

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Equazioni di Raychaudhuri in un universo di
Einstein - Cartan e effetti cosmologici dovuti
ad un fluido di spin

Relatore:
Prof.
Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Alessandro Candeloro

Anno Accademico 2016/2017

Ai miei nonni

Sommario

In questa tesi studiamo come lo spin macroscopico della materia possa trovare una giustificazione geometrica nel tensore di torsione e quali siano le implicazioni dovute alla presenza di un fluido con spin in cosmologia, in particolare se possa giustificare almeno in parte l'espansione dell'universo attuale e se possa risolvere il problema della piattezza dell'universo. In primo luogo studiamo la derivata covariante senza ipotizzare simmetria dei coefficienti della connessione affine. Descriviamo la cinematica di particelle test nel formalismo 1+3 e ricaviamo l'equazione di Raychaudhuri. Dopodichè introduciamo l'azione di Einstein-Cartan da cui deriviamo le due equazioni di campo. Da queste ricaviamo la cinematica in un universo di Einstein-Cartan. In seguito introduciamo il fluido di Weyssenhoff e, facendo alcune assunzioni sulla natura del fluido di spin (irrotazionale e a taglio nullo) e dell'universo (omogeneo e isotropo), otteniamo l'equazione di Raychaudhuri per un fluido di spin, analoga a quella del modello di Friedmann-Robertson-Walker classico. Successivamente introduciamo il formalismo Hamiltoniano per valutare le condizioni di espansione al tempo attuale sui parametri di densità e vediamo che il contributo richiesto allo spin per giustificare l'espansione è elevato rispetto a quanto misurato dai dati delle supernovae Ia e dalla radiazione cosmica di fondo. Poi studiamo il problema della piattezza osservando come la presenza del fluido di spin prevenga la formazione della singolarità iniziale, grazie al fatto che l'espansione inizia a t_0 quando l'universo ha un raggio finito $a_m = 9 \times 10^{-6} m$. Allo stesso tempo la presenza del fluido di spin giustifica la piattezza attuale grazie al parametro di densità di spin $\Omega_S = -8.6 \times 10^{-70}$, evitando l'utilizzo dell'inflazione cosmica. Tuttavia nuove problematiche si aprono nell'interpretare ciò che accade negli istanti precedenti t_0 in cui l'universo si sta contraendo.

Indice

1	Geometria Differenziale con Torsione	2
1.1	Connessione affine e trasporto parallelo	2
1.2	Compatibilità Metrica	5
1.3	Tensore di torsione	6
1.4	Curvatