpha = \partial_i \mathcal{A}_j{}^\alpha - \partial_j \mathcal{A}_i{}^\alpha + \xi_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{A}_i{}^\beta \mathcal{A}_j{}^\gamma \quad (3.2.37)$$

che è effettivamente il tensore di campo di forza della teoria di gauge di Yang-Mills (1.3.12).

Facendo riferimento alla legge di trasformazione della connessione 1-forma (3.2.22), se consideriamo due carte (U_i, Φ_i) e (U_j, Φ_j) dello spazio base \mathcal{M} del \mathbf{G} -fibrato principale \mathcal{P} e due sezioni σ_i e σ_j definite sulle rispettive carte, avremo delle regole di compatibilità tra le relative forme di curvatura locali \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j (definite dalla (3.2.30)):

$$\mathcal{F}_j = Ad_{g_{ij}} \mathcal{F}_i \quad (3.2.38)$$

dove $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{G}$ è la funzione di transizione che lega le due sezioni locali (3.1.40).

Anche questa può essere espressa nella forma più usuale quando si considera un gruppo di matrici:

$$\mathcal{F}_j = g_{ij}^{-1} \cdot \mathcal{F}_i \cdot g_{ij} \quad (3.2.39)$$

Questa rappresenta la covarianza del tensore di campo di gauge, ossia come si deve trasformare il campo di forza sotto l'azione del gruppo di gauge, ed è proprio la stessa forma delle (1.1.12), (1.3.13).

3.2.4 Trasporto parallelo

Come abbiamo già detto nell'introduzione di questa sezione, vorremmo avere un modo per confrontare vettori che vivono in spazi tangenti diversi, ossia poter confrontare vettori tangenti in punti diversi della nostra varietà base. Per fare questo abbiamo definito la struttura di *connessione*, ciò che ci manca ora è definire come trasportare i vettori. Prima di tutto vedremo come "sollevare" una curva definita nello spazio base ad una definita nello spazio totale.

Sia $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ un fibrato principale sul quale è definita una connessione 1-forma ω . Prendiamo quindi una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ con $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. Definiamo il *sollevamento parallelo di γ in $p \in \mathcal{P}$* come l'unica curva $\gamma^\uparrow : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ con origine in p ($\gamma^\uparrow(0) = p \in \pi^{-1}(a)$), che soddisfa i seguenti requisiti:

- (i) $\pi \circ \gamma^\uparrow = \gamma$
- (ii) $(\dot{\gamma}^\uparrow(t))^{ver} = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$
- (iii) $\pi_*(\dot{\gamma}^\uparrow(t)) = \dot{\gamma}(t) \quad \forall t \in [0, 1]$

Queste richieste sono abbastanza esplicative (vedere figura 3.6), ciò che vogliamo, infatti, è che la curva sollevata rappresenti la curva sullo spazio base, i valori della curva sollevata γ^\uparrow , quindi, proiettati sulla base \mathcal{M} devono coincidere con quelli della curva originale γ , e questo non è altro che il punto (i). Dato che vogliamo un trasporto parallelo, non dovranno esserci componenti nel sottospazio verticale $\mathcal{V}\mathcal{P}$ e questa è la richiesta (ii), inoltre sempre per questo fatto, un vettore tangente alla curva sollevata dovrà essere "spinto in basso" dal push-forward della proiezione esattamente nel vettore tangente della curva originale in quel punto (che è la (iii)).

Per trovare una espressione esplicita della curva sollevata, si procede in due step. Prima di tutto si genera questo sollevamento considerando una curva arbitraria $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ che proietta sulla γ tramite la proiezione π , sulla quale agisce una appropriata funzione $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$:

$$\gamma^\uparrow(t) = \delta(t) \triangleleft g(t) \quad (3.2.40)$$

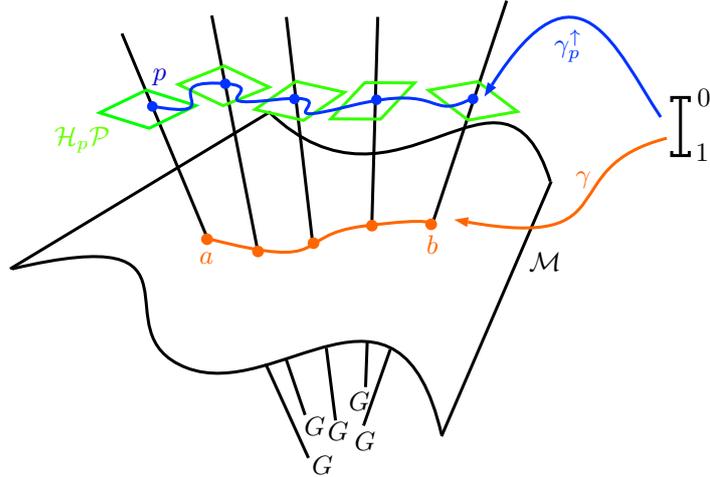


Figura 3.6: Rappresentazione di una curva trasportata parallelamente da una varietà base 2-dimensionale allo spazio totale di un fibrato principale

Secondo si considera l'equazione differenziale ordinaria che ne risulta, con incognita la g che ha come condizione iniziale $g(0) = g_0$ con g_0 tale che $\delta(0) \triangleleft g_0 = p$. Questa equazione differenziale sarà la seguente:

$$Ad_{g^{-1}(t)*}(\omega_{\delta(t)}(\dot{\delta}(t))) + \Theta_{g(t)}(\dot{g}(t)) = 0 \quad (3.2.41)$$

Così fatta, però, non è molto facile da manipolare. Consideriamo quindi una carta (U, x) su \mathcal{M} tale che la curva γ sia tutta contenuta nel dominio U ed una sezione $\sigma : U \rightarrow \sigma(U) \subseteq \mathcal{P}$. La curva arbitraria δ potrà essere riscritta come:

$$\delta = \sigma \circ \gamma \quad (3.2.42)$$

e si avrà che:

$$\dot{\delta}(t) = \sigma_*(\dot{\gamma}(t)) \quad (3.2.43)$$

Unendo le (3.2.40), (3.2.41), (3.2.42) e (3.2.43), l'equazione differenziale diventerà della forma (in formalismo matriciale):

$$\dot{g}(t) = -\mathcal{A}_{\sigma_{\gamma(t)}}^{\sigma}(\dot{\gamma}(t)) \cdot g(t) \quad (3.2.44)$$

La soluzione di quest'ultima si trova integrando entrambi i membri e inserendo l'espressione dentro sè stessa in modo iterativo. Si giungerà alla soluzione formale data da:

$$g(t) = \left[P \left(\exp \left\{ \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{\sigma_{\gamma(t)}}^{\sigma}(\dot{\gamma}(t)) dt \right\} \right) \right] g_0 \quad (3.2.45)$$

dove la P sta per integrale di percorso ordinato.

La nostra curva sollevata, si potrà scrivere, allora, in modo univoco come:

$$\gamma^{\uparrow}(t) = \sigma(\gamma(t)) \triangleleft g(t) \quad (3.2.46)$$

Se ora consideriamo un punto $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, ossia un punto che sta nella fibra sopra al punto di partenza della curva γ , dato che vi sarà una unica curva sollevata γ^{\uparrow} , vi sarà un unico punto $p_1 = \gamma^{\uparrow}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$. Il punto p_1 si dirà *trasporto parallelo* di p_0 lungo la curva γ .

3.3 Geometria delle teorie di gauge

Dopo questa lunga trattazione matematica, siamo finalmente giunti al momento di poter identificare le teorie di gauge con la teoria dei fibrati principali. Questa corrispondenza verrà fatta seguendo principalmente [5] [8] [21] e [22].

Prendiamo quindi un fibrato principale $(\mathcal{P}, \pi, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ dotato di connessione 1-forma ω e curvatura 2-forma Ω .

Iniziamo ad identificare la varietà base \mathcal{M} con lo *spazio-tempo* e lo spazio totale \mathcal{P} con lo *spazio dei fattori di fase*. Il gruppo di Lie \mathbf{G} non sarà altro che il *gruppo di gauge* della teoria e una sezione locale $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathcal{P}$ del fibrato definita su una carta (U_i, Φ_i) sarà un *gauge locale*.

La connessione 1-forma locale $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ sarà il *potenziale di gauge* nel gauge locale σ_i e la curvatura 2-forma locale $\mathcal{F}_i = \sigma_i^* \Omega$ sarà il *campo di forza di gauge* nel gauge σ_i .

L'azione \triangleleft del gruppo \mathbf{G} sullo spazio totale \mathcal{P} è una *trasformazione di gauge del primo tipo*.

Se consideriamo il fibrato vettoriale associato $(V_{\mathcal{P}}, \pi_{AB}, \mathcal{M}, \mathbf{G})$ con V spazio vettoriale, allora una funzione $\phi : \mathcal{P} \rightarrow V$ che sotto azione del gruppo trasformerà mediante una sua rappresentazione $\rho : \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ come $\phi(p \triangleleft g) = \rho(g^{-1}) \cdot \phi(p)$ sarà un *campo di materia* di una particella di tipo ρ . Equivalentemente si può definire un campo di materia come una sezione del fibrato vettoriale associato.

Un cambio di sezione locale, sarà una trasformazione di gauge del secondo tipo.

3.3.1 Geometria della U(1)-teoria di gauge

La teoria di Maxwell, come abbiamo ampiamente visto, è descritta da una teoria di gauge con gruppo $\mathbf{U}(1)$. Prendiamo come varietà base \mathcal{M} lo spazio di Minkowski \mathcal{M}^4 e dato che è assimilabile ad \mathbb{R}^4 , il fibrato che ne deriva è banale (perché è contrattile). Avremo quindi il nostro fibrato banale $(\mathbb{R}^4 \times \mathbf{U}(1), \pi, \mathbb{R}^4, \mathbf{U}(1))$ e sarà necessaria una singola banalizzazione per descrivere tutto lo spazio base. Prendiamo quindi una unica carta (\mathbb{R}^4, x^μ) e avremo la 1-forma di connessione:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu \quad (3.3.1)$$

la quale sarà il potenziale di gauge a meno dell'unità immaginaria: $\mathcal{A}_\mu = iA_\mu$. La curvatura 2-forma locale sarà la derivata esterna della connessione, in quanto il gruppo è abeliano ed il commutatore che ne deriva dalla rappresentazione della derivata covariante svanisce:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} \quad (3.3.2)$$

che in componenti sarà:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \quad (3.3.3)$$

Se faccio la derivata esterna della curvatura, per la proprietà della derivazione esterna, questa si deve annullare ed avremo l'*identità di Bianchi*:

$$d\mathcal{F} = [\mathcal{F}, \mathcal{A}] = 0 \quad (3.3.4)$$

in componenti ritroveremo la (1.2.19):

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0 \quad (3.3.5)$$

Anche in questo caso le componenti della curvatura 2-forma saranno i -volte le componenti del tensore di Faraday usuale.

Se definiamo l'azione di Yang-Mills come:

$$\mathcal{S}[\mathcal{A}] = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (3.3.6)$$

e ne facciamo la variazione rispetto a \mathcal{A}_μ , otteniamo le equazioni del moto:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.3.7)$$

che è uguale alla (1.2.18) in assenza di cariche e correnti.

Se ora prendiamo due carte (U_i, Φ_i) e (U_j, Φ_j) e due relative connessioni locali su \mathcal{M}^4 come \mathcal{A}_i e \mathcal{A}_j e consideriamo $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{U}(1)$ la funzione di transizione che lega le due banalizzazioni data da:

$$m \mapsto g_{ij}(m) = e^{i\chi(m)} \quad \chi(m) \in \mathbb{R} \quad (3.3.8)$$

allora le due connessioni locali saranno legate dalla forma:

$$\mathcal{A}_j(m) = g_{ij}^{-1}(m)\mathcal{A}_i(m)g_{ij}(m) + g_{ij}(m)^{-1}dg_{ij}(m) \quad (3.3.9)$$

ed usando la (3.3.8), si trova:

$$\mathcal{A}_j(m) = \mathcal{A}_i(m) + id\chi(m) \quad (3.3.10)$$

ed in componenti si ritrova la trasformazione di gauge dell'elettromagnetismo (1.2.26):

$$(\mathcal{A}_j)_\mu = (\mathcal{A}_i)_\mu + i\partial_\mu\chi \quad (3.3.11)$$

C'è dunque un perfetto accordo con la teoria sviluppata in questi capitoli e la teoria elettromagnetica del primo capitolo.

3.3.2 Geometria del monopolo magnetico

La banalità dello spazio in cui si considera definito l'elettromagnetismo, fa sì che il fibrato della teoria sia banale. Ma se consideriamo uno spazio base diverso, allora si potrebbe avere un fibrato non-banale.

Il *monopolo di Dirac* è definito su $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. Come abbiamo già visto, questo si può contrarre nella 2-sfera S^2 . Ricopriamo S^2 con due carte:

$$U_N := \{(\theta, \phi) \mid \theta \in [0, \pi/2 + \epsilon], \phi \in [0, 2\pi]\} \quad (3.3.12)$$

$$U_S := \{(\theta, \phi) \mid \theta \in [\pi/2 - \epsilon, 0], \phi \in [0, 2\pi]\} \quad (3.3.13)$$

Sia ω una connessione 1-forma e prendiamo σ_N e σ_S sezioni locali e definiamo i potenziali di gauge (connessioni 1-forme locali):

$$\mathcal{A}_N = \sigma_N^*\omega \quad \mathcal{A}_S = \sigma_S^*\omega \quad (3.3.14)$$

Prendiamo questi potenziali nella forma di Wu-Yang [8]:

$$\mathcal{A}_N = ig(1 - \cos(\theta))d\phi \quad \mathcal{A}_S = -ig(1 + \cos(\theta))d\phi \quad (3.3.15)$$

dove g sarà la forza del monopolo.

Possiamo definire g_{NS} come le solite funzioni di transizione definite sull'equatore $U_i \cap U_j$. Queste, come abbiamo visto, sono delle mappe che mettono in corrispondenza la 1-sfera con il gruppo di gauge e sono dunque caratterizzate dalla loro classe di omotopia e dunque da un intero. Scriveremo quindi:

$$g_{NS}(\phi) = e^{i\varphi(\phi)} \quad \varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3.16)$$

I potenziali di gauge, sull'equatore, saranno relazionati dalla:

$$\mathcal{A}_N = g_{NS}^{-1} \cdot \mathcal{A}_S \cdot g_{NS} + g_{NS}^{-1}dg_{NS} = \mathcal{A}_S + id\varphi \quad (3.3.17)$$

Per i potenziali di gauge (3.3.15), avremo:

$$d\varphi = -i(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S) = 2gd\phi \quad (3.3.18)$$

Mentre ϕ va da 0 a 2π sull'equatore, $\varphi(\phi)$ prenderà valori nel range:

$$\Delta\varphi = \int_0^{2\pi} 2gd\phi = 4\pi g \quad (3.3.19)$$

Perché la funzione di transizione sia unicamente determinata, questa $\Delta\varphi$ deve prendere valori multipli di 2π :

$$\Delta\varphi/2\pi = 2g \in \mathbb{Z} \quad (3.3.20)$$

che è la condizione di quantizzazione del monopolo magnetico. La carica g deve essere infatti un numero intero.

3.3.3 Geometria degli istantoni

Mettiamoci nel caso della sotto-sezione 1.3.2, consideriamo però il fibrato principale con gruppo di struttura $\mathbf{SU}(2)$ e varietà base \mathbf{R}^4 . Stiamo cercando i minimi dell'azione di Yang-Mills:

$$\mathcal{S}_{YM}[\mathcal{A}] = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F}) \quad (3.3.21)$$

dove l'ultima uguaglianza si dimostra considerando le proprietà dell'operatore di Hodge e del prodotto wedge.

Come abbiamo visto, i minimi di questa azione vi saranno per:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm *\mathcal{F}_{\mu\nu} \quad (3.3.22)$$

e saranno i campi di forza di gauge pr istantoni auto-duali e anti-auto-duali.

Se compattifichiamo lo spazio euclideo, avremo una mappa $g : S^3 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$ che rappresenta il potenziale di gauge (o la connessione 1-forma locale):

$$\mathcal{A}_\mu \longrightarrow g(x)^{-1} \partial_\mu g(x) \quad \text{per } |x| \rightarrow L \quad (3.3.23)$$

dove L è un numero positivo, arbitrariamente grande. Questa mappa è classificata dalla classe di omotopia $\pi_3(SU(2)) \cong \mathbb{Z}$. Nella compattificazione, consideriamo il polo nord della sfera S^4 come origine ed il polo sud come punto all'infinito. Avremo due carte date da:

$$U_N := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \leq L + \epsilon\} \quad (3.3.24)$$

$$U_S := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \geq L - \epsilon\} \quad (3.3.25)$$

Possiamo supporre che il potenziale di gauge nell'emisfero sud sia nullo:

$$\mathcal{A}_S(x) \equiv 0 \quad x \in U_S \quad (3.3.26)$$

Tutte le informazioni topologiche saranno contenute nell'emisfero nord (e quindi nella connessione locale \mathcal{A}_N) e nelle funzioni di transizione nell'equatore g_{NS} . L'equatore non sarà altro che la 3-sfera. Dato che $\mathcal{A}_S = 0$, avremo:

$$\mathcal{A}_N = g_{NS}^{-1} \cdot \mathcal{A}_S \cdot g_{NS} + g_{NS}^{-1} dg_{NS} = g_{NS}^{-1} dg_{NS} \quad (3.3.27)$$

Quindi, la g definita nella (3.3.23), non sarà altro che questa funzione di transizione g_{NS} .

Ora, dato che il gruppo $\mathbf{SU}(2) \cong S^3$, possiamo classificare tutte queste mappe $g : S^3 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$ come:

1. La mappa costante:

$$g_0 : x \in S^3 \mapsto e \in \mathbf{SU}(2) \quad (3.3.28)$$

e appartiene alla classe zero di $\pi_3(\mathbf{SU}(2))$.

2. La mappa identità:

$$g_1 : x \in S^3 \mapsto \frac{1}{\|x\|} [x^0 \mathbb{1}_2 + x^i \sigma_i] \quad (3.3.29)$$

che definisce la prima classe di $\pi_3(\mathbf{SU}(2))$.

3. Le mappe:

$$g_n : x \in S^3 \mapsto \frac{1}{\|x\|^n} [x^0 \mathbb{1}_2 + x^i \sigma_i]^n \quad (3.3.30)$$

definiscono le classi n-esime di $\pi_3(\mathbf{SU}(2))$.

