Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Triennale in Matematica

SPAZI DI SOBOLEV E FUNZIONI BV IN GRUPPI DI CARNOT

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Alessandro Socionovo

Sessione Unica
Anno Accademico 2016/2017

Introduzione

In questo lavoro ci proponiamo di presentare i primi risultati sugli spazi di Sobolev e BV in gruppi di Carnot, che estendono alcuni importanti risultati di analisi funzionale visti in ambito euclideo.

Un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie nilpotente, connesso e semplicemente connesso, la cui algebra di Lie ammette una stratificazione di sottospazi vettoriali compatibile con la parentesi di Lie del gruppo, del tipo

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus ...V_k,$$

tale che la sottoalgebra generata dal primo strato V_1 sia proprio $\mathfrak{g}$. L'intero k è detto passo del gruppo di Carnot (per una descrizione più approfondita e dettagliata riguardante i gruppi di Carnot rimandiamo a [2]).

Vi sono due punti cruciali nello studio dei gruppi di Carnot che ci consentiranno di continuare a lavorare in $\mathbb{R}^n$, ma con qualche differenza rispetto al caso euclideo

(i) Il primo è che ogni punto p del gruppo viene identificato tramite le cosiddette coordinate esponenziali (un certo tipo di coordinate rispetto ad una particolare base) ad un punto dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, dove n è la dimensione del gruppo $\mathbb{G}$ (e quindi anche della sua algebra $\mathfrak{g}$).

    Inoltre scrivendo gli elementi di $\mathbb{G}$ in coordinate esponenziali si riesce a trovare una formula esplicita per l'operazione di gruppo in termini della somma euclidea del tipo

$$p \cdot q = p + q + \mathfrak{Q}(p, q), \quad \forall p, q \in \mathbb{G},$$

dove $\mathfrak{Q} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sarà una funzione di p e q soddisfacente alcune proprietà. In particolare essa non dipende dagli elementi del primo strato. Tale formula si chiama formula di Campbell-Hausdorff.

In primo luogo cambierà dunque l'operazione con cui lavoreremo in $\mathbb{R}^n$, che non sarà più la classica somma euclidea di vettori componente per componente.

(ii) Il secondo invece riguarda due importanti classi automorfismi del gruppo in sé, che sono traslazioni (sinistre) e dilatazioni intrinseche. In particolare

1. Per ogni $g \in \mathbb{G}$ la traslazione intrinseca (sinistra) è definita da $x \mapsto \tau_g(x) := g \cdot x$;
2. Per ogni $\lambda > 0$ la dilatazione intrinseca è data da $x \mapsto \delta_\lambda(x)$. La sua espressione esplicita in coordinate esponenziali verrà descritta nel primo capitolo.

Questi due automorfismi andranno a sostituire le dilatazioni e le traslazioni euclidee

Concluderemo il capitolo introduttivo andando a definire i primi concetti di metrica e calcolo differenziale. In questo caso risulterà fondamentale la proprietà dell'algebra $\mathfrak{g}$ di essere generata dal suo primo strato. Questo, infatti, ci consentirà di lavorare solo con i campi vettoriali di una base del primo strato, detti campi vettoriali generatori del gruppo. Gli elementi differenziali che andremo a definire saranno allora inerenti al primo strato e verranno detti elementi differenziali orizzontali (per esempio il gradiente orizzontale di una funzione $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ sarà il vettore di componenti le derivate lungo i campi generatori, rispetto alla base data da tali campi). Per quanto riguarda invece la metrica sottolineiamo la notevole importanza che avranno la distanza CC di Carnot-Carathéodory e la norma omogenea relativa a tale distanza.

Detto tutto ciò non è difficile vedere che se il passo del gruppo è 1, allora necessariamente $\mathbb{G}$ è, a meno di isomorfismi, proprio lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, +)$. Inoltre non possono esistere gruppi di dimensione minore o uguale a 2 non isomorfi a $(\mathbb{R}^n, +)$, $n = 1, 2$. Per trovare un primo esempio di gruppo di Carnot non isomorfo ad uno spazio euclideo bisogna mettersi in dimensione 3, con passo 2. Si costruisce così il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ (per una descrizione più dettagliata rimandiamo a [2]).

A questo punto, forti della somiglianza con la situazione euclidea, andremo, come già accennato, a ripercorrere la strada per estendere i teoremi di analisi funzionale riguardanti gli spazi di Sobolev. In particolare il nostro scopo è quello di arrivare a dimostrare i teoremi di Meyers-Serrin e di immersione compatta, che sono (in ambito euclideo)

Teorema 0.0.1 (Teorema di Meyers-Serrin)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Allora per ogni $1 \leq p < \infty$ lo spazio $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema 0.0.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, con $\overline{\Omega}$ compatto. Siano poi $1 \leq p < n$ e $q := n/(n-1)$. Allora per ogni $p < r < q$ l'immersione*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$$

è un'immersione compatta.

Per quanto riguarda il Teorema 0.0.1 sarà necessario ridefinire la convoluzione nei gruppi come

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{G}} f(y) g(y^{-1} \cdot x) dy$$

stando attenti al fatto che, se il gruppo non è commutativo, non è detto che sia $f * g = g * f$. Non è però difficile trovare la relazione $f * g = \check{(}\check{g} * \check{f})$, dove $\check{f}(x) := f(x^{-1})$.

Per arrivare invece a dimostrare il Teorema 0.0.2 ricaveremo alcune disuguaglianze, fino a trovare l'equivalente della disuguaglianza di Sobolev-Poincaré per funzioni di classe C^1, ovvero

$$\left(\int_B |f - f_B|^q dx \right)^{1/q} \leq \left(\int_B |Df|^p \right)^{1/p},$$

dove B è una qualsiasi palla aperta di $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < n$, $q := pn/(n-p)$ e f_B denota la media di f in B.

Infine nel terzo e ultimo capitolo studieremo le funzioni a variazione limitata, dette funzioni BV (dall'inglese bounded variation). La variazione totale di una funzione $f \in L^1(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, è la quantità

$$\sup \left\{ \int_\Omega f \operatorname{div}\varphi dx : \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \ |\varphi| \leq 1 \right\}$$

e una funzione BV sarà tale che questa quantità sia limitata. Estenderemo dunque questa definizione al caso dei gruppi e, percorrendo una strada simile a quella fatta per arrivare al Teorema di Meyers-Serrin, ne troveremo l'analogo per le funzioni BV, ovvero il Teorema di Anzellotti-Giaquinta. Concluderemo quindi tutto il lavoro definendo il perimetro di un un'insieme come la variazione totale della sua funzione caratteristica e dimostrando successivamente la disuguaglianza isoperimetrica.

Indice

Capitolo 1

Introduzione ai Gruppi di Carnot

Lo scopo di questo capitolo è quello di fornire alcune nozioni ed i principali risultati introduttivi riguardanti i gruppi di Carnot. Per una descrizione più dettagliata inerente i gruppi di Carnot, nonché per le dimostrazioni degli enunciati di questo primo capitolo rimandiamo a [2].

Per tutto il lavoro supporemo noto tutto quanto riguarda le verietà differenziabili ed i gruppi di Lie, nonché i risultati di analisi funzionale riguardanti gli spazi L^p.

1.1 Prime definizioni

Definizione 1.1 (Gruppo di Carnot)**.** Un gruppo $\mathbb{G}$ di Carnot (o stratificato) di passo k è un gruppo di Lie nilpotente, connesso e semplicemente connesso, di dimensione finita, la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una stratificazione di passo k, cioè esistono sottospazi vettoriali $V_1, ..., V_k$ tali che

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1}, \quad V_k \neq \{0\}, \quad V_i = \{0\} \text{ se } i > k \tag{1.1}$$

dove $[V_1, V_j]$ è il sottospazio di $\mathfrak{g}$ generato dai commutatori $[X, Y]$, con $X \in V_1$ e $Y \in V_j$.

Osservazione 1. Supponiamo sia $\dim\mathbb{G} = n$ (e quindi anche $\dim\mathfrak{g} = n$). Poniamo $m_i := \dim V_i$, $h_i := m_1 + ... + m_i$ (con $h_0 = 0$ e ovviamente $h_k = n$). Possiamo allora scegliere una base $(e_1, ..., e_n)$ di $\mathfrak{g}$ che si adatti alla sua stratificazione, cioè tale che

$$(e_{h_{j-1}+1}, ..., e_{h_j}) \text{ sia base per } V_j, \quad \forall j = 1, ..., k.$$

Campi vettoriali generatori. Pensiamo a $\mathfrak{g}$ come spazio tangente a $\mathbb{G}$ nell'elemento neutro e prendiamo una base $(e_1, ..., e_n)$ di $\mathfrak{g}$ che si adatti alla sua stratificazione. Sia $(X_1, ..., X_n)$ la famiglia dei campi vettoriali invarianti a sinistra tale che $X_i(0) = e_i$, $\forall i = 1, ..., n$. Dalla (1) segue che ogni altro campo invariante a sinistra è generato dai campi $(X_1, ..., X_{m_1})$. Chiamiamo allora $(X_1, ..., X_{m_1})$ i *campi vettoriali generatori* del gruppo.

Definizione 1.2. Il sottofibrato del fibrato tangente $T\mathbb{G}$ generato dai campi generatori $(X_1, ..., X_{m_1})$ viene chiamato *fibrato orizzontale* e si indica con $H\mathbb{G}$. Gli insiemi

$$H\mathbb{G}_x = \text{span}\{X_1(x), ..., X_{m_1}(x)\}, \quad x \in \mathbb{G}$$

vengono detti *sezioni* (o fibre) *orizzontali* e ogni vettore di $H\mathbb{G}_x$ è detto *vettore orizzontale*. Ogni vettore che non è orizzontale è detto *verticale*.

Osservazione 2. Per ogni $x \in \mathbb{G}$ possiamo munire la fibra di $H\mathbb{G}_x$ con un prodotto scalare (e quindi anche con una norma) che rende $(X_1(x), ..., X_{m_1}(x))$ una base ortonormale per la fibra $H\mathbb{G}_x$; ci basta infatti porre

$$\langle v, w\rangle_x := v_1 w_1 + ... + v_{m_1} w_{m_1}$$
$$(\text{e di conseguenza } \|v\|_x := \langle v, v\rangle)$$

dove v e w sono vettori di $H\mathbb{G}_x$ tali che $v = \sum_{i=1}^{m_1} v_i X_i(x)$ e $w = \sum_{i=1}^{m_1} w_i X_i(x)$. Questo fornisce a $\mathbb{G}$ una struttura sub-Riemaniana.

Osservazione 3. Osserviamo anche che ogni sezione orizzontale è identificata dalle sue coordinate canoniche rispetto al moving frame $X_1(x), ..., X_{m_1}(x)$. Così una sezione orizzontale ϕ è identificata da una funzione $\phi = (\phi_1, ..., \phi_{m_1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1}$.

Coordinate esponenziali. Essendo $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie, è definito il diffeomorfismo $exp : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$ (mappa esponenziale). Ciò significa che ogni $p \in \mathbb{G}$ è scrivibile in modo unico come $p = exp(p_1 X_1 + ... + p_n X_n)$. La n-upla $(p_1, ..., p_n)$ consente di identificare ogni punto $p \in \mathbb{G}$ con il punto $(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(p_1, ..., p_n)$ sono dette *coordinate esponenziali* per il punto p. Usando queste coordinate si trova un isomorfismo di gruppi $\mathbb{G} \cong (\mathbb{R}^n, \cdot)$, dove "$\cdot$" indica un'operazione per il gruppo $\mathbb{R}^n$ diversa dalla "tradizionale" somma "+" di vettori componente per componete a cui siamo abituati e per la quale vi è una espressione esplicita in termini del "+ classico". Tale espressione prende il nome di formula di Campbell-Hausdorff [1].

Infine poniamo, per $i = 1, ..., k$, $p^i := (p_{h_{i-1}+1}, ..., p_{h_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}$ e quindi possiamo anche identificare p come $(p^1, ..., p^k) \in \mathbb{R}^{m_1} \times ... \times \mathbb{R}^{m_k}$. Da questo è comodo anche scrivere

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}^1 \oplus ... \oplus \mathbb{G}^k,$$

dove $\mathbb{G}^i = exp(V_i) = \mathbb{R}^{m_i}$ è detto l'$i-$*esimo strato* di $\mathbb{G}$ e $p^i \in \mathbb{G}$.

Vediamo ora due importanti famiglie di diffeomorfismi di $\mathbb{G}$, che sono detti traslazioni e dilatazioni intrinseche di $\mathbb{G}$ e il concetto di dimensione omogenea di $\mathbb{G}$.

Definizione 1.3. (i) Per ogni $x \in \mathbb{G}$ chiamiamo *traslazione* (*sinistra*) associata a x la mappa $\tau_x : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ definita da

$$\tau_x(g) := x \cdot g, \quad g \in \mathbb{G}.$$

(ii) Per ogni $\lambda > 0$ chiamiamo *dilatazione* associata a λ la mappa $\delta_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ definita da

$$\delta_\lambda(x_1, ..., x_n) := (\lambda^{\alpha_1} x_1, ..., \lambda^{\alpha_n} x_n),$$

dove ogni $\alpha_i \in \mathbb{N}$ è detto *omogeneità della variabile* x_i in $\mathbb{G}$, con

$$\alpha_j = i, \quad \text{quando } h_{i-1} + 1 < j \leq h_i$$

[1] Più avanti la Proposizione 1.2.1 spiega le proprietà fondamentali della formula. Per una descrizione più esaustiva rimandiamo ancora a [2].

(e quindi $1 = \alpha_1 = ... = \alpha_{m_1} < \alpha_{m_1+1} = 2 \leq ... \leq \alpha_n = k$).

(iii) L'intero

$$Q := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{i=1}^{k} idim(V_i)$$

è detto *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$.

1.2 Primi risultati

In questa sezione enunciamo due risultati preliminari per lo studio dei gruppi di Carnot e alcune loro consegunze. Il primo riguarda l'operazione di gruppo, l'altro spiega la struttura dei campi vettoriali.

Proposizione 1.2.1. *Per un gruppo di Carnot $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ in coordinate esponenziali, l'operazione di gruppo ha la forma*

$$x \cdot y = x + y + \mathfrak{Q}(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

dove $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_1, ..., \mathfrak{Q}_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e ogni $\mathfrak{Q}_i$, $i = 1, ..., n$, è un polinomio omogeneo di grado α_i che rispetta le dilatazioni intrinseche di $\mathbb{G}$, cioè

$$\mathfrak{Q}_i(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda^{\alpha_i} \mathfrak{Q}_i(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{G}, \ \forall \lambda > 0.$$

. Inoltre si ha che

(i) $\mathfrak{Q}$ è antisimmetrica, cioè

$$\mathfrak{Q}_i(x, y) = -\mathfrak{Q}_i(-y, -x), \quad \forall x, y \in \mathbb{G}, \ \forall i = 1, ..., n.$$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{G}$

1. $\mathfrak{Q}_i(x, y) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_1$;
2. $\mathfrak{Q}_i(x, 0) = \mathfrak{Q}_i(0, y) = 0, \quad m_1 < i \leq n$;
3. $\mathfrak{Q}_i(x, x) = \mathfrak{Q}_i(x, -x) = 0, \quad m_1 < i \leq n$;
4. $\mathfrak{Q}_i(x, y) = \mathfrak{Q}_i(x_1, ..., x_{h_j-1}, y_1, ..., y_{h_j-1}), \quad 1 < j \leq k$ *e* $i \leq h_j$;

5.
$$\mathfrak{Q}_i(x,y) = \sum_{k,h} \mathfrak{R}^i_{h,k}(x,y)(x_k y_h - x_h y_k)$$

dove le funzioni $\mathfrak{R}^i_{h,k}$ *sono polinomi omogenei di grado* $\alpha_i - \alpha_k - \alpha_h$ *che rispettano le diletazioni e la somma è estesa a tutti gli* h *e* k *tali che* $\alpha_h + \alpha_k \leq \alpha_i$.

Osservazione 4. Da questa proposizione segue che $\delta_\lambda x \cdot \delta_\lambda y = \delta_\lambda(x \cdot y)$ e quindi $\delta_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ è un automorfismo del gruppo $\mathbb{G}$ in sé.

Seguono anche che l'inverso di un elemento $x = (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^n, \cdot)$ è della forma $x^{-1} = (-x_1, ..., -x_n)$. e che l'elemento neutro di $\mathbb{G}$ è $e = (0, ..., 0)$.

Osservazione 5. Riscriviamo l'operazione di gruppo nella forma

$$p \cdot q = (p^1 + q^1, p^2 + q^2 + \mathfrak{Q}^2(p,q), ..., p^n + q^n + \mathfrak{Q}^n(p,q)), \quad \forall p, q \in \mathbb{G}, \tag{1.2}$$

dove $\mathfrak{Q}^i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_i}$ è definita da

$$\mathfrak{Q}^i(p,q) := (\mathfrak{Q}_{h_i+1}(p,q), ..., \mathfrak{Q}_{h_i}(p,q).$$

Da questo segue che ogni traslazione sinistra $\tau_x : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ ha Jacobiano identicamente uguale a 1. Infatti se consideriamo la funzione $y \mapsto \tau_x(y)$, $x \in \mathbb{G}$ fissato, scritta come in (1.2) abbiamo che

(i) derivando parzialmente rispetto a y_j il blocco $x^1 + y^1$, troviamo una matrice che ha solo 1 nei posti con $i = j$;

(ii) derivando parzialmente rispetto a y_j il blocco $x^2 + y^2$, troviamo una matrice che ha 1 nei posti con $i = j$ e elementi diversi da zero solo per $i < j$, dal momento che $\mathfrak{Q}^2(x,y)$ dipende solo da x^1 e y^1;

(iii) procedendo in questo modo per gli strati successivi, si trova una matrice triangolare superiore con tutti 1 sulla diagonale, dal momento che ogni $\mathfrak{Q}^k(x,y)$ diprende solo dagli strati fino al $(k-1)-$esimo.

Effettuando un ragionamento del tutto analogo si trova che lo Jacobiano di una dilatazione $\delta_\lambda : x \mapsto \delta_\lambda(x)$ è λ^Q.

Questi fatti ci torneranno particolarmente utili nei prossimi capitoli, quando andremo ad effettuare dei cambi di variabile all'interno di alcuni integrali. Inoltre ne vediamo subito una conseguenza immediata.

Definizione 1.4. Una misura μ su di un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è detta *misura di Haar sinistra* se

$$\int_{\Omega} f(g \cdot x) d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x),$$

per ogni $\Omega \subset \mathbb{G}$ μ-misurabile, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ μ-misurabile e $g \in \mathbb{G}$.

L'Osservazione 5 ci dice che se $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ in coordinate esponenziali, allora la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ è una misura di Haar sinistra per $\mathbb{G}$. Inoltre la misura di Haar sinistra di un gruppo $\mathbb{G}$ è unica a meno di costanti moltiplicative (si veda per questo [2], Proposition 1.3.21). Per questo motivo diamo la seguente

Notazione. D'ora in avanti se $\Omega \subset \mathbb{G}$ e scriviamo $|\Omega|$, intendiamo la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n(\Omega)$. Inolte tutti gli spazi L^p e le scritture del tipo $\int_\Omega f(x)dx$ saranno intesi rispetto alla misura di Lebesgue.

Osserviamo anche anche che, sempre per l'Osservazione 5, se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è misurabile, allora $|\delta_\lambda(\Omega)| = \lambda^Q |\Omega|$.

Vediamo ora invece l'altro risultato preliminare, ossia quello riguardante la struttura dei campi vettoriali.

Proposizione 1.2.2. *I campi vettoriali X_j hanno coefficienti polinomiali, dati, per $h_{l-1} < j \leq h_l$ e $1 \leq l \leq k$, da*

$$X_j(x) = \partial_j + \sum_{i > h_l}^{n} q_{i,j}(x) \partial_i$$

dove $q_{i,j}(x) = \frac{\partial \Omega_i}{\partial y_j}(x, y)|_{y=0}$ e quindi se $h_{l-1} < j \leq h_l$ allora $q_{i,j}(x) = q_{i,j}(x_1, ..., x_{h_{l-1}})$ e $q_{i,j}(0) = 0$.

Notazione. D'ora in avanti, per un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ intenderemo una coppia $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ in coordinate esponenziali, con la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ munita di una base $X_1, ..., X_{m_1}, X_{m_1+1}, ..., X_n$ dove sia la base sia l'operazione $\cdot$ soddisfano le proprietà viste finora.

1.3 Metrica nei gruppi di Carnot

Definizione 1.5. Dato un gruppo di Carnot $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$, una distanza d su $\mathbb{G}$ è detta *invariante* se

(i) $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ è continua rispetto alla topologia euclidea;

(ii) d é *invariante a sinistra* rispetto alla famiglia delle traslazioni sinistre intrinseche di $\mathbb{G}$, cioé

$$d(g \cdot p, g \cdot q) = d(p, q), \quad \forall p, q, g \in \mathbb{G};$$

(iii) d è $1-$ *omogenea* rispetto alla famiglia delle dilatazioni, cioé

$$d(\delta_\lambda p, \delta_\lambda q) = \lambda d(p, q), \quad \forall p, q \in \mathbb{G},\ \forall \lambda > 0.$$

Per ogni distanza d invariante in $\mathbb{G}$, la norma ad essa associata, data da $\|p\| := d(p, 0)$, è detta *omogenea* e soddisfa

$$\|p^{-1}\| = \|p\|;$$

$$\|\delta_\lambda(p)\| = \lambda\|p\|.$$

Viceversa una norma omogenea $\|\cdot\|$ induce una distanza invariante d in $\mathbb{G}$ data da $d(p, q) = \|q^{-1}p\|$.

Proposizione 1.3.1. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ un gruppo di Carnot. Due distanze d e d' invarianti in $\mathbb{G}$ sono equivalenti se esiste una costante C tale che per ogni $x, y \in \mathbb{G}$*

$$C^{-1}d(x, y) \leq d'(x, y) \leq Cd(x, y).$$

Notazione. Indichiamo con $(\mathbb{G}, d)$ un gruppo di Carnot $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ munito di una distanza invariante d. Indichiamo con $U_d(p, r)$ e $B_d(p, r)$ rispettivamente le palle aperte e chiuse in $\mathbb{G}$ rispetto alla distanza d, cioè

$$U_d(p, r) := \{x \in \mathbb{G} | d(x, p) < r\}, \quad B_d(p, r) := \{x \in \mathbb{G} | d(x, p) \leq r\}.$$

Osservazione 6. Per quanto visto nella Sezione 1.2

$$|U_d(p,r)| = |B_d(p,r)| = |\delta_r(B_d(p,1))| = r^Q|B_d(p,1)| =$$
$$= r^Q|p^{-1} \cdot B_d(p,1)| = r^Q|B_d(0,1)|$$

e quindi

$$|U_d(p,r)| = |B_d(p,r)| = Cr^Q, \quad \forall p \in \mathbb{G}, \forall r > 0,$$

con $C = C_d$ costante che dipenderà dalla distanza invariante d. Segue anche che

$$(i) \quad \int_{\|x\|>1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < \infty, \quad \text{se e solo se } \alpha > Q;$$
$$(ii) \quad \int_{\|x\|<1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < \infty, \quad \text{se e solo se } \alpha < Q.$$

Questo spiega anche un po' perché l'intero Q si chiami dimensione omogenea del gruppo $\mathbb{G}$: esso gioca lo stesso ruolo dell'intero n per lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n,+)$. In altre parole $(\mathbb{R}^n,+)$ è un gruppo di Carnot di passo 1 e dimensione omogenea n.

Proposizione 1.3.2. *Sia $(\mathbb{G}, d)$ un gruppo di Carnot munito di una distanza invariante d. Allora*

$$\operatorname{diam}(B_d(p,r)) = 2r, \quad \forall p \in \mathbb{G}, \ r > 0.$$

Inoltre, se μ è una misura di Radon in $\mathbb{G}$, s-omogenea rispetto alla famiglia delle dilatazioni per qualche $s > 0$ (cioè $\mu(\delta_\lambda(A)) = \lambda^s\mu(A)$, $A \subseteq \mathbb{G}$), allora

$$\mu(\partial B_d(p,r)) = 0, \quad r > 0.$$

Introduciamo ora una particolare distanza invariante per i gruppi di Carnot, cioè la distanza di Carnot-Charathéodory e ne vediamo alcune sue proprietà.

Definizione 1.6. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot e siano $X_1, ..., X_{m_1}$ un sistema di campi vettoriali generatori. Una curva $\gamma : [0,T] \to \mathbb{G}$ è detta *subunitaria* (o ammissibile) se esistono $c_1, ..., c_{m_1} : [0, T] \to \mathbb{R}$ misurabili tali che $\sum_j c_j^2 \leq 1$ e

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{j=1}^{m_1} c_j(s) X_j(\gamma(s)), \quad \text{per q.o. } s \in [0, T].$$

Definizione 1.7. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot. Per p, $q \in \mathbb{G}$ definiamo la loro *distanza di Carnot-Caratheodory* come

$$d_c(p, q) := \inf\{T > 0 : \exists\ \gamma \text{ subunitaria }, \gamma(0) = p,\ \gamma(T) = q\}.$$

Sottolineamo l'esistenza di un teorema (di Chow, si veda [2], Theorem 19.1.3) il quale assicura che l'insieme delle curve subunitarie che connettono p e q è non vuoto, e che quindi la definizione è ben posta.

Definizione 1.8. Dato uno spazio metrico (X, d) e una curva $\gamma : [a, b] \to X$, definiamo la *variazione totale* di γ come

$$\mathrm{Var}(\gamma) := \sup_{a \leq t_1, \ldots, \leq t_k \leq b} \sum_{i=1}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

dove il sup è preso sulle partizioni finite di $[a, b]$. Se $\mathrm{Var}(\gamma) < +\infty$ la curva si dice $rettificabile$ e $\mathrm{Var}(\gamma)$ si dice *lunghezza* della curva γ.

Definizione 1.9. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una curva $\gamma : [0, 1] \to X$ si dice $L -$ *Lipschitziana*, $L > 0$, se

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq L|t - s|, \quad \forall t, s \in [0, 1].$$

Le definizioni 1.8 e 1.9 restano analoghe nel nostro caso con $(X, d) = (\mathbb{G}, d_c)$. In particolare, per le curve Lipschitziane nel caso dei gruppi di Carnot abbiamo

Proposizione 1.3.3. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ un gruppo di Carnot e sia $X_1, ..., X_{m_1}$ un sistema di campi vettoriali generatori. Allora una curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ è 1-Lipschitziana se e solo se è subunitaria.*

Definizione 1.10. Una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua e rettificabile è detta *geodetica* (o segmento) se $\mathrm{Var}(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$.

Osservazione 7. Con un'opportuna riparametrizzazione una geodetica γ può sempre essere riparametrizzata nell'intervallo $[0, Var(\gamma)]$ e, in questo modo, si ha che $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$.

L'esistenza delle geodetiche nei gruppi di Carnot rispetto alla distanza CC è garantita dal seguente

Teorema 1.3.1. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, d_c)$ un gruppo di Carnot, con d_c la distanza CC. Allora per ogni $x, y \in \mathbb{G}$ esiste una geodetica che li congiunge.*

Concludiamo questa sezione enunciando un risultato che mostra come la distanza CC nei gruppi di Carnot non sia una metrica Riemaniana, in quanto non localmente equivalente a quella euclidea.

Proposizione 1.3.4. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ un gruppo di Carnot di passo k. Siano d_c e d_E le distanze, rispettivamente, CC in $\mathbb{G} \equiv \mathbb{R}^n$ ed euclidea in $\mathbb{R}^n$. Allora*

(i) $A \subset (\mathbb{R}^n, d_c)$ è limitato se e solo se è limitato in $(\mathbb{R}^n, d_E)$.

(ii) Per ogni compatto $K \subset (\mathbb{R}^n, d_E)$ esiste una costante C_K tale che

$$C_K^{-1} d_E(x,y) \leq d_c(x,y) \leq C_K d_E(x,y)^{1/k}, \quad \forall x, y \in K.$$

(iii) La mappa identica $Id : (\mathbb{R}^n, d_E) \to (\mathbb{R}^n, d_c)$ è un omeomorfismo.

1.4 Primi elementi di calcolo differenziale

Definizione 1.11. Siano $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ due gruppi di Carnot con rispettivamete norme omogenee $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e dilatazioni intrinseche δ^1_λ, δ^2_λ. Chiamiamo $L : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ *H-lineare* oppure *omomorfismo omogeneo* se L è un omomorfismo di gruppi che soddisfa

$$L(\delta^1_\lambda(x)) = \delta^2_\lambda L(x), \quad \forall x \in \mathbb{G}, \ \forall \lambda > 0.$$

Osservazione 8. Dati due gruppi di Carnot come sopra chiamiamo $\mathcal{L}_H(\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2)$ l'insieme delle funzioni H-lineari da $\mathbb{G}_1$ in $\mathbb{G}_2$. Tale spazio può essere munito della norma

$$\|L\|_{\mathcal{L}_H(\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2)} := \sup_{p\in\mathbb{G},\ \|p\|_1\le 1} \|L(p)\|_2.$$

Definizione 1.12. Siano $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ due gruppi di Carnot come in Definizione 1.11. Diciamo che $f : \Omega \subset \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ è *differenziabile secondo Pansu* (in breve P-differenziabile) in $p_0 \in \Omega$ se esiste una funzione H-lineare $d_P f_{p_0} : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ tale che [2]

$$\|(df_{p_0}(p^{-1}\cdot p_0))^{-1}\cdot f(p_0)^{-1}\cdot f(p)\|_2 = o(\|p_0^{-1}\cdot p\|_1), \quad \text{per } \|p_0^{-1}\cdot p\|_1 \to 0.$$

La funzione H-lineare $d_P f_{p_0}$ si dice *P-differenziale* di f in p_0.

Definizione 1.13. Siano $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ due gruppi di Carnot come in Definizione 1.11, $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto. Chiamiamo $C^1(\Omega, \mathbb{G}_2)$ l'insieme delle funzioni continue da Ω in $\mathbb{G}_2$ tali che l'applicazione

$$d_P f : \{f : \Omega \to \mathbb{G}_2;\ \text{f continua}\} \longrightarrow \mathcal{L}_H(\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2)$$

sia anch'essa continua.

Nel caso di $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}$ e $\mathbb{G}_2 = (\mathbb{R}, +)$ si usano notazioni differenti per le definizioni date fino ad ora:

(i) La Definizione 1.11 si riduce a chiedere che $L : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ sia omomorfismo di gruppi tale che $L(\delta_\lambda(x)) = \lambda L(x)$ e in questo caso si dice semplicemente che L è $\mathbb{G}$-*lineare*.

(ii) Lo spazio $\mathcal{L}_H(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ delle funzioni $\mathbb{G}$-lineari viene semplicemente indicato con $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ oppure $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$.

(iii) Se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è aperto, l'insieme delle funzioni di classe C^1 si indica con $C^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$.

[2] In questo caso abbiamo indicato allo stesso modo le operazioni in entrambi i gruppi per non appesantire troppo le notazioni.

In particolare per lo spazio $\mathcal{L}_H(\mathbb{G},\mathbb{R})$, fissata una base $X_1,...,X_n$ in accordo con le notazioni usate fino ad ora, abbiamo

Proposizione 1.4.1. *Una mappa $L:\mathbb{G}\to\mathbb{R}$ è $\mathbb{G}$-lineare se e solo se esiste $a=(a_1,...,a_{m_1})\in\mathbb{R}^{m_1}$ tale che se $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{G}$, allora*

$$L(x)=\sum_{j=1}^{m_1}a_jx_j.$$

Osservazione 9. Per una funzione $f:\Omega\subset\mathbb{G}\to\mathbb{R}$, la richiesta che essa sia P-differenziabile in $x_0\in\mathbb{G}$, significa semplicemente chiedere che esista una mappa $\mathbb{G}$-lineare $L:\mathbb{G}\to\mathbb{R}$ (che chiameremo il P-differenziale di f in x_0) tale che

$$\lim_{p\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-L(x_0^{-1}\cdot x)}{d_c(x,x_0)}=0.$$

Osserviamo anche che per una funzione $f\in C^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ ci si può chiedere se essa sia anche C^1 in senso euclideo [3]. Si ha che $C^1(\Omega)\subset C^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ e l'inclusione è stretta, in quanto una funzione C^1 nel gruppo può risultare molto irregolare nel caso euclideo (si veda per un esempio [15]).

Notazione. D'ora in avanti, in alcuni casi, per alleggire le notazioni scriveremo soltanto che $f\in C^1(\Omega)$ anziché $f\in C^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ e lo stesso verrà fatto per le funzioni di regolarità superiore.

Definizione 1.14. Sia $\Omega\subset\mathbb{G}$ aperto. In accordo con le notazioni dell'Osservazione 3 diciamo che una sezione orizzontale ϕ di $H\mathbb{G}$ è di classe C^1, e scriviamo $\phi\in C^1_{\mathbb{G}}(\Omega,H\mathbb{G})$ (anche qui, a volte, soltanto $\phi\in C^1(\Omega,H\mathbb{G})$), se le sue coordinate $\phi_j\in C^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$, per ogni $j=1,...,m_1$.

Definizione 1.15. Sia $\Omega\subset\mathbb{G}$ aperto. Diciamo che una funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è *differenziabile lungo* X_j, per $j=1,...,n$, se la mappa $\lambda\mapsto f(\tau_{x_0}(\delta_\lambda(e_j))$ è differenziabile per $\lambda=0$.

[3] Siccome $\mathbb{G}=(\mathbb{R}^n,\cdot)$ in coordinate esponenziali, posso vedere l'aperto $\Omega\subset\mathbb{G}$ semplicemente come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Questo mi consente di vedere $f:\Omega\to\mathbb{R}$ come funzione euclidea.

Definizione 1.16. Fissiamo una famiglia di campi generatori $X_1, ..., X_{m_1}$. Sia $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ una funzione le cui derivate "parziali" $X_j f$ esistono. Allora definiamo il *gradiente orizzontale* di f, denotato con $\nabla_{\mathbb{G}} f$, come la sezione orizzontale

$$\nabla_{\mathbb{G}} f := \sum_{j=1}^{m_1} (X_j f) X_j.$$

Definizione 1.17. Sia $\phi = (\phi_1, ..., \phi_{m_1})$ una sezione orizzontale tale che $X_j \phi_j \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G})$, per $j = 1, ..., m_1$. Definiamo la funzione a valori reali

$$\text{div}_{\mathbb{G}} \phi := \sum_{j=1}^{m_1} X_j \phi_j,$$

detta *dviergenza orizzontale* di ϕ.

Capitolo 2

Spazi di Sobolev

Definizione 2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Chiamiamo, se esiste, derivata parziale debole di f lungo X_j in Ω una funzione g_j tale che

$$\int_\Omega f X_j \varphi = -\int_\Omega \varphi g_j$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Non è difficile verificare che la derivata debole di una funzione è definita univocamente q.o. in Ω e che se una funzione è derivabile in senso classico, allora essa è derivabile anche in senso debole e le due derivate coincidono. Per questo motivo, d'ora in avanti, useremo la notazione $X_j f$ anche per indicare la derivata debole di una funzione f.

Definizione 2.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto. Chiamiamo spazio di Sobolev l'insieme

$$W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : X_j f \in L^p(\Omega),\ \forall j = 1, ..., m_1\} \tag{2.1}$$

dove le derivate $X_j f$ sono intese in senso debole e $p \in [1, +\infty]$.

Possiamo munire lo spazio $W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$ con la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m_1} \|X_j f\|_{L^p(\Omega)}$$

e ottenere così uno spazio normato. In particolare abbiamo

Proposizione 2.0.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto. Allora per $1 \leq p \leq \infty$ lo spazio $(W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)})$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Prima il caso di $1 \leq p < \infty$. Consideriamo l'applicazione $T : W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^{m+1}$ definita da $Tf := (f, X_1 f, ..., X_{m_1} f)$. Si ha che T è lineare e continua. Inoltre $\|f\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)} = \|Tf\|_{(L_p)^{m+1}(\Omega)}$.

Prendiamo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$. Essendo T lineare e continua avremo che Tf_n è di Cauchy in $(L^p(\Omega))^{m_1+1}$, che è completo. Allora Tf_n ha limite in $(L^p(\Omega))^{m_1+1}$, che chiamiamo $(g_0, g_1, ..., g_{m_1})$. Per ottenere la tesi dobbiamo mostrare che $g_j = X_j g_0$, $j = 1, ..., m_1$. Ma questo equivale a provare che, $\forall \psi \in C^\infty_0(\Omega)$

(i) $\int_\Omega g_j \psi dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega X_j f_n \psi dx$;

(ii) $\int_\Omega g_0 X_j \psi dx = -\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n X_j \psi dx$.

Infatti in questo caso la tesi seguirà dal fatto che $\int_\Omega X_j f_n \psi dx = -\int_\Omega f_n X_j \psi dx$ per la definizione di derivata debole applicata sulle f_n.

Proviamo solo la (i), in quanto la (ii) è analoga. Abbiamo, per $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega g_j \psi dx - \int_\Omega X_j f_n \psi dx\right| &\leq \int_\Omega |g_j - X_j f_n||\psi| dx \leq \\ &\leq \left(\int_\Omega |g_j - X_j f_n|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |\psi|^q dx\right)^{1/q} \leq \\ &\leq C_\psi \|g_j - X_j f_n\|_{(L^p(\Omega))^{m+1}}\end{aligned}$$

dove abbiamo scelto $1/p + 1/q = 1$ per usare la disuguaglianza di Hölder e C_ψ sarà una costante che dipenderà da ψ.

Per quanto riguarda il caso di $p = +\infty$, tutto analogo al caso precedente, solo che alla fine anziché usare Hölder si maggiora con il supess

$$\int_\Omega |g_j - X_j f_n||\psi| dx \leq C_\psi \operatorname{ess\,sup}_\Omega |g_j - X_j f_n|.$$

□

Chiudiamo questa breve introduzione sugli spazi di Sobolev sottolineando che per $1 < p < \infty$ lo spazio $L^p(\Omega)$ è riflessivo quindi, da questo fatto, con un po' di lavoro si ottiene che anche $W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)$ e' riflessivo per $1 < p < \infty$. Per le stesse ragioni si ha che $W^{1,2}_{\mathbb{G}}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, essendolo $L^2(\Omega)$.

2.1 Il Teorema di Meyers-Serrin

In questa sezione ci occuperemo di trattare un problema di densità negli spazi di Sobolev, risultato che prende il nome di Teorema di Meyers-Serrin. Cominciamo definendo il concetto di convoluzione fra due funzioni nei gruppi di Carnot.

Teorema 2.1.1. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{G})$. Allora*

(i) la funzione $y \mapsto f(y)g(y^{-1} \cdot x)$ è sommabile per q.o. $x \in \mathbb{G}$;

(ii) la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x)dy$ è sommabile;

(iii) $\left\| \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x)dy \right\|_{L^1(\mathbb{G})} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{G})}||g||_{L^1(\mathbb{G})}$.

Dimostrazione. Sfruttando il teorema di Tonelli

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{G}\times\mathbb{G}} |f(y)||g(y^{-1} \cdot x)|dxdy &= \int_{\mathbb{G}}\int_{\mathbb{G}} |f(y)||g(y^{-1} \cdot x)|dxdy = \\
&= \int_{\mathbb{G}} |f(y)| \int_{\mathbb{G}} |g(y^{-1} \cdot x)|dxdy = \qquad (*) \\
&= \int_{\mathbb{G}} |f(y)| \int_{\mathbb{G}} |g(z)|dzdy \leq \\
&\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{G})}\|g\|_{L^1(\mathbb{G})}
\end{aligned}$$

dove in $(*)$ abbiamo eseguito il cambio di variabile $z = y^{-1} \cdot x$ sfruttando, come già osservato nel Capitolo 1, che esso ha Jacobiano identicamente uguale a 1. La tesi segue a questo punto dal teorema di Fubini. $\square$

La funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x)dy$ definita nel punto (ii) del Teorema prende il nome di convoluzione di f con g e si indica con $(f * g)(x)$. Osserviamo che, in generale, se il gruppo non è commutativo si ha $f * g \neq g * f$ e che la definizione è stata data in questo modo in virtù del fatto che stiamo lavorando con dei campi vettoriali invarianti a sinistra. Inoltre il punto (iii) del Teorema 2.1.1 è un caso particolare del seguente

Teorema 2.1.2 (Disuguaglianza di Housdorff-Young)**.** *Siano* $f \in L^p(\mathbb{G})$, $g \in L^q(\mathbb{G})$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Allora si ha* $f * g \in L^r(\mathbb{G})$ *e, in particolare*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{G})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{G})}\|g\|_{L^q(\mathbb{G})}.$$

Dimostrazione. Si veda [6], Capitolo 1, Sezione B, Proposition 1.18. □

Osservazione 10. Siano f e g due funzioni per cui ha senso la convoluzione e consideriamo la funzione $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x)dz$. Applicando nell'integrale il cambio di variabile $z = y^{-1} \cdot x$ (che sappiamo avere Jacobiano 1) possiamo riscrivre $f * g$ come

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{G}} g(z)f(x \cdot z^{-1})dy.$$

Ora, se il gruppo $\mathbb{G}$ è commutativo allora $x \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot x$ e quindi abbiamo che $(f * g)(x) = (g * f)(x)$. Ha senso allora chiedersi se l'uguaglianza sia vera in generale. La risposta è purtroppo no, però le due cose non sono totalmente scollegate e si può trovare una relazione che le leghi.

Denotiamo con $\check{f}(x) := f(x^{-1})$. Cerchiamo allora di riscrivere la convoluzione per scambiare di posto f e g, facendo comparire qualche simbolo di check dove necessario

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x)dy = \int_{\mathbb{G}} \check{f}(y^{-1})g(y^{-1} \cdot x)dy = \\
&= \int_{\mathbb{G}} \check{f}(y^{-1} \cdot x \cdot x^{-1})g(y^{-1} \cdot x)dy = \\
&\text{(cambio di variabile } y^{-1} \cdot x = z^{-1}\text{, ovvero } y = x \cdot z) \\
&= \int_{\mathbb{G}} \check{f}(z^{-1} \cdot x^{-1})g(z^{-1})dz = \\
&= \int_{\mathbb{G}} \check{f}(z^{-1} \cdot x^{-1})\check{g}(z)dz = \check{(}g * \check{f})(x).
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato che

$$(f * g)(x) = \check{(}g * \check{f})(x), \tag{2.2}$$

fatto che fra poco ci tornerà molto utile.

Definizione 2.3. Una funzione $J \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ si chiama mollificatore se

(i) $\mathrm{supp}J \subseteq U(0,1)$

(ii) $J(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{G}$

(iii) $\int_{\mathbb{G}} J(x)dx = 1$

Un esempio di mollificatore è dato, se si prende $\mathbb{G} = (\mathbb{R}, +)$, dalla funzione

$$J(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x^2|}}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

dove C sarà una opportuna costante tale che J soddisfi la (iii). A partire da dei mollificatori definiti su $\mathbb{G} = (\mathbb{R}, +)$ si possono definire mollificatori su $\mathbb{G}$ qualsiasi come $J_{\mathbb{G}}(x) = CJ(\|x\|)$. Qui $\|x\|$ è una qualsiasi norma omogenea. Ad esempio, potremmo utilizzare la funzione $x \to d(x, 0)$. Tuttavia più avanti, per ottenere un effetto regolarizzante, dovremo utilizzare una norma che sia liscia fuori dall'origine. Una tale norma esiste sempre, ma la prova dell'esistenza è alquanto delicata e si basa sulle proprietà della soluzione fondamentale per i sub-Laplaciani nei gruppi di Carnot. Ci riferiamo per questo a [2], Proposizione 5.4.2. D'ora in poi assumeremo che i mollificatori siano costruiti a partire da una norma omogenea che sia liscia fuori dall'origine.

Osservazione 11. Se $J_{\mathbb{G}}$ è un mollificatore, allora lo sono anche tutte le funzioni, per $\varepsilon > 0$, del tipo

$$J_{\varepsilon,\mathbb{G}}(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} J_{\mathbb{G}}(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)) = \frac{C}{\varepsilon^n} J(\|\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)\|). \tag{2.3}$$

Inoltre per mollificatori ottenuti a partire da una norma omogenea (liscia fuori dall'origine) come in (2.3), si ha che

$$J_{\varepsilon,\mathbb{G}}(x) = \check{J}_{\varepsilon,\mathbb{G}}(x). \tag{2.4}$$

Notazione. D'ora in avanti tutti i mollificatori che utilizzeremo saranno supposti come in (2.3), in modo che essi soddisfino la (2.4). Inoltre, per alleggerire le notazioni, ometteremo il $\mathbb{G}$ al pedice per i mollificatori definiti su tutto il gruppo.

Lo scopo per cui vengono introdotti i mollificatori viene spiegato dal seguente

Teorema 2.1.3. *Sia $\varepsilon > 0$. Allora*

(i) *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$. Allora $J_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{G})$.*

(ii) *Siano $f \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$, $\mathrm{supp} f$ compatto. Allora*

$$\mathrm{supp}(J_\varepsilon * f) \subseteq \{x \in \mathbb{G} : d(x, \mathrm{supp} f) < \varepsilon\}.$$

(iii) *Sia $f \in C(\mathbb{G})$. Allora*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon * f = f$$

uniformemente sui compatti.

(iv) *Sia $f \in L^p(\mathbb{G})$, con $1 \leq p < \infty$. Allora*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|J_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{G})} = 0.$$

(v) *Sia $f \in W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$, con $1 \leq p < \infty$. Allora $X_j(J_\varepsilon * f) \in L^p(\mathbb{G})$, $\forall j = 1, ..., m_1$ e si ha anche*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|J_\varepsilon * f - f\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})} = 0.$$

Dimostrazione. Si veda [5], capitolo 4, sezione 2, Teorema 1. □

Sottolineamo soltanto che la dimostrazione fornita dalla fonte citata è svolta in ambito euclideo, ma non è difficile ricavarne una analoga nel caso dei gruppi.

Osservazione 12. Lo stesso Teorema vale anche scambiando di posto funzione e mollificatore. Infatti ci basta combinare la (2.2) applicata ad f e J_ε con la (2.4) e otteniamo

$$(J_\varepsilon * f)(x) = \check{}(J_\varepsilon * \check{}f),$$

che dimostra quanto avevamo dichiarato.

Quello che andremo a fare ora sarà di sfruttare i punti (iv) e (v) del Teorema 2.1.3 per ottenere due importanti teoremi di densità riguardanti gli spazi di Sobolev in un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$.

Teorema 2.1.4. *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ *un gruppo di Carnot. Allora per* $1 \leq p < \infty$ *si ha che:*

$$C_0^\infty(\mathbb{G}) \textit{ e' denso in } W_{\mathbb{G}}^{1,p}(\mathbb{G}).$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Passo 1: Ogni funzione di $W_{\mathbb{G}}^{1,p}(\mathbb{G})$ può essere approssimata con una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{G})$ a supporto compatto. Chiamiamo $\Psi_N := (J_{\frac{1}{4}} * \chi_{[0,N]})(\|x\|) \in C_0^\infty(\mathbb{G})$. Essendo Ψ_N a supporto compatto, lo è anche $f\Psi_N$. Inoltre $\Psi_N(x) \to 1$ per $N \to \infty$ e per ogni $x \in \mathbb{G}$. L'asserzione seguirà provando che

$$f\Psi_N \to f, \quad \text{in } W_{\mathbb{G}}^{1,p}(\mathbb{G}).$$

Mostriamo che $f\Psi_N \to f$, per $N \to +\infty$, in $L^p(\mathbb{G})$

$$|f\Psi_N - f|^p \leq |f|^p|1 - \Psi_N|^p \leq C|f|^p \in L^1(\mathbb{G})$$

e quindi per il Teorema della convergenza dominata

$$\int_{\mathbb{G}} |f\Psi_N - f|^p dx \longrightarrow 0, \quad N \to +\infty.$$

D'altra parte $X_j(f\Psi_N) = (X_j f)\Psi_N + f X_j \Psi_N$. Ancora per il teorema della convergenza dominata, il primo termine tende a $X_j f$ in $L^p(\mathbb{G})$. Invece per quanto riguarda il secondo termine, abbiamo che $X_j\Psi_N \to 0$ per $N \to \infty$ su tutto $\mathbb{G}$. Poichè $X_j\Psi_N \leq C$ su tutto $\mathbb{G}$, con C independente da N, possiamo di nuovo appllicare il teorema della convergenza dominata e ottenere che $X_j \Psi_N \to 0$, per $N \to \infty$, in $L^p(\mathbb{G})$.

Passo 2: Dimostriamo ora il teorema vero e proprio. Fissiamo $\eta > 0$. Osserviamo che, per il Teorema 2.1.3

(i) la funzione $J_\varepsilon * (f\Psi_N) \in C_0^\infty(\mathbb{G})$

(ii) $\|J_\varepsilon * (f\Psi_N) - f\Psi_N\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})} < \eta/2, \quad$ se $\varepsilon < \varepsilon_\eta$

essendo la funzione $f\Psi_N \in W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$. Prendendo allora $\varepsilon < \varepsilon_\eta$ avremo che

$$\|f - J_\varepsilon * (f\Psi_N)\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})} \leq \|f - f\Psi_N\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})} + \|f\Psi_N - J_\varepsilon * (f\Psi_N)\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})} <$$
$$< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$$

se $N > N_{\eta/2}$, da cui la tesi. □

Teorema 2.1.5 (Teorema di Meyers-Serrin)**.** *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ un gruppo di Carnot e sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto. Allora per $1 \leq p < \infty$ si ha che*

$$C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega) \text{ e' denso in } W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega).$$

Dimostrazione. Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Per $N = 0, 1, 2, ...$ chiamiamo

$$\Omega_N := \left\{ x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{N} \right\}$$

con la convenzione $\Omega_0 = \emptyset$. Poniamo poi

$$V_N := \Omega_{N+1} \setminus \overline{\Omega}_{N-1}.$$

Infine consideriamo una successione di funzioni $\Psi_N \in C_0^\infty(V_N)$ tali che $0 \leq \Psi_N \leq 1$ e $\sum_N \Psi_N = 1$. In questo modo le funzioni $f\Psi_N \in W^{1,p}(\Omega)$, con $\operatorname{supp}(f\Psi_N) \subset V_N$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora per le proprietà dei mollificatori (Teorema 2.1.3) esisteranno $\varepsilon_N > 0$ tali che

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}(J_{\varepsilon_N} * (f\Psi_N)) \subset V_N; \\ &\|J_{\varepsilon_N} * (f\Psi_N) - f\Psi_N\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^N}; \\ &\|J_{\varepsilon_N} * \nabla_{\mathbb{G}}(f\Psi_N) - \nabla_{\mathbb{G}}(f\Psi_N)\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^N}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Chiamiamo allora

$$f_\varepsilon := \sum_{N=1}^{\infty} J_{\varepsilon_N} * (f\Psi_N)$$

Osserviamo che, per come abbiamo definito le Ψ_N, in ogni intorno di ogni punto $x \in \Omega$ la funzione f_ε ha solo un numero finito di termini che non si annulla e quindi $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Essendo poi $f = \sum_{N=1}^{\infty} (f\Psi_N)$, dalla (2.5) abbiamo che

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{N=1}^{\infty} \|J_{\varepsilon_N} * (f\Psi_N) - f\Psi_N\|_{L^p(\Omega)}$$

e anche

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f_\varepsilon - \nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{N=1}^{\infty} \|J_{\varepsilon_N} * \nabla_{\mathbb{G}}(f\Psi_N) - \nabla_{\mathbb{G}}(f\Psi_N)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Di conseguenza $f_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ e, sempre per il Teorema 2.1.3, $f_\varepsilon \longrightarrow f$ in $W^{1,p}(\Omega)$ per $\varepsilon \to 0$. La successione che dimostra il teorema è quella delle somme parziali di f_ε. $\square$

Sottolineamo che la differenza nei due teoremi sta nel come si costruiscono le funzioni approssimanti. Infatti nella dimostrazione del Teorema 2.1.4, per costruire la Ψ_N avevamo tutto lo "spazio" che volevamo e siamo quindi stati in grado di controllarne la pendenza. Per quanto riguarda invece il caso di Meyers-Serrin, potremmo costruire delle funzioni simili alle Ψ_N nella dimostrazione del Teorema 2.1.4, ma andando a coprire tutto l'aperto Ω, quando ci si avvicina al bordo non è detto che si abbia lo "spazio" sufficiente per controllare la pendenza di tali funzioni. Per questo motivo chiediamo (in Meyers-Serrin) le funzioni approssimanti "soltanto" $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Concludiamo questa sezione dando una definizione che ci tornerà utile alla fine del capitolo, quando parleremo del Teorema immersione compatta.

Definizione 2.4. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ un gruppo di Carnot, $\Omega \in \mathbb{G}$ aperto. Allora per $1 \leq p < \infty$ poniamo

$$W^{1,p}_{\mathbb{G},0}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)}.$$

2.2 Le disuguaglianze di Sobolev e Sobolev-Poincaré

Teorema 2.2.1 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Sia* $U = U_{d_c}(x, r(U))$ *una palla aperta in* $\mathbb{G}$*, con* d_c *la distanza di Carnot-Catathéodory. Sia* $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *e denotiamo con* f_U *la media di* f *in* U*. Allora esistono due costanti* $C = C(\mathbb{G})$ *e* $\tau > 1$ *indipendenti da* f *e da* U *tali che*

$$\int_U |f(x) - f_U| dx \le Cr(U) \int_{\tau U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)| dx \tag{2.6}$$

dove $\tau U = U_{d_c}(x, \tau r(U))$*.*

Dimostrazione. Siano $U = U(x_0, r)$ una palla aperta in $\mathbb{G}$, con $x_0 \in \mathbb{G}$ e $r > 0$, e $f \in C^1(\mathbb{G}, \mathbb{R})$. Allora abbiamo

$$\int_U |f(x) - f_U| dx = \frac{1}{|U|} \int_U \left| \int_U (f(x) - f(y)) dy \right| dx \le \frac{1}{|U|} \int_U \int_U |f(x) - f(y)| dx dy.$$

Applichiamo, nell'integrale interno, il cambio di variabile $z = y^{-1} \cdot x$ che, come già osservato nel primo capitolo, ha Jacobiano identicamente uguale a 1. In questo modo otteniamo

$$\int_U |f(x) - f_U| dx \le \frac{1}{|U|} \int_U \int_{y^{-1} \cdot U} |f(y \cdot z) - f(y)| dz dy \le \frac{1}{|U|} \int_U \int_{U(0,2r)} |f(y \cdot z) - f(y)| dz dy$$

dove l'ultima disuguaglianza è data dal fatto che se $y \in U$, allora $y^{-1} \cdot U \subset U(0, 2r)$.

Consideriamo ora $z \in U(0, 2r)$ fissato e sia $\delta := d(0, z)$. Prendiamo una geodetica $\gamma : [0, \delta] \to \mathbb{G}$ tale che $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(\delta) = z$. Sia $h \in L^\infty(0, \delta)^{m_1}$ tale che

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{m_1} h_j(t) X_j(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad |h(t)| \le 1 \quad \text{per q.o. } t \in [0, \delta].$$

Allora, sfruttando l'invarianza a sinistra dei campi $X_1, ..., X_{m_1}$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(y \cdot z) - f(y) &= \int_0^\delta \frac{d}{dt} f(y \cdot \gamma(t)) dt = \int_0^\delta \langle Df(y \cdot \gamma(t)), \frac{d}{dt}(y \cdot \gamma(t)) \rangle dt = \\ &= \int_0^\delta \langle Df(y \cdot \gamma(t)), \sum_{j=1}^{m_1} h_j(t) X_j(\gamma(t)) \rangle dt = \\ &= \int_0^\delta \langle \nabla_{\mathbb{G}} f(y \cdot \gamma(t)), h(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Poi, essendo $|h(t)| \leq 1,$ per q.o. $t \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned} \int_U |f(x) - f_U| dx &\leq \frac{1}{|U|} \int_U \int_{U(0,2r)} \int_0^\delta |\nabla_{\mathbb{G}} f(y \cdot \gamma(t))| dt dz dy \leq \\ &\leq \frac{1}{|U|} \int_0^\delta \int_{U(0,2r)} \int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f(y \cdot \gamma(t))| dy dz dt. \end{aligned}$$

La curva γ dipende da z. Dal momento in cui $\gamma(t) \in U(0, 2r)$, per ogni $t \in [0, \delta]$, si ha che se $y \in U$ allora $y \cdot \gamma \in 3U = U(x_0, 3r)$. Infatti

$$d(y \cdot \gamma(t), x_0) \leq d(y \cdot \gamma(t), y) + d(y, x_0) \leq d(\gamma(t), 0) + d(y, x_0) \leq 3r.$$

Allora possiamo concludere

$$\int_U |f(x) - f_U| dx \leq \frac{1}{|U(0,r)|} \int_0^\delta \int_{U(0,2r)} \int_{3U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(y)| dy dz dt \leq$$

$$\leq 2r \frac{|U(0,2r)|}{|U(0,r)|} \int_{3U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(y)| dy = r 2^{Q+1} \int_{3U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(y)| dy.$$

$\square$

Teorema 2.2.2. *Sia $U = U_{d_c}(x, r(U))$ una palla aperta in $\mathbb{G}$, con d_c la distanza di Carnot-Catathéodory. Siano $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e f_U la media di f in U. Allora esistono $\tau > 1$ e $C > 0$, entrambi indipendenti da f e da U tali che*

$$|f(x) - f_U| \leq C \int_{\tau U} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f(y)|}{d(x,y)^{Q-1}} dy \tag{2.7}$$

dove $x \in U$ e τU è la palla concentrica con U di raggio $\tau r(U)$.

Dimostrazione. Sia $x \in U$. Se $\tau > 1$ allora esiste un $\eta > 0$, indipendente da x e da U, tale che $U(x, \eta r(U)) \subset \tau U$. Basta infatti prendere $1 + \tau > \eta$ perché se $y \in U(x, \eta r(U))$, allora

$$d(x_U, y) \leq d(x_U, x) + d(x, y) \leq r(U) + \eta r(U) = (1 + \eta) r(U)$$

dove x_U indica il centro della palla U. Indichiamo d'ora in avanti con B la palla $U(x, \eta r(U))$. Allora

$$|f(x) - f_U| \leq |f(x) - f_B| + |f_B - f_U|.$$

Stimiamo il secondo termine a destra della disuguaglianza

$$\begin{aligned} |f_B - f_U| &\leq |f_B - f_{\tau U}| + |f_U - f_{\tau U}| = \\ &= \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_{\tau U}| dy + \frac{1}{|U|} \int_U |f(y) - f_{\tau U}| dy \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{|B|} + \frac{1}{|U|} \right) \int_{\tau U} |f(y) - f_{\tau U}| dy \leq \\ &\leq \frac{c}{|\tau U|} \int_{\tau U} |f(y) - f_{\tau U}| dy \leq \\ &\leq c \frac{r(\tau U)}{|\tau U|} \int_{\tau \theta U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)| dx. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, se $x \in U$ e $y \in \tau\theta U$

$$\begin{aligned} & d(x, y) \leq \tau\theta r(U) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{d(x, y)}{\tau r(U)} \leq C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{d(x, y)}{\tau r(U)} \right)^{Q-1} \leq C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\tau r(U)}{d(x, y)} \right)^{1-Q} \leq C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (\tau r(U))^{1-Q} \leq C d(x, y)^{1-Q} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{r(\tau U)}{|\tau U|} \leq C d(x, y)^{1-Q} \end{aligned}$$

e quindi avremo

$$|f_B - f_U| \leq c \frac{r(\tau U)}{|\tau U|} \int_{\tau\theta U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)| dx \leq C \int_{\tau\theta U} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f(y)|}{d(x, y)^{Q-1}} dy.$$

Vediamo ora il primo termine, cioè $|f(x) - f_B|$. Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{|U(x,s)|} \int_{U(x,s)} f(y)dy - f(x) \right| \leq \\
\leq &\frac{1}{|U(x,s)|} \int_{U(x,s)} |f(y) - f(x)| dy \leq \\
\leq &\sup_{y \in U(x,s)} |f(y) - f(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{per } s \to 0,
\end{aligned}
$$

da cui $\lim_{s \to 0} f_{U(x,s)} = f(x)$. Allora, ricordando che $B = U(x, \eta r(U)) := U(x,r)$ per snellire la notazione, possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f_B| = &|f(x) - f_U(x,r)| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_{U(x,r2^{-k-1})} - f_{U(x,r2^{-k})}| = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|U(x,r2^{-k-1})|} \int_{U(x,r2^{-k-1})} |f(y) - f_{U(x,r2^{-k})}| dy \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{|U(x,r2^{-k})|} \int_{U(x,r2^{-k})} |f(y) - f_{U(x,r2^{-k})}| dy \leq \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r2^{-k}}{|U(x,r2^{-k})|} \int_{\tau U(x,r2^{-k})} |\nabla_{\mathbb{G}} f(y)| dy = \\
&= C \int_{\tau B} |\nabla_{\mathbb{G}} f(y)| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r2^{-k}}{|U(x,r2^{-k})|} \chi_{\{y : d(x,y) < \tau r 2^{-k}\}}(y) \right) dy = \\
&= C \int_{\tau B} |\nabla_{\mathbb{G}} f(y)| \left(\sum_{k=0}^{\infty} (r2^{-k})^{1-Q} \chi_{\{y : d(x,y) < \tau r 2^{-k}\}}(y) \right) dy.
\end{aligned}
$$

Non è complicato vedere che, essendo $d(x,y) < \tau r 2^{-k}$, allora $(r2^{-k})^{1-Q} < Cd(x,y)^{1-Q}$ e quindi tutta la somma dentro l'integrale è controllata dalla quantità $Cd(x,y)^{1-Q}$, dove C è una opportuna costante. Abbiamo quindi trovato

$$
|f(x) - f_B| \leq C \int_{\tau B} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f(y)|}{d(x,y)^{Q-1}} dy \leq C \int_{\tau \theta U} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f(y)|}{d(x,y)^{Q-1}} dy.
$$

Le due stime combinate forniscono la tesi. $\square$

Definizione 2.5. Siano $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $0 < \alpha < Q$. Chiamiamo *potenziale di Riesz* di f di ordine α la funzione

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{G}} \frac{f(y)}{d(x,y)^{Q-\alpha}} dy.$$

Con questa definizione la (2.7) può essere riscritta in modo compatto come $|f(x) - f_U| \leq C I_1(|\nabla_{\mathbb{G}} f(x)| \chi_{\tau U})$, dove $\tau > 1$ è la costante del Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.3 (Teorema di Hardy-Litllewood-Sobolev)**.** *Sia $0 < \alpha < Q$ e fissiamo p tale che $1 \leq p < Q/\alpha$. Poniamo inoltre $q^{-1} := p^{-1} - \alpha/Q$. Allora*

i) Se $f \in L^p(\mathbb{G})$, allora $I_\alpha f(x) < \infty$ per q.o. $x \in \mathbb{G}$.

ii) I_α è una mappa sublineare di tipo (p,q)-debole, i.e. esiste una costante $C_p > 0$ tale che

$$|\{x \in \mathbb{G} : I_\alpha f(x) > \lambda\}| \leq C_p \left(\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{G})}}{\lambda} \right)^q.$$

iii) Se $p > 1$ allora esiste $C_p > 0$ tale che $\|I_\alpha f\|_{L^q(\mathbb{G})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{G})}$.

Per dimostrare il Teorema 2.2.3 sfrutteremo il seguente risultato di interpolazione di Marcinkiewicz, per la quale dimostrazione rimandiamo a [16], Appendice B. Sottolineamo che anche in questo caso la dimostrazione è scritta nel caso euclideo, ma se ne ricava ben presto una analoga per i gruppi di Carnot.

Teorema 2.2.4 (Teorema di interpolazione di Marcinkiewicz)**.** *Siano p_i, q_i, $i = 1, 2$ esponenti dati, con $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $p_0 < p_1$ e $q_0 \neq q_1$. Supponiamo poi che T sia un funzionale di tipo (p_0, q_0) e $(p_1, q_1) -$ debole (i.e. T soddisfa il punto (ii) del Teorema 2.2.3). Allora se $0 < 1 < \theta$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, si ha*

$$\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{G})$$

dove C è una costante indipendente da T e da f.

Dimostrazione (del Teorema 2.2.3). Chiamiamo K(y) la funzione $y \mapsto \|y\|^{-Q+\alpha}$. In questo modo allora possiamo riscrivere l'integrale di Riesz come $I_\alpha f(x) = (f * K)(x)$, $x \in \mathbb{G}$. Andiamo a decomporre la funzione K in $K_1 + K_\infty$, dove

$$K_1(y) = \begin{cases} K(y), & \text{se } \|y\| \le \mu \\ 0, & \text{se } \|y\| > \mu \end{cases}, \quad K_\infty(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } \|y\| \le \mu \\ K(y), & \text{se } \|y\| > \mu \end{cases}$$

con μ costante positiva fissata.

Abbiamo $f * K = f * K_1 + f * K_\infty$. Ora l'integrale che rappresenta $f * K_1$ è assolutamente convergente quasi ovunque perché scegliendo $q = 1$, $r = p$, si ha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ e per la disuguaglianza di Young (Teorema 2.1.2)

$$\|f * K_1\|_1 \le \|f\|_p \|K_1\|_1 < \infty,$$

essendo $f \in L^p$ e $K_1 \in L^1$. In modo simile si ottiene la convergenza del secondo termine $f * K_\infty$ osservando che se p' è esponente coniugato di p (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) la funzione K_∞ sta in $L^{p'}$. Infatti

$$\begin{aligned} \|K_\infty\|_{p'}^{p'} = \int_{\|y\|>\mu} \|y\|^{(-Q+\alpha)p'} dy < \infty \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (-Q+\alpha)p' < -Q \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow p' > \frac{-Q}{-Q+\alpha} = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{Q}} \end{aligned}$$

ma $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q}$ e $\frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ da cui

$$p' = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{Q} - \frac{1}{q}} > \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{Q}}$$

essendo per ipotesi $q < \infty$. Questo conclude la prova del punto (i).

Proviamo ora che $f * K$ è soddisfa la (ii). Innanzitutto osserviamo che è sufficiente provare la disequazione con un 2λ al posto di λ nel termine di sinistra (questo cambierà poi solo la costante C a destra) e per $\|f\|_p = 1$, perché $f \in L^p(\mathbb{G}) \Leftrightarrow \frac{f}{\|f\|_p} \in L^p(\mathbb{G})$ e quindi anche questa restrizione cambierà al più il valore della costante C. Allora

$$|\{x \in \mathbb{G} : |f * K| > 2\lambda\}| \le |\{x \in \mathbb{G} : |f * K_1| > \lambda\}| + |\{x \in \mathbb{G} : |f * K_\infty| > \lambda\}|$$

Adesso per quanto riguarda il primo termine a destra della disuguaglianza abbiamo

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{G} : |f * K_1| > \lambda\}| &= |\{x \in \mathbb{G} : |f * K_1|^p > \lambda^p\} = \\ &= |\{x \in \mathbb{G} : \frac{|f * K_1|^p}{\lambda^p} > 1\} = \\ &= \int_{\{x \in \mathbb{G} : \frac{|f*K_1|^p}{\lambda^p} > 1\}} dy \le \int_{\mathbb{G}} \frac{|f * K_1|^p}{\lambda^p} dy = \\ &= \frac{\|f * K_1\|_p^p}{\lambda^p} \le \frac{\|f\|_p^p \|K_1\|_1^p}{\lambda^p} = \frac{\|K_1\|_1^p}{\lambda^p}.\end{aligned}$$

e, inoltre

$$\|K_1\|_1 = \int_{\|y\| \le \mu} \|y\|^{-Q+\alpha} dy = C\mu^\alpha.$$

Ora vediamo il secondo termine $|\{x \in \mathbb{G} : |f * K_\infty| > \lambda\}|$. Dobbiamo provare $\|f * K_\infty\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f * K_\infty| \le \lambda$, così da ottenere come diretta conseguenza $|\{x \in \mathbb{G} : |f * K_\infty| > \lambda\}| = 0$. Abbiamo, ancora per la disuguaglianza di Young,

$$\|f * K_\infty\|_\infty \le \|f\|_p \|K_\infty\|_p' = \|K_\infty\|_p'$$

con

$$\|K_\infty\|_{p'} = \left(\int_{\|y\| \ge \mu} \|y\|^{(-Q+\alpha)p'} dy \right)^{1/p'} = C\mu^{-Q/q}.$$

Ora per avere ciò che cercavamo ci serve $\|K_\infty\|_{p'} = \lambda$, cioè scegliamo a posteriori $\mu = C\lambda^{q/Q}$. Mettendo infine insieme le cose otteniamo

$$|\{x \in \mathbb{G} : |f * K_1| > \lambda\}| \le \left(C\frac{\mu^\alpha}{\lambda} \right)^p = C\lambda^{-q} \overset{(\|f\|_p = 1)}{=} C \left(\frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^q.$$

Per quanto riguarda il punto (iii), esso è conseguenza diretta del Teorema di Marcinkiewicz (Teorema 2.2.4). □

Combinando i Teoremi 2.2.2 e 2.2.3 si ottiene

Proposizione 2.2.1. *Sia p fissato, $1 \le p < Q$, e poniamo $q := \frac{pQ}{Q-p}$. Siano poi $U = U_{d_c}(x, r(U))$ una palla di Carnot-Carathéodory in $\mathbb{G}$ e $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Allora* *i) se $p > 1$, esistono due costanti $C > 0$ e $\tau > 1$, entrambe indipendenti da f e da U, tali che*

$$\left(\int_U |f(x) - f_U|^q dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\tau U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx\right)^{1/p}; \tag{2.8}$$

ii) se $p = 1$, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|\{x \in \mathbb{G} : |f(x) - f_U| > \lambda\}| \leq C \left(\frac{\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^1}}{\lambda}\right)^{Q/(Q-1)} \tag{2.9}$$

per $\lambda > 0$.

Dimostrazione. Proviamo il punto (i)

$$\begin{aligned}
&\left(\int_U |f(x) - f_U|^q dx\right)^{1/q} \leq \quad \text{(per il Teorema 2.2.2)}\\
\leq &C \left(\int_{\mathbb{G}} \left(\int_{\tau U} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f(y)|}{d(x,y)^{Q-1}} dy\right)^q dx\right)^{1/q} =\\
= &C \left(\int_{\mathbb{G}} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f(y)| \chi_{\tau U}(y)}{d(x,y)^{Q-1}} dy\right)^q dx\right)^{1/q} \leq \quad \text{(per il Teorema 2.2.3)}\\
\leq &C \left(\int_{\mathbb{G}} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p \chi_{\tau U}(x) dx\right)^{1/p} =\\
= &C \left(\int_{\tau U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il punto (ii) abbiamo che, dal Teorema 2.2.2, $|f - f_U| \leq C I_1 |\nabla_{\mathbb{G}} f|$ e quindi

$$|\{x \in \mathbb{G} : |f(x) - f_U| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{G} : I_1 |\nabla_{\mathbb{G}} f| > \frac{\lambda}{C}\}| \leq C \left(\frac{\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^1}}{\lambda}\right)^{Q/(Q-1)}$$

dove l'ultima disuguaglianza è data dal Teorema 2.2.3, con $p = 1$ e $q = \frac{Q}{Q-1}$. □

La disuguaglianza (2.8) è "quasi" la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré. Diciamo "quasi" perché nella parte destra c'è un fattore di dilatazione τ che vorremmo non ci fosse e, infatti, vedremo che la stessa disuguaglianza vale anche senza il fattore di dilatazione τ. Invece per quanto riguarda il caso $p = 1$, abbiamo una disuguaglianza di natura diversa rispetto alla (2.8), perché è coinvolta una "norma" di tipo debole per la f.

Osservazione 13. Se $\lambda > 0$ e $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1, allora la quantità $|\{x \in \mathbb{G} : |f(x) - f_U| > \lambda\}|$ non è una vera norma per la f e per questo scriviamo "norma". Inoltre diciamo che è una norma "debole" perché

$$|\{x \in \mathbb{G} : |f| > \lambda\}| = \frac{1}{\lambda^q} \int_{|f|>\lambda} \lambda^q dx \leq \frac{1}{\lambda^q} \int_{|f|>\lambda} |f|^q dx = C\|f\|_q^q$$

e quindi $f \in L^q(\mathbb{G}) \Rightarrow |\{x \in \mathbb{G} : |f(x) - f_U| > \lambda\}| < \infty$. Non è vero però il viceversa, infatti la funzione $x \mapsto \|x\|^{-1} \notin L^q(\mathbb{G})$, qualsiasi sia q, ma

$$|\{x \in \mathbb{G} : \frac{1}{\|x\|} > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{G} : \|x\| < \frac{1}{\lambda}\}| = C\frac{1}{\lambda^Q} < \infty.$$

Allora dobbiamo prima "rinforzare" la (2.9), dimostrando che la (2.8) vale anche per $p = 1$. Abbiamo

Proposizione 2.2.2 (Disuguaglianza di Sobolev-Poincaré)**.** *Sia p fissato, $1 \leq p < Q$, e poniamo $q := \frac{pQ}{Q-p}$. Siano poi $U = U(x, r(U))$ una palla di Carnot-Carathéodory in $\mathbb{G}$ e $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Allora esistono due costanti $c = c(p, \mathbb{G})$ e $\tau > 1$, entrambe indipendenti da f e da U, tali che*

$$\left(\int_U |f(x) - f_U|^q dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_{\tau U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \qquad (2.10)$$

Dalla Proposizione 2.2.1 si ricava la disuguaglianza geometrica di Sobolev-Poincaré, dimostrando di poter eliminare il fattore di dilatazione τ.

Teorema 2.2.5 (Disuguaglianza geometrica di Sobolev-Poincaré)**.** *Sia p fissato, $1 \leq p < Q$, e poniamo $q := \frac{pQ}{Q-p}$. Siano poi $U = U(x, r(U))$ una palla di Carnot-Carathéodory in $\mathbb{G}$ e $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Allora esiste una costante $c = c(p, \mathbb{G})$ e $\tau > 1$, indipendente da f e da U, tale che*

$$\left(\int_U |f(x) - f_U|^q dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \qquad (2.11)$$

o, equivalentemente,

$$\left(\fint_U |f(x) - f_U|^q dx \right)^{1/q} \leq cr(U) \left(\fint_U |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

L'equivalenza fra le due quantità è data da un semplice conto algebrico sui raggi e sulla media. Per quanto riguarda invece la dimostrazione vera e propria del Teorema 2.2.5 si vedano [10], Theorem 1 e [4], Theorem 1.1.

Dal Teorema 2.2.5 segue la disuguaglianza di Sobolev per funzioni a supporto compatto.

Proposizione 2.2.3 (Disuguaglianza di Sobolev)**.** *Sia p fissato, $1 \leq p < Q$, e poniamo $q := \frac{pQ}{Q-p}$. Siano poi $U = U(x, r(U))$ una palla di Carnot-Carathéodory in $\mathbb{G}$ e $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 a supporto compatto in U. Allora esiste $c = c(p, \mathbb{G})$, indipendente da f e da U, tale che*

$$\left(\int_U |f(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{2.13}$$

Dimostrazione. Sia f come nelle ipotesi della Proposizione. Allora dalla disuguaglianza di Sobolev-Poincaré ricaviamo

$$\begin{aligned} \left(\int_U |f|^q dx \right)^{1/q} &= \left(\int_U |f - f_U + f_U|^q dx \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_U |f - f_U|^q dx \right)^{1/q} + \left(\int_U |f_U|^q dx \right)^{1/q} \leq \\ &\leq c \left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_U |f_U|^q dx \right)^{1/q} = \\ &\leq c \left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f|^p dx \right)^{1/p} + |f_U||U|^{1/q}. \end{aligned}$$

Resta da provare che $|f_U||U|^{1/q} \leq c\left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f|^p dx\right)^{1/p}$. Ma questo segue ancora da Sobolev-Poincaré, infatti

$$\begin{aligned} |f_U||U|^{1/q} &= c||2U| - |U||^{1/q}|f_U| = (*) \\ &= \left(\int_{2U\setminus U} |f - f_U|^q dx\right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_{2U} |f - f_U|^q dx\right)^{1/q} \leq \\ &\leq c\left(\int_{2U} |\nabla_{\mathbb{G}} f|^p dx\right)^{1/p} = (**) \\ &= c\left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f|^p dx\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

dove sia $(*)$ che $(**)$ seguono dall'ipotesi che f sia a supporto compatto in U e quindi sia f che $\nabla_{\mathbb{G}} f$ sono nulli in $2U\setminus U$. $\square$

Osservazione 14. Dalla disuguaglianza di Sobolev-Poincaré segue anche che, se $p < r < pQ/(Q-p)$, allora esiste una costante $c = c(p, \mathbb{G})$ indipendente da f e da U, tale che

$$\left(\int_U |f(x) - f_U|^r dx\right)^{1/r} \leq cr(U)^\sigma \left(\int_{\tau U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{2.14}$$

con $\sigma > 0$. Infatti, posto $q := pQ/(Q-p)$, scegliamo $s > 0$ tale che $\frac{r}{q} + \frac{1}{s} = 1$. Allora per la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$\begin{aligned} \int_U |f(x) - f_U|^r dx &\leq \left(\int_U |f(x) - f_U|^{r\frac{q}{r}} dx\right)^{r/q} \left(\int_U 1 dx\right)^{1/s} = \\ &= |U|^{1/s}\left(\int_U |f(x) - f_U|^q dx\right)^{r/q} \end{aligned}$$

da cui elevando tutto alla $1/r$ e applicando la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré

$$\begin{aligned} \left(\int_U |f(x) - f_U|^r dx\right)^{1/r} &\leq |U|^{1/sr}\left(\int_U |f(x) - f_U|^q dx\right)^{1/q} \leq \\ &\leq cr(U)^{1/sr}\left(\int_{\tau U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \\ &= cr(U)^\sigma \left(\int_{\tau U} |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)|^p dx\right)^{1/p} \end{aligned}$$

con $\sigma = 1/sr > 0$.

Questo fatto, insieme alla proposizione 2.2.3, verrà usato nella prossima sezione per dimostrare il teorema di immersione compatta.

2.3 Il Teorema di immersione compatta

In quest'ultima sezione del capitolo riprenderemo lo spazio $W^{1,p}_{\mathbb{G},0}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto e limitato, definito alla fine della prima sezione e dimostreremo che esso è contenuto in modo compatto (vedremo tra un attimo cosa significa) nello spazio $L^q(\Omega)$, con $1 \leq p < Q$ e $p < q < \frac{pQ}{Q-p}$, fatto che va sotto il nome di Teorema di immersione compatta. Prima di enunciare e dimostrare il Teorema, diamo alcune definizioni e vediamo alcuni risultati preliminari, iniziando proprio dal concetto di immersione compatta fra spazi normati.

Definizione 2.6. Siano X e Y due spazi normati, con rispettivamente norme $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, e supponiamo che $X \subset Y$. Allora diciamo che X è immerso in modo compatto in Y se

(i) X è immerso continuamente in Y, ossia l'operatore di inclusione $i : X \hookrightarrow Y$ è continuo;

(ii) Ogni insieme limitato di X è precompatto in Y, i.e. la chiusura di ogni insieme limitato di X in Y è un insieme compatto.

Possiamo subito osservare che il problema che ci poniamo ha senso, in quanto se $f \in C_0^\infty(\Omega)$ e U è una palla che contine la chiusura di Ω, dalla disuguaglianza di Sobolev si ottiene

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^q(U)} \leq cr(U)\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}_{\mathbb{G}}(\Omega)}$$

e quindi, essendo $C_0^\infty(\Omega)$ denso in $W^{1,p}_{0,\mathbb{G}}(\Omega)$ per definizione, abbiamo, quantomeno, soddisfatte l'inclusione $W^{1,p}_{0,\mathbb{G}}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e la richiesta (i). A questo punto continuiamo per far vedere che vale anche la (ii).

Proposizione 2.3.1. *Siano X e Y due spazi di Banach, con rispettivamente norme $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$. Sia poi $T : X \to Y$ un operatore lineare e limitato. Allora sono equivalenti:*

(i) per ogni insieme $V \subset X$ limitato, $T(V)$ è precompatto in Y;

(ii) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti in X limitata, la successione $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione covergente in Y.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione limitata in X. Allora esisterà $V \subset X$ limitato tale che $x_n \in V$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Da questo $Tx_n \in \overline{T(V)}$ che è compatto per ipotesi e quindi abbiamo finito.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sia $V \subset X$ limitato. Prendiamo una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T(V)$ e scegliamo $x_1 \in T^{-1}y_1$, $x_2 \in T^{-1}y_2$, $x_3 \in T^{-1}y_3$, $\dots$. In questo modo la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sta in V e quindi è limitata. Allora la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in Y, ma essendo $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $T(V)$, la convergenza sarà al più in $\overline{T(V)}$. $\square$

Definizione 2.7. Siano X e Y due spazi di Banach, con rispettivamente norme $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$. Un operatore $T : X \to Y$ lineare e limitato che soddisfi una delle due condizioni equivalenti della Proposizione si dice operatore compatto [1].

Osservazione 15. Se X e Y due spazi di Banach, con rispettivamente norme $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ e con $X \subset Y$, allora richiedere che X sia contenuto in modo compatto in Y equivale a chiedere che l'operatore di inclusione $i : X \hookrightarrow Y$ sia compatto.

Infine richiamiamo, per completezza, il concetto di convergenza debole per successioni in spazi di Banach e due teoremi che useremo nella dimostrazione del Teorema di immersione compatta.

[1] Esistono tante altre definizioni equivalenti di operatore compatto, ma per i nosri scopi sono sufficienti solo queste due proprietà.

Definizione 2.8. Sia X uno spazio di Banach, $X^* := \{f : X \to \mathbb{R}; \text{f lineare e continua}\}$ il suo spazio duale. Diciamo che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti in X converge debolmente ad un punto $x \in X$ se per ogni $f \in X^*$, la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.3.1 (Teorema di Banach-Alaoglu)**.** *Sia X uno spazio di Banach riflessivo. Allora ogni successione limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente.*

Teorema 2.3.2. *Siano $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto e limitato e $C \geq 1$. Allora esiste una successione di palle aperte $(U(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}} := U_n$, con $x_n \in \Omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e delle costanti c_j, $j = 1, 2, 3$, geometriche tali che*

(i) $\Omega = \bigcup_n U_n$;

(ii) *le palle* $\frac{1}{c_1}U_n$ *sono due a due disgiunte;*

(iii) $CU_n \cap \Omega^C = \emptyset$, *ma* $c_2 CU_n \cap \Omega^C \neq \emptyset$;

(iv) *nessun punto di Ω appartiene contemporaneamente a più di c_3 delle palle CU_n.*

Dimostrazione. Si veda [6], Capitolo 1, Sezione F, Lemma 1.67. □

Siamo finalmente pronti per dimostrare

Teorema 2.3.3 (Teorema di immersione compatta)**.** *Siano $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ un gruppo di Carnot, $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto e limitato, $\overline{\Omega}$ compatto e $1 \leq p < Q$. Scegliendo $p < q < pQ/(Q-p)$, si ha che*

$$W^{1,p}_{0,\mathbb{G}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

è un'immersione compatta.

Dimostrazione. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $W^{1,p}_{0,\mathbb{G}}(\Omega)$. Non è restrittivo supporre gli elementi della successione in $C_0^\infty(\Omega)$, essendo quest'ultimo denso in $W^{1,p}_{0,\mathbb{G}}(\Omega)$. Allora, prolungando le funzioni con zero fuori da Ω, per la disuguaglianza di Sobolev (Proposizione 2.2.3) applicata in una palla U che contiene la chiusura di Ω, abbiamo che

$$||f_n||_{L^q(\Omega)} \leq c||\nabla_{\mathbb{G}} f_n||_{L^p(\Omega)} < \infty$$

essendo le $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ e quindi la successione (f_n) è limitata in $L^q(\Omega)$. Essendo per ipotesi $q > p \geq 1$, si ha necessariamente $q > 1$, da cui la riflessività per lo spazio $L^q(\Omega)$. Perciò la successione (f_n) ammette una sottosuccessione (f_{n_h}) (che chiamiamo per semplicità (f_h)) debolmente convergente. Mostriamo che la successione (f_h) è di Cauchy in $L^p(\Omega)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Combinando la compattezza di $\overline{\Omega}$ e il Lemma di ricoprimento 2.3.2, scegliamo $r > 0$ e ricopriamo $\overline{\Omega}$ con un numero finito di palle aperte $U(x_1, r), ..., U(x_{m(r)}, r)$, tali che

(i) $U(x_k, r/c) \cap U(x_h, r/c) = \emptyset, \quad c > 0, \quad$ per $k \neq h$;

(ii) per ogni i, $\sharp\{k : U(x_k, r) \cap U(x_i, r) \neq \emptyset\} \leq M$, dove M è una costante geometrica.

In questo modo si ha, per $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_n - f_m|^q dx \leq & \sum_j \int_{U(x_j,r)} |f_n - f_m|^q dx \\
& \leq \sum_j \int_{U(x_j,r)} |f_n - f_m - (f_n - f_m)_{U(x_j,r)}|^q dx + \\
& + \sum_j \int_{U(x_j,r)} |(f_n - f_m)_{U(x_j,r)}|^q dx := \\
& := \sum_j I_j + \sum_j H_j.
\end{aligned}$$

Vediamo come si comporta il primo termine. Sfruttando la disuguaglianza (2.14) discussa nell'Osservazione 14 e che ogni palla del ricoprimento ha raggio r

$$\sum_j I_j \leq Cr^\sigma \sum_j \left(\int_{U(x_j,r)} |\nabla_{\mathbb{G}}(f_n - f_m)|^p dx \right)^{q/p} \leq$$
$$\leq Cm(r)r^\sigma \left(\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{G}}(f_n - f_m)|^p dx \right)^{q/p} \leq$$
$$\leq Cm(r)r^\sigma (||f_n||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||f_m||_{W^{1,p}(\Omega)})^q = Cm(r)r^\sigma,$$

con $\sigma > 0$. Ora, per l'ipotesi (ii) fatta sul ricoprimento finito di $\overline{\Omega}$, abbiamo che ogni palla può intersecare solo un numero finito di altre palle del ricoprimento e che tale numero è controllato da una costante geometrica. Di conseguenza sarà anche $m(r) \leq C$, con C costante geometrica e quindi

$$\sum_j I_j \leq Cr^\sigma.$$

Per il secondo termine abbiamo invece

$$\sum_j H_j = \sum_j \int_{U(x_j,r)} \left| \frac{1}{|U(x_j,r)|} \int_{U(x_j,r)} (f_n - f_m) dy \right|^q dx =$$
$$= \sum_j |U(x_j,r)|^{1-q} \left| \int_{U(x_j,r)} (f_n - f_m) dy \right|^q$$
$$= C \sum_j r(U)^{1-q} \left| \int_{U(x_j,r)} (f_n - f_m) dy \right|^q$$

D'alta parte, essendo $f \mapsto \int_{U(x_j,r)} f dy$ un funzionale dello spazio $(L^q(\Omega))^*$, per l'ipotesi di convergenza debole sulla (f_h) possiamo scegliere n, m abbastanza grandi in modo che sia

$$\left| \int_{U(x_j,r)} (f_n - f_m) dy \right| < r^{\frac{\sigma}{1-q}},$$

da cui

$$\sum_j H_j < Cm(r)r^\sigma = Cr^\sigma.$$

Mettendo assieme le due stime otteniamo

$$||f_n - f_m||_{L^q(\Omega)} \leq Cr^{\frac{\sigma}{q}}.$$

Per concludere ci basta allora prendere $r < \varepsilon^{\frac{q}{\sigma}}$. $\square$

Capitolo 3

Spazi e funzioni $BV_{\mathbb{G}}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto. Denotiamo con $C_0^\infty(\Omega, H\mathbb{G})$ (rispettivamente $C_0^k(\Omega, H\mathbb{G})$, $k \in \mathbb{N}$), l'insieme delle sezioni lisce (rispettivamente di classe C^k) a supporto compatto di $H\mathbb{G}$.

Definizione 3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto. Diciamo che una funzione $f \in L^1(\Omega)$ è a variazione limitata in Ω se

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(\Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega f(x) \mathrm{div}_{\mathbb{G}} \phi(x) dx : \phi \in C_0^1(\Omega, H\mathbb{G}),\ \|\phi(x)\|_x \leq 1 \right\} < \infty. \tag{3.1}$$

Lo spazio delle funzioni a variazione limitata in Ω si denota con $BV_{\mathbb{G}}(\Omega)$.
Lo spazio $BV_{\mathbb{G},loc}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $f \in BV_{\mathbb{G}}(V)$ per ogni $V \subset\subset \Omega$ aperto.

Osservazione 16. Prendiamo $f \in C^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$, $\phi \in C_0^1(\Omega, H\mathbb{G})$ tale che $\|\phi(x)\|_x \leq 1$. Integrando per parti abbiamo

$$\int_\Omega f \mathrm{div}_{\mathbb{G}} \phi dx = \int_\Omega \mathrm{div}_{\mathbb{G}}(f\phi) dx - \int_\Omega \langle \nabla_{\mathbb{G}} f, \phi \rangle dx =$$

(essendo ϕ a supporto compatto)

$$= - \int_\Omega \langle \nabla_{\mathbb{G}} f, \phi \rangle dx.$$

Passando al sup sulle ϕ otteniamo quello che ci si poteva attendere, e cioè

$$\int_\Omega d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\| = \int_\Omega |\nabla_{\mathbb{G}} f| dx.$$

Più in generale lo stesso risultato si ottiene per $f \in W^{1,1}_{\mathbb{G}}(\Omega)$, ma con $|\nabla_{\mathbb{G}} f|$ che in questo caso va inteso in senso debole.

Il seguente teorema ci consentirà di definire, più avanti, il *perimetro* di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{G}$.

Teorema 3.0.1 (Teorema di struttura per le funzioni $BV_{\mathbb{G}}$). *Sia $f \in BV_{\mathbb{G},loc}(\Omega)$. Allora $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$ è una misura di Radon su Ω. Inoltre esiste una sezione orizzontale $\sigma_f : \Omega \to H\mathbb{G}$ $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$-misurabile tale che $\|\sigma_f(x)\|_x = 1$ per $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$-q.o. $x \in \Omega$ e*

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)dx = \int_\Omega \langle \phi, \sigma_f \rangle d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|,$$

per ogni $\phi \in C^1_0(\Omega, H\mathbb{G})$.

Prima di inziare con la dimostrazione, richiamiamo un teorema di teoria della misura che ci servirà per dimostrare il nostro Teorema di struttura

Teorema 3.0.2 (Teorema di Rappresentazione di Riesz). *Sia $L : C_0(\mathbb{G}, H\mathbb{G})$ una funzione lineare che soddisfa*

$$\sup \{L(\phi) : \phi \in C_0(V, H\mathbb{G}),\ |\phi|_x \leq 1,\ \mathrm{supp}\phi \subset K\} < \infty,$$

per ogni compatto $K \subset \mathbb{G}$. Allora esiste una misura di Radon μ in $\mathbb{G}$ e una funzione μ-misurabile $\sigma : \mathbb{G} \to H\mathbb{G}$ tale che

(i) $\|\sigma(x)\|_x = 1, \quad$ *per μ-q.o. x;*

(ii) $L(f) = \int_{\mathbb{G}} \langle f, \sigma \rangle d\mu, \quad \forall f \in C_0(\mathbb{G}, H\mathbb{G})$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [5], Capitolo 1, Sezione 8, Teorema 1. Sottolineamo che la dimostrazione fornita in questo caso è data in ambito euclideo, ma non è difficile ricavarne una analoga nel caso dei gruppi.

Dimostrazione (del Teorema 3.0.1). Definiamo la funzione lineare $L : C^1_0(\Omega, H\mathbb{G}) \to \mathbb{R}$ come

$$L(\phi) := \int_\Omega f \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi dx.$$

Siccome $f \in BV_{\mathbb{G},loc}(\Omega)$, abbiamo

$$\sup \{L(\phi) : \phi \in C_0^1(V, H\mathbb{G}),\ \|\phi\|_x \le 1\} := C(V) < \infty,$$

per ogni $V \subset\subset \Omega$, e quindi anche

$$|L(\phi)| \le C(V)\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Fissiamo un compatto $K \subset \Omega$ e scegliamo un apeto V tale che $K \subset V \subset\subset \Omega$. Per ogni $\phi \in C_0(\Omega, H\mathbb{G})$, con supp$\phi \subset K$, scegliamo una successione di funzioni $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\phi_j \in C_0^1(\Omega, H\mathbb{G})$ per ogni j, tale che $\phi_j \to \phi$ uniformemente in V. Allora definiamo

$$\overline{L}(\phi) := \lim_{j\to\infty} L(\phi_j).$$

Osserviamo che per la (3.2) il limite esiste ed è indipendente dalla scelta della successione (ϕ_j). Quindi L si estende in modo unico ad una funzione lineare $\overline{L}(\phi) : C_0(\Omega, H\mathbb{G}) \to \mathbb{R}$ e si ha anche

$$\sup \{\overline{L}(\phi) : \phi \in C_0(V, H\mathbb{G}),\ \|\phi\|_x \le 1,\ \mathrm{supp}\phi \subset K\} < \infty,$$

per ogni insieme $K \subset V$ compatto. A questo punto il Teorema di Rappresentazione di Riesz (Teorema 3.0.2), combinato col modo in cui abbiamo definito la $\overline{L}$, completa la dimostrazione. □

Teorema 3.0.3 (Teorema di semicontinuità inferiore per le funzioni $BV_{\mathbb{G}}$)**.** *Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $BV_{\mathbb{G}}(\Omega)$ e supponiamo $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$. Allora*

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(\Omega) \le \liminf_{k\to\infty} \|\nabla_{\mathbb{G}} f_k\|(\Omega).$$

Dimostrazione. Prendiamo $\phi \in C_0^1(\Omega, H\mathbb{G})$, $\|\phi\|_x \le 1$ e consideriamo la mappa

$$f \mapsto \int_\Omega f \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi dx.$$

Osserviamo che si tratta di un funzionale dello spazio $(L^1(\Omega))^*$ e quindi, se $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$, si ha

$$\int_\Omega f \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi dx \le \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi dx \le \liminf_{k\to+\infty} \|\nabla_{\mathbb{G}} f_k\|(\Omega).$$

La tesi segue passando al sup così da ottenere $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(\Omega)$ nel termine di sinistra. $\square$

Proposizione 3.0.1. *Sia $f \in BV_{\mathbb{G}}(\Omega)$. Sia Ω' aperto tale che $\Omega' \subset\subset \Omega$ e che*

$$\int_{\partial\Omega'} d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\| = 0.$$

Allora

$$\int_{\Omega'} d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\| = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega'} d\|\nabla_{\mathbb{G}}(f * J_\varepsilon)\|.$$

Dimostrazione. Sappiamo già che $J_\varepsilon * f \to f$ in $L^1(\Omega)$. Combinando questo fatto con la semicontinuità inferiore della misura $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$ otteniamo

$$\int_{\Omega'} d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\| \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega'} d\|\nabla_{\mathbb{G}}(J_\varepsilon * f)\|.$$

Proviamo adesso l'altro verso della disuguaglianza. Prendiamo una sezione orizzontale $\phi = (\phi_1, ..., \phi_{m_1}) \in C_0^1(\Omega, H\mathbb{G})$ tale che supp$\phi \subset \Omega'$, $\|\phi\|_x \leq 1$. Sia infine $\varepsilon < d_c(\Omega', \partial\Omega)$. Allora

$$\begin{aligned}\int_\Omega (J_\varepsilon * f)\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)dx &= \int_\Omega \left(\int_\Omega J_\varepsilon(y) f(y^{-1}\cdot x)dy\right)\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)dx = && (*)\\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega J_\varepsilon(x\cdot z^{-1}) f(z)dz\right)\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)dx = && (**)\\ &= \int_\Omega f(z)\left(\int_\Omega J_\varepsilon(x\cdot z^{-1})\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)dx\right)dz\end{aligned}$$

dove in $(*)$ abbiamo appllicato il cambio di variabile $y^{-1}\cdot x = z$, mentre in $(**)$ abbiamo scambiato gli integrali con Fubini. Esaminiamo allora il comportamento dell'integrale

$$\int_\Omega J_\varepsilon(x\cdot z^{-1})\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)dx = \sum_{j=1}^{m_1}\int_\Omega J_\varepsilon(x\cdot z^{-1}) X_j\phi_j(x)dx$$

andando a vedere come si comporta il j-esimo temine della somma. Ricordando che, per quanto visto sui mollificatori nel capitolo 2, $J_\varepsilon = \check{J}_\varepsilon$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} J_\varepsilon(x\cdot z^{-1})X_j\phi_j(x)dx &= \int_{\Omega'} J_\varepsilon(z\cdot x^{-1})X_j\phi_j(x)dx = \\ &= \int_{\Omega'} J_\varepsilon(\xi)(X_j\phi_j)(\xi^{-1}\cdot z)d\xi = \\ &= \int_{\Omega'} J_\varepsilon(\xi)X_{j,z}\phi_j(\xi^{-1}\cdot z)d\xi = \\ &= X_{j,z}\int_{\Omega'} J_\varepsilon(\xi)\phi_j(\xi^{-1}\cdot z)d\xi = \\ &= X_{j,z}(J_\varepsilon * \phi_j)(z) = X_j(J_\varepsilon * \phi_j).\end{aligned}$$

Inoltre, per le assunzioni fatte su ϕ, Ω, Ω' ed ε, avremo che

(i) $\Omega' \subset \mathrm{supp}(J_\varepsilon * \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)) := \Omega'_\varepsilon \subset \Omega$;

(ii) $\|J_\varepsilon * \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)\|_x \leq 1$.

Allora, mettendo assieme tutti i pezzi otteniamo

$$\int_{\Omega'} (J_\varepsilon * f)\mathrm{div}_{\mathbb{G}}\phi(x)dx = \int_{\Omega'} f\mathrm{div}_{\mathbb{G}}(J_\varepsilon * \phi(x))dx \leq \int_{\Omega'_\varepsilon} |\nabla_{\mathbb{G}} f|dx,$$

da cui passando al sup sulle ϕ

$$\int_{\Omega'} |\nabla_{\mathbb{G}}(J_\varepsilon * f)|dx \leq \int_{\Omega'_\varepsilon} |\nabla_{\mathbb{G}} f|dx. \quad (***)$$

A questo punto, per concludere, osserviamo che $\Omega'_\varepsilon \to \overline{\Omega'}$, per $\varepsilon \to 0$ e che, per ipotesi, $\int_{\partial\Omega'} d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\| = 0$. Allora passando al limite sup per $\varepsilon \to 0$ in $(***)$ otteniamo

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega'} d\|\nabla_{\mathbb{G}}(f * J_\varepsilon)\| \leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Omega'_\varepsilon} d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|\right) = \int_\Omega d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$$

e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Siamo ora pronti per dimostrare il Teorema di Anzellotti-Giaquinta, ovvero l'equivalente del Teorema di Meyers-Serrin per le funzioni $BV_{\mathbb{G}}$.

Teorema 3.0.4 (Teorema di Anzellotti-Giaquinta)**.** *Sia $f \in BV_{\mathbb{G}}(\Omega)$. Allora esiste una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $BV_{\mathbb{G}}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ tale che* *(i)* $f_n \to f$, *per* $n \to +\infty$, *in* $L^1(\Omega)$*;*

(ii) $\|\nabla_{\mathbb{G}} f_n\|(\Omega) \to \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(\Omega)$, *per* $n \to +\infty$.

Dimostrazione. Fissiamo $f \in BV_{\mathbb{G}}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Andiamo a definire gli insiemi

$$\Omega_i := \left\{ x \in \Omega : \|x\| < k + i, \ \frac{1}{k+i} < d_c(x, \partial\Omega) \right\}$$
$$S_i := \Omega_{i+1} \backslash \overline{\Omega}_{i-1},$$

dove $k = k(\varepsilon)$ è tale che

$$\int_{\Omega \backslash \Omega_0} d\|\nabla_{\mathbb{G}} f\| < \varepsilon$$

e con le convenzioni che $\Omega_{-1} = \emptyset$ e $S_{-1} = \emptyset$.

Osserviamo che gli insiemi Ω_i sono limitati e formano un ricoprimento aperto di Ω. Scegliamo allora delle funzioni $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ che siano una partizione dell'unità subordinata a questo ricoprimento, cioè tali che per ogni $i \geq 0$ sia $\phi_i \in C_0^\infty(S_i)$, $0 \leq \phi_i \leq 1$ e $\sum_i \phi_i = 1$.

Per ogni indice i, scegliamo degli $\varepsilon_i > 0$ tali che

$$\begin{aligned}
(*) \quad & \operatorname{supp}(J_{\varepsilon_i} * (f\phi_i)) \subset S_{i-1} \cup S_i \cup S_{i+1} \subset\subset \Omega; \\
(**) \quad & \int_\Omega |J_{\varepsilon_i} * (f\phi_i) - f\phi_i| dx < \varepsilon 2^{-i}; \\
(***) \quad & \int_\Omega |J_{\varepsilon_i} * (f\nabla_{\mathbb{G}}\phi_i) - \nabla_{\mathbb{G}} f D\phi_i| dx < \frac{\varepsilon}{2^i}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che $(*)$, $(**)$ e $(***)$ sono possibili perché $f \in L^1(\Omega)$ e quindi seguono dalle proprietà dei mollificatori. Infine poniamo

$$f_\varepsilon := \sum_{i=0}^{+\infty} (f\phi_i) * J_{\varepsilon_i}.$$

Da $(*)$ segue che f_ε ha in ogni intorno di ogni punto solo un numero finito di termini che non si annulla e quindi $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. D'altra parte possiamo scrivere $f = \sum_i f\phi_i$ e quindi abbiamo

$$\int_\Omega |f_\varepsilon - f| dx \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega |J_{\varepsilon_i} * (f\phi_i) - f\phi_i| dx < \varepsilon.$$

Allora $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\Omega)$ e per la semicontinuità inferiore della misura $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|$ abbiamo

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f\| \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla_{\mathbb{G}} f_\varepsilon\|.$$

Proviamo ora l'altro verso della disuguaglianza. Per farlo prendiamo una sezione orizzontale $\psi : \Omega \to H\mathbb{G}$ tale che $\psi \in C_0^1(\Omega, H\mathbb{G})$ e $\|\psi\|_x \leq 1$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_\varepsilon \mathrm{div}_{\mathbb{G}} \psi dx &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega (J_{\varepsilon_i} * (f\phi_i)) \mathrm{div}_{\mathbb{G}} \psi dx = \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega f\phi_i \mathrm{div}_{\mathbb{G}} (J_{\varepsilon_i} * \psi) dx = \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega f \mathrm{div}_{\mathbb{G}} (\phi_i (J_{\varepsilon_i} * \psi)) dx - \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega f \langle \nabla_{\mathbb{G}} \phi_i, J_{\varepsilon_i} * \psi \rangle_x dx = (\Diamond).
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$f\langle \nabla_{\mathbb{G}} \phi_i, J_{\varepsilon_i} * \psi \rangle_x = \langle f\nabla_{\mathbb{G}} \phi_i, J_{\varepsilon_i} * \psi \rangle_x = \langle J_{\varepsilon_i} * (f\nabla_{\mathbb{G}} \phi_i), \psi \rangle_x,$$

ma anche

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \nabla_{\mathbb{G}} \phi_i = 0.$$

Riprendiamo allora da dove eravamo rimasti e scriviamo

$$\begin{aligned}
(\Diamond) &= \int_\Omega f \mathrm{div}_{\mathbb{G}} (\phi_0 (J_{\varepsilon_0} * \psi)) dx + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_\Omega f \mathrm{div}_{\mathbb{G}} (\phi_i (J_{\varepsilon_i} * \psi)) dx - \\
&- \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega \langle J_{\varepsilon_i} * (f\nabla_{\mathbb{G}} \phi_i) - f\nabla_{\mathbb{G}} \phi_i, \psi \rangle_x dx := \\
&:= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Stimiamo i tre tremini trovati. Osserviamo che $\|\phi_i (J_{\varepsilon_i} * \psi)\|_x \leq 1$, per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora per il primo termine abbiamo subito

$$I_1^\varepsilon \leq \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|.$$

D'altra parte ogni punto di Ω non può appartenere contemporaneamente a più di tre S_i, quindi per il secondo termine avremo

$$\begin{aligned} I_2^\varepsilon &\le 3\sum_{i=1}^{+\infty}\int_{S_i} f\mathrm{div}_{\mathbb{G}}(\phi_i(J_{\varepsilon_i}*\psi))dx \le \\ &\le 3\sum_{i=1}^{+\infty}\int_{S_i}|\nabla_{\mathbb{G}}f|dx = 3\sum_{i=1}^{+\infty}\int_{\Omega\setminus\Omega_0}|\nabla_{\mathbb{G}}f|dx \le 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Infine, per quanto riguarda il terzo termine, abbiamo direttamente da $(***)$ che $I_3^\varepsilon \to 0$, per $\varepsilon \to 0$ e quindi $|I_3^\varepsilon| \le \varepsilon$. Tutto ciò significa allora che abbiamo ottenuto

$$\int_\Omega f_\varepsilon \mathrm{div}_{\mathbb{G}}\psi dx \le \|\nabla_{\mathbb{G}}f\|(\Omega) + 4\varepsilon,$$

da cui passando al sup sulle ψ

$$\|\nabla_{\mathbb{G}}f_\varepsilon\|(\Omega) \le \|\nabla_{\mathbb{G}}f\|(\Omega) + 4\varepsilon.$$

La dimostrazione termina passando al limite sup per $\varepsilon \to 0$. □

Definizione 3.2. Sia $E \subset \mathbb{G}$ misurabile, $\Omega \subset \mathbb{G}$ aperto. Diciamo che E ha $\mathbb{G}$-*perimetro localmente finito* in Ω (o che è un $\mathbb{G}$-Caccioppoli insieme) se la funzione caratteristica $1_E \in BV_{\mathbb{G},loc}(\Omega)$. In tal caso chiamiamo perimetro di E la misura

$$|\partial E|_{\mathbb{G}} := \|\nabla_{\mathbb{G}}1_E\|$$

e chiamiamo la $\mathbb{G}$-*normale* a ∂E il vettore

$$\nu_E(x) := \sigma_{1_E}(x).$$

Osservazione 17. Il simbolo $|\partial E|_{\mathbb{G}}$ è improprio, perché dipende dalla scelta dei campi vettoriali generatori $X_1, ..., X_{m_1}$. I valori dei perimetri indotti da due diverse famiglie di campi generatori coincidono solo se le due famiglie sono fra loro ortonormali. Tuttavia le misure di perimetro indotte da famiglie diverse sono equivalenti, quindi la nozione di $\mathbb{G}$-Caccioppoli insieme è intrinseca e dipende solo dal gruppo $\mathbb{G}$.

Proposizione 3.0.2. *Sia E un $\mathbb{G}$-Caccioppoli insieme, con frontiera C^1. Allora il suo $\mathbb{G}$-perimetro ha la seguente rappresentazione*

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(\Omega) := \int_{\partial E \cap \Omega} \sqrt{\sum_{j=1}^{m_1} \langle X_j, N_E \rangle_{\mathbb{R}}^2} d\mathcal{H}^{n-1} \tag{3.3}$$

dove N_E è la normale estaerna ad E, $X_1, ..., X_{m_1}$ è una famiglia di campi generatori e $\mathcal{H}^s$ è la misura di Housdorff s-dimensionale euclidea.

Dimostrazione. Si veda [4], terza osservazione di p. 211. □

Osservazione 18. Il $\mathbb{G}$-perimetro di un $\mathbb{G}$-Caccioppoli insieme E è invarinte per traslazioni, cioè

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(A) = |\partial(\tau_p E)|_{\mathbb{G}}(\tau_p A), \quad \forall p \in \mathbb{G}, \quad \text{per ogni Boreliano } A \in \mathbb{G}.$$

Infatti $\mathrm{div}_{\mathbb{G}}$ è invariante rispetto alle traslazioni di gruppo e il determinate dello Jacobiano della traslazione τ_p è uguale a 1.
Inolre è omogeneo di grado $Q - 1$ rispetto alle dilatazioni di gruppo, cioè

$$|\partial(\delta_\lambda E)|_{\mathbb{G}}(A) = \lambda^{Q-1} |\partial E|_{\mathbb{G}}(\delta_\lambda A), \text{per ogni Boreliano } A \in \mathbb{G}.$$

Questo fatto segue applicando un cambio di variabile in (3.1).

Vogliamo concludere il lavoro svolto fino ad ora mostrando un'importante disuguaglianza riguardante il $\mathbb{G}$-primetro di sottoinsiemi limitati di $\mathbb{G}$. Il resto del capitolo sarà quindi devoluto a mostrare il seguente

Teorema 3.0.5 (Disuguaglianza Isoperimetrica)**.** *Siano $E \subset \mathbb{G}$ un $\mathbb{G}$-Caccioppoli insieme limitato, $x \in \mathbb{G}$ e $r > 0$. Allora esiste una costante $C_I > 0$ tale che*

$$\min\{|E \cap U_c(x,r)|, \ |U_c(x,r) \backslash E|\}^{(Q-1)/Q} \leq C_I |\partial E|_{\mathbb{G}}(U_c(x,r)) \tag{3.4}$$

e

$$\min\{|E|, \ |\mathbb{G} \backslash E|\}^{(Q-1)/Q} \leq C_I |\partial E|_{\mathbb{G}}(\mathbb{G}) \tag{3.5}$$

dove U_c è la palla (aperta) di centro x e raggio r rispetto alla distanza CC d_c.

Per prima cosa ci serve estendere la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré vista nel capitolo precedente alle funzioni $BV_{\mathbb{G}}$. Abbiamo

Proposizione 3.0.3 (Disuguaglianza di Sobolev-Poincaré per funzioni $BV_{\mathbb{G}}$)**.** *Sia $q := \frac{Q}{Q-1}$. Siano poi $U = U(x, r(U))$ una palla di Carnot-Carathéodory in $\mathbb{G}$ e $f \in BV_{\mathbb{G}}(U)$. Allora esiste una costante $c = c(p, \mathbb{G})$, indipendente da f e da U, tale che*

$$\left(\int_U |f(x) - f_U|^q dx \right)^{1/q} \le c \left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f(x)| dx \right). \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Pendiamo una funzione $f \in BV_{\mathbb{G}}(U)$. Allora per il Teorema di Anzellotti-Giaquinta esiste una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in C^\infty(U)$ tale che $f_n \to f$ in $L^1(U)$ e $\|\nabla_{\mathbb{G}} f_n\|(U) \to \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(U)$. Dal momento che ogni successione convergente in $L^1(U)$ ammette una sottosuccessione convergente quasi dappertutto, a meno di passare a sottosuccessioni per le f_n abbiamo

$$\begin{aligned}
\left(\int_U |f - f_U|^{\frac{Q}{Q-1}} dx \right)^{\frac{Q-1}{Q}} &= \left(\int_U \lim_{n\to+\infty} |f_n - (f_n)_U|^{\frac{Q}{Q-1}} dx \right)^{\frac{Q-1}{Q}} \le \quad (*) \\
&\le \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_U |f_n - (f_n)_U|^{\frac{Q}{Q-1}} dx \right)^{\frac{Q-1}{Q}} \le \quad (**) \\
&\le c \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_U |\nabla_{\mathbb{G}} f_n| dx \right) = \\
&= c \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla_{\mathbb{G}} f_n\|(U) = c\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|(U).
\end{aligned}$$

In $(*)$ abbiamo utilizzato il Lemma di Fatou, mentre $(**)$ segue dalla già dimostrata disuguaglianza di Sobolev-Poincaré. □

Dimostrazione (del Teorema 3.0.5). Siano $x \in \mathbb{G}$ e $r > 0$. Denotiamo per semplicità con U la palla $U_c(x, r)$.

Proviamo prima la (3.4). Sfruttando la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré troviamo

$$|\partial E|_{\mathbb{G}}(U) = \|\nabla_{\mathbb{G}} 1_E\|(U) = \int_U |\nabla_{\mathbb{G}} 1_E| dx \ge C \left(\int_U |1_E - (1_E)_U|^{\frac{Q}{Q-1}} dx \right)^{\frac{Q-1}{Q}}.$$

Osserviamo che

$$(1_E)_U = \frac{1}{|U|}\int_U 1_E(x)dx = \frac{|E\cap U|}{|U|}$$

e quindi

$$1_E(x) - (1_E)_U = \begin{cases} 1 - \frac{|E\cap U|}{|U|}, & x \in E \\ -\frac{|E\cap U|}{|U|}, & x \notin E \end{cases}.$$

Da questo deriva

$$\begin{aligned}\left(\int_U |1_E - (1_E)_U|^{\frac{Q}{Q-1}} dx\right)^{\frac{Q-1}{Q}} &= |E\cap U|^{\frac{Q-1}{Q}}\left|1 - \frac{|E\cap U|}{|U|}\right| + \frac{|E\cap U|}{|U|}|U\backslash E|^{\frac{Q-1}{Q}} = \\ &= \frac{|U\backslash E|}{|U|}|E\cap U|^{\frac{Q-1}{Q}} + \frac{|E\cap U|}{|U|}|U\backslash E|^{\frac{Q-1}{Q}}.\end{aligned}$$

Adesso se $|E\cap U| \leq \frac{1}{2}|U|$, allora $|U\backslash E| \geq \frac{1}{2}|U| \geq |E\cap U|$ e quindi il minimo è $|E\cap U|$. Dunque abbiamo

$$\left(\int_U |1_E - (1_E)_U|^{\frac{Q}{Q-1}} dx\right)^{\frac{Q-1}{Q}} \geq \frac{|U\backslash E|}{|U|}|E\cap U|^{\frac{Q-1}{Q}} \geq \frac{1}{2}|E\cap U|^{\frac{Q-1}{Q}}.$$

Il caso di $|E\cap U| \geq \frac{1}{2}|U|$ è analogo e abbiamo qundi provato la (3.4).

Prendiamo ora una palla $U = U_c(x,r)$ che contenga E e osserviamo che $U_c(x,r) \to \mathbb{G}$, se $r \to +\infty$. In questo modo passando al limite per $r \to +\infty$ in (3.4) otteniamo la (3.5) e con questo abbiamo concluso. $\square$

Bibliografia

[1] L. Ambrosio e P. Tilli, *Topics on Analysis in Metric Spaces*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications (2003).

[2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli e F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*, Springer (2007).

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2010).

[4] L. Capogna, D. Dainelli e N.Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Communications in Analysis and Geometry, **2**, no. 2, 203-215 (1994).

[5] L.C. Evans e R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Proprieties of Functions*, CRC Press (1992).

[6] G.B. Folland e E.M. Stein, *Hardy Spaces on Homogeneous Groups* Princeton University Press (1982).

[7] B. Franchi, *BV Spaces and Rectifiability for Carnot-Carathéodory Metrics: an Introductions*, Proceedings of NAFSA7, Prague July 2002, Acad. Sci. Czech Rep., Olympia Press (2004).

[8] B. Franchi, S. Gallot e R.L. Wheeden, *Sobolev and Isoperimetric Inequalities for Degenerate Metrics*, Math. Ann. 300, 557-571 (1994).

[9] B. Franchi, G. Lu e L. Wheeden, *A Relationship between Poincaré-Type Inequalities and Representation Formulas in Spaces of Homogeneous Type*, IMRN International Mathematics Research Notices, no. 1 (1996).

[10] B. Franchi, G. Lu e L. Wheeden, *Representation formulas and wheighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields*, Annales de l'institut Fourier, **45**, no. 2, 577-604 (1995).

[11] B. Franchi, C. Pérez e R.L. Wheeden *Self-Improving Properties of John-Nirenberg and Poincaré Inequalities on Spaces of Homogeneous Type*, Journal of Functional Analysis **153**, 108-146 (1998).

[12] B. Franchi, R. Serapioni e F. Serra Cassano, *Approximation and Imbedding Theorems for Weighted Sobolev Spaces associated with Lipschitz Continuous Vector Fields*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 11-B, 83-117 (1997).

[13] B. Franchi, R. Serapioni e F. Serra Cassano, *Meyers-Serrin Type Theorems and Relaxation of Varational Integrals Depending on Vector Fields*, Houston Math. J. 22, 859-889 (1996).

[14] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser (1984).

[15] Kirchheim, Bernd (4-OX); Serra Cassano, Francesco (I-TRNT) *Rectifiability and Parameterization of Intrinsic Regular Surfaces in the Heisenberg Group*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 3, no. 4, 871-896 (2004).

[16] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentialbily Proprieties of Functions*, Princeton University Press, New Jersey (1970).

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare i miei genitori, i quali mi hanno sempre sostenuto durante gli studi, dandomi tutto l'appoggio di cui ho avuto bisogno.

Vorrei inoltre rivolgere un ringraziamento particolare al mio relatore di tesi, il professor Bruno Franchi, che si è sempre dimostrato disponibile nei miei confronti, dedicandomi tutto il tempo e le attenzioni necessarie, nonché dandomi preziosi consigli per realizzare la stesura di questo elaborato.

Ringrazio infine tutti i miei parenti e tutti i miei amici che mi sono stati vicini in questi tre anni.