

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**ANALISI DEI COMPORTAMENTI
PSEUDO CAOTICI
DI UN SISTEMA HAMILTONIANO**

Relatore:
Prof. Graziano Servizi

Presentata da:
Luca Bompani

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

In questo lavoro intendiamo analizzare il comportamento di un pendolo doppio piano per studiarne le caratteristiche, e in particolare la sua tendenza a presentare comportamenti caotici. Nell'introduzione descriviamo il sistema, in condizioni generali, mediante un formalismo Lagrangiano ed indichiamo alcune sostituzioni che ci permetteranno di semplificare i calcoli più avanti nel testo. Inoltre diamo una rapida descrizione dell'algoritmo impiegato per la risoluzione numerica delle equazioni del moto. Nella prima sezione presentiamo la teoria necessaria per un'analisi qualitativa della tipologia di orbite di un sistema dinamico, per poi restringerci al pendolo doppio eseguendo i calcoli necessari. Nella seconda parte presentiamo un approccio geometrico allo stesso problema dando, innanzitutto, una descrizione geometrica della dinamica Newtoniana e, in seguito, affrontando il chaos del pendolo doppio per mezzo dell'equazione della separazione delle geodetiche. Alla fine di ogni capitolo sono presenti grafici che espongono l'analisi numerica fatta, partendo da tre diverse configurazioni iniziali del pendolo.

Indice

Introduzione	2
1 Metodo Classico	4
1.0.1 Stabilità lineare	4
1.0.2 Esponenti di Lyapunov	6
1.0.3 Applicazione al pendolo doppio	6
1.0.4 Simulazione numerica	9
2 Metodo geometrico	19
2.0.1 Formulazione geometrica della dinamica	19
2.0.2 Stabilità delle orbite	20
2.0.3 Applicazione al pendolo doppio	22
2.0.4 Simulazione numerica	24
Conclusioni	28
A Richiami di geometria riemanniana	29
A.1 Derivata covariante e curvatura	31

Introduzione

Vogliamo dare innanzitutto una descrizione del pendolo doppio dal punto di vista lagrangiano. Utilizziamo per descriverlo il seguente set di coordinate adattate al vincolo :

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \sin(\theta_1) & y_1 &= c_1 \cos(\theta_1) \\ x_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + c_2 \sin(\theta_2) & y_2 &= l_1 \cos(\theta_1) + c_2 \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Da queste possiamo dunque scrivere la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + J_1 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 c_2^2 + J_2) \dot{\theta}_2^2 + m_2 c_2 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - V(\theta_1, \theta_2) \quad (1)$$

dove $V(\theta_1, \theta_2) = g(m_2 l_1 + m_2 c_2 + m_1 c_1) - g(m_1 c_1 + m_2 l_1) \cos(\theta_1) - m_2 g c_2 \cos(\theta_2)$, m_1 e m_2 sono le masse dei due pendoli, J_1 e J_2 i loro momenti d'inerzia, c_1 e c_2 le posizioni dei loro centri di massa. Ora, utilizzando il seguente riscaldamento (seguiamo qui l'idea di Jan Awrejcewicz e Da Riusz Sendkowski in [2]),

$$\begin{aligned} \tau &= t \sqrt{\frac{m_1 g c_1 + m_2 g l_1}{J_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l_1^2}} & \beta &= \frac{J_2 + m_2 c_2^2}{J_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l_1^2} \\ k &= \frac{m_2 c_2 l_1}{J_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l_1^2} & \mu &= \frac{m_2 c_2}{m_1 c_1 + m_2 l_1} \end{aligned}$$

Possiamo quindi porre la Lagrangiana in una forma adimensionale, ovvero

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{\beta}{2} \dot{\theta}_2^2 + k \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 - \mu + \cos \theta_1 + \mu \cos \theta_2 \quad (2)$$

Qui è stata mantenuta la costante $-(1 + \mu)$ affinché l'energia sia sempre positiva. Dalla Lagrangiana possiamo ricavare le equazioni del moto di Eulero-Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q}$ ottenendo

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-k \sin(\theta_1 - \theta_2) (k \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \beta \dot{\theta}_2^2) - \beta \sin(\theta_1) + k \mu \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{k \sin(\theta_1 - \theta_2)(k\dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2) - \mu \sin(\theta_2) + k \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (4)$$

Abbiamo quindi integrato le equazioni del moto in maniera numerica utilizzando il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine: un algoritmo a passo singolo ossia che non necessita di informazioni sull'evoluzione del sistema a meno dei dati dell'iterazione immediatamente precedente; per utilizzarlo occorre trasformare ogni equazione differenziale di ordine $n > 1$ in un sistema di n equazioni del primo ordine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

I valori di $\mathbf{x}(t_0 + h)$ si ricavano mediante quattro valutazioni del campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ secondo lo schema

$$\mathbf{x}(t_0 + h) = \mathbf{x}(t_0) + \frac{h}{6} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0), t_0) + 2\mathbf{f}(\mathbf{y}, t_0 + \frac{h}{2}) + 2\mathbf{f}(\mathbf{z}, t_0 + \frac{h}{2}) + \mathbf{f}(\mathbf{w}, t_0 + h)]$$

h rappresenta l'incremento temporale o passo dell'algoritmo e $\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ sono definiti come

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x}(t_0) + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0), t_0) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{x}(t_0) + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{y}, t_0 + \frac{h}{2}) \\ \mathbf{w} &= \mathbf{x}(t_0) + h \mathbf{f}(\mathbf{z}, t_0 + \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

Per una derivazione dell'algoritmo si rimanda a [3].

Capitolo 1

Metodo Classico

Non vi è, ad oggi, una definizione comunemente accettata di chaos all'interno di un sistema dinamico; tuttavia si possono trovare tre ingredienti comuni su cui tutti possiamo concordare. Essi, citando l'idea di S. Strogatz in [1], sono:

- il comportamento aperiodico nel lungo periodo
- il determinismo del sistema
- la forte dipendenza dalle condizioni iniziali.

Il primo elemento ci garantisce l'instabilità asintotica delle orbite, il secondo ci indica che il comportamento irregolare del sistema non deriva da eventi esterni, ma semplicemente dalla formulazione non lineare. Il terzo è l'elemento fondamentale che ci permette di notare la rapida separazione di traiettorie vicine. È da esso che il fenomeno del chaos è stato per la prima volta osservato da Henri Poincaré il quale ne scrive “.. può accadere che piccole variazioni nelle condizioni iniziali portino a grandi cambiamenti nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produrrà un enorme errore nelle ultime. La predizione diviene impossibile...”.

1.0.1 Stabilità lineare

Sia

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

un sistema di equazioni differenziali ordinario del primo ordine e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ una funzione a valori vettoriali di classe C^1 . Definiamo punto fisso di un tale sistema di equazioni un punto $\mathbf{x}_* \in R^n$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = 0$. Prendiamo quindi in esame il comportamento di una soluzione nell'intorno di \mathbf{x}_* studiandone le orbite[1]. Poniamo quindi

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + \boldsymbol{\epsilon}(t);$$

dove abbiamo assunto $\boldsymbol{\epsilon}$ piccolo. Sviluppando (1.1) al primo ordine in $\boldsymbol{\epsilon}$ si ottiene

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_* + \boldsymbol{\epsilon}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) + \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*)\boldsymbol{\epsilon} + O(\boldsymbol{\epsilon}^2)$$

dove

$$\mathbf{Jf} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

rappresenta la matrice jacobiana di \mathbf{f} .
 Otteniamo così la seguente equazione

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\mathbf{Jf})\boldsymbol{\epsilon} \quad (1.2)$$

in cui abbiamo trascurato i termini di ordine $|\boldsymbol{\epsilon}|^2$. L'equazione (1.2) ha la forma generale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (1.3)$$

in cui \mathbf{A} è una matrice a coefficienti reali e indipendenti dal tempo. Una soluzione di un tale sistema può essere trovata nella forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{\lambda t}$ in cui λ è autovalore di \mathbf{A} , ossia soluzione di:

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = 0 \quad (1.4)$$

Nella nostra trattazione ci limiteremo ad osservare punti in cui gli autovalori di \mathbf{Jf} siano sempre diversi da zero. In questo modo possiamo utilizzare il seguente teorema:

Teorema di Hartman-Grobman. *Consideriamo un sistema di equazioni differenziali $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ dove \mathbf{f} è di classe C^1 . Se \mathbf{x}_* è un punto fisso, allora esiste un intorno di \mathbf{x}_* in cui la soluzione è topologicamente equivalente alla soluzione del sistema linearizzato.*

Classifichiamo i punti fissi del nostro sistema nel seguente modo:

- con $\mathbf{Re}(\lambda(\mathbf{x}_*)) < 0$ la nostra soluzione, detta in questo caso stabile, si muove asintoticamente verso lo zero o spiraleggiando ($\mathbf{Im}(\lambda(\mathbf{x}_*)) \neq 0$) o no ($\mathbf{Im}(\lambda(\mathbf{x}_*)) = 0$);
- con $\mathbf{Re}(\lambda(\mathbf{x}_*)) > 0$ la nostra soluzione, detta in questo caso instabile, diverge asintoticamente o spiraleggiando ($\mathbf{Im}(\lambda(\mathbf{x}_*)) \neq 0$) o no ($\mathbf{Im}(\lambda(\mathbf{x}_*)) = 0$).
- con $\mathbf{Re}(\lambda(\mathbf{x}_*)) = 0$ la nostra soluzione spiraleggia attorno al punto fisso ($\mathbf{Im}(\lambda(\mathbf{x}_*)) \neq 0$). Anche in questo caso definiremo le soluzioni stabili.

1.0.2 Esponenti di Lyapunov

Diamo la seguente definizione:

Definizione. (*stabilità di Lyapunov*) Sia $\mathbf{x}(t)$ una soluzione del sistema lineare (1.3). Tale soluzione è detta stabile (Lyapunov stabile) se $\exists \epsilon > 0 \rightarrow \forall \delta(\epsilon) > 0$ valga, per ogni altra soluzione $\mathbf{y}(t)$ soddisfacente $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta$

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \epsilon \quad \forall t > t_0 \in R.$$

Le soluzioni per cui ciò non sia vero sono dette instabili.

Se ora prendiamo due soluzioni $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ del nostro sistema (1.3), corrispondenti a condizioni iniziali distanti meno di δ , possiamo ripetere l'analisi fatta nella precedente sezione per la perturbazione $\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$, e individuare così l'allontanamento delle due orbite. Si può notare che la precedente classificazione in orbite stabili o instabili secondo il teorema di Hartman–Grobman è equivalente alla definizione di stabilità o instabilità di Lyapunov. Diamo la seguente definizione

Definizione. (*Esponente di Lyapunov massimo*) Definiamo il maggiore esponente di Lyapunov come

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{|\boldsymbol{\zeta}(t)|}{|\boldsymbol{\zeta}(0)|}$$

Da questo possiamo identificare gli esponenti di Lyapunov come la parte reale degli autovalori della matrice \mathbf{A} del nostro sistema di equazioni. Tuttavia la linearizzazione del sistema cessa di essere valida allorché la norma di $\zeta(t)$ ecceda δ e pertanto occorre cambiarla ripetendo lo sviluppo di Taylor con un nuovo punto iniziale posto lungo la traiettoria e nuovi δ ed ϵ . Ne consegue che gli esponenti di Lyapunov per il sistema in esame risultino la media della parte reale degli autovalori. Data la forma della definizione degli esponenti di Lyapunov, possiamo dedurre una condizione per definire se un sistema sia caotico o no, ovvero ci basta verificare che il più grande esponente di Lyapunov sia positivo.

1.0.3 Applicazione al pendolo doppio

Avendo ora una definizione di un comportamento pseudo-caotico possiamo iniziare la nostra analisi del pendolo doppio piano. In primo luogo notiamo che lo spazio delle fasi ha quattro dimensioni. Inoltre il sistema risulta deterministico in quanto non vi sono variabili aleatorie all'interno dell'equazione che lo descrive. Rimane dunque da analizzare la sua dipendenza dalle condizioni iniziali;

Calcoliamo innanzitutto l'Hamiltoniana del sistema utilizzando la trasformata di Legendre

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1 + k \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = k \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + \beta \dot{\theta}_2$$

$$H = p_1 \dot{\theta}_1 + p_2 \dot{\theta}_2 - L = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + k \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{\beta}{2} \dot{\theta}_2^2 + 1 + \mu - \cos(\theta_1) - \mu \cos(\theta_2)$$

che, con le dovute sostituzioni, possiamo scrivere in funzione solamente di p_1, p_2, θ_1 e θ_2 .

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\beta p_1 - k \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-k \cos(\theta_1 - \theta_2) p_1 + p_2}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\beta p_1^2 - 2k \cos(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2 + p_2^2}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} + 1 + \mu - \cos(\theta_1) - \mu \cos(\theta_2)$$

Da quest'ultima seguono immediatamente le equazioni del moto

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\beta p_1 - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) p_2}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.5)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2 - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) p_1}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.6)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = -\sin(\theta_1) + \quad (1.7)$$

$$+ \frac{k^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) (\beta p_1^2 + p_2^2) - k \sin(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2 (k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \beta)}{(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \quad (1.8)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -\mu \sin(\theta_2) - \quad (1.9)$$

$$+ \frac{k^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) (\beta p_1^2 + p_2^2) - k \sin(\theta_1 - \theta_2) p_1 p_2 (k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \beta)}{(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \quad (1.10)$$

Applicando quanto detto nei capitoli precedenti possiamo quindi linearizzare tale sistema di equazioni in modo tale da ottenere

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial p_2} \end{bmatrix}_{\theta_{1*}, \theta_{2*}, p_{1*}, p_{2*}} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ p_1 \\ \theta_2 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Vale la pena di ricordare una proprietà degli esponenti di Lyapunov per i sistemi hamiltoniani: la somma di tutte le coppie di esponenti relativi a sottospazi bidimensionali canonicamente coniugati è zero. L'implicazione fisica di questo è: un sistema hamiltoniano mantiene inalterata la misura in ciascuno di tali sottospazi.

Calcoliamo ora i singoli elementi della matrice: per farlo introduciamo alcune quantità per semplificare i calcoli[8].

$$a = k \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$b = \beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$c = \beta p_1 - k \cos(\theta_1 - \theta_2) p_2$$

$$d = -k \cos(\theta_1 - \theta_2) p_1 + p_2$$

$$e = \frac{cdk \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2}$$

$$q = -\frac{cdk \cos(\theta_1 - \theta_2) + (cp_1 + dp_2)k^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} + \frac{4acdk^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{b^3}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_1} = -\frac{(bp_2 - 2\beta d)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11a)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} = \frac{\beta}{b} \quad (1.11b)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_2} = -\frac{(bp_2 - 2ac)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11c)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} = -\frac{a}{b} \quad (1.11d)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1^2} = -\cos \theta_1 + q \quad (1.11e)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_1} = \frac{(bp_2 - 2\beta d)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11f)$$

$$(1.11g)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = -q \quad (1.11h)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1 \partial p_2} = -\frac{(bp_1 - 2ad)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11i)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \theta_1} = \frac{(bp_1 - 2ad)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11j)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} = -\frac{a}{b} \quad (1.11k)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \theta_2} = -\frac{(bp_1 - 2ad)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11l)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 p_2} = \frac{1}{b} \quad (1.11m)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \theta_1} = -q \quad (1.11n)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_2} = \frac{(bp_2 - 2ac)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11o)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial^2 \theta_2} = -\mu \cos(\theta_2) + q \quad (1.11p)$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial p_2} = \frac{(bp_1 - 2ad)k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{b^2} \quad (1.11q)$$

Avendo quindi calcolato tutti i coefficienti della matrice Jacobiana l'equazione per calcolare gli esponenti di Lyapunov risulta essere:

$$(\lambda^2)^2 + 2\alpha\lambda^2 + f = 0 \quad (1.12)$$

da cui otteniamo

$$\lambda^2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + f} \quad (1.13)$$

in cui

$$\alpha = -\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \theta_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial^2 p_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial^2 \theta_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial^2 p_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial^2 \theta_2}\right) - \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_1 \partial p_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_2}\right)$$

$$f = \det |J|$$

dove J rappresenta la matrice del sistema linearizzato.

1.0.4 Simulazione numerica

Abbiamo prodotto la nostra simulazione numerica, mediante un programma scritto in C++, provando diverse configurazioni iniziali.

1. $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -1.63, \dot{\theta}_1 = 0 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0.63 \text{ sec}^{-1}$
2. $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.279, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$
3. $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.1, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

I parametri delle nostre simulazioni sono stati $k = \frac{3}{8}, \beta = \frac{1}{4}$ e $\mu = \frac{1}{3}$ ed il passo utilizzato è stato di 450 microsecondi per un totale di centomila iterazioni che coprono un tempo totale di 45 secondi. Nel primo caso abbiamo preso una configurazione che ci aspettiamo essere instabile .

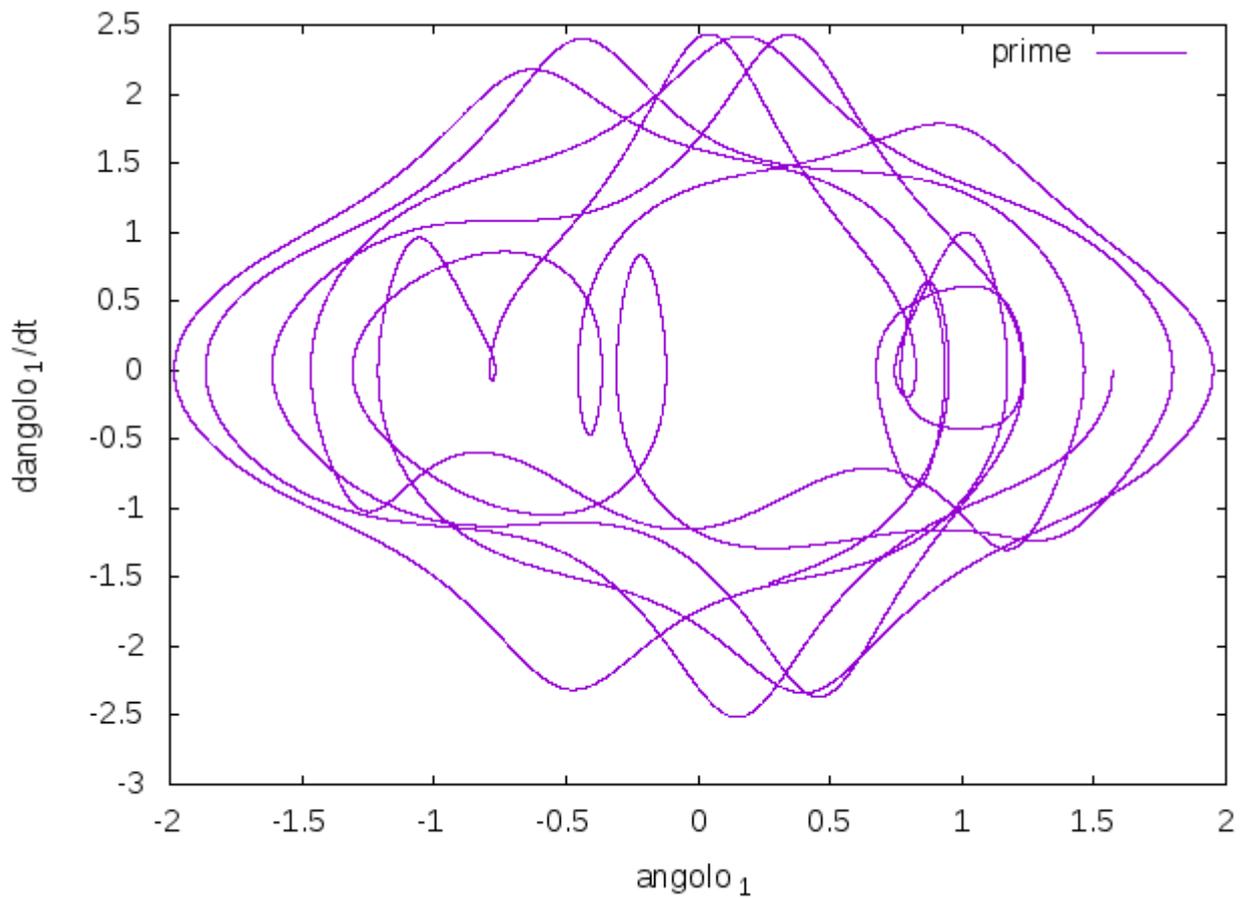


Figura 1.1: spazio delle fasi di θ_1 e $\dot{\theta}_1$ relativo alle condizione iniziale $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -1.63, \dot{\theta}_1 = 0 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0.63 \text{ sec}^{-1}$