Si può dimostrare [8] che questo intero n caratterizzante il grado di omotopia della mappa $g : S^3 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$, è dato dalla formula:

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(g^{-1} dg)^3 = \frac{1}{2} \int_{S^4} \text{Tr} \left(\frac{i\mathcal{F}^2}{2\pi} \right) \quad (3.3.31)$$

Conclusioni

Il nostro percorso ci ha portato dalle teorie di gauge classiche alle teorie di gauge considerate da un punto di vista geometrico. Ciò che abbiamo visto è che si può far corrispondere ad ogni elemento di una teoria di gauge, un elemento della teoria dei fibrati principali in cui è definita una connessione. Ma quello di cui ci siamo occupati noi, è solo una piccola parte di tutto ciò che si può trasportare in questo formalismo matematico. Per esempio l'effetto di Aharonov-Bohm può essere trattato in questo contesto, in quanto è relativo alla fase di Berry, che Simon (1983), riconobbe avere un profondo significato geometrico. L'origine della fase di Berry fu quindi attribuita all'olonomia dello spazio dei parametri [8]. Ma non è tutto, infatti questa fase geometrica può essere usata per studiare l'effetto Hall quantistico e, quando si usa l'approssimazione di Born-Oppenheimer⁵ che introduce un potenziale di gauge, sistemi a molti corpi quantistici (come ad esempio le molecole) [5].

⁵Il metodo di Born-Oppenheimer consiste nel dividere il sistema in questione in una parte veloce ed una lenta. Nel classico esempio della trattazione di una molecola, si risolve prima il sistema composto dagli elettroni (veloci), e poi la parte dei nuclei (lenti).

Appendice A

Gruppi e Algebre di Lie

A.1 Gruppi di Lie

Un *gruppo di Lie* è una varietà differenziabile liscia in cui è definita una struttura di gruppo tale che l'operazione di composizione e inversione siano C^∞ [16] [17]. In formalismo matematico questo si traduce nel prendere $(\mathcal{G}, \tau, \mathcal{A})$ varietà differenziabile liscia n -dimensionale sulla quale è definita una operazione binaria:

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ (g, h) &\mapsto g \circ h \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

tale che:

(i) *Associatività:*

$$(g \circ h) \circ u = g \circ (h \circ u) \quad \forall g, h, u \in \mathcal{G} \tag{A.1.2}$$

(ii) *Esistenza dell'elemento neutro:*

$$\exists e \in \mathcal{G} : \quad e \circ g = g \circ e \quad \forall g \in \mathcal{G} \tag{A.1.3}$$

(iii) *Esistenza dell'inverso:*

$$\forall g \in \mathcal{G}, \exists g^{-1} \in \mathcal{G} : \quad g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g \tag{A.1.4}$$

Quindi $(\mathcal{G}, \tau, \mathcal{A}, \circ)$ sarà anche un gruppo. Ciò che richiediamo ora è la infinita differenziabilità delle operazioni:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ (g, h) &\mapsto \mu(g, h) := g \circ h \end{aligned} \tag{A.1.5}$$

e

$$\begin{aligned} i : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ g &\mapsto i(g) := g^{-1} \end{aligned} \tag{A.1.6}$$

Se queste due sono C^∞ , allora $(\mathcal{G}, \tau, \mathcal{A}, \circ)$ sarà chiamato *gruppo di Lie*, che abbrevieremo con $\mathbf{G} = (G, \circ)$.

A.2 Algebra di Lie di un gruppo di Lie

Se $\mathbf{G} = (G, \circ)$ è un gruppo di Lie, possiamo definire una mappa per ogni $g \in G$:

$$\begin{aligned} \ell_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto \ell_g(h) := g \circ h \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

e date le (A.1.5), (A.1.6) si può mostrare che ℓ_g è un diffeomorfismo.

Definiamo l'*algebra di Lie* \mathfrak{g} del gruppo di Lie \mathbf{G} il seguente insieme:

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}) \mid \ell_{g^*} X = X\} \quad (\text{A.2.2})$$

dotato del prodotto dato dal commutatore di campi vettoriali $[\cdot, \cdot]$. Si dimostra che $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ è una sotto-algebra di $(\mathfrak{X}(\mathbf{G}), [\cdot, \cdot])$, ma soprattutto che è isomorfo allo spazio tangente di \mathbf{G} nell'identità:

$$\mathfrak{g} \cong T_e \mathbf{G} \quad (\text{A.2.3})$$

Faremo riferimento agli elementi dell'algebra di Lie di un gruppo di Lie, equivalentemente come campi vettoriali invarianti da sinistra (A.2.2) o vettori tangenti all'identità di \mathbf{G} .

Se abbiamo una Lie algebra \mathfrak{g} , possiamo definire la *mappa aggiunta* rispetto ad un $A \in \mathfrak{g}$ come l'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} ad(A) : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ B &\mapsto ad(A)(B) := [A, B] \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

Si definisce la *Forma di Killing* come la mappa bilineare:

$$\begin{aligned} \kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \kappa(A, B) &\mapsto \text{Tr}(ad(A) \circ ad(B)) \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

dove si sta considerando una Lie algebra complessa, nel senso che essendo uno spazio vettoriale, si sta prendendo il relativo campo come \mathbb{C} .

A.3 Rappresentazioni lineari di algebre di Lie e gruppi di Lie

A.3.1 Rappresentazioni di algebre di Lie

Sia \mathfrak{g} una algebra di Lie, definiamo una sua *rappresentazione* nello spazio vettoriale V finito-dimensionale, come la mappa lineare:

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V) \quad (\text{A.3.1})$$

tale che:

$$\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)] \equiv \rho(A) \circ \rho(B) - \rho(B) \circ \rho(A) \quad (\text{A.3.2})$$

dove $\text{End}(V)$ è lo spazio degli endomorfismi di V dotato della composizione \circ . V è chiamato spazio della rappresentazione.

Possiamo ora chiederci se esistono sempre delle rappresentazioni per una data algebra di Lie. La risposta è positiva, infatti esiste sempre la *rappresentazione banale*:

$$\begin{aligned} \rho_{trivial} : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{End}(V) \\ A &\mapsto \rho_{trivial}(A) := 0_{\text{End}(V)} \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

Chiaramente questa rappresentazione non è per niente utile, e ci si potrebbe domandare se esistono sempre anche rappresentazioni non banali. Persino in questo caso la risposta è positiva. Definiamo la *rappresentazione scalare* come:

$$\rho_{adjoint} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$$

$$A \mapsto \rho_{\text{adjoint}}(A) := ad(A) \equiv [A, \cdot] \quad (\text{A.3.4})$$

Diremo che una rappresentazione $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ è *riducibile* se esiste un sottospazio vettoriale $U \subset V$ tale che:

$$\rho(A)(u) \in U \quad \forall A \in \mathfrak{g}, u \in U \quad (\text{A.3.5})$$

Ciò vuol dire che possiamo dividere la rappresentazione in più rappresentazioni, fino a che non avremo solo rappresentazioni *irriducibili*.

A.3.2 Rappresentazioni dei gruppi di Lie

Prendiamo un gruppo di Lie (G, \circ) e uno spazio vettoriale V finito-dimensionale. Diremo che una *rappresentazione del gruppo in V* è una mappa:

$$R : G \rightarrow GL(V) \quad (\text{A.3.6})$$

tale che soddisfa:

$$(i) \quad R(g \circ h) = R(g) \cdot R(h) \quad \forall g, h \in G \quad (\text{A.3.7})$$

$$(ii) \quad R(e) = \mathbb{1} \quad (\text{A.3.8})$$

dove il \cdot nella (i) è la moltiplicazione tra matrici che c'è in $GL(V)$.

Possiamo costruire la *rappresentazione aggiunta* in 3 step:

1. Definiamo la *mappa aggiunta* per ogni $g \in G$:

$$Ad_g : G \rightarrow G$$

$$h \mapsto Ad_g(h) := g \circ h \circ g^{-1} \quad (\text{A.3.9})$$

2. Consideriamo il push-forward della mappa aggiunta per ogni $p \in G$:

$$Ad_{g*} : T_e G \rightarrow T_{Ad_g(e)} G \equiv T_e G \quad (\text{A.3.10})$$

e dato che $T_e G \cong \mathfrak{g}$, allora Ad_{g*} sarà una mappa dall'algebra di Lie in sè stessa.

3. Definiamo la *rappresentazione aggiunta*, che è la rappresentazione del gruppo di Lie nello spazio vettoriale dato dalla sua algebra di Lie:

$$Ad : G \rightarrow GL(T_e G)$$

$$g \mapsto Ad_{g*} \quad (\text{A.3.11})$$

e si può notare come la mappa aggiunta $ad(A) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dell'algebra di Lie non sia altro che il push-forward di questa Ad :

$$ad = Ad_* \quad (\text{A.3.12})$$

La mappa Ad è di fondamentale importanza quando si definisce la 1-forma di connessione.

A.4 Mappa esponenziale

Vogliamo ora un modo per recuperare elementi di gruppo di Lie partendo dalla sua algebra di Lie. Per fare questo, definiamo per ogni elemento dell'algebra di Lie $A \in T_e G$, l'unico campo vettoriale invariante da sinistra:

$$X_g^A := \ell_{g*} A \tag{A.4.1}$$

Se allora prendiamo la curva integrale $\gamma^A : \mathbb{R} \rightarrow G$ di X^A che ha origine in $\gamma^A(0) = e$, possiamo definire la *mappa esponenziale*:

$$\begin{aligned} \exp : T_e G &\rightarrow G \\ A &\mapsto \exp(A) := \gamma^A(1) \end{aligned} \tag{A.4.2}$$

Si può dimostrare che \exp è un diffeomorfismo locale e se definiamo un *sotto-gruppo a un parametro* del gruppo di Lie \mathbf{G} come:

$$\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$$

tale che:

$$\xi(t+s) = \xi(t) \circ \xi(s) \tag{A.4.3}$$

allora $\xi^A : \mathbb{R} \rightarrow G$ con $\xi^A(t) = \exp(tA)$ sarà un sotto-gruppo ad un parametro del gruppo di Lie \mathbf{G} per qualsiasi $A \in T_e G$ e si dimostra che tutti i sotto-gruppi ad un parametro devono essere di quella forma.

Appendice B

Omotopia

B.1 Gruppo fondamentale

Prendiamo una varietà \mathcal{M} e definiamo un *loop* come una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ che sia chiusa: $\gamma(0) = \gamma(1) = p \in \mathcal{M}$. Sarà detta *basata sul punto* p . I loop non esibiscono nessuna struttura di gruppo, ma la loro classe di equivalenza sotto la relazione di equivalenza di *omotopia*, si [8] [20] [23].

Diremo che due loop γ, δ basati sul punto $p \in \mathcal{M}$ sono *omotopici* se esiste una mappa continua:

$$H : I \times I \rightarrow \mathcal{M}$$

tale che:

$$H(s, 0) = \gamma(s) \quad H(s, 1) = \delta(s) \quad \forall s \in I \quad (\text{B.1.1})$$

$$H(0, t) = H(1, t) = p \quad \forall t \in I \quad (\text{B.1.2})$$

Si può vedere che questa è una relazione di equivalenza tra loop. Denoteremo le classi di equivalenza come o le classi di omotopia come $[\gamma]$ e si avrà:

$$\gamma \sim \delta \Rightarrow [\gamma] = [\delta] \quad (\text{B.1.3})$$

In altre parole, due loop sono considerati lo stesso se possono essere deformati con continuità l'uno nell'altro. Si può ora definire la composizione di due loop $\gamma \circ \delta$ come il risultato del percorrere prima l'uno e poi l'altro. L'inverso γ^{-1} sarà il percorrere lo stesso loop ma nel verso opposto e l'elemento neutro sarà il loop costante $\gamma(t) = p$ per ogni $t \in I$.

Il gruppo formato dalle classi di omotopia di loop basati in un $p \in \mathcal{M}$ è chiamato *gruppo fondamentale* o primo gruppo di omotopia $\pi_1(\mathcal{M}, p)$. Se la varietà è connessa per archi, allora i gruppi omotopici in differenti punti saranno isomorfi, e potremmo scriverli semplicemente come $\pi_1(\mathcal{M})$.

Esempio: $\pi_1(S^1)$

Possiamo prendere come esempio il gruppo fondamentale $\pi_1(S^1) = \pi_1(U(1))$. Vogliamo quindi classificare tutte le mappe che vanno da un cerchio ad un altro [20]. Prendiamo delle funzioni:

$$\begin{aligned} g_{n,a} : I &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto g_{n,a}(t) := e^{i(nt+a)} \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Si può dimostrare che due mappe $g_{n,a}$ e $g_{m,a}$ sono omotopiche per qualsiasi valore di a, b se si ha che $n = m$. Mentre per $n \neq m$ sono in classi omotopiche diverse. Avremo quindi delle classe indicizzate da un intero:

$$[n] = [g_n] \quad (\text{B.1.5})$$

dove $g_n = g_{n,0} = e^{int}$ è un buon rappresentante per ogni classe. In questo caso n è chiamato *indice di avvolgimento* e caratterizza ogni classe di omotopia. Questo intero si può mostrare essere uguale a:

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g_n(t)^{-1} \frac{dg_n(t)}{dt} dt \quad (\text{B.1.6})$$

Da queste conclusioni, si vede che il prodotto di $[g_n]$ con $[g_m]$ è proprio uguale a $[g_{n+m}]$ e questo mostra che il gruppo fondamentale è isomorfo al gruppo additivo \mathbb{Z} :

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \quad (\text{B.1.7})$$

B.2 Gruppi di omotopia superiori

Nella definizione di un loop abbiamo preso una classica curva definita su una varietà con dominio un intervallo $I = [0, 1]$ di \mathbb{R} . Possiamo considerare ora degli n -intervalli $I^n \subset \mathbb{R}^n$:

$$I^n := \underbrace{[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]}_{n\text{-volte}} \quad (\text{B.2.1})$$

ed i loro relativi bordi:

$$\partial I^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in I^n \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : x^i = 1 \vee x^i = 0\} \quad (\text{B.2.2})$$

Analogamente al concetto di curva chiusa, definiamo un n -loop basato sul punto $p \in \mathcal{M}$, come una mappa continua $\gamma : I^n \rightarrow \mathcal{M}$ tale che:

$$\gamma(\partial I^n) = p \quad (\text{B.2.3})$$

Diremo che due n -loop γ e δ in $p \in \mathcal{M}$ sono *omotopici*, se analogamente alle (B.1.1), (B.1.2), richiediamo l'esistenza di una mappa continua:

$$H : I^n \times I \rightarrow \mathcal{M}$$

tale che:

$$H(x^1, \dots, x^n, 0) = \gamma(t) \quad H(x^1, \dots, x^n, 1) = \delta(t) \quad \forall (x^1, \dots, x^n) \in I^n \quad (\text{B.2.4})$$

$$H(x^1, \dots, x^n, t) = p \quad \forall (x^1, \dots, x^n) \in \partial I^n, t \in I \quad (\text{B.2.5})$$

Questa condizione di omotopia genera una relazione di equivalenza sull'insieme degli n -loop basati in un punto p della varietà. Definiamo quindi lo spazio quoziente rispetto alla condizione di omotopia, che risulta essere un gruppo, come *n -esimo gruppo di omotopia in p* e sarà denotato con $\pi_n(\mathcal{M}, p)$. Anche in questo caso, per varietà connesse per archi, possiamo lasciare perdere l'informazione del punto in cui è basata l'omotopia in quanto questi gruppi saranno tutti isomorfi e scriveremo $\pi_n(\mathcal{M})$. Questi gruppi saranno sempre abeliani, al contrario del gruppo fondamentale.

Il concetto di omotopia si può generalizzare per funzioni continue. Ciò vuol dire che se abbiamo $f, g : X \rightarrow Y$ mappe continue tra due spazi topologici X, Y , si dice che sono omotopiche se esiste una mappa continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tale che $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Se esistono due mappe $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ continue e tali che le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono omotopiche all'identità, allora diremo che X e Y sono dello stesso *tipo omotopico*. La f sarà chiamata *equivalenza omotopica* e g la sua *inversa omotopica* [8].

Un fatto molto importante è che se due spazi topologici sono dello stesso tipo omotopico, allora i loro rispettivi gruppi fondamentali saranno isomorfi. Dato che l'omotopia è una condizione più debole dell'omeomorfismo, un gruppo fondamentale è invariante sotto omeomorfismi e quindi è un invariante topologico. In questo senso si può pensare che i gruppi fondamentali classificano gli spazi topologici in una maniera meno restrittiva degli omeomorfismi.

I gruppi di omotopia, incluso quello fondamentale, hanno molte applicazioni in fisica e non hanno lo scopo di classificare gli spazi, ma piuttosto le mappe o le configurazioni di campo (istantoni).

Bibliografia

- [1] P. B. Price, E. K. Shirk, W. Z. Osborne, L. S. Pinsky, *Evidence for Detection of a Moving Magnetic Monopole*, Physical Review Letters, Volume 35, number 8, 25 august 1975.
- [2] E. V. Hungerford, *Comment on the Observation of a Moving Magnetic Monopole*, Physical Review Letters, **35**, 1303 (1975).
- [3] M. W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. Mottonen, D. S. Hall, *Observation of Dirac Monopoles in a Synthetic Magnetic Field*, Nature, **505**, 657 (2014).
- [4] D. J. Gross, *Gauge theory - Past, Present and Future?*, Chinese Journal of Physics, Volume 30, Number 7, 3 November 1992.
- [5] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Singapore, 1999.
- [7] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Springer-Verlag, New York Inc., 1991.
- [8] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd, Bristol, 2003.
- [9] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hay, *Gauge Theories in Particle Physics - Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*, Taylor & Francis Group, LLC, 2003.
- [10] P. H. Frampton, *Gauge Field Theories*, John Wiley & sons, Inc., New York, 2000.
- [11] C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Westview Press, Illinois, 1997.
- [12] M. F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills Fields*, Monograf, Bologna, 1979.
- [13] Z. Nazari, *An Introduction to Instantons and Monopoles*, Tesi post-laurea, Font: <https://hepthboun.files.wordpress.com/2015/10/zainab-thesis.pdf>, 2013.
- [14] G. t' Hooft, *When was asymptotic freedom discovered? or The rehabilitation of quantum field theory*, Nuclear Physics B, **74**, 413 (1999).
- [15] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons - An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, Science Publishers B. V., Amsterdam, 1982.
- [16] J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.
- [17] M. Abate, F. Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag, Italia, 2011.
- [18] M. Spivak, *Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc., Houston Texas, 1999.
- [19] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1994.

- [20] A. Collinucci, A. Wijns, *Topology of Fibre bundles and Global Aspects of Gauge Theories*, Lecture presented at the second Modave Summer School on Mathematical Physics, August 2006, Fonte: arXiv:hep-th/0611201.
- [21] A. Trautman, *Differential Geometry for Physicists*, Bibliopolis, edizioni di filosofia e scienze, Napoli, 1984.
- [22] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics*, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1982.
- [23] G. Morandi, *The Role of Topology in Classical and Quantum Physics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [24] Y. Guttman, H. Lyre, *Fiber Bundle Gauge Theories and "Field's Dilemma"*, Fonte: arXiv:physics/0005051, maggio 200.