

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Modi quasi-normali dei buchi neri

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Matteo Piani

Anno Accademico 2016/2017

*La scienza è una luce
fioca e tremolante nel buio che ci circonda,
ma è la sola che abbiamo.*

Sommario

Con questo lavoro di tesi si vanno a studiare le onde caratteristiche prodotte da un buco nero in risposta ad una piccola perturbazione esterna, i cosiddetti modi quasi-normali. Nel Capitolo 1 vengono introdotte le basi necessarie alla trattazione dell'argomento, come le equazioni di Einstein e la metrica di Schwarzschild. Partendo dall'analisi del moto geodetico di particelle test viene introdotto il concetto di orizzonte degli eventi e buco nero. Il capitolo si chiude con un cenno alla metrica di Kerr e alle altre soluzioni delle equazioni di campo. Nel Capitolo 2 si studierà come risponde un buco nero di Schwarzschild a differenti tipi di perturbazione. In particolare si vedrà come il problema sia sempre riconducibile ad un'equazione d'onda unidimensionale con una barriera di potenziale. Nel Capitolo 3 sono esposti un metodo analitico, uno semi-analitico e uno numerico per calcolare le frequenze dei modi quasi-normali. Il capitolo termina con alcune considerazioni sull'efficacia di tali metodi e il confronto dei risultati per un buco nero di Schwarzschild. Nel Capitolo 4 si stabilisce una connessione tra i modi quasi-normali e le onde gravitazionali prodotte in fase di *ringdown* da un sistema binario di buchi neri. Dall'analisi dell'evento GW150914, il primo rilevato dalla collaborazione LIGO, si procederà al confronto tra i risultati ottenuti con simulazioni numeriche e quelli ricavati con un'approccio perturbativo.

Indice

Introduzione	3
1 Equazioni di Einstein e soluzione di Schwarzschild	5
1.1 Teoria della Relatività Generale	5
1.1.1 Principi fondamentali	5
1.1.2 Limite Newtoniano	7
1.2 Equazioni di Einstein	8
1.3 Soluzione di Schwarzschild	11
1.3.1 Buchi neri ed orizzonte degli eventi	14
1.4 Altre soluzioni	16
2 I modi quasi-normali	19
2.1 Dai modi normali ai modi quasi-normali	19
2.2 Teoria perturbativa dei buchi neri	20
2.3 Perturbazione della metrica di Schwarzschild	21
2.3.1 Separazione delle variabili	22
2.3.2 Gauge di Regge-Wheeler	23
2.3.3 Equazioni linearizzate per perturbazioni assiali e polari	25
2.4 Condizioni al contorno	27
3 Metodi di calcolo dei QNM	28
3.1 Metodo WKB	28
3.2 Approssimazione con potenziale di Poschl-Teller	33
3.3 Metodo delle frazioni continue	35
3.4 Metodi a confronto	37

4	Modi Quasi-normali e Onde Gravitazionali	39
4.1	Onde gravitazionali	39
4.1.1	Evento GW150914	40
4.1.2	Approccio perturbativo	41
	Bibliografia	45

Introduzione

Il termine *buco nero* viene coniato da J. A. Wheeler per indicare una regione dello spazio-tempo con un campo gravitazionale tanto intenso da non permettere nemmeno alla luce di fuggire. I buchi neri sono tra gli oggetti più affascinanti della Teoria della Relatività Generale, tuttavia data anche la difficoltà sperimentale nel rilevarli sono stati considerati per lungo tempo semplici artifici matematici. Una delle caratteristiche più particolari è la necessità di soli tre parametri per spiegarne la struttura: massa, carica elettrica e momento angolare. Questa semplicità è solo apparente, perchè un tentativo di studio della loro dinamica è ostacolato dalla manifesta non linearità delle equazioni di Einstein. È per questo che negli anni '50 si avvia il loro studio in ambito perturbativo, grazie all'iniziativa di Tullio Regge e Wheeler. L'intento iniziale era studiare le onde caratteristiche prodotte in presenza di una perturbazione da parte di un campo esterno. La dissipazione dovuta alla presenza di un *orizzonte degli eventi* fa sì che non sia possibile descrivere queste onde in termini di *modi normali*. Parleremo in questo caso di *modi quasi-normali*, per cui le frequenze saranno numeri complessi. L'interesse iniziale per il calcolo di queste frequenze era la possibilità di determinare la stabilità o l'instabilità di tali oggetti. Qualora le onde prodotte fossero caratterizzate da un aumento esponenziale nel tempo il buco nero risulterebbe essere instabile, e quindi sarebbe al più una fase transiente dell'evoluzione di una stella. Al giorno d'oggi l'interesse per i modi quasi-normali è dovuto alla possibilità di mettere questi ultimi in relazione con le onde gravitazionali prodotte da un sistema binario di buchi neri. Grazie alla recente scoperta della collaborazione LIGO, potremo prendere come esempio l'evento GW150914 e vedere come la fase denominata *ringdown* sia descrivibile in termini di modi quasi-normali.

Notazione

Nel corso dell trattazione utilizzeremo un sistema di unità di misura in cui poniamo la velocità della luce e la costante di gravitazione universale $c = G = 1$. Inoltre utilizzeremo la seguente notazione:

- Dato un numero complesso z indicheremo la sua parte reale con $\Re(z)$ e la sua parte immaginaria con $\Im(z)$;
- Se non indicato diversamente gli indici greci μ, ν, λ, \dots assumeranno i valori $0, 1, 2, 3$, mentre quelli latini i, j, k, \dots , i valori $1, 2, 3$;
- Adottiamo la convenzione di Einstein, per cui ogni qualvolta sono presenti due indici uguali consecutivi è sottintesa la sommatoria su tutti i possibili valori;
- Le quantità tensoriali sono indicate con la notazione $T^{\mu\nu}_{\lambda}$, dove gli indici “in alto” sono di tipo vettoriale, e quelli “in basso” di tipo duale;
- Salvo diversa indicazione indicheremo con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ la metrica di Minkowsky e con $g_{\mu\nu}$ un generico tensore metrico con segnatura $(-+++)$.
- Per indicare l'operazione di derivata covariante utilizzeremo le due notazioni equivalenti:

$$\nabla_{\mu} v^{\nu} = v^{\nu}_{;\mu} = \partial_{\mu} v^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} v^{\nu}.$$

- Nonostante non siano propriamente dei tensori indichiamo i *simboli di Christoffel* con la notazione tensoriale $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Capitolo 1

Equazioni di Einstein e soluzione di Schwarzschild

In questo capitolo introduciamo i concetti fondamentali della teoria della relatività generale. Dopo aver ricavato le equazioni di Einstein ci soffermeremo sulla soluzione di Schwarzschild, introducendo il concetto di buco nero. Il capitolo si conclude con una breve discussione sulle altre soluzioni delle equazioni di Einstein.

1.1 Teoria della Relatività Generale

1.1.1 Principi fondamentali

La teoria della relatività generale nasce dalla necessità di formulare un modello teorico della gravitazione compatibile con la relatività ristretta. L'idea di fondo è che la gravità sia una manifestazione della struttura geometrica dello spazio-tempo. Per affrontare l'argomento in maniera formale dobbiamo partire da quelli che sono i principi alla base della teoria.

Principio di relatività generale. *Le leggi della fisica sono le stesse per tutti gli osservatori.*

Assumendo che ad ogni osservatore possa essere associato un sistema di riferimento, questo principio afferma l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento, in netto disaccordo con la relatività galileiana e la relatività ristretta, per cui esistono degli osservatori privilegiati, quelli inerziali.

Principio di equivalenza. *La massa gravitazionale di un oggetto fisico è uguale alla sua massa inerziale (quando quest'ultima è non nulla).*

Ne consegue che un osservatore in *caduta libera* non può effettuare nessuna misura che riveli se un oggetto con carica nulla (rispetto alla forza elettromagnetica e alle forze nucleari) sia soggetto ad un'accelerazione gravitazionale. Quanto appena detto è valido solo per oggetti puntiformi, per cui si può assumere che, in caduta libera, un sistema di riferimento inerziale possa essere definito in un intorno sufficientemente piccolo U_P di ogni punto P dello spazio tempo, e che le leggi della relatività ristretta siano un'approssimazione sufficientemente buona delle leggi reali in U_P . Per illustrare questo principio Einstein ideò il celebre esperimento mentale dell'ascensore.

Dal punto di vista della geometria differenziale ciò equivale ad affermare che la metrica si riduce (localmente) a quella di Minkowsky, i cui vettori di Killing possono essere utilizzati per definire un sistema di riferimento in cui le simmetrie della relatività ristretta (del gruppo di Lorentz $SO(3,1)$) sono valide nel punto P e in modo approssimato in tutto U_P .

Principio di covarianza generale. *Le leggi della fisica in un qualsiasi sistema di riferimento, sono ottenute dalle leggi della Relatività Ristretta, sostituendo le quantità tensoriali del gruppo di Lorentz con quantità tensoriali della varietà dello spazio-tempo.*

Ciò significa che nel sistema di riferimento inerziale le leggi della fisica in un punto P sono date dalla Relatività Ristretta, tenendo conto che:

- gli indici dei tensori del gruppo di Lorentz devono essere interpretati come le componenti di tensori rispetto ad un generico cambio di coordinate;
- la metrica di Minkowsky deve essere rimpiazzata da un generico tensore metrico con la stessa segnatura $(-, +, +, +)$

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad ;$$

- le derivate parziali devono essere sostituite dalle derivate covarianti

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu.$$

1.1.2 Limite Newtoniano

Una volta attestato che l'osservatore in caduta libera è inerziale, si può affermare che la metrica (in un intorno sufficientemente piccolo di ogni punto P della sua traiettoria nello spazio-tempo) è quella di Minkowsky in forma canonica.

Sia $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ la 4-velocità di una particella test soggetta alla sola forza gravitazionale. In un sistema di riferimento in caduta libera questa si muoverà lungo una geodetica

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\mu \nabla_\mu u^\alpha, \quad (1.1)$$

dove $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sim g_{\mu\nu,\beta} = 0$ nel sistema di riferimento dell'osservatore in caduta libera. Per un altro osservatore i simboli di Christoffel non saranno nulli in P, e questo suggerisce che la metrica $g_{\mu\nu}$ può essere considerata come un potenziale per l'interazione gravitazionale (analogamente al 4-vettore A^μ per il campo elettromagnetico). Quanto appena detto può essere verificato considerando il limite non-relativistico e il limite di campo debole. Per esprimere matematicamente questi due limiti si può introdurre un parametro adimensionale $0 < \varepsilon \leq 1$ in modo che:

- la velocità spaziale della particella test si possa scrivere come $\vec{u} = \varepsilon \vec{v}$, con $v < c = 1$ e $u \ll c$;
- la metrica abbia la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

con la condizione che sia stazionaria: $g_{\mu\nu,0} = 0$.

Sviluppando in serie di potenze di ε la 4-velocità si ottiene:

$$u^\mu = (1 + O(\varepsilon^2), \varepsilon \vec{v} + O(\varepsilon^2)) = (1, \vec{0}) + \varepsilon(0, \vec{v}) + O(\varepsilon^2), \quad (1.3)$$

così che:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \varepsilon \left(0, \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (1.4)$$

e i simboli di Christoffel diventano

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = \frac{\varepsilon}{2} g^{\alpha\beta} (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove le derivate della metrica rispetto al tempo sono nulle. Ne consegue che le componenti non banali dell'equazione della geodetica (all'ordine ε) sono date da¹

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \simeq \varepsilon \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \delta_0^\mu \delta_0^\nu \simeq \varepsilon \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00,i} \right), \quad (1.6)$$

dove si è tenuto conto che $u^0 \gg u^i$ (nel limite $\varepsilon v \ll 1$), ed essendo $\eta^{\alpha\beta}$ in forma diagonale si ha

$$\Gamma_{00}^i \simeq \frac{\varepsilon}{2} \eta^{ii} (h_{0i,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}) = -\frac{\varepsilon}{2} \eta^{ii} h_{00,i}. \quad (1.7)$$

Ponendo $\varepsilon = 1$ e identificando il potenziale gravitazionale con

$$\phi = -\frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00} \simeq -\frac{1}{2} h_{00}, \quad (1.8)$$

si recupera l'equazione per l'accelerazione di una particella in un campo gravitazionale:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (1.9)$$

Poiché in meccanica classica il potenziale gravitazionale ϕ soddisfa l'equazione di Poisson, ci aspettiamo che nel limite di campo debole valga

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \implies \nabla^2 h_{00} = -8\pi\rho, \quad (1.10)$$

dove $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ è l'operatore di Laplace ($i, j \neq 0$).

1.2 Equazioni di Einstein

L'ultimo passo del procedimento è stabilire quali siano le sorgenti della gravità e come determinare la gravità a partire dalle sorgenti. Ciò equivale a determinare la metrica, poiché ha un ruolo analogo al potenziale (i simboli di Christoffel compaiono nell'equazione della geodetica). Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è un tensore di tipo (0,2), simmetrico, con al più 10 componenti indipendenti, per le quali si vorrebbe avere un'equazione del secondo ordine alle derivate parziali. Un tensore ottenuto solamente dalle derivate parziali al secondo ordine di $g_{\mu\nu}$ è il tensore di Riemann, la cui forma generale è

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} (g_{il;jk} - g_{ik;jl} + g_{jk;il} - g_{jl;ik}). \quad (1.11)$$

¹Nessuna somma sull'indice i .

Un possibile candidato è il tensore di Einstein, un tensore di tipo (0,2) dato dalla contrazione del tensore di Riemann,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il *tensore di Ricci*, ed è dato dalla contrazione del tensore di Riemann

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu}. \quad (1.13)$$

Il tensore di Einstein è simmetrico, e contiene quindi 10 componenti indipendenti. Vale inoltre l'*identità di Bianchi*

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = \nabla_{\mu}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}) = 0, \quad (1.14)$$

per cui $G^{\mu\nu}$ ha divergenza nulla, e il numero di componenti indipendenti è ridotto da 10 a 6. Affinché il tensore di Einstein sia il membro sinistro dell'equazione per determinare la metrica, è necessario che il membro destro sia anch'esso un tensore (0,2) simmetrico, a divergenza nulla, e sia dipendente dalla distribuzione di materia del sistema. Un tensore con queste caratteristiche è il *tensore energia-impulso* $T_{\mu\nu}$, la cui componente T_{00} è data dalla densità di massa del sistema, $T_{00} = \rho$. L'equazione cercata deve quindi avere la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

dove k è una costante con le dimensioni $[k] = L/M$, e può essere determinata imponendo la compatibilità con il limite Newtoniano. Contraendo gli indici ad entrambi i membri si ottiene

$$R^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu}_{\mu}R = R - \frac{1}{2}4R = -R \Rightarrow R = -kT, \quad (1.16)$$

che ci permette di riscrivere l'equazione (1.15) nella forma

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}). \quad (1.17)$$

Nel limite di campo debole, indipendente dal tempo, e velocità non relativistiche, $\rho = T_{00}$ è molto più grande degli altri termini del tensore energia impulso. Questa condizione permette di analizzare l'equazione solo per $\mu = \nu = 0$. La forma che la metrica assume in queste condizioni è stata mostrata precedentemente:

$$g_{00} = -1 + h_{00} \quad e \quad g^{00} = -1 - h_{00}. \quad (1.18)$$

La traccia del tensore energia-impulso all'ordine più basso è

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} \Rightarrow R_{00} = \frac{1}{2}kT_{00}. \quad (1.19)$$

Per trovare l'espressione esplicita in funzione della metrica, bisogna calcolare $R_{00} = R^\mu_{\ 0\mu 0}$, dove

$$R^i_{\ 0j0} = \Gamma^i_{00,j} - \Gamma^i_{j0,0} + \Gamma^i_{j\lambda}\Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^i_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{j0} \quad (i, j \neq 0). \quad (1.20)$$

Il secondo termine è una derivata rispetto al tempo, quindi nulla nel caso statico, mentre il terzo e quarto termine sono di ordine $O(\Gamma^2)$ ed essendo Γ al primo ordine nella perturbazione della metrica, possono essere trascurati. Si ottiene quindi $R^i_{\ 0j0} = \Gamma^i_{00,j}$ da cui si ricava

$$R_{00} = R^i_{\ 0i0} = \partial_i \left[\frac{1}{2}g^{ij}(g_{j0,0} + g_{0j,0} - g_{00,j}) \right] = -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00};$$

$$\nabla^2 h_{00} = -kT_{00} = -k\rho. \quad (1.21)$$

È stato mostrato precedentemente che per la compatibilità con l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi\rho \implies k = 8\pi. \quad (1.22)$$

Si ottiene quindi l'equazione di campo di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

Questo è un sistema di 10 equazioni non lineari (di cui, per l'identità di Bianchi, solo 6 sono indipendenti), per cui non vale il principio di sovrapposizione, contrariamente alla meccanica newtoniana. Nella formula inizialmente proposta da Einstein era presente anche un termine costante Λ , detto *costante cosmologica*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

Tale termine fu introdotto per far sì che l'equazione avesse una soluzione compatibile con un universo statico. Negli anni successivi le osservazioni di Hubble sull'espansione dell'universo spinsero Einstein a rimuovere Λ dall'equazione. Le teorie odierne necessitano di Λ per spiegare l'espansione accelerata dell'universo.

Nel resto della trattazione si considera sempre $\Lambda = 0$.

Una volta ottenute le equazioni di Einstein è naturale domandarsi se esse possano essere derivate a partire da un principio variazionale. Fu David Hilbert² a suggerire un'azione, oggi denominata di *Hilbert-Einstein*, la cui variazione generasse il primo membro delle equazioni di Einstein

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int R\sqrt{-g} d^4x, \quad (1.25)$$

dove g è il determinante della metrica, e l'integrale è calcolato sull'intero spazio-tempo. Per una trattazione approfondita vedi [3].

1.3 Soluzione di Schwarzschild

La prima soluzione alle equazioni di Einstein fu trovata nel 1916 dal fisico tedesco Karl Schwarzschild. Questa soluzione descrive lo spazio-tempo esterno ad una sorgente stazionaria, a simmetria sferica, elettricamente neutra e non rotante. Poiché siamo interessati ad una soluzione nella regione esterna alla sorgente, cioè nel vuoto, il tensore energia impulso è identicamente nullo, $T_{\mu\nu} = 0$, da cui segue

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (1.26)$$

Prendendo la traccia dell'equazione (1.26) precedente si ottiene $R = 0$, per cui le equazioni di Einstein nel vuoto si riducono a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.27)$$

Vediamo ora come ricavare le proprietà dello spazio-tempo partendo da quelle della sorgente:

- **spazio-tempo stazionario:** uno spazio-tempo è detto *stazionario* se esiste un vettore di Killing di tipo tempo \vec{K}_t ed un'opportuna coordinata t tali che $\vec{K}_t = \frac{\partial}{\partial t}$;
- **spazio-tempo statico:** uno spazio-tempo è detto *statico* se è stazionario ed esiste un'ipersuperficie Σ di tipo spazio ortogonale alle orbite di \vec{K}_t ;

²Hilbert ricavò le equazioni di campo qualche giorno prima di Einstein.

- **spazio-tempo a simmetria sferica:** uno spazio-tempo è detto *sfericamente simmetrico* se il gruppo generato dai suoi vettori di Killing contiene un sottogruppo isomorfo a $SO(3)$, e se le orbite di questo sottogruppo sono delle 2-sfere.

Esiste inoltre un teorema, detto *teorema di Birkhoff* [1], il quale afferma che nel vuoto tutte le soluzioni a simmetria sferica delle equazioni di Einstein sono statiche. Alla luce di quanto appena detto possiamo utilizzare una forma analoga alle coordinate sferiche per descrivere la metrica:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \\ &= -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \end{aligned} \quad (1.28)$$

dove la coordinata radiale è stata riscalata in modo da ottenere $C(r) = r^2$. Questo riscalamento è sempre possibile localmente, ma bisogna tener conto della possibilità che tale operazione cambi il dominio di r se la trasformazione è singolare in alcuni punti. La nuova coordinata r è detta raggio areolare, in quanto l'area di una 2-sfera di raggio r è $A = 4\pi r^2$. Si può notare come la lunghezza propria R del raggio di tale sfera non sia data dalla coordinata r ,

$$R(r) = \int_0^r \sqrt{h(x)} dx. \quad (1.29)$$

Inserendo la metrica (1.28) nell'equazione (1.27) si ottiene una coppia di equazioni indipendenti:

$$f(r) = 1 - \frac{2k}{r}, \quad h(r) = \frac{1}{f(r)}, \quad (1.30)$$

dove $k \geq 0$ è una costante delle dimensioni di una lunghezza, e può essere determinata imponendo che le equazioni di Einstein, nel limite di campo debole, siano compatibili con la legge di gravitazione di Newton. Si giunge così al risultato³ $k = GM = M$, dove M è la massa totale della sorgente misurata da un osservatore lontano, e la metrica assume la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.31)$$

nota come *metrica di Schwarzschild*.

Le coordinate angolari presentano lo stesso dominio e significato fisico che avrebbero

³Stiamo utilizzando la convenzione $G=1$.

nello spazio-tempo di Minkowsky. La metrica di Schwarzschild gode delle seguenti proprietà:

- È asintoticamente piatta, infatti

$$r \rightarrow \infty \implies g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}, \quad (1.32)$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica di Minkowsky in coordinate sferiche;

- Nel limite $M \rightarrow 0$ la metrica si riduce a quella di Minkowsky in coordinate sferiche;
- La soluzione trovata è unica, nel senso che qualunque altra soluzione a simmetria sferica della (1.27) è isometrica alla soluzione di Schwarzschild;
- La metrica di Schwarzschild presenta due singolarità, in $r = 0$ e $r = 2M \equiv r_s$, dove r_s è noto come *raggio di Schwarzschild*.

Per determinare la natura delle due singolarità introduciamo lo scalare di Kretschmann, che si può derivare direttamente dal tensore di Riemann, e per la metrica di Schwarzschild è dato da

$$K = R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12r_s^2}{r^6}. \quad (1.33)$$

Notiamo che lo scalare di Kretschmann non è singolare per $r = r_s$, ma lo è per $r = 0$. Ciò implica che la singolarità in $r = 0$ è una singolarità fisica, mentre quella in r_s è dovuta alla nostra particolare scelta di coordinate⁴. Per eliminare la singolarità in r_s si possono utilizzare le coordinate di Kruskal-Szekeres.

Nelle coordinate di Schwarzschild la coordinata radiale è propriamente definita per $r > r_s$, e la lunghezza propria del raggio di una sfera di superficie $4\pi r^2$ è data da (vedi figura 1.1)

$$\begin{aligned} R(r) &= \int_0^{r_s} \frac{dx}{\sqrt{\frac{r_s}{x} - 1}} + \int_{r_s}^r \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{x}}} = \\ &= r\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{r_s}{2} \ln \left[2\frac{r}{r_s} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Notiamo inoltre che la coordinata temporale può essere interpretata come il tempo proprio misurato da un osservatore lontano.

⁴Il modo corretto di indicare la metrica (1.31) sarebbe *metrica di Schwarzschild in coordinate di Schwarzschild*.

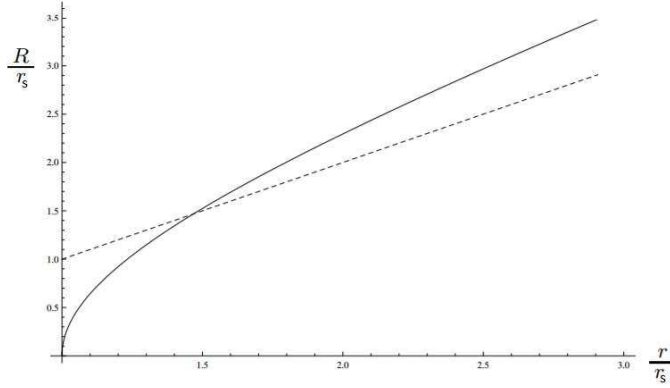


Figura 1.1: Raggio proprio in funzione del raggio areolare in unità di r_s .

1.3.1 Buchi neri ed orizzonte degli eventi

La metrica (1.31) non contiene nessun informazione circa le dimensioni della sorgente. Nel caso in cui la sorgente abbia un raggio maggiore di r_s non sorgono problemi, in quanto la soluzione di Schwarzschild è valida solo nel vuoto, e la metrica avrà una forma diversa quando $T_{\mu\nu} \neq 0$. Prendendo invece il caso in cui la massa della sorgente sia confinata entro un raggio minore di r_s la questione si complica. Per cercare di capire cosa succede in prossimità del raggio di Schwarzschild studiamo le geodetiche radiali. Scriviamo la Lagrangiana di una particella test di massa $m = 1$ in caduta lungo una geodetica radiale

$$2\mathcal{L} = -g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 1 \quad (1.35)$$

dove abbiamo posto per comodità⁵: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$, $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$, e abbiamo usato la condizione di mass-shell $\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu = -m^2$. Poiché la (1.35) non dipende da t abbiamo un integrale primo del moto dato dalla relazione

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}, \quad (1.36)$$

⁵Il \cdot indica la derivata rispetto al tempo proprio τ .

che messa a sistema con la (1.35) dá

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 = \frac{r}{r_s - r + rE^2}, \quad (1.37)$$

da cui si deduce che la particella test attraversa la superficie con $r = r_s$ in un tempo proprio finito. Per quanto riguarda la coordinata t si ottiene

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} \propto \frac{1}{r - r_s}. \quad (1.38)$$

L'equazione (1.38) ci dice che un osservatore inerziale posto a $r_o \gg r_s$ vedrebbe che una particella impiega un tempo $t \rightarrow \infty$ per raggiungere il raggio di Schwarzschild (vedi figura 1.2). Per capire meglio cosa succede in prossimità di r_s consideriamo il fenomeno del red-shift gravitazionale [2]. Supponiamo che un osservatore statico posto a distanza $r_o \gg r_s$ lasci cadere una sonda, con velocità iniziale nulla, verso il centro della sorgente. Questa sonda emette un segnale la cui frequenza, misurata in un sistema di riferimento comovente, è ω_s . Quando la sorgente si trova ad $r = r_1$ l'osservatore misura una frequenza

$$\omega_o = \omega_s \sqrt{\frac{1 - r_s/r_1}{1 - r_s/r_o}} \simeq \omega_s \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_1}} \quad (1.39)$$

essendo $r_o \gg r_s$. Notiamo che quando $r_1 \rightarrow r_s$ l'osservatore in r_o misura una frequenza sempre minore, e per $r_1 = r_s$ non riceve più nessun segnale. Questo comportamento permette di interpretare la sfera con $r = r_s$ come un *orizzonte degli eventi*. Studiando i coni-luce in prossimità di r_s si scopre che per $r > r_s$ esistono sia il cono entrante che quello uscente, dove il primo risulta essere contratto, e il secondo dilatato. Per $r = r_s$ il cono-luce uscente è intrappolato sulla superficie $r = r_s$, mentre per $r < r_s$ anche il cono-luce uscente è contratto. Da quanto appena detto deduciamo che nessun segnale fisico, nemmeno la luce, può uscire dall'orizzonte degli eventi. Questo comportamento spinse il fisico J. A. Wheeler a coniare il termine *buco nero* per la regione interna al raggio di Schwarzschild.

Esistono diversi tipi di buchi neri previsti dalla teoria, a seconda della metriche ad essi associate. Il fattore comune a tutte queste soluzioni è la presenza di almeno un orizzonte degli eventi. Inoltre le metriche di corpi massivi e rotanti prevedono, contrariamente a quelle statiche, un effetto di trascinamento del sistema di riferimento, così che lo spazio-tempo appare come trascinato dal momento angolare della sorgente.

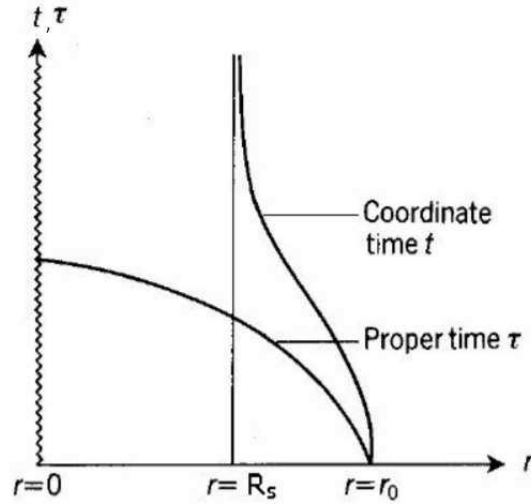


Figura 1.2: Tempo proprio τ e coordinata t per una particella in caduta radiale.

1.4 Altre soluzioni

La soluzione di Schwarzschild ricopre un ruolo fondamentale per lo sviluppo della teoria, ma risulta essere insufficiente per la descrizione di casi di interesse astrofisico. Nell'analisi di una situazione più realistica bisogna tener conto dell'eventuale momento angolare posseduto dalla sorgente, o di una sua carica elettrica non nulla.

In tabella 1.1 sono riportati i nomi delle soluzioni nei casi con carica elettrica $Q \neq 0$ e momento angolare $J \neq 0$.

È convenzione aggiungere la dicitura *de-Sitter* o *anti de-Sitter* nel caso le soluzioni siano riferite alle equazioni di Einstein con costante cosmologica $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$ rispettivamente.

Anche le altre metriche ammettono l'esistenza di buchi neri, per questo quando si indica un buco nero bisogna aggiungere quale metrica si sta utilizzando, e.g. buco nero di Schwarzschild, buco nero di Kerr, etc. Quando nel capitolo 4 andremo a studiare le onde gravitazionali prodotte da un sistema binario di buchi neri, non potremo utilizzare la metrica di Schwarzschild, poiché il sistema possiede un momento angolare non nullo.

	$Q \neq 0$	$J \neq 0$
Schwarzschild	x	x
Reissner-Nordström	✓	x
Kerr	x	✓
Kerr-Newman	✓	✓

Tabella 1.1: In tabella sono riportate le diverse soluzioni delle equazioni di Einstein. Ulteriori dettagli su queste soluzioni sono riportati in [2]

A tal proposito introduciamo la metrica di Kerr, espressa nelle coordinate *quasi-sferoidali* di Boyer-Lindquist:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \\
 & + \Sigma d\theta^2 + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2,
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

con

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \tag{1.41}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr. \tag{1.42}$$

Nel limite $a \rightarrow 0$ la metrica di Kerr tende a quella di Schwarzschild, permettendo di identificare il parametro M con la massa della sorgente. Studiando la soluzione in regime di campo debole è possibile identificare il parametro a con il momento angolare per unità di massa $\frac{J}{M}$ misurato da un osservatore lontano ($r \rightarrow \infty$). La metrica di Kerr presenta le seguenti proprietà:

- È stazionaria: non dipende esplicitamente da t ;
- È a simmetria assiale: non dipende esplicitamente da φ ;
- Non è statica: non è invariante sotto inversione temporale $t \rightarrow -t$;
- È invariante per inversione simultanea delle variabili t e φ ;
- Nel limite $a \rightarrow 0$ si riduce alla metrica di Schwarzschild;
- È asintoticamente piatta.

Un buco nero di kerr presenta una singolarità in $\Sigma = 0$, per cui non si ha più un solo punto singolare, come nel caso di Schwarzschild, ma la singolarità è localizzata sull'anello di raggio a che giace sul piano equatoriale. La metrica presenta due superfici su cui è singolare⁶, in $r_{int} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2}}{2}$, e corrispondono a due orizzonti degli eventi. Per maggiori dettagli si rimanda a [2].

⁶Sono singolarità dovute alle coordinate, come nel caso di Schwarzschild.

Capitolo 2

I modi quasi-normali

2.1 Dai modi normali ai modi quasi-normali

Nello studio di sistemi classici lineari e oscillanti con particolari condizioni al contorno, come corde vincolate agli estremi o campi elettromagnetici in una cavità, svolgono un ruolo fondamentale i cosiddetti modi normali (NM), soluzioni periodiche delle equazioni del moto (per un generico campo complesso ψ) la cui forma è

$$\psi_n(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega_n t} \phi_n(\mathbf{x}) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

con ω_n reale. In generale vi sono infinite soluzioni di questo tipo, e formano un insieme completo, per cui una generica soluzione si può scrivere come combinazione lineare di modi normali:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i\omega_n t} \phi_n(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

La possibilità di praticare un'espansione in modi normali è una conseguenza della conservazione dell'energia. In problemi fisici più realistici, dove entrano in gioco effetti dissipativi, questo non è più possibile. In questo caso le frequenze saranno numeri complessi che indicheremo come $\omega = \omega_{Re} + i\omega_{Im}$, dove ω_{Re} rappresenta la frequenza di oscillazione, mentre ω_{Im} può rappresentare un fattore di smorzamento ($\omega_{Im} < 0$) o un aumento esponenziale nel tempo ($\omega_{Im} > 0$). Si parla in questo caso di modi quasi-normali (QNM). Nonostante la differenza possa sembrare puramente formale i QNM generalmente non formano un insieme completo [9], per cui una generica soluzione non può essere rappresentata come combinazione lineare di QNM.

2.2 Teoria perturbativa dei buchi neri

I buchi neri isolati sono oggetti relativamente semplici da trattare, poiché sono necessari solo pochi parametri per la loro descrizione: massa, carica elettrica e momento angolare. In una situazione realistica un buco nero non può essere isolato, ma si troverà sempre in uno stato perturbato; per questo qualora si voglia analizzarne la stabilità o l'emissione di onde gravitazionali è necessario uno studio in ambito perturbativo. Lo spazio-tempo di un buco nero può essere perturbato in due modi: aggiungendo dei campi esterni, o perturbando direttamente la metrica del buco nero, scrivendo

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{BG} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

dove il primo termine è detto *background*, ed è la metrica dello spazio-tempo del buco nero imperturbato, mentre il secondo termine è la *perturbazione*, che consideriamo essere molto più piccola del background $\delta g_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}^{BG}$. Vediamo a titolo di esempio cosa succede aggiungendo un campo scalare¹ ψ di massa m nello spazio tempo di Schwarzschild. Se lo spazio-tempo fosse piatto un campo scalare dovrebbe rispettare l'equazione di Klein-Gordon, per cui applicando il *principio di covarianza generale* otteniamo²

$$(\nabla_\nu \nabla^\nu - \mu^2)\psi = 0, \quad (2.4)$$

da cui segue

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (g^{\lambda\nu} \sqrt{-g} \partial_\lambda \psi) - \mu^2 \psi = 0. \quad (2.5)$$

Data la simmetria sferica della metrica di Schwarzschild possiamo scrivere

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} \sum_{l,m} \frac{\phi(r)}{r} Y_m^l(\theta, \varphi), \quad (2.6)$$

dove Y_m^l sono le armoniche sferiche, e abbiamo fissato frequenza ω . Introducendo la *coordinata tartaruga*

$$x = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad (2.7)$$

che mappa l'intervallo $[r_s, +\infty] \rightarrow [-\infty, +\infty]$, e il potenziale efficace

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M(1-s^2)}{r^3}\right), \quad (2.8)$$

¹Con spin $s=0$.

² $\mu = \frac{mc}{\hbar}$.

giungiamo all'equazione

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + (\omega^2 - V(x))\phi = 0. \quad (2.9)$$

Nell'espressione del potenziale $V(r)$ abbiamo lasciato espresso lo spin s , poiché indipendentemente dallo spin del campo utilizzato per la perturbazione, ci si può sempre ricondurre ad un'equazione del tipo (2.9), cambiando solamente il potenziale efficace.

2.3 Perturbazione della metrica di Schwarzschild

Vediamo ora come derivare le equazioni che governano le perturbazioni gravitazionali di un buco nero di Schwarzschild, e come queste si possano ricondurre ad un'equazione d'onda unidimensionale. L'approccio sarà lo stesso utilizzato da Regge e Wheeler [4], tenendo conto di alcune correzioni successive dovute a Edelman e Vishveshwara [5]. Consideriamo una metrica $g_{\mu\nu}$ data dalla somma di un background $\bar{g}_{\mu\nu}$ e di una piccola perturbazione $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

dove $h_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico di rango 2, con la condizione $|h_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}|$, mentre la metrica di background può essere una qualsiasi soluzione delle equazioni di Einstein, nel nostro caso la metrica di Schwarzschild. Procediamo ora calcolando il tensore di Ricci al primo ordine in h . A tal fine ogni quantità viene approssimata all'ordine lineare in h , utilizzando la metrica di background per alzare ed abbassare gli indici di quantità al primo ordine, tipo:

$$h^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}^{\beta\nu}h_{\alpha\beta}, \quad (2.11)$$

da cui segue,

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2). \quad (2.12)$$

Allo stesso modo si utilizzeranno i simboli di Christoffel imperturbati nelle derivate covarianti di quantità perturbate. I simboli di Christoffel perturbati sono dati da

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = \\ &= \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + O(h^2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\lambda\alpha}(h_{\alpha\nu;\mu} + h_{\alpha\mu;\nu} - h_{\mu\nu;\alpha}). \quad (2.14)$$

Dall'ultima equazione si può notare che $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, contrariamente a $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, è un tensore. Infine si ottiene il tensore di Ricci perturbato

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta\Gamma_{\mu\alpha;\nu}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\delta\bar{\Gamma}_{\nu\beta}^{\alpha} + \delta\bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\beta}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}\delta\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\alpha} - \delta\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \\ &= \delta\Gamma_{\mu\alpha;\nu}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nel vuoto le equazioni di campo perturbate si riducono a

$$\delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

2.3.1 Separazione delle variabili

Data la simmetria sferica del background è naturale assumere di poter avere equazioni separate per le variabili angolari θ e φ , e le variabili t ed r . Un approccio intuitivo sarebbe espandere ogni elemento di $h_{\mu\nu}$ in armoniche sferiche, ma non tutti gli elementi di h si comportano come scalari sotto rotazione, infatti:

- h_{tt} , h_{tr} e h_{rr} trasformano come scalari sotto rotazione;
- $(h_{t\theta}, h_{t\varphi})$ e $(h_{r\theta}, h_{r\varphi})$ trasformano come 2-vettori sotto rotazione;
- $h_{\theta\theta}$, $h_{\theta\varphi}$ e $h_{\varphi\varphi}$ trasformano come le componenti di un tensore di rango 2.

Le quantità scalari corrispondono alle ben note armoniche sferiche, da cui si possono ottenere armoniche vettoriali e tensoriali nei seguenti modi:

- $(V_{lm}^1)_a = \partial_a Y_m^l(\theta, \varphi)$;
- $(V_{lm}^2)_a = \gamma^{bc}\epsilon_{ac}\partial_b Y_m^l(\theta, \varphi)$;
- $(T_{lm}^1)_{ab} = (Y_m^l)_{;ab}$;
- $(T_{lm}^2)_{ab} = \gamma_{ab} Y_m^l$;
- $(T_{lm}^3)_{ab} = \frac{1}{2}[\epsilon_a^c (Y_m^l)_{;cb} + \epsilon_b^c (Y_m^l)_{;ca}]$.

Gli indici a, b e c assumono i valori $2(\theta)$ e $3(\varphi)$; γ è la metrica sulla 2-sfera di raggio unitario, ed $\epsilon = \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

I vettori e tensori appena introdotti possono essere suddivisi a seconda del loro comportamento sotto trasformazioni di parità $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$. Essi vengono detti *pari* o *dispari* se trasformano con un fattore moltiplicativo $(-1)^l$ o $(-1)^{l+1}$. In particolare V_{lm}^2 e T_{lm}^3 sono *dispari*, mentre gli altri sono *pari*. Dato che la terminologia appena utilizzata è in contrasto con la comune definizione di funzione pari/dispari, conviene utilizzare rispettivamente i termini *polare/assiale*, introdotti da Chandrasekhar. Poiché la metrica imperturbata è invariante sotto parità, ci si aspetta che nelle equazioni della perturbazione i contributi assiali e polari non interagiscano tra loro. Ne risulta che la forma generale della perturbazione è

$$h_{\mu\nu} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [(h_{\mu\nu}^{lm})^{(a)} + h_{\mu\nu}^{lm(p)}], \quad (2.17)$$

dove gli apici (a) e (p) stanno per assiale e polare. La forma di una generica perturbazione assiale, con m ed l fissati è

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0(t, r) \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_m^l & h_0(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_m^l \\ 0 & 0 & -h_1(t, r) \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_m^l & h_1(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_m^l \\ * & * & \frac{1}{2} h_2(t, r) \frac{1}{\sin \theta} X_m^l & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin \theta W_m^l \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin \theta X_m^l \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

dove il simbolo $*$ indica che la componente è simmetrica, e le funzioni X_m^l e W_m^l sono

$$X_m^l(\theta, \varphi) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_m^l - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_m^l \right), \quad (2.19)$$

$$W_m^l(\theta, \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Y_m^l - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_m^l - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y_m^l \right). \quad (2.20)$$

Le perturbazioni polari hanno una forma più complessa, e la trattazione matematica è assai più lunga e laboriosa, per cui ci limiteremo alle perturbazioni assiali, giustificando questa scelta in un secondo momento.

2.3.2 Gauge di Regge-Wheeler

Per semplificare l'espressione generale delle perturbazioni assiali si sfrutta l'invarianza delle equazioni di Einstein per trasformazioni di gauge locali. Nel momento in cui

scegliamo la metrica di Schwarzschild nelle coordinate di Schwarzschild il gauge del background è fissato. Tuttavia una volta che il background viene perturbato, possiamo cambiare il gauge al primo ordine in h , in modo che la trasformazione agisca solo sulla perturbazione, ma non sulla metrica di background. Data la trasformazione di gauge infinitesima

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \eta^{\mu} , \quad (2.21)$$

con η vettore di gauge al primo ordine in h , la metrica perturbata diventa

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= g_{\mu\nu}(x) + \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}\eta^{\alpha} = \bar{g}_{\mu\nu}(x') + h_{\mu\nu} + \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu} = \\ &= \bar{g}_{\mu\nu}(x') + h'_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Il gauge deve essere scelto in modo tale che la trasformazione conservi la decomposizione in armoniche sferiche tensoriali e la separazione in contributi assiali e polari, per cui serve un vettore di gauge polare e uno assiale. Il vettore di gauge assiale ha la forma

$$\eta^{\mu} = \Lambda(t, r)[0, 0, V^{(2)}(\theta, \varphi)] = \Lambda(t, r)[0, 0, -\frac{1}{\sin\theta}\partial_{\varphi} Y_m^l, \sin\theta\partial_{\theta} Y_m^l]. \quad (2.23)$$

Esplicitando la trasformazione della perturbazione, utilizzando i simboli di Christoffel imperturbati per le derivate covarianti, si trova che il nuovo tensore $h'_{\mu\nu}$ ha ancora la forma generale di una perturbazione assiale (2.18). I coefficienti h_0 , h_1 e h_2 variano nel modo seguente:

$$\delta h_0 = \frac{\partial\Lambda(t, r)}{\partial t} ; \quad (2.24)$$

$$\delta h_1 = \frac{\partial\Lambda(t, r)}{\partial r} - 2\frac{\Lambda(t, r)}{r} ; \quad (2.25)$$

$$\delta h_2 = -2\Lambda(t, r). \quad (2.26)$$

Utilizzando al posto di h_1 un nuovo coefficiente k_1 definito come

$$k_1 = h_1 + \frac{1}{2}(h_{2,r} - 2\frac{h_2}{r}) , \quad (2.27)$$

risulta

$$\delta k_1 = 0. \quad (2.28)$$

In generale ci sono vari modi per costruire una funzione gauge-invariante partendo dai coefficienti h_0, h_1, h_2 . Regge e Wheeler hanno utilizzato la libertà della scelta del gauge per semplificare la forma generale della perturbazione, eliminando i contributi

delle derivate di ordine più alto in θ e φ . Per le perturbazioni assiali significa scegliere una trasformazione in cui h_2 diventi zero, quindi

$$\Lambda(t, r) = -\frac{1}{2}h_2(t, r). \quad (2.29)$$

Nel gauge di Regge-Wheeler k_1 è uguale ad h_1

$$k_1(t, r) = (h_1)_{RW}(t, r). \quad (2.30)$$

2.3.3 Equazioni linearizzate per perturbazioni assiali e polari

Inserendo il tensore delle perturbazioni assiali nella forma di Regge-Wheeler nelle equazioni di campo linearizzate (2.16) e sfruttando l'equazione differenziale soddisfatta dalle armoniche sferiche

$$(\sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin^2 \theta l(l+1))Y_m^l(\theta, \varphi) = 0, \quad (2.31)$$

si giunge ad un'equazione differenziale per il coefficiente k_1

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V_{RW}(x)\Psi(x, t) = 0, \quad (2.32)$$

dove x è la coordinata tartaruga introdotta precedentemente, e abbiamo definito

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (h_1)_{RW}(r, t) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) k_1(r, t) \quad (2.33)$$

Il termine V_{RW} è detto potenziale di Regge-Wheeler e la sua espressione è

$$V_{RW}(x) = \left(1 - \frac{2M}{r(x)}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2(x)} - \frac{6M}{r^3(x)} \right]. \quad (2.34)$$

Notiamo che (2.8) coincide esattamente con (2.34) per $s = 2$. Seguendo un procedimento analogo ma con calcoli più laboriosi si giunge all'equazione che descrive le perturbazioni polari, ottenuta per la prima volta da Zerilli [6]

$$\frac{\partial^2 \chi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi(x, t)}{\partial x^2} + V_Z(x)\chi(x, t) = 0, \quad (2.35)$$

dove V_Z è detto potenziale di Zerilli, ed ha la forma

$$V_Z = \left(1 - \frac{2M}{r(x)}\right) \left[\frac{72M^3}{r^5 \lambda^2} - \frac{12M}{r^3 \lambda^2} (l-1)(l+2) \left(1 - \frac{3M}{r(x)}\right) + \frac{l(l-1)(l+1)(l+2)}{r^2 \lambda} \right], \quad (2.36)$$

$$\lambda = l(l+1) - 2 + \frac{6M}{r}. \quad (2.37)$$

Dopo una serie di calcoli complicati si giunge alla conclusione che tutti i tipi di perturbazioni gravitazionali sono regolati da due equazioni d'onda unidimensionali con l'aggiunta di un potenziale. Nonostante le forme funzionali dei due potenziali siano piuttosto differenti, i loro valori numerici sono molto simili, come mostrato in figura 2.1. Poiché lo studio di (2.32) risulta molto più semplice, d'ora in avanti ci si limiterà

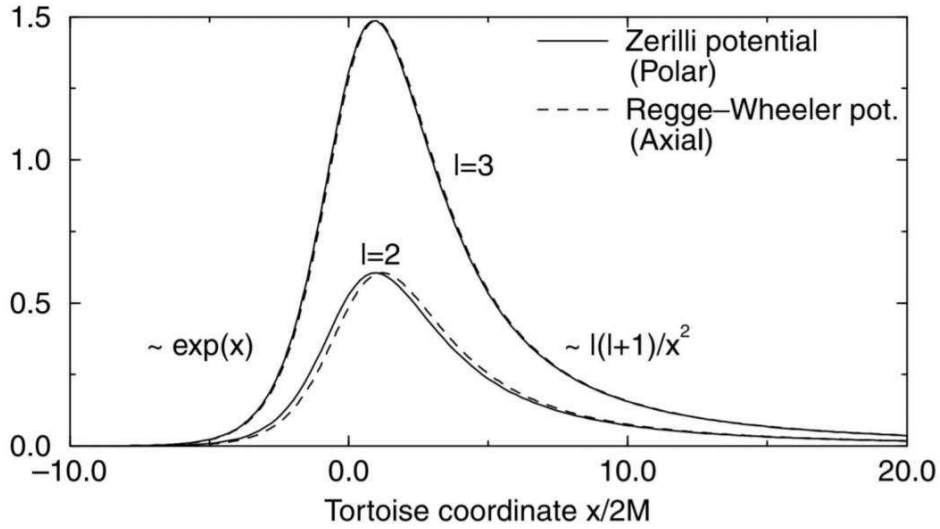


Figura 2.1: Confronto dei potenziali di Regge-Wheeler e Zerilli per $l = 2, 3$.

alla trattazione dell'equazione di Regge-Wheeler, sfruttando un importante risultato ottenuto da Chandrasekhar: l'isospettralità delle perturbazioni indipendentemente dalla loro parità. Ciò implica che i QNM che si originano da (2.32) e (2.35) presentano lo stesso spettro.

Seguendo la procedura standard per l'analisi dei modi normali supponiamo una dipendenza dal tempo del tipo $\Psi(x, t) = e^{-i\omega t}\psi(x)$. Inserendo tale espressione nell'equazione (2.32) si ottiene l'equazione indipendente dal tempo:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\omega^2 - V(x))\psi(x) = 0. \quad (2.38)$$

2.4 Condizioni al contorno

Il problema della determinazione dei QNM consiste nel trovare le coppie (ψ, ω) che risolvono l'equazione (2.38), tenendo conto delle condizioni al contorno dettate dal problema fisico preso in esame. Quando $|x|$ tende all'infinito il potenziale di Regge-Wheeler (Zerilli) tende a zero, quindi le soluzioni di (2.38) tenderanno ad onde piane, per la precisione una combinazione di onde piane uscenti (in allontanamento dalla sorgente) ed entranti (in avvicinamento alla sorgente). Nel nostro caso stiamo analizzando un buco nero di Schwarzschild isolato, per cui non ci dovranno essere onde entranti dall'infinito. Sappiamo inoltre che l'orizzonte degli eventi può essere attraversato solo in maniera unidirezionale, permettendo di avere onde entranti in r_s , ma non onde uscenti. Queste due condizioni si possono esprimere formalmente ponendo

$$\psi \sim e^{i\omega x} \quad x \rightarrow +\infty, \quad \psi \sim e^{-i\omega x} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.39)$$

Sono proprio queste particolari condizioni al contorno che fanno sì che le frequenze ω siano numeri complessi.

Capitolo 3

Metodi di calcolo dei QNM

In questo capitolo vedremo tre differenti metodi per calcolare i valori di ω ammessi dall'equazione (2.38) con le condizioni al contorno (2.39): il metodo WKB, l'approssimazione con il potenziale di Poschl-Teller e il metodo delle frazioni continue. Per il resto della trattazione ci concentreremo esclusivamente sulle frequenze ω . Come avviene comunemente in letteratura utilizzeremo spesso il termine QNM per indicare le frequenze, e non l'espressione completa della funzione d'onda.

3.1 Metodo WKB

L'approssimazione WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin), è un metodo semi-analitico inizialmente ideato per trovare soluzioni approssimate dell'equazione di Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (3.1)$$

poi utilizzato da Shutz e Will [8] nello studio dello scattering attorno ad un buco nero. Il metodo è equivalente all'approssimazione semi-classica, ossia applicare il limite formale $\hbar \rightarrow 0$, il che equivale a considerare l'onda in regime di ottica geometrica, dove si assume che l'ampiezza vari molto più lentamente della fase. Questo metodo permette di descrivere la soluzione ψ in presenza di un qualsiasi potenziale $V(x)$ che deve soddisfare un'ipotesi non eccessivamente limitativa: $V(x) \rightarrow C_{\pm}$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, con C_{\pm} costante.

Prendiamo ora una generica equazione differenziale della forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi = 0. \quad (3.2)$$

Notiamo che ponendo $Q(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))$ recuperiamo l'equazione di Schroedinger (3.1), mentre per $Q(x) = \omega^2 - V_{RW}(x)$, identificando x con la coordinata tartaruga, si ottiene l'equazione di Regge-Wheeler¹. Se ne deduce che il ruolo ricoperto dagli autovalori E in meccanica quantistica è analogo a quello delle frequenze ω del fenomeno che stiamo studiando. Le condizioni al contorno sono quelle precedentemente discusse.

Il potenziale di Regge-Wheeler ha la forma di una barriera con un picco in

$$x_0 = \frac{3}{2\lambda} \left[\lambda - 3 + \sqrt{\lambda^2 + \frac{14}{3}\lambda + 9} \right], \quad (3.3)$$

con $\lambda = l(l+1)$, e tende ad una costante per $x \rightarrow \pm\infty$. Il dominio $]-\infty, +\infty[$ viene quindi diviso in tre regioni, separate da quelli che classicamente vengono definiti *punti di inversione* (vedi figura 3.1).

In maniera del tutto generale possiamo scrivere una generica soluzione di (3.2) nella forma

$$\psi(x, \omega) = A(x, \omega)e^{i\phi(x, \omega)}, \quad (3.4)$$

dove $A(x, \omega)$ e $\phi(x, \omega)$ sono funzioni reali di x e ω . Inserendo l'espressione (3.4) nell'equazione (3.2) e separando la parte reale dalla parte immaginaria si ottiene un sistema di equazioni differenziali²:

$$2A'(x, \omega)\phi'(x, \omega) + A(x, \omega)\phi''(x, \omega) = 0, \quad (3.5)$$

$$A(x, \omega)[(\phi'^2) - Q(x, \omega)] = A''(x, \omega). \quad (3.6)$$

Ipotizziamo che nelle regioni *I* e *III* valga l'approssimazione di ottica geometrica, per cui $A'' \approx 0$. Si nota che nel caso in cui $Q(x, \omega)$ tende ad un valore costante Q , avremo che la soluzione asintotica di (3.2) è

$$\psi \approx Ae^{\pm i\sqrt{Q}x}, \quad (3.7)$$

con A fissato. Risulta chiaro come quest'approssimazione sia valida nel caso in cui $Q(x, \omega)$ e quindi $V(r)$ vari lentamente rispetto alla lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/\sqrt{Q}$. Ci si aspetta che in questo regime ψ rimanga della forma (3.7), con $A(x, \omega)$ che varia

¹Per semplicità con la scrittura $V(x)$ si intenderà sempre il potenziale di Regge-Wheeler, salvo diversa precisazione.

²Per semplificare la notazione si utilizzano gli apici ' per indicare le derivate rispetto ad x .

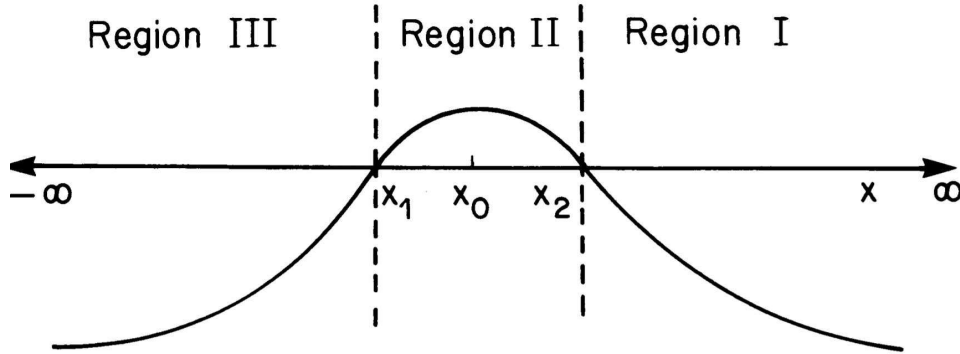


Figura 3.1: Andamento della funzione $-Q(x)$. x_1 e x_2 sono i punti di inversione classici.

in maniera apprezzabile solo per intervalli di ordine molto maggiore di λ .

Avendo stabilito sotto quali condizioni vale l'approssimazione $A'' \approx 0$ possiamo risolvere la (3.5) e la (3.6), ottenendo

$$\psi(x, \omega) \approx [Q(x, \omega)]^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\pm i \int^x \sqrt{Q(\xi)} d\xi\right). \quad (3.8)$$

Questa espressione per la ψ diverge quando $Q(x, \omega) \rightarrow 0$, e non è quindi più valida nei punti di inversione classici. Data la forma del potenziale di Regge-Wheeler ci saranno due punti di inversione x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$), come mostrato in figura 3.1. Riprendiamo ora l'analogia con la meccanica quantistica per determinare il comportamento di ψ nelle tre differenti regioni. Per un'onda con una data ampiezza, proveniente da $x = +\infty$ incidente su una barriera di potenziale si può calcolare l'ampiezza dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa.

In approssimazione WKB per $E \gg V(x)$ l'onda verrà quasi completamente trasmessa, mentre per $E < V_0$ l'ampiezza dell'onda trasmessa sarà ridotta di un fattore e^{-B} , dove B è detto "fattore di penetrazione della barriera", e il suo valore è dato da

$$B = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-Q(x)} dx. \quad (3.9)$$

Queste considerazioni possono essere applicate al caso delle perturbazioni di un buco nero, tenendo conto delle differenti condizioni al contorno del problema. Poiché si devono avere solo onde entranti per $x = -\infty$ e onde uscenti per $x = +\infty$, è ragionevole aspettarsi che le ampiezze delle onde trasmessa e riflessa siano comparabili con quella incidente. In approssimazione WKB ciò è vero quando $e^{-B} \approx 1$, cioè quando

$-Q(x_0, \omega) \approx 0$. In questo caso le soluzioni nelle regioni esterne ai punti di inversione sono date da [10]

$$\psi_I(x) \approx [Q(x)]^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\pm i \int_{x_2}^x \sqrt{Q(\xi)} d\xi\right), \quad x > x_2 \quad (3.10)$$

$$\psi_{III}(x) \approx [Q(x)]^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\pm i \int_x^{x_1} \sqrt{Q(\xi)} d\xi\right). \quad x < x_1 \quad (3.11)$$

Per avere la soluzione completa è necessario raccordare le soluzioni delle due regioni esterne attraverso la regione $]x_1, x_2[$. A questo scopo approssimiamo la funzione $Q(x)$ con la sua espansione di Taylor in un intorno del punto di minimo in x_0

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0)^2 + O(x - x_0)^3, \quad (3.12)$$

dove $Q_0 = Q(x_0)$ e $Q_0'' = Q''(x_0)$. Sostituendo l'espansione (3.12) in (3.2) ed effettuando i seguenti cambi di variabile

$$k = \frac{1}{2}Q_0'', \quad t = (4k)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}(x - x_0), \quad (3.13)$$

$$\nu + \frac{1}{2} = -i \frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}}, \quad (3.14)$$

la (3.2) si riduce ad un'equazione differenziale nota come *equazione di Weber*, un caso particolare di equazione ipergeometrica confluyente:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2\right)\psi = 0. \quad (3.15)$$

Una generica soluzione di (3.15) si può scrivere in termini di *funzioni paraboliche del cilindro* $D_\nu(t)$,

$$\psi = AD_\nu(t) + BD_{-\nu-1}(it). \quad (3.16)$$

Le soluzioni asintotiche per $|t| \gg 0$ sono [10]

$$\begin{aligned} \psi \approx & B e^{-\frac{3i\pi(\nu+1)}{4}} (4k)^{-\frac{\nu+1}{4}} (x - x_0)^{-\nu-1} e^{\frac{i\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} + \\ & + \left(A + \frac{B\sqrt{2\pi} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}}{\Gamma(\nu+1)} \right) e^{\frac{i\pi\nu}{4}} (4k)^{\frac{\nu}{4}} (x - x_0)^\nu e^{-\frac{i\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} \quad x \gg x_2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \psi \approx & A e^{-\frac{3i\pi\nu}{4}} (4k)^{\frac{\nu}{4}} (x - x_0)^\nu e^{-\frac{i\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} + \\ & + \left(\frac{B - iA\sqrt{2\pi} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}}{\Gamma(-\nu)} \right) e^{\frac{i\pi(\nu+1)}{4}} (4k)^{-\frac{\nu-1}{4}} (x - x_0)^{-\nu-1} e^{\frac{i\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} \quad x \ll x_1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dove $\Gamma(\nu)$ è la funzione Gamma di Eulero³. Affinché le espressioni (3.17) e (3.18) siano compatibili con la (3.10) e la (3.11) bisogna imporre $[\Gamma(-\nu)]^{-1} = 0$, condizione che vincola ν ad essere un intero non negativo, da cui segue

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} = i\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

Questa relazione fornisce i QNM al primo ordine WKB, indicizzati da un numero intero n , detto *numero di ipertono*:

$$\omega_n = \left[V(r(x_0)) + i\sqrt{2V''(r(x_0))} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Con l'aumentare di n cresce anche il valore di $|Im(\omega_n)|$, quindi aumenta lo smorzamento esponenziale dell'onda.

Si può notare che per giungere ad un'espressione per le frequenze non è necessario raccordare esplicitamente la soluzione nella regione *II* con quella in *I* e *III* attraverso i punti di inversione, ma è sufficiente richiedere la compatibilità delle espressioni asintotiche. Per risolvere completamente il problema si dovrebbero raccordare le soluzioni nelle regioni esterne con quella interna attraverso i punti di inversione. Questo procedimento consiste nello sviluppare il potenziale al primo ordine in x_1 e x_2 , e inserirlo nell'equazione differenziale, ottenendone una nuova, detta *equazione di Airy*, la cui soluzione è esprimibile in termini di *funzioni di Airy*.

Uno dei maggiori vantaggi di questo metodo risiede nella possibilità di estendere l'approssimazione ad ordini più alti, considerando anche i termini di ordine maggiore nell'espansione (3.12). La formula per i QNM al sesto ordine⁴ WKB è data da

$$\frac{i(\omega^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{j=2}^6 \Lambda_j = n + \frac{1}{2}, \quad (3.21)$$

dove i termini correttivi Λ_j dipendono dal valore del potenziale efficace e delle sue derivate (fino all'ordine j -esimo) nel punto di massimo. La forma esplicita delle correzioni fu trovata da Iyer e Will (Λ_2, Λ_3) [11] e Konoplya ($\Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6$) [12].

³La funzione Gamma di Eulero è definita dalla relazione $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

⁴Attualmente è l'ordine per cui si ha maggior compatibilità coi risultati numerici.

3.2 Approssimazione con potenziale di Poschl-Teller

Vediamo ora un metodo, ideato da Ferrari e Mashhoon [13], per determinare i QNM in maniera analitica, stabilendo una connessione tra questi e gli stati legati del potenziale di Regge-Wheeler inverso⁵. Per fare ciò occorre approssimare il potenziale efficace del buco nero con uno che abbia le stesse proprietà, ma una forma funzionale tale che sia possibile determinare in maniera analitica gli stati legati del suo inverso. Un buon candidato per questo scopo è il potenziale di Poschl-Teller⁶

$$V_{PT}(x) = \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha(x - x_0)}, \quad U_0 > 0 \quad (3.22)$$

Come è possibile vedere in figura 3.2 V_{PT} ha la forma di una barriera di potenziale con il massimo in x_0 , e tende a zero quando $|x| \rightarrow \infty$. I parametri U_0 e α devono essere definiti in modo che uno sviluppo al secondo ordine di (3.22) attorno a x_0 coincida con quello del potenziale di Regge-Wheeler in r_0 , per cui poniamo

$$U_0 \equiv V_0 = V(r_0), \quad \alpha^2 \equiv -\frac{1}{2V(r_0)} \frac{d^2V}{dx^2}(x_0). \quad (3.23)$$

Effettuiamo ora una trasformazione che permetta di passare ad un problema di stati legati per una buca di potenziale: $(x, \alpha) \rightarrow (x' = ix, \alpha' = i\alpha)$.

Da una trasformazione di questo tipo segue

$$V_{PT}(x', \alpha') = V_{PT}(x, \alpha), \quad \psi(x, \alpha) = \Phi(x', \alpha'), \quad \omega(\alpha) = \Omega(\alpha') \quad (3.24)$$

Sostituendo le nuove grandezze nell'equazione (3.2) si ottiene una nuova equazione con nuove condizioni al contorno

$$\frac{d^2\Phi}{dx'^2} + (-\Omega^2 + V_{PT})\Phi = 0, \quad \text{con } \Phi \propto e^{\mp\Omega x'}, \quad x' \rightarrow \pm\infty. \quad (3.25)$$

Queste condizioni al contorno corrispondono ad una funzione d'onda che si annulla all'infinito, così che il problema dei QNM si riduce alla ricerca degli stati legati per il potenziale inverso.

⁵Con il termine *inverso* si intende lo stesso potenziale cambiato di segno.

⁶Comunemente in letteratura ci si riferisce al potenziale di Poschl-Teller come una buca di potenziale, qui lo intenderemo come barriera, in modo da avere la corrispondenza $V_{PT} \leftrightarrow V_{RW}$.

Gli stati legati del potenziale di Poschl-Teller inverso sono noti [14] e gli autovalori Ω della (3.25) sono dati dall'espressione

$$\Omega_n = \alpha' \left(-\left(n + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{V_0}{\alpha'^2}} \right). \quad (3.26)$$

Per ottenere le frequenze ω_n dei QNM è sufficiente sostituire $\alpha' = i\alpha$

$$\omega_n = \pm \sqrt{V_0 - \frac{1}{4}\alpha^2 - i\alpha \left(n + \frac{1}{2}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Occorre menzionare che vi sono alcune situazioni in cui il potenziale efficace di un buco nero è esattamente quello di Poschl-Teller, come nel caso di un buco nero di Schwarzschild-de Sitter o Reissner-Nordström-de Sitter.

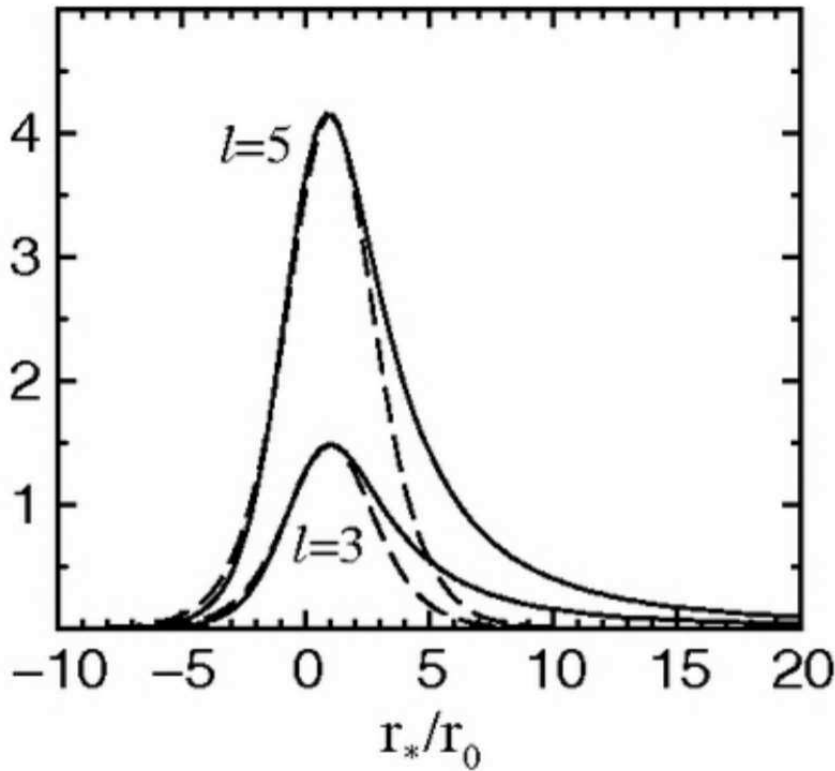


Figura 3.2: La curva continua rappresenta il potenziale di Regge-Wheeler per $l=3,5$ in funzione di $\frac{r_*}{r_0}$, dove r_0 corrisponde al punto di massimo ($r_* \equiv x$). Il potenziale di Poschl-Teller è indicato con la linea tratteggiata.

3.3 Metodo delle frazioni continue

Fino ad ora abbiamo visto un metodo analitico ed uno semi-analitico che permettono di determinare le frequenze complesse ω che caratterizzano i QNM di un buco nero di Schwarzschild. Queste tecniche sono molto importanti, perchè permettono di dare un'interpretazione fisica chiara ai risultati. Tuttavia essendo metodi approssimati hanno una validità limitata, e per un'analisi quantitativa più soddisfacente bisogna ricorrere a metodi numerici. Vediamo come esempio un metodo svlippato da Leaver [16], limitandoci ad esporre i concetti ed i risultati principali. Il metodo consiste nello scrivere le soluzioni dell'equazione (3.2) nella forma

$$\psi(r) = (r - r_s)^{-i\omega} r^{2i\omega} e^{i\omega(r-r_s)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r - r_s}{r} \right)^n, \quad (3.28)$$

e sfruttare la relazione di ricorrenza tra i termini della serie, partendo da $a_0 = 1$:

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0, \quad (3.29)$$

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

Dove i coefficienti α_n , β_n e γ_n sono funzioni di ω le cui espressioni analitiche sono:

$$\alpha_n = n^2 + (-2i\omega + 2)n - 2i\omega + 1, \quad (3.31)$$

$$\beta_n = -(2n^2 + (2 - 8i\omega)n - 8\omega^2 - 4i\omega + l(l+1) - 3), \quad (3.32)$$

$$\gamma_n = n^2 - 4i\omega n - 4\omega^2 - 4. \quad (3.33)$$

Il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è determinato tramite una frazione continua:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} - \dots}}}, \quad (3.34)$$

che si può scrivere in maniera equivalente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1}} \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2}} \frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3}} \dots \quad (3.35)$$

Valutando l'equazione (3.34) per $n = 0$ e utilizzando l'equazione (3.29) si ottiene una coppia di equazioni che devono essere soddisfatte:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}, \quad (3.36)$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{-\gamma_1}{\beta_1 -} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 -} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 -} \dots \quad (3.37)$$

Eguagliando il membro destro della (3.36) con il membro destro della (3.37) otteniamo un'equazione caratteristica per ω

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 -} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 -} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 -} \dots \quad (3.38)$$

Le frequenze dei modi quasi-normali sono date dagli zeri di questa equazione, che può essere risolta numericamente con un arbitrario grado di precisione.

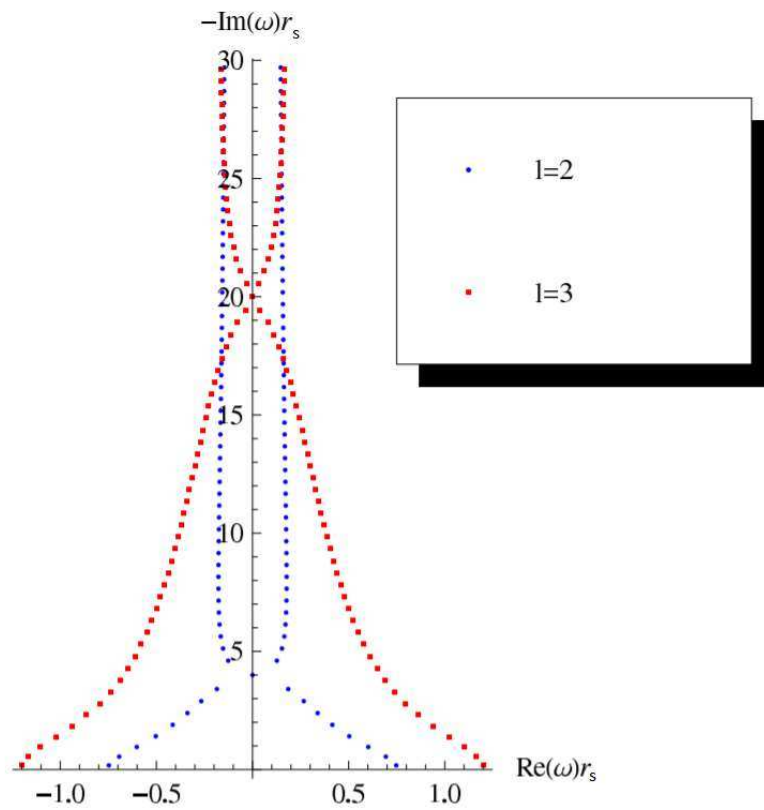


Figura 3.3: Primi 60 frequenze quasi-normali per perturbazioni gravitazionali di un buco nero di Schwarzschild.

3.4 Metodi a confronto

Avendo effettuato delle approssimazioni è opportuno stabilire sotto quali condizioni queste offrano risultati soddisfacenti, prendendo come riferimento i risultati numerici ottenuti col metodo delle frazioni continue. I valori di maggior interesse sono quelli dei modi fondamentali ($n = 0$) e i valori di multipolo più bassi ($l = 2, 3$) in quanto per valori più alti di n e l i modi sono fortemente soppressi. In tabella 3.1 sono riportati i valori ottenuti per $n = 0, 1$ e $l = 2, 3$.

l	n	$M\omega_{WKB}$	$M\omega_{PT}$	$M\omega_L$
2	0	0.3736 -0.0889 <i>i</i>	0.378 -0.091 <i>i</i>	0.373672 -0.088964 <i>i</i>
2	1	0.3463 -0.2735 <i>i</i>	0.378 -0.272 <i>i</i>	0.346711 -0.273915 <i>i</i>
3	0	0.599443 -0.092703 <i>i</i>	0.602 -0.093 <i>i</i>	0.599444 -0.092703 <i>i</i>
3	1	0.58264 -0.28129 <i>i</i>	0.602 -0.280 <i>i</i>	0.582644 -0.281298 <i>i</i>

Tabella 3.1: In tabella sono riportati i QNM ottenuti con metodo WKB [15], approssimazione con potenziale di Poschl-Teller [15], e numericamente col metodo di Leaver [16].

Il potenziale di Poschl-Teller approssima sempre meglio quello di Regge-Wheeler al crescere del numero di multipolo l , ma fornisce risultati accurati solo per $n = 0$. Si può notare infatti come nella formula (3.27) la parte reale sia indipendente dal numero di ipertono, contrariamente a quanto atteso. Tuttavia per i QNM fondamentali il metodo fornisce risultati con un errore relativo inferiore al 2% per $l = 2$ e inferiore all' 1% per i multipoli più alti. Per il metodo WKB la questione è più delicata. Anche in questo caso l'approssimazione è buona per $n = 0, 1$, cioè quando i due punti di inversione sono molto vicini, e migliora con l'aumentare di l . I risultati migliori si ottengono estendendo il metodo fino al sesto ordine, pur incorrendo in qualche problema. Abbiamo infatti mostrato come sia possibile estendere il metodo ad ordini superiori al primo, senza considerare che la serie WKB converge solo asintoticamente, non potendo quindi garantire che l'errore relativo decresca con l'aggiunta di ogni termine correttivo. A questo proposito è stata sviluppata una tecnica WKB modificata, detta *ordine ottimale* [18]. Questa da buoni risultati per numeri di ipertono moderatamente alti, ma soprattutto per $n > l$. Nel resto dei casi in cui $n \leq l$ la formula al sesto ordine fornisce i risultati migliori. In figura 3.4 si

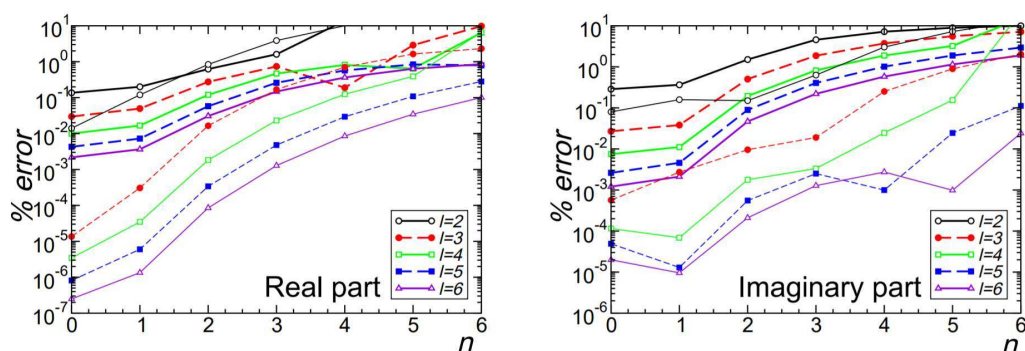


Figura 3.4: Errori percentuali per la parte reale(sinistra) ed immaginaria(destra) delle frequenze calcolate col metodo WKB . Linee spesse: approssimazione al terzo ordine WKB. Linee sottili: approssimazione al sesto ordine WKB.

può vedere come variano gli errori percentuali al variare di n ed l . In particolare l'approssimazione al sesto ordine porta con sé un errore di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quella del terzo ordine per il modo fondamentale $n = 0, l = 2$.

Capitolo 4

Modi Quasi-normali e Onde Gravitazionali

Nel secondo capitolo abbiamo introdotto i modi quasi-normali come onde generate da una perturbazione della metrica di background, senza specificare da quali fenomeni fisici possano avere origine. In questo capitolo cercheremo di stabilire una connessione tra i modi quasi-normali e le onde gravitazionali generate da un sistema binario di buchi neri durante la fase di collisione e fusione. In particolare vedremo come l'ultima parte di questo processo sia trattabile in termini di QNM. Per quest'analisi faremo riferimento all'evento *GW150914*, il primo rilevato dagli interferometri della collaborazione *LIGO* [19], esponendo brevemente le tecniche utilizzate e i risultati ottenuti.

4.1 Onde gravitazionali

Nel 1916, ad un solo anno dalla pubblicazione della teoria della relatività generale, Einstein ipotizzò che le deformazioni della curvatura dello spazio-tempo potessero propagarsi sotto forma di onde gravitazionali, in maniera analoga a quanto avviene per le onde elettromagnetiche. Cento anni dopo gli interferometri della collaborazione *LIGO* rilevano per la prima volta un segnale riconducibile alla collisione di due buchi neri. Date le grandi energie in gioco non è casuale che le prime ed uniche onde gravitazionali rilevate fino ad ora siano dovute a questo tipo di evento.

La manifesta non linearità delle equazioni di Einstein rende impraticabile un approccio

analitico al fenomeno, ma al fine di darne una descrizione qualitativa è possibile dividere il processo in tre fasi:

- **Inspiral:** Inizialmente il sistema è formato da due buchi neri che si trovano ad una certa distanza e ruotano attorno al loro centro di massa. Ad ogni rotazione il sistema perde gradualmente energia emettendo onde gravitazionali. In tempi molto lunghi i due buchi neri spiraleggiano, diminuendo la distanza che li separa. Mano a mano che questi si avvicinano aumenta l'attrazione gravitazionale, con conseguente aumento della velocità angolare e dell'energia irradiata, fino a che i due buchi neri collidono.
- **Merger:** Nella seconda fase i due orizzonti degli eventi si fondono, dando vita ad un unico buco nero. È in questa fase transitoria che si ha il picco di emissione, con una radiazione di energia che il cui ordine di grandezza può essere di diverse masse solari.
- **Ringdown:** Il sistema continua ad emettere onde gravitazionali fino a quando l'orizzonte degli eventi non raggiunge una configurazione stabile, ossia finché non terminano le variazioni di curvatura all'interno dell'orizzonte. Nel passaggio da uno stato eccitato ad uno di equilibrio le onde emesse sono caratterizzate da un rapido smorzamento.

La prima fase viene trattata con il formalismo post-newtoniano, mentre per la seconda fase bisogna utilizzare metodi numerici. Per queste due fasi una trattazione perturbativa è impraticabile, non essendo possibile considerare uno dei due buchi neri come una perturbazione dell'altro. Riducendosi però allo studio dell'ultima parte del segnale è possibile che le tecniche perturbative portino a risultati soddisfacenti. Supporremo quindi che un buco nero in fase di ringdown sia trattabile in termini di QNM. Grazie all'evento GW150914 recentemente rilevato dagli interferometri della collaborazione LIGO abbiamo modo di verificare questa ipotesi, cercando un riscontro con i dati sperimentali.

4.1.1 Evento GW150914

Il 14 Settembre 2015, alle ore 09:50:45 UTC, i rilevatori di LIGO presenti ad Hanford e Livingston hanno rilevato un segnale riconducibile ad un'onda gravitazionale.

L'idea alla base dell'esperimento è la stessa utilizzata da Michelson per il suo interferometro. In questo caso abbiamo un interferometro con due bracci uguali di lunghezza $L_x = L_y = L = 4 \text{ km}$. Il passaggio di un'onda gravitazionale causa una variazione nella lunghezza propria dei due bracci, permettendo di misurare la grandezza $\Delta L(t) = L_x(t) - L_y(t) = h(t)L$, dove la funzione $h(t)$ è detta *strain*, e il suo valore è riportato in figura 4.1. Il segnale è stato principalmente analizzato facendo uso di simulazioni, in particolare sulle prime due fasi. Per prima cosa si risolvono le equazioni di Einstein non approssimate, con condizioni iniziali del sistema ben definite, come masse e momenti angolari dei due buchi neri. Successivamente a ciascuna soluzione viene associata la curva che descrive il segnale atteso qualora l'interferometro rilevasse un evento con quei dati iniziali. Per coprire un grande range di eventi rilevabili sono state computate circa 250 000 curve differenti. Una volta che il segnale vero e proprio viene rilevato si procede al confronto con ciascuna delle soluzioni calcolate, valutando quale curva lo approssimi meglio (vedi figura 4.1). Vi sono poi ulteriori dettagli da tenere in considerazione, come il redshift o la disposizione del momento angolare del sistema rispetto agli interferometri. Per ulteriori dettagli si rimanda a [19], [20]. I risultati ottenuti dall'analisi dell'evento GW150914 sono $M_1 = 39_{-4}^{+6}M_\odot$ e $M_2 = 32_{-5}^{+4}M_\odot$ per i due buchi neri iniziali, e $M_f = 68_{-4}^{+4}M_\odot$ e $a_f = 0.67_{-0.07}^{+0.05}$ per il buco nero finale, con una conseguente emissione di energia pari a $E = 3.0_{-0.5}^{+0.5}M_\odot$.

4.1.2 Approccio perturbativo

Vogliamo ora analizzare la fase di ringdown, assumendo che il segnale sia descrivibile in termini di QNM [21]. Nel caso di un buco nero di Kerr ogni modo dipende oltre che da l ed n anche da un intero m , che può assumere i $2l + 1$ valori $-l, -l + 1, \dots, l - 1, l$. Il modo meno soppresso è quello con $l = m = 2$ e $n = 0$, per cui ci aspettiamo che dopo un tempo sufficientemente lungo questo modo sia dominante. Chiamiamo quindi t_0 l'istante da cui parte il ringdown. Vogliamo effettuare un fit con una funzione del tipo

$$h(t \geq t_0) = Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \cos(\omega(t - t_0) + \phi_0), \quad (4.1)$$

dove ω e τ corrispondono a $\Re(\omega_{lmn})$ e $\Im(\omega_{lmn})^{-1}$. Si pone quindi un problema: come stabilire l'istante t_0 oltre cui è valido il regime di ringdown? Dallo studio effettuato dalla collaborazione LIGO emerge che un tempo realistico e compatibile

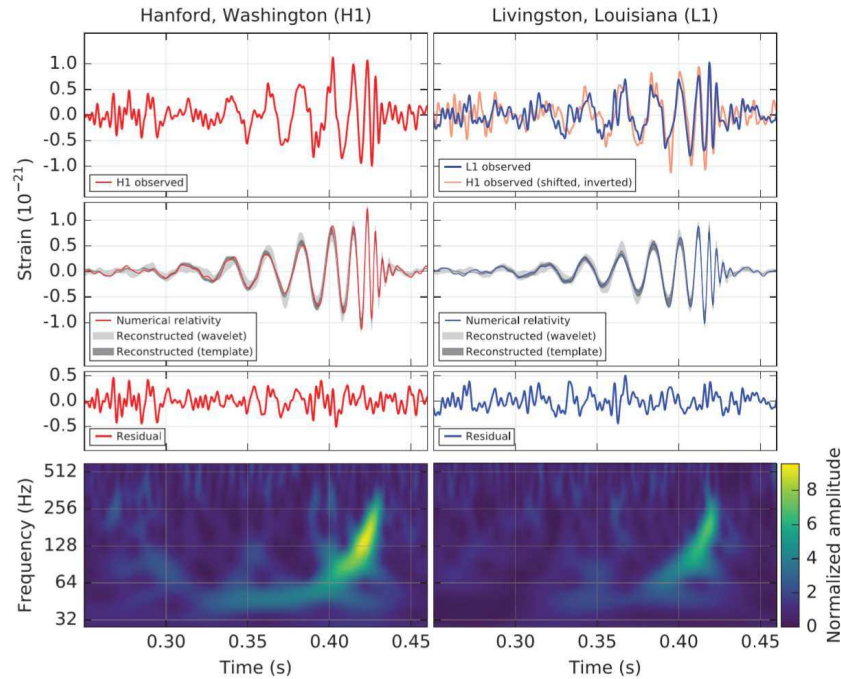


Figura 4.1: Segnali rilevati dagli interferometri di Hanford e Livingston.

con i risultati ottenuti dall'analisi delle altre fasi è $t_0 = 3ms$, inteso come tempo dopo il picco di radiazione. In figura 4.2 troviamo i possibili range di valori per (ω, τ) determinati in questo modo, corrispondenti ad un intervallo di confidenza del 90%. Dai risultati ottenuti è possibile dare una stima dei valori di massa e momento

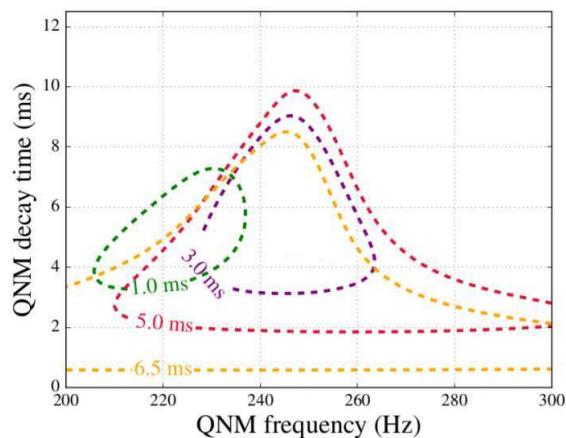


Figura 4.2: Intervalli di confidenza per (ω, τ) al variare di t_0 .

angolare del buco nero finale (vedi figura 4.3). Ricordiamo infatti che è sufficiente un solo modo per determinare i valori di M_f e a_f . In futuro l'obiettivo è quello di riuscire a risolvere un'altra frequenza, in modo da poter effettuare un ulteriore controllo sui dati e verificare il teorema *no hair*, secondo cui gli unici parametri che caratterizzano un buco nero sono massa, carica elettrica e momento angolare. Affinché questo sia verificato i valori ottenuti da ogni singolo modo dovranno essere compatibili, in quanto ciascuno di essi definisce in maniera univoca i parametri M e a .

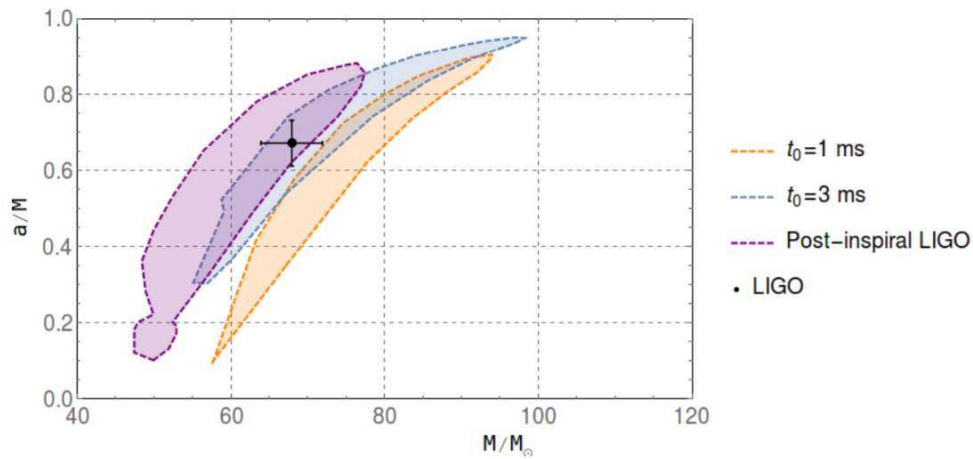


Figura 4.3: Range di valori ottenuti mediante l'approccio perturbativo, rappresentati in arancione per $t_0 = 1 \text{ ms}$ e in blu per $t_0 = 3 \text{ ms}$. Sono riportati inoltre l'intervallo ottenuto dalla collaborazione LIGO [20] e il valore finale proposto.

Conclusioni

Ripercorriamo brevemente quanto fatto e i risultati ottenuti. Nel capitolo 1 abbiamo introdotto quelli che sono i principi di base della relatività generale. Partendo da questi e imponendo la compatibilità tra il regime di campo debole e l'equazione di Newton per il campo gravitazionale sono state ricavate le equazioni di Einstein. Abbiamo poi risolto le equazioni nel caso di una sorgente statica, sfericamente simmetrica e priva di carica elettrica, ottenendo la soluzione di Schwarzschild. Dallo studio del moto geodetico nello spazio-tempo di Schwarzschild siamo giunti al concetto di buco nero e di orizzonte degli eventi, giungendo alla conclusione che un corpo, sia massivo che non massivo, una volta attraversato questo orizzonte non può più uscirne. Abbiamo concluso il capitolo con una descrizione qualitativa della metrica di Kerr, valida quando la sorgente è stazionaria e rotante, con carica elettrica nulla. Nel capitolo 2 è stato introdotto il concetto di modi quasi-normali, in relazione alla teoria perturbativa dei buchi neri. Abbiamo visto come indipendentemente dal tipo di perturbazione ci si possa sempre ricondurre ad un'equazione d'onda unidimensionale con una barriera di potenziale. Nel capitolo 3 sono stati esposti tre diversi metodi per la risoluzione di questa equazione d'onda, in particolare per calcolare le frequenze dei modi quasi-normali. Il metodo WKB e l'approssimazione con potenziale di Poschl-Teller permettono di ricavare delle espressioni analitiche, mentre con il metodo delle frazioni continue è possibile calcolare numericamente le frequenze. Si è poi proceduto al confronto dei risultati ottenuti, da cui si conclude che pur con precisione diversa i metodi forniscono risultati compatibili. Nel capitolo 4 si è cercato di descrivere la fase di ringdown in termini di modi quasi-normali, in particolare considerando il modo meno soppresso. Abbiamo visto come i dati ottenuti dall'analisi perturbativa siano compatibili con quelli ricavati numericamente. Per effettuare un'ulteriore verifica sui dati sarebbe necessario poter risolvere due modi, così da avere una conferma del teorema *no hair*.

Bibliografia

- [1] Birkhoff, G. D., *Relativity and Modern Physics*, (1923) Harvard University Press, Cambridge, MA.
- [2] Bernard Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press (2009).
- [3] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifshits, *Teoria dei campi*, Editori Riuniti (2010).
- [4] T. Regge, J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, Phys.Rev.108(1957), 1063.
- [5] L. A. Edelman, C. V. Vishveshwara, *Differential equations for perturbations on the Schwarzschild metric*, Phys. Rev. D1 (1970), 3514.
- [6] F. Zerilli, *Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations* Phys. Rev. Lett. 24 737.
- [7] S. A. Teukolsky, *Perturbations of a rotating black hole I. Fundamental equations for a gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations*, Phys. Rev. Lett. 29(1972), 1114.
- [8] B. F. Schutz, C. M. Will, *Black hole normal modes: a semianalytic approach*, Astrophys. J. 291 (1985), L33.
- [9] P. T. Leung, S. Y. Liu, and K. Young, *Completeness and orthogonality of quasinormal modes in leaky optical cavities*, Phys. Rev. A 49, 3057.
- [10] Bender, C.M., Orszag, S.A 1978, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill).
- [11] Iyer, S. and Will, C. M., Phys. Rev. D35, 3621 (1987)

- [12] Konoplya, R. A., Phys. Rev. D 68, 124017 (2003) [arXiv:hep-th/0309030].
- [13] V. Ferrari, B. Mashhoon, *New approach to the quasinormal modes of a black hole*, Phys.Rev. D30 (1984), 295
- [14] Poschl, G., Teller, E., Z. Physik 83, 143 (1933).
- [15] A. Zhidenko, *Quasi-normal modes of Schwarzschild de Sitter black holes*, Classical and Quantum Gravity (2004).
- [16] E. W. Leaver, *An Analytic Representation for the Quasi-Normal Modes of Kerr BlackHoles*, Proc. Roy. Soc. Lond. A402 (1985), 285.
- [17] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek, V. T. Zanchin, *Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes*, Phys. Rev. D79 (2009).
- [18] Froeman, N., Froeman, P. O., Andersson, N. and Hoekback, A., Phys. Rev. D 45, 2609 (1992).
- [19] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, *GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO*, Phys. Rev. D 93 (2016).
- [20] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, *Tests of general relativity with GW150914*, Phys. Rev. Lett. 116 (2016).
- [21] E. Berti, V. Cardoso, C. M. Will, *On gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA*, Phys. Rev. D73 (2006).
- [22] E. Berti, V. Cardoso, <http://www.phy.olemiss.edu/~berti/ringdown/>