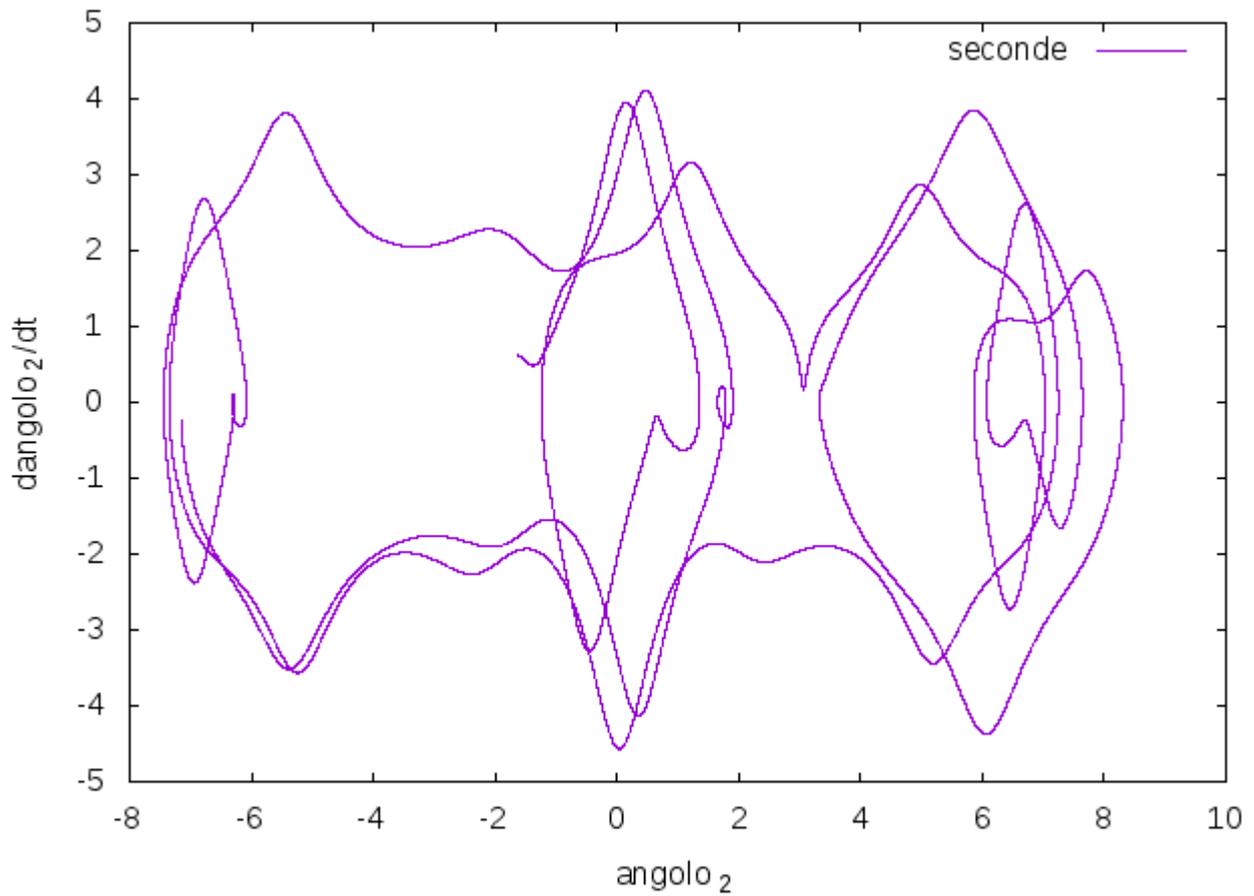


Figura 1.2: spazio delle fasi di θ_2 e $\dot{\theta}_2$ relativo alla condizione iniziale $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -1.63, \dot{\theta}_1 = 0 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0.63 \text{ sec}^{-1}$

Tale configurazione dà luogo ad autovalori positivi; facendone quindi la media il maggiore degli esponenti risulta uguale a ($\lambda = 0.64 \text{sec}^{-1}$)

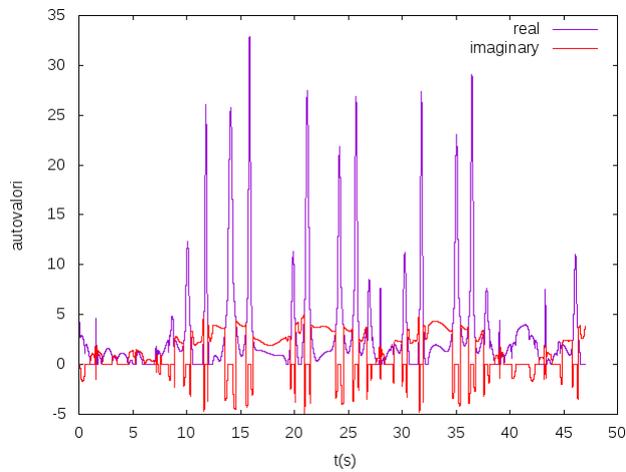


Figura 1.3: autovalori della matrice in funzione del tempo

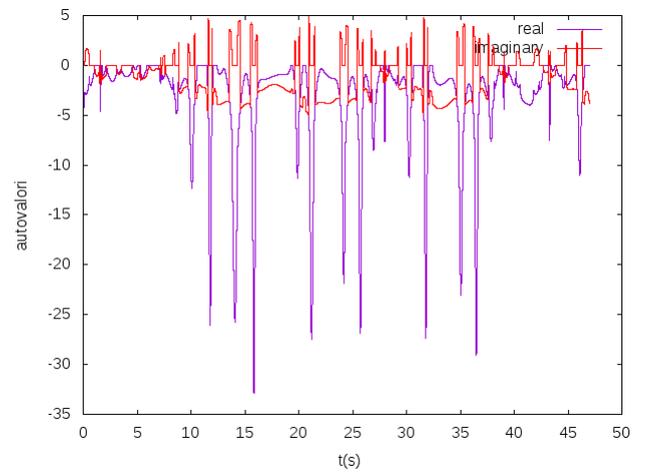


Figura 1.4: autovalori della matrice in funzione del tempo

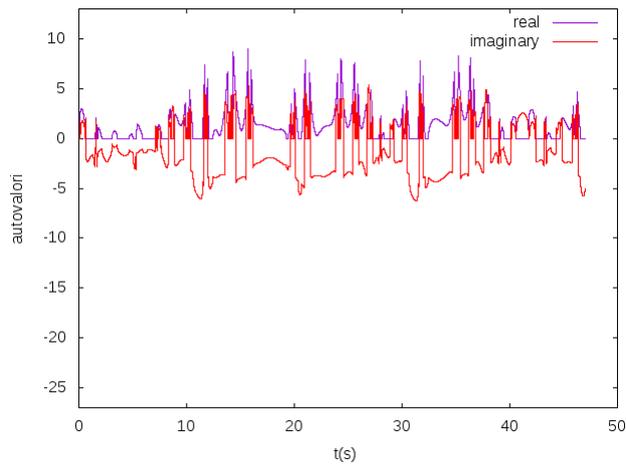


Figura 1.5: autovalori della matrice in funzione del tempo

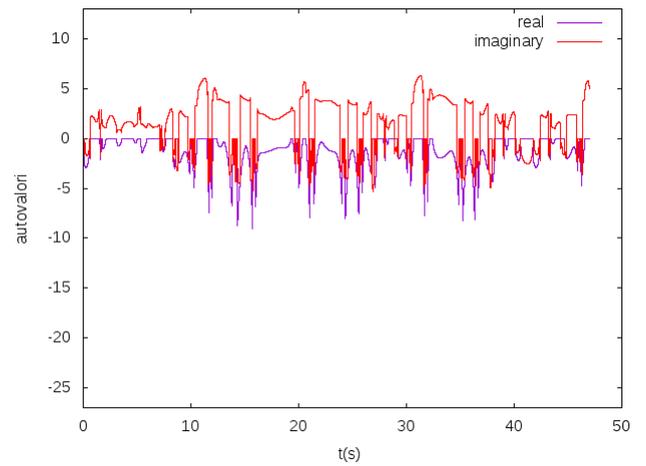


Figura 1.6: autovalori della matrice in funzione del tempo

Figura 1.7: grafici relativi alle condizioni iniziali $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -1.63, \dot{\theta}_1 = 0 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0.63 \text{ sec}^{-1}$

Analizziamo ora la condizione N°2 .

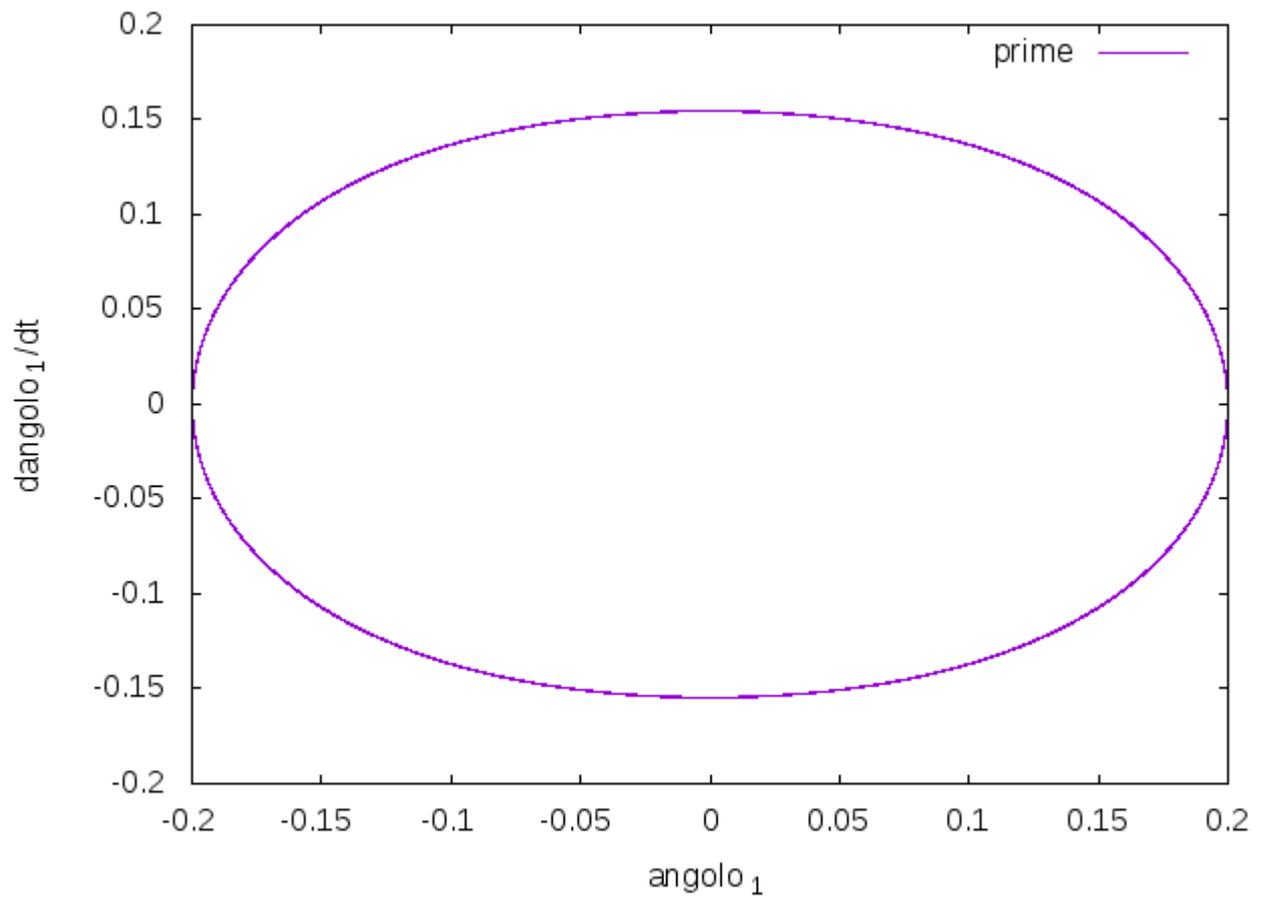


Figura 1.8: spazio delle fasi di θ_1 e $\dot{\theta}_1$ relativo alle condizioni iniziali $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.279, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

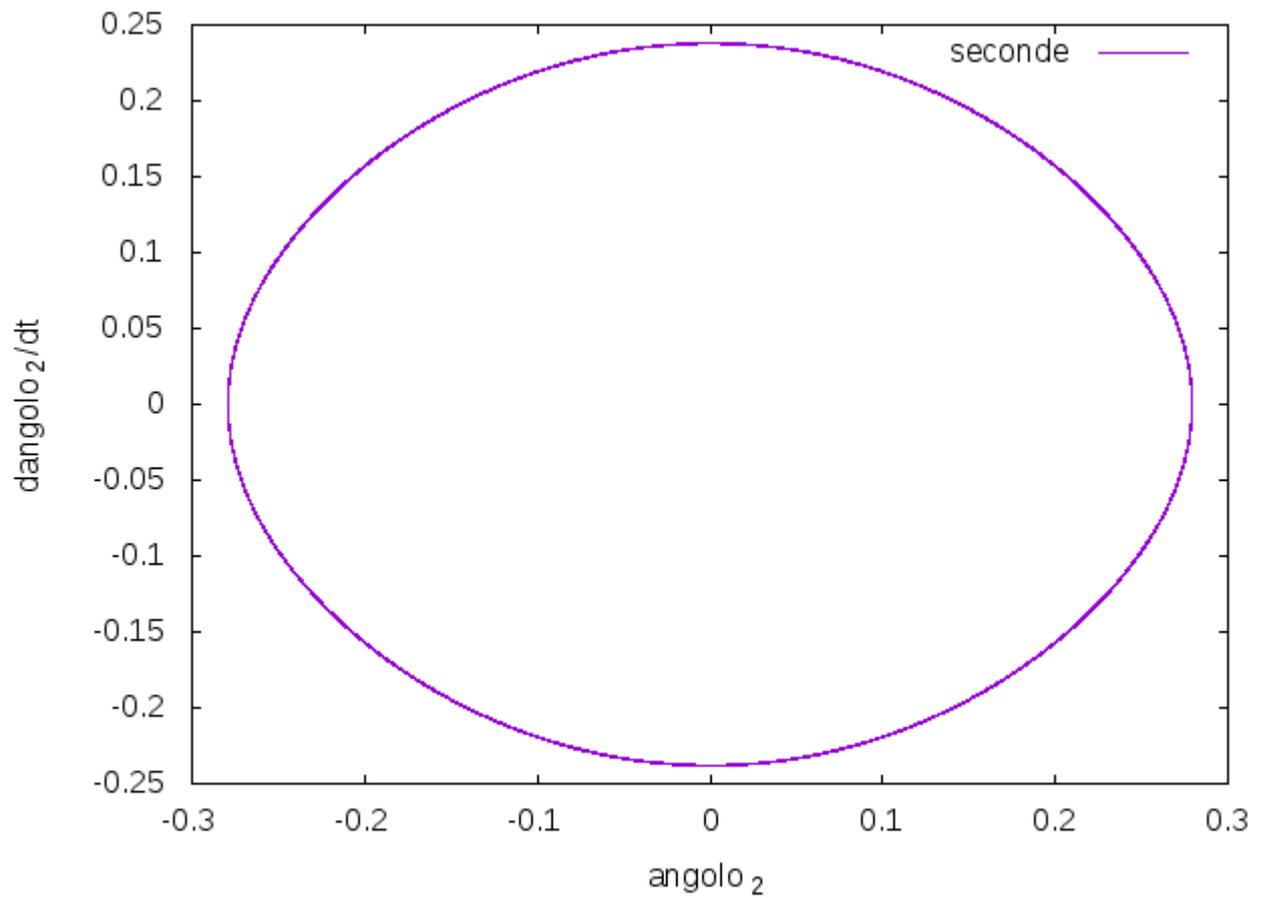


Figura 1.9: spazio delle fasi di θ_2 e $\dot{\theta}_2$ relativo alle condizioni iniziali $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.279, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

Dalla rappresentazione nello spazio delle fasi sembra che il sistema sia perfettamente stabile, visto che le traiettorie appaiono perfettamente chiuse.

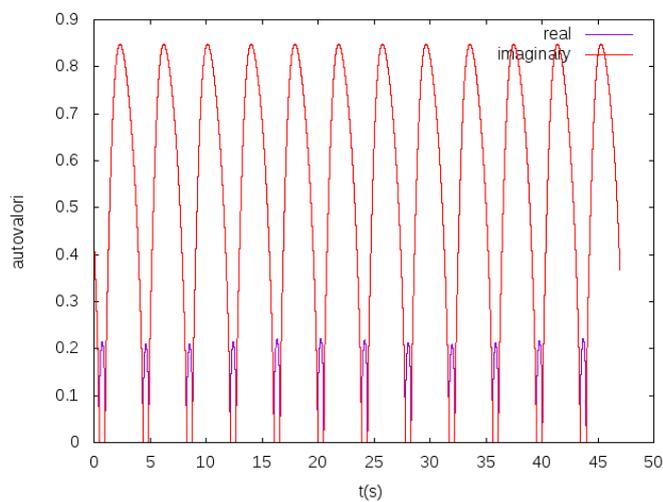


Figura 1.10: autovalori della matrice in funzione del tempo

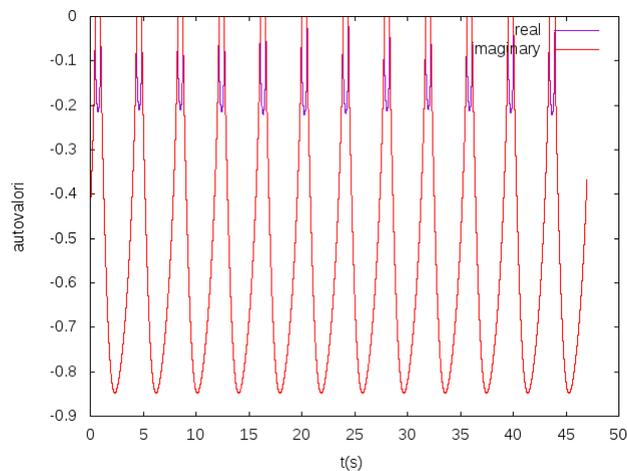


Figura 1.11: autovalori della matrice in funzione del tempo

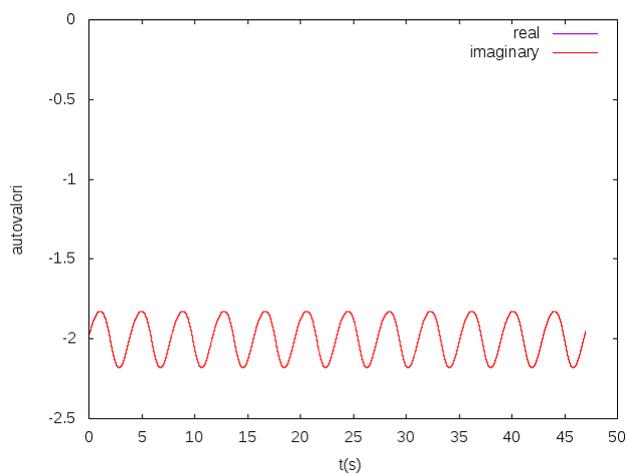


Figura 1.12: autovalori della matrice in funzione del tempo

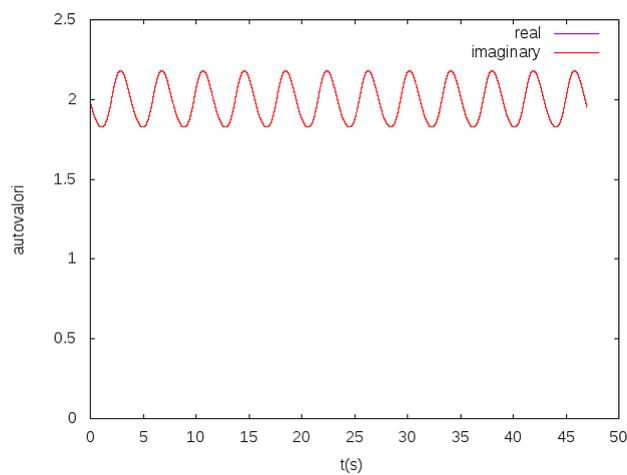


Figura 1.13: autovalori della matrice in funzione del tempo

Figura 1.14: grafici relativi alla condizione iniziale $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.279, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

Tale apparenza è suffragata anche dal calcolo dell'esponente di Lyapunov che, in questo caso, vale $\lambda = 0.00495 \text{sec}^{-1}$. A un primo sguardo si potrebbe pensare che il sistema sia caotico, tuttavia se consideriamo il fatto che il calcolo è imperversato dagli errori dell'approssimazione numerica un valore come quello di $\lambda = 0.00495 \text{sec}^{-1}$ risulta compatibile con zero. E dunque il sistema risulta stabile
 Come ultimo set di condizioni iniziali abbiamo esaminato il №3.

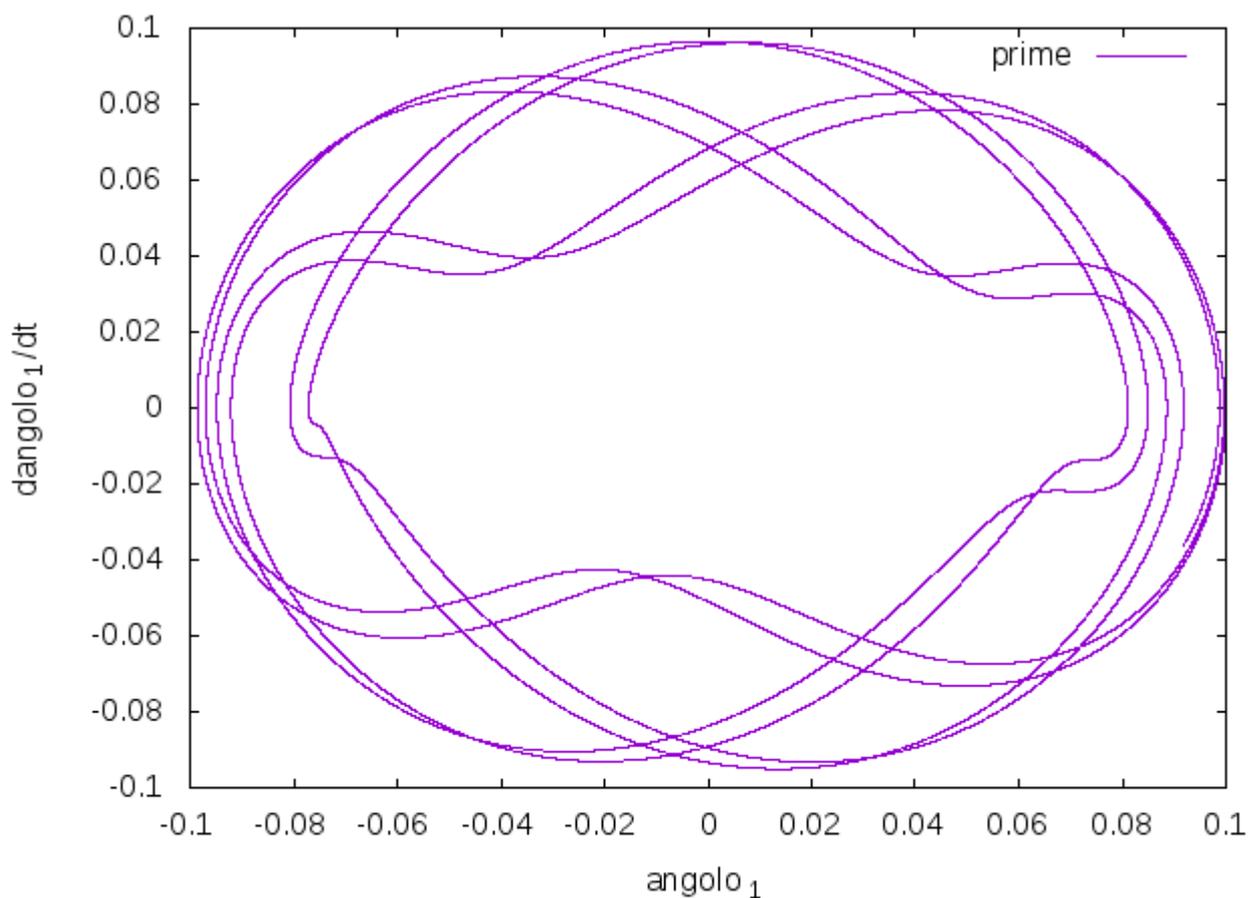


Figura 1.15: spazio delle fasi di θ_1 e $\dot{\theta}_1$ relativo alle condizioni iniziali $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.1, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{sec}^{-1}$

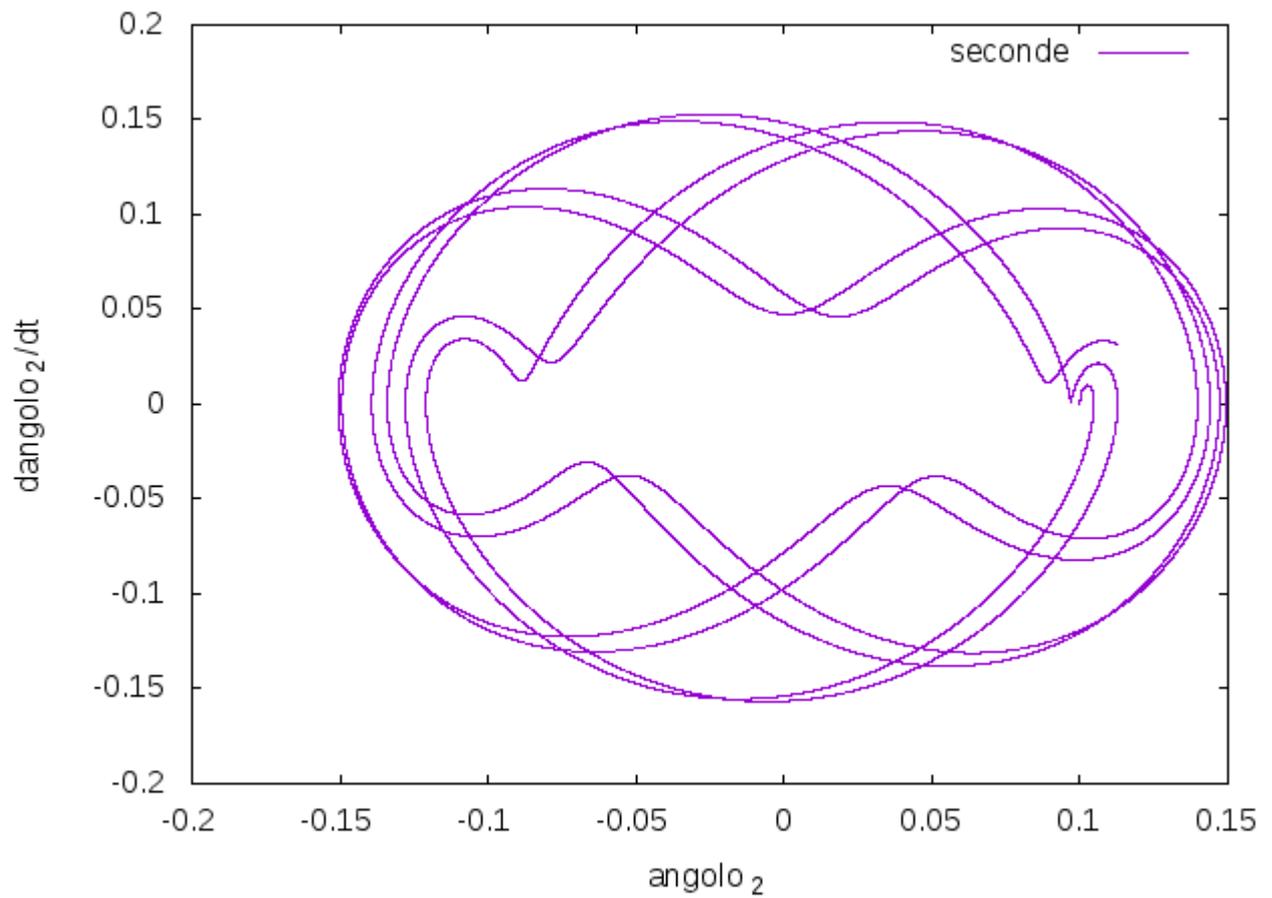


Figura 1.16: spazio delle fasi di θ_2 e $\dot{\theta}_2$ relativo alle condizioni iniziali $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.1, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

L'osservazione dell'esponente di Lyapunov (che in questo caso risulta uguale a zero) ci dice che il sistema è stabile.

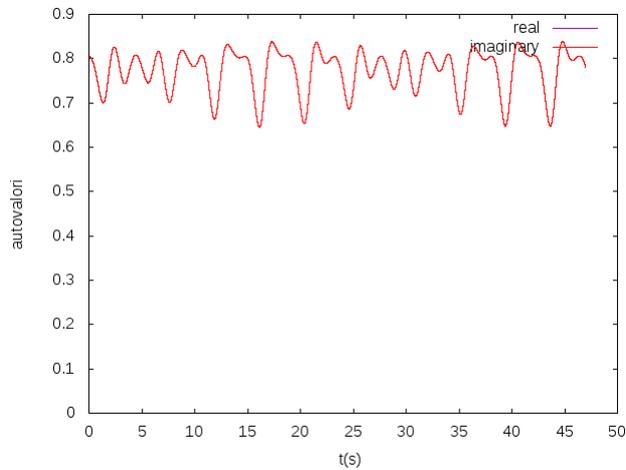


Figura 1.17: autovalori della matrice in funzione del tempo

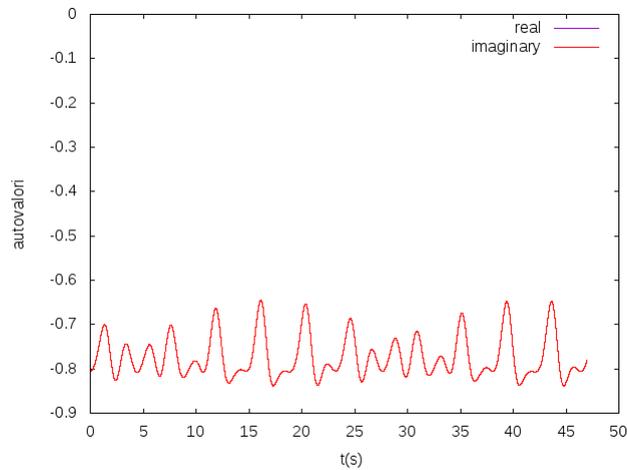


Figura 1.18: autovalori della matrice in funzione del tempo

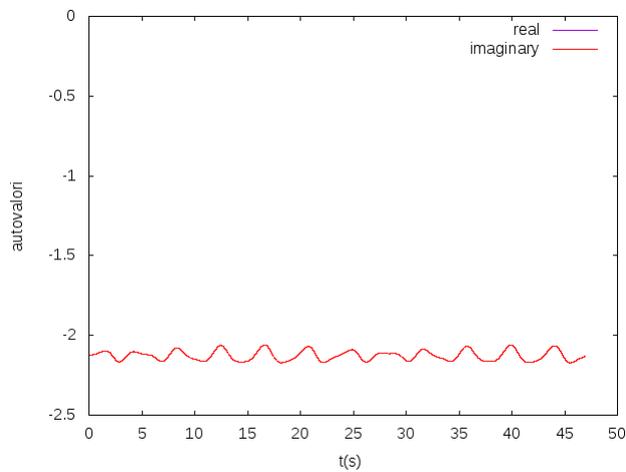


Figura 1.19: autovalori della matrice in funzione del tempo

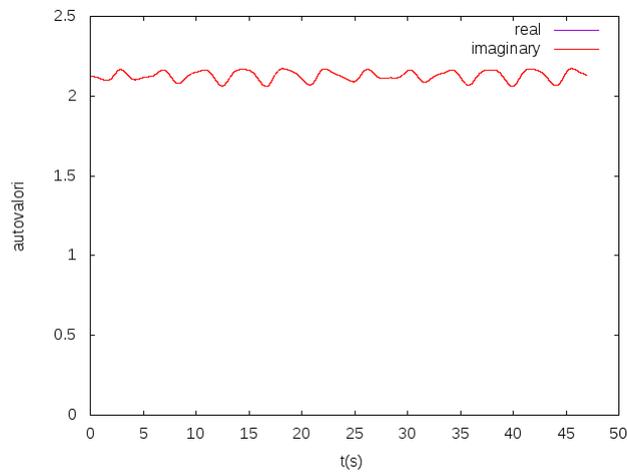


Figura 1.20: autovalori della matrice in funzione del tempo

Figura 1.21: grafici relativi alla condizione iniziale $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.1, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

Capitolo 2

Metodo geometrico

In questo capitolo ci apprestiamo a ripetere l'analisi del sistema fatta in precedenza; tuttavia utilizzeremo una formulazione geometrica. In tutto il capitolo, tranne quando diversamente specificato, si farà uso della convenzione di Einstein.

2.0.1 Formulazione geometrica della dinamica

Iniziamo dicendo che[5] le traiettorie di un sistema dinamica possono essere descritte mediante geodetiche di un'appropriata varietà riemanniana. Tale identificazione è resa possibile mediante una formulazione variazionale della dinamica. Infatti possiamo, in quest'ottica, indicare il moto di un sistema hamiltoniano come l'estremale del funzionale d'azione.

$$S = \int L dt \quad (2.1)$$

Quindi, scelta una metrica appropriata, possiamo collegare la lunghezza di una curva

$$l = \int ds \quad (2.2)$$

all'azione e identificare le geodetiche con le traiettorie fisiche. Una delle scelte più comuni (risalente al diciannovesimo secolo) è la metrica di Jacobi definita sullo spazio delle configurazioni. Poniamo:

$$ds^2 = 2(H - V) \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial x_k}{\partial q^i} \frac{\partial x_k}{\partial q^j} dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j \quad (2.3)$$

dove q^i e q^j sono le coordinate del nostro sistema, H il nostro Hamiltoniano, V l'energia potenziale, m_k le masse dei corpi presi in esame e ds è l'elemento di lunghezza dello spazio su cui abbiamo definito la nostra metrica.

Possiamo quindi utilizzare il seguente teorema:

Teorema di Jacobi. *Le geodetiche della metrica di Jacobi sono quelle traiettorie del sistema in cui l'energia totale $T + V$ ha un valore fissato E .*

per una dimostrazione si rimanda a [4]. Questo fatto ci indica:

-le curve che descrivono il moto non hanno accesso all'intero spazio delle fasi ma solo ad un sottospazio tale per cui $V(q) < E$

-le equazioni del moto possono essere descritte dall'equazione delle geodetiche come (cfr. Appendice A)

$$\left(\frac{D\dot{\gamma}}{ds}\right)^i \equiv \frac{d^2q^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} = 0 \quad (2.4)$$

da cui, con un calcolo diretto, otteniamo:

$$\frac{d^2q^i}{ds^2} + \frac{1}{2(E-V)} \left[2 \frac{\partial(E-V)}{\partial q_j} \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^i}{ds} - g^{ij} \frac{\partial(E-V)}{\partial q_j} g_{km} \frac{dq^k}{ds} \frac{dq^m}{ds} \right] = 0 \quad (2.5)$$

2.0.2 Stabilità delle orbite

Utilizzando un approccio simile a quello del capitolo precedente, ci apprestiamo ad analizzare le orbite del sistema come perturbazioni delle geodetiche dello spazio delle configurazioni. Nel fare questo ci riferiremo ai lavori [5] e [6].

Supponiamo quindi di prendere una geodetica "perturbata";

$$\rho^i(s) = q^i(s) + J^i(s)$$

Sostituendo tale espressione all'interno dell'equazione delle geodetiche otteniamo;

$$\frac{D^2 J^i}{ds^2} + R_{jkl}^i \frac{dq^j}{ds} J^k \frac{dq^l}{ds} = 0 \quad (2.6)$$

Qui R_{jkl}^i sono le componenti del tensore di curvatura (cfr. Appendice A).

Possiamo derivarla anche facendo riferimento ad una geodetica $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial f(t,0)}{\partial t}$ (in cui $f(t, s)$ è una superficie parametrizzata). Sfruttando il fatto che questa sia, appunto, una geodetica possiamo scrivere $\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ da cui $\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Sfruttando ora la seguente uguaglianza in cui \mathcal{V} rappresenta un campo vettoriale lungo f e \mathbf{R} rappresenta il tensore di curvatura (si veda appendice A) della nostra varietà

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{\partial s} \mathcal{V} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{dt} \mathcal{V} = \mathbf{R} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \mathcal{V}$$

otteniamo

$$0 = \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{R} \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

Utilizzando ora anche l'identità di Bianchi ($\mathbf{R}(X, Y)Z + \mathbf{R}(Y, Z)X + \mathbf{R}(Z, X)Y = 0$ dove X, Y, Z sono campi vettoriali) otteniamo

$$0 = \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D \partial f}{\partial t \partial t} \right) = \frac{D D \partial f}{\partial t \partial t \partial s} + \mathbf{R} \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

ponendo $\frac{\partial f(t,0)}{\partial s} = \mathbf{J}(t)$ otteniamo proprio

$$\frac{D^2 \mathbf{J}}{ds^2} + \mathbf{R}(\dot{\gamma}(t), \mathbf{J}(t))\dot{\gamma}(t) = 0 \quad (2.7)$$

C.V.D.

Per poter comprendere al meglio come l'equazione di cui sopra si relaziona con il chaos ci riferiamo al lavoro di M.Pettini e M. Cerruti-Sola[6]. Nella maggioranza dei sistemi d'interesse fisico (cioè, descritti da Hamiltoniani standard) *l'instabilità* di traiettorie vicine tra loro può essere studiata attraverso questa equazione (2.7). Le due condizioni topologiche di base per cui si ha il sorgere del chaos in ogni sistema dinamico deterministico sono *l'allungarsi* e il conseguente *faldarsi* dei volumi nello spazio delle fasi[7], dovuto alla già citata necessità della conservazione della misura in ogni sottospazio bidimensionale le cui due coordinate siano canonicamente coniugate. Nella descrizione riemanniana del chaos hamiltoniano, *l'allontanamento* delle traiettorie è dato dall'*instabilità*, il *faldarsi* dal non permettere alla distanza di crescere indefinitamente ovvero dalla *compattezza* della varietà $H = E$. In questo modo, le traiettorie dello spazio delle fasi si sfaldano rendendo impossibile l'identificazione della condizione iniziale: la loro evoluzione diviene imprevedibile nel lungo periodo. Decomponiamo quindi $\mathbf{J}(s) = \eta_i(s)\mathbf{e}_i(s)$ dove $(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$ è un sistema ortonormale di vettori trasportati parallelamente. In questo sistema di riferimento le due componenti di (2.7) risultano nell'ordine

$$\frac{\nabla^2 \mathbf{J}}{ds^2} = \frac{\eta_i}{ds^2} \mathbf{e}_i(s) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{J})\mathbf{v} = \langle \mathbf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i)\mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \eta_i \mathbf{e}_j \quad (2.9)$$

Scegliendo in maniera appropriata una base l'equazione (2.7) può essere riscritta, per le sue componenti, come

$$\frac{d^2 \eta_1}{ds^2} + \eta_1 (R_{klmn} v^k e_1^l v^m e_1^n) + \eta_2 (R_{klmn} v^k e_2^l v^m e_1^n) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{ds^2} + \eta_2 (R_{klmn} v^k e_2^l v^m e_2^n) + \eta_1 (R_{klmn} v^k e_1^l v^m e_2^n) = 0 \quad (2.11)$$

nel caso a due dimensioni vi è una scelta assai semplice

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{-dq^2}{ds}, \frac{dq^1}{ds} \right) \mathbf{e}_2 = \left(\frac{dq^1}{ds}, \frac{dq^1}{ds} \right)$$

Si sottolinea che, in due dimensioni, vi è un'unico coefficiente diverso da zero, ovvero R_{1212} , per cui le equazioni (2.10) e (2.11), utilizzando la base definita in precedenza e l'eguaglianza $ds^2 = 4W^2 dt^2$ in cui W è $H - V$, si semplificano notevolmente, divenendo

$$\frac{d^2\eta_1}{ds^2} + R\eta_1 = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2\eta_2}{ds^2} = 0 \quad (2.13)$$

dove R indica la curvatura scalare dello spazio delle configurazioni. Da questo possiamo trovare un'altra sorgente per il chaos nelle orbite. Infatti, possiamo osservare che si hanno soluzioni instabili per l'equazione (2.12) se R è costante e minore di zero (in tal caso, infatti, la separazione delle geodetiche sarebbe esponenziale) ed anche se R non è costante, ma periodica. In questo caso, infatti, la (2.12) diventa l'equazione di Mathieu per la quale esiste il fenomeno della *risonanza parametrica* vale a dire (sempre secondo M. Pettini e M. Cerruti-Sola [6]) che se i parametri di un sistema dinamico variano periodicamente nel tempo, allora una soluzione stabile può essere resa instabile anche se risulta stabile per ogni valore dei parametri[9].

2.0.3 Applicazione al pendolo doppio

Ci apprestiamo ora ad applicare il precedente modello al nostro sistema. Scriviamo innanzitutto il tensore metrico \mathbf{g}

$$\mathbf{g} = 2W \begin{bmatrix} 1 & k \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ k \cos(\theta_1 - \theta_2) & \beta \end{bmatrix}, \quad W = E - 1 - \mu + \cos \theta_1 + \mu \cos \theta_2$$

Calcoliamo quindi la curvatura scalare dello spazio delle cofigurazioni del nostro sistema (si ricorda l'utilizzo del riscaldamento presentato in [2]).

Per farlo dobbiamo prima calcolare i simboli di Christoffel. Utilizzando quindi la relazione

$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk})$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{(2k^2 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \theta_2 + Wk^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_2)) - \mu k \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \beta \sin \theta_1}{2W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{(2\mu k^2 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \theta_2 - Wk^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_2)) - \beta k \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \beta \mu \sin \theta_2}{2W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{(\mu \sin \theta_2 - k \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2Wk \sin(\theta_1 - \theta_2))}{2W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\beta(\beta \sin \theta_1 - \mu k \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2Wk \sin(\theta_1 - \theta_2))}{2W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{\mu k \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \beta \sin \theta_1}{2W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{k \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \mu \sin \theta_1}{2W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))}\end{aligned}$$

Dobbiamo ora calcolare il tensore di curvatura, per il quale utilizziamo la consueta formula $R_{jlk}^i = \partial_l \Gamma_{jk}^i - \partial_k \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i$. Ci ricordiamo ora che l'unico coefficiente diverso da zero è R_{212}^1 e dunque calcoliamo solo questa componente ottenendo :

$$\begin{aligned}R_{212}^1 &= \mu \cos \theta_2 + 2Wk \cos(\theta_1 - \theta_2) + \beta \cos(\theta_1) + \frac{1}{W}(k \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) - \mu \sin \theta_2) \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta_1 (\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))}{W} + \\ &- \frac{k \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} (\beta k \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \mu k \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \beta \mu \sin \theta_2 + \beta \sin \theta_1) \\ &\quad - \frac{2Wk^3 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (2.14)\end{aligned}$$

Da questa otteniamo la curvatura scalare $R = \frac{R_{212}^1}{2W^2(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))}$

$$\begin{aligned}R &= \frac{k \cos(\theta_1 - \theta_2)}{W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} - \frac{k^3 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{W(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))^2} + \frac{\mu \cos(\theta_2) + \beta \cos \theta_1}{2W^2(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ &- \frac{k \sin(\theta_1 - \theta_2) (\beta k \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \mu k \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \beta \mu \sin \theta_2 + \beta \sin \theta_1)}{2W^2(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))^2} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta_1}{2W^3} + \frac{(k \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \mu \sin \theta_2)^2}{2W^3(\beta - k^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \quad (2.15)\end{aligned}$$

Sfruttando ora la relazione $ds = 2Wdt$ e utilizzando la seguente sostituzione [5].

$$\eta = J\sqrt{W}$$

all'interno dell'equazione 2.12 e lasciando cadere il pedice possiamo ottenere

$$\ddot{J} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{W}}{W} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{W}}{W} \right)^2 + 4RW^2 \right) J = 0 \quad (2.16)$$

Dobbiamo ora risolvere tale equazione contestualmente a quelle della dinamica del sistema.

2.0.4 Simulazione numerica

Come già fatto per gli esponenti di Lyapunov anche per questa simulazione numerica abbiamo utilizzato un programma in C++ per implementare l'algoritmo di Runge-Kutta e risolvere numericamente l'equazione (2.16). Richiamiamo qui i tre set di condizioni iniziali utilizzati nella precedente sezione di analisi numerica.

1. $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -1.63, \dot{\theta}_1 = 0 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0.63 \text{ sec}^{-1}$
2. $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.279, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$
3. $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.1, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

Per il set di condizioni iniziali N°1 senza alcuna sorpresa possiamo notare che in questo caso la separazione tra due geodetiche vicine aumenta in funzione del tempo.

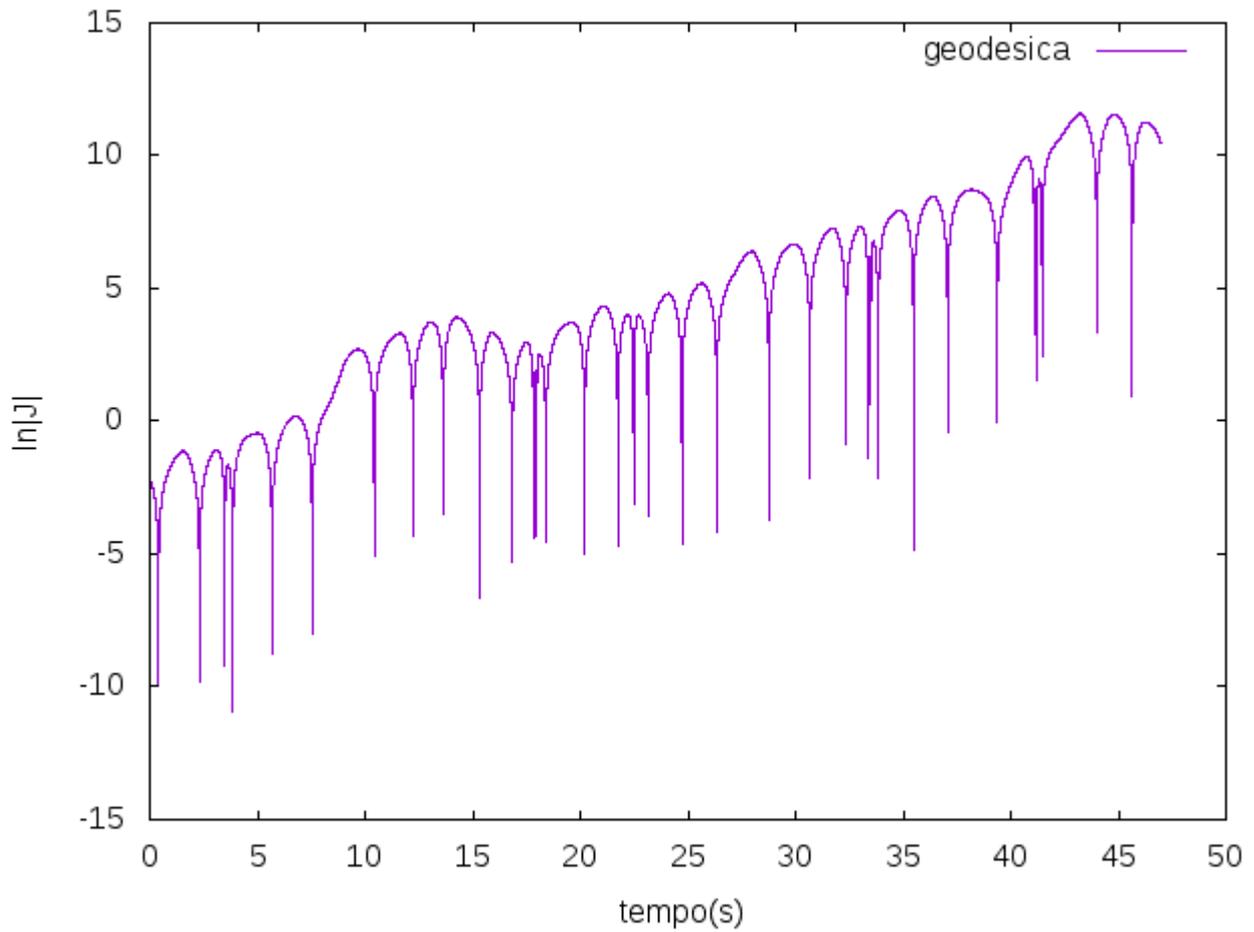


Figura 2.1: separazione di due geodetiche vicine in funzione del tempo condizioni iniziali $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -1.63, \dot{\theta}_1 = 0 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0.63 \text{ sec}^{-1}$

Analizziamo ora il set di condizioni iniziali №2. Come già notato nella sezione relativa agli esponenti di Lyapunov questa configurazione risulta stabile; ad ulteriore prova di quanto già detto si può osservare che nella figura 2.2 non si notano particolari derivate delle geodetiche.

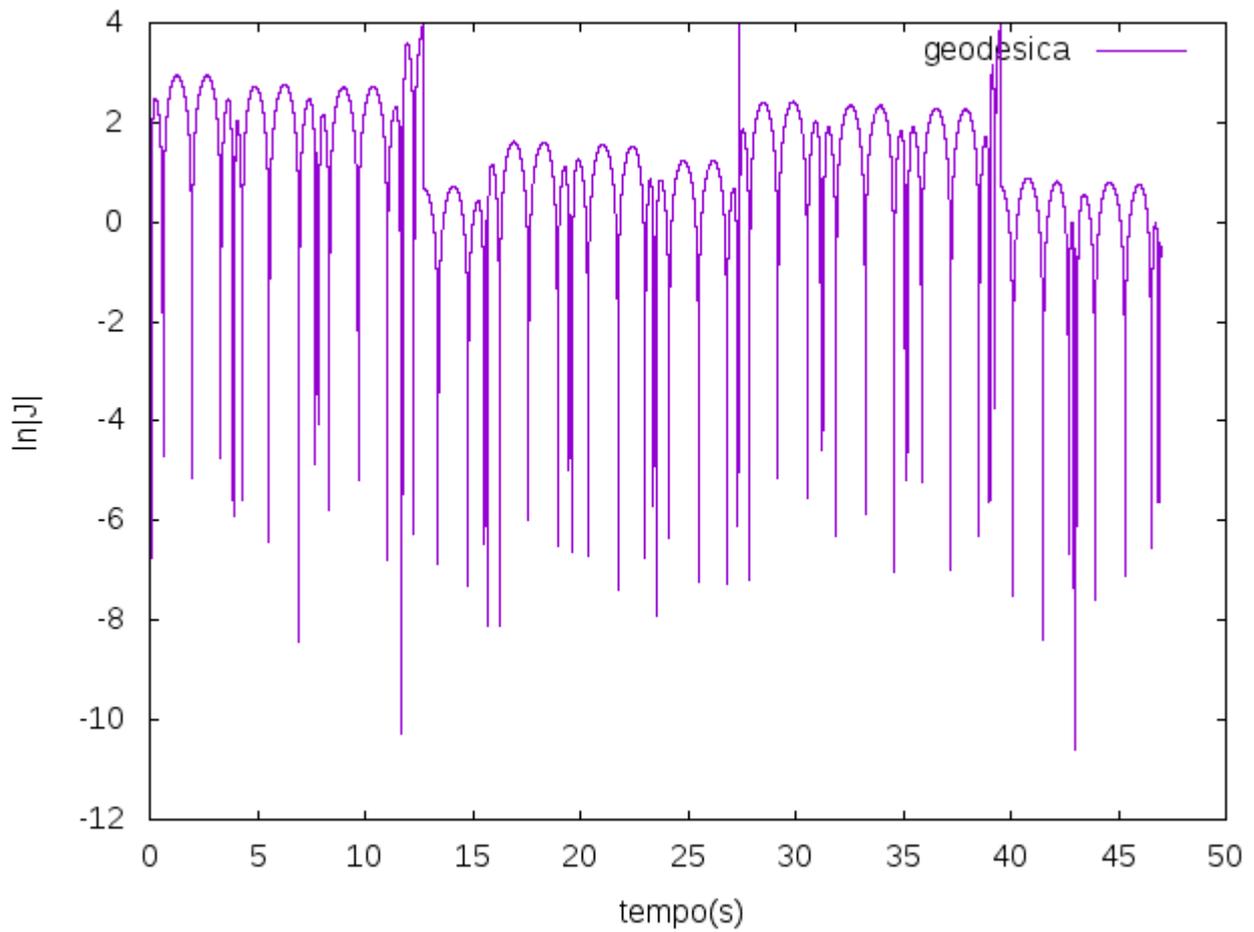


Figura 2.2: separazione di due geodetiche vicine in funzione del tempo condizioni iniziali $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.279, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

L'ultima configurazione che ci apprestiamo ad esaminare è il set №3 di condizioni iniziali. Questa particolare configurazione mostra la mancanza di deriva (e quindi il mancato incremento delle fluttuazioni) propria di un sistema stabile.

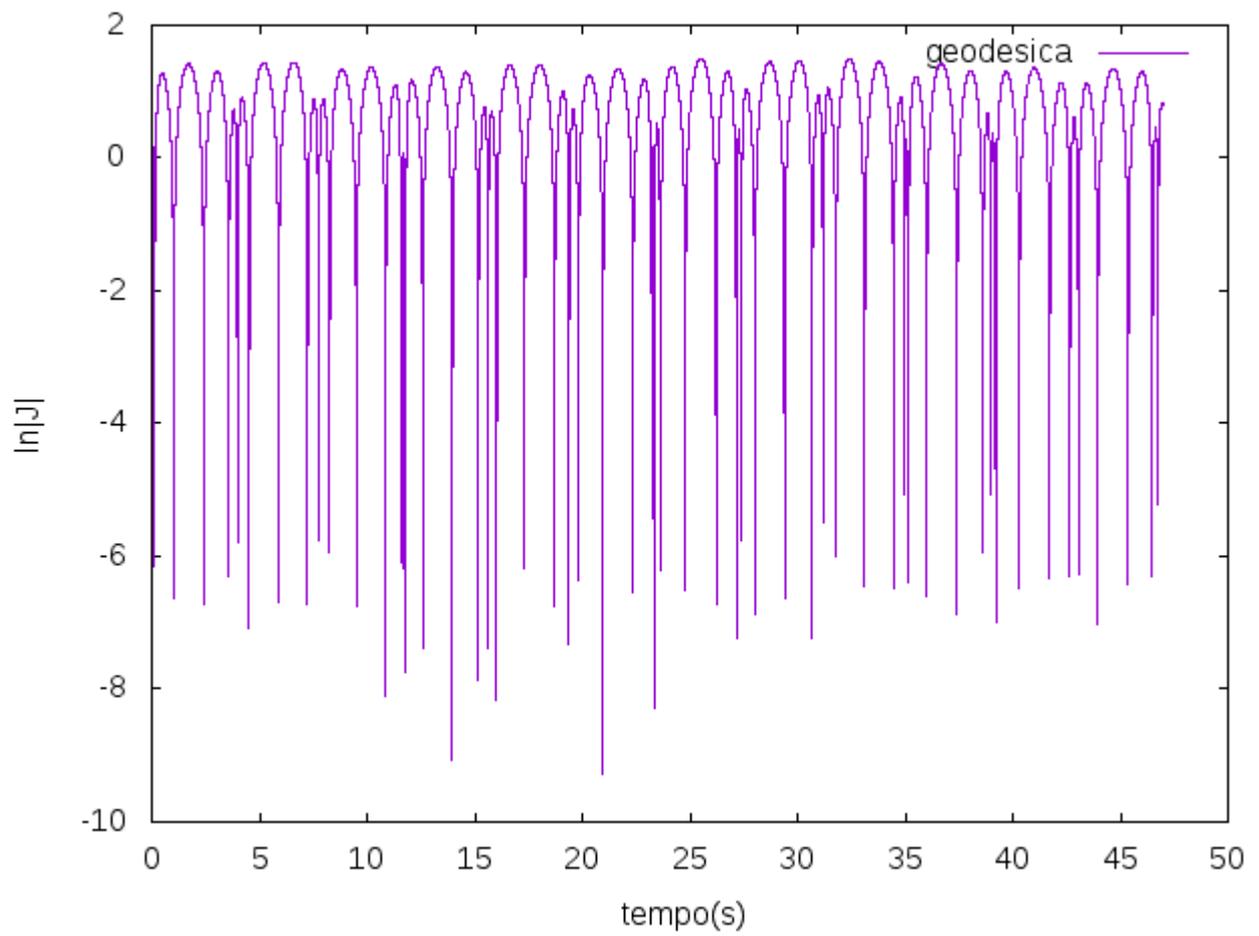


Figura 2.3: separazione di due geodetiche vicine in funzione del tempo condizioni iniziali $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.1, \dot{\theta}_1 = 0.0001 \text{ sec}^{-1}, \dot{\theta}_2 = 0 \text{ sec}^{-1}$

Conclusioni

Dall'analisi qui presentata possiamo affermare che il metodo geometrico risulta in accordo, almeno qualitativamente, con il metodo classico e introduce anche una nuova spiegazione dell'insorgere del chaos. Inoltre risulta meno pesante dal punto di vista computazionale richiedendo la soluzione, oltre alle equazioni del moto, di una sola altra equazione a dispetto delle due relative al metodo classico. Aggiungiamo che il metodo geometrico, nell'articolo da cui questo lavoro trae spunto, veniva impiegato per ottenere una formula che potesse determinare la caoticità di un sistema indipendentemente dalla risoluzione delle equazioni del moto. Tale metodo non è stato impiegato in quanto la teoria sviluppata in [6] non include sistemi con matrici non diagonali.

Appendice A

Richiami di geometria riemanniana

In questa appendice, nella quale si continua a operare secondo la convenzione di Einstein, si vuole fare un breve richiamo della teoria delle varietà riemanniane utilizzata nel corso dell'elaborato. per un'analisi più completa si rimanda a [10]. Iniziamo con la seguente definizione:

Definizione. una varietà differenziabile di dimensione n è un insieme M ed una collezione di mappe iniettive (carte) $f_\alpha : O_\alpha \rightarrow X_\alpha$, con $X_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e $O_\alpha \subset M$, tale che :

1. $\cup_\alpha(O_\alpha) = M$
2. Vi siano due insiemi O_α e O_β tali che $O_\alpha \cap O_\beta = W \neq \emptyset$ allora $f_\alpha(W)$ e $f_\beta(W)$ sono aperti di \mathbb{R}^n e le mappe composte $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$ sono infinitamente differenziabili.
3. la famiglia (X_α, f_α) e il ricoprimento (O_α) risultano massimali rispetto alle condizioni 1) e 2)

Definiamo ora una curva come una mappa, almeno di classe C^1 :

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M \tag{A.1}$$

e una funzione su una varietà come $F : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Ora possiamo definire il campo vettoriale associato alla funzione F e tangente alla curva $\gamma(\lambda)$ in un punto P di una varietà come

$$v(P) = \left. \frac{dF}{d\lambda} \right|_P \tag{A.2}$$

Prendiamo adesso una curva in un intorno di P tale che $\gamma(\lambda_p) = P$; ora possiamo prendere una carta f_α in un intorno di P e scrivere

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d(F \circ \gamma)}{d\lambda} \right|_{\lambda_p} &= \left. \frac{d}{d\lambda} (F \circ f_\alpha^{-1} \circ f_\alpha \circ \gamma) \right|_{\lambda_p} & (A.3) \\
&= \left. \frac{d}{d\lambda} [F(x^i) \circ x^i(\lambda)] \right|_{\lambda_p} \\
&= \left. \frac{d}{d\lambda} F(x^i(\lambda)) \right|_{\lambda_p} \\
&= \left. \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda_p}
\end{aligned}$$

Omettendo la funzione F possiamo individuare in

$$\frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{A.4}$$

l'operatore che genera il campo tangente a qualsiasi curva. L'insieme di tutti i vettori tangenti di M in P forma uno spazio vettoriale, definito come spazio tangente di M in P ($T_P M$), e gli elementi $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ne formano una base. l'unione di tutti gli spazi tangenti dei punti di una varietà ne forma a sua volta una di dimensione $2n$ denominata fibrato tangente ad M .

$$TM = \bigcup_{P \in M} T_P M. \tag{A.5}$$

Definiamo campo vettoriale \mathcal{V} su M l'applicazione che ad ogni punto $P \in M$ associa un vettore. Se f è una funzione liscia allora

$$\mathcal{V}(f)_P = v_f(P) \tag{A.6}$$

Definiamo inoltre le traiettorie di un campo vettoriale come le curve che soddisfano:

$$\dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)) \tag{A.7}$$

Dati due campi vettoriali \mathcal{V}, \mathcal{W} definiamo il loro commutatore come il campo vettoriale:

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}](F) = \mathcal{V}(\mathcal{W}(F)) - \mathcal{W}(\mathcal{V}(F)) \tag{A.8}$$

Ricordiamo che se \mathcal{V}, \mathcal{W} appartengono ad una base di TM il loro commutatore è nullo. il vettore tangente ad una curva non è l'unica tipologia di vettore che possiamo definire; infatti, se prendiamo l'insieme delle applicazioni lineari che vanno da uno spazio vettoriale a R possiamo definire lo spazio duale di TM come T^*M (detto fibrato cotangente) i

cui elementi, definiti come le applicazioni lineari $V^* : TM \rightarrow R$, sono detti covettori. Nell'uso indicheremo i vettori con gli indici in basso, i covettori con gli indici in alto. Definiamo in ultimo un tensore T_j^i , $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, s$ su uno spazio vettoriale \mathcal{V} come una mappa multilineare

$$T : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_{t \text{ volte}} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{s \text{ volte}} \rightarrow \mathbf{R}$$

I tensori formano a loro volta uno spazio vettoriale ($T(t, s)$) di dimensioni n^{t+s} dove n è la dimensione dello spazio vettoriale di \mathcal{V} e \mathcal{V}^* . Per fare un esempio un tensore $(0,0)$ è uno scalare, un tensore $(0,1)$ è un vettore. Possiamo ora definire un'operazione sui tensori denominata prodotto tensoriale e definita come l'operazione che mappa un elemento di $T(t, s) \times T(t', s')$ in un elemento di $T(t+t', s+s')$.

Un tensore $(0,2)$ g che sia simmetrico, vale a dire per cui $g(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \equiv \mathcal{V} \times \mathcal{W} = g(\mathcal{W}, \mathcal{V})$, non degenera, ovvero $g(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0 \iff \mathcal{W} = 0 \forall \mathcal{V} \in T_P M$ e tale che $g(\mathcal{V}, \mathcal{V}) > 0 \forall \mathcal{V} \neq 0$ definisce una metrica in ogni punto della varietà. Definiamo mediante g un prodotto scalare

$$g(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle : TM \times TM \rightarrow \mathbf{R} \quad (\text{A.9})$$

il prodotto scalare di due vettori $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ è dato, in termini di g , da:

$$\langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle = g_{ij} V^i W^j = V^i W_j \quad (\text{A.10})$$

nell'ultima equazione abbiamo utilizzato il fatto che g stabilisce una relazione tra vettori e covettori. Dalla stessa relazione segue che le componenti di g^{-1} sono indicate g^{ij} .

A.1 Derivata covariante e curvatura

Derivare un campo vettoriale su una varietà con metrica non diagonale comporta alcune problematiche dovute alla necessità di calcolare in modo non ambiguo il rapporto incrementale del campo; in effetti il calcolo della differenza tra un vettore applicato a un punto P e quello applicato a un punto Q vicino ad esso richiede che uno dei due venga trasportato sulla fibra su cui giace l'altro. Questo, però, può essere fatto lungo un numero infinito di curve che connettono i due punti. Per superare questa difficoltà definiamo una connessione lineare su una varietà M come una mappa ∇ tale che dati \mathcal{V} e \mathcal{W} campi vettoriali li associa ad un terzo campo vettoriale $\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}$ con le seguenti proprietà:

1. $\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}$ è bilineare in \mathcal{V} e \mathcal{W} , ovvero, $\nabla_{\mathcal{V}}(a\mathcal{W} + b\mathcal{Y}) = a\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W} + b\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{Y}$ e $\nabla_{a\mathcal{V}+b\mathcal{W}}\mathcal{Y} = a\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{Y} + b\nabla_{\mathcal{W}}\mathcal{Y}$;
2. $\nabla_{f(\mathcal{V})}\mathcal{W} = f(\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W})$

3. (regola di Leibnitz) $\nabla_{\mathcal{V}} f(\mathcal{W}) = (\partial_{\mathcal{V}} f)\mathcal{W} + f(\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W})$, dove $\partial_{\mathcal{V}}$ è l'ordinaria derivata direzionale nel verso di \mathcal{A} .

Dopo aver definito una connessione definiamo il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva γ , il cui vettore tangente è $\dot{\gamma}$, come l'unico campo vettoriale $\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(\gamma(t))$ su $\gamma(t)$ tale che:

1. $\mathcal{W}(0) = \mathcal{V}$;
2. $\nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{W} = 0$ su γ ;

Da questo segue immediatamente la definizione di derivata covariante imponendone l'annullarsi per un vettore lungo la curva su cui viene trasportato parallelamente.

$$\frac{D\mathcal{V}}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{V} \quad (\text{A.11})$$

Prendiamo come scelta naturale, su una varietà riemanniana, una connessione lineare (detta connessione di Levi-Civita) tale che sia simmetrica $\lambda_{\mathcal{V}} \mathcal{W} - \lambda_{\mathcal{W}} \mathcal{V} = [\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ e che conservi il prodotto scalare, ovvero, che tale prodotto di due campi vettoriali paralleli sia costante lungo γ . Le componenti della connessione di Riemann, detti simboli di Christoffel, sono date in termini delle derivate della metrica

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}) \quad (\text{A.12})$$

dove $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Possiamo, dunque, scrivere l'equazione (A.11) in un sistema di coordinate locali come:

$$\frac{DV^i}{dt} = \frac{dV^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} V^k \quad (\text{A.13})$$

Da questa equazione definiamo le geodetiche come le curve il cui vettore tangente $\dot{\gamma}$ è sempre trasportato parallelamente. Quindi le geodetiche sono curve per cui vale

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \quad (\text{A.14})$$

o, in un sistema locale di coordinate:

$$\frac{dV^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} V^k = 0 \quad (\text{A.15})$$

Diamo, in ultimo, la definizione di curvatura. Dal punto di vista intuitivo possiamo definire la curvatura riemanniana come una misura di quanto una varietà differisca dall'essere euclidea. Il tensore di curvatura è un tensore del quarto ordine definito come:

$$R(\mathcal{V}, Y) = \nabla_{\mathcal{V}} \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_{\mathcal{V}} - \nabla_{[\mathcal{V}, Y]} \quad (\text{A.16})$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di M . In un sistema di coordinate locali, data una metrica g , il tensore di Riemann (considerato un tensore (1,3)) è definito in maniera univoca da:

$$R^i_{jlk} = \partial_l \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{jl} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml} - \Gamma^m_{jl} \Gamma^i_{mk} \quad (\text{A.17})$$

Bibliografia

- [1]Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*(Perseus Books,Massachussets,1994).
- [2]Jan Awrejcewicz Da Riusz Sendkowski *Geometric Analysis of the dynamics of a double pendulum*(Journal of Mechanics of Materials and Structures volume 2 №8,October 2007)
- [3]Musa H. Ibrahim Saidu, M.Y.Waziri *A simplified Derivation and Analysis of Fourth Order Runge Kutta Method*(International Journal of Computer Applications (0975 -8887)Volume9 - №8,November 2010)
- [4]Detlef Laugwitz *Differential and Riemannian Geometry*(Academic Press ,New York,1965)pp172-173 [5]Lapo Casetti,Marco Pettini,E.G.D.Cohen *Geometric approach to Hamiltonian dynamics and statistical mechanics*,Dicembre 1999)
- [6]Monica Cerruti-Sola,Marco Pettini *Geometric description of chaos in two-degrees-of freedom Hamiltonian systems*(Phys. Rev. E 53:1 (1996),pp 179-188)
- [7]J.Guckenheimer and P.Holmes *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*(Springer-Verlag,Berlin,1983)
- [8]Carl W.Akerof, *The chaotic Motion of a Double Pendulum*(University of Michigan, April 12 2010)
- [9]A.H:Nayfeh and D.T.Mook *Nonlinear Oscillations* (Wiley,New York,1979).
- [10]Manfredo Perdigão do Carmo *Riemannian Geometry*(Birkhäuser,Boston,1992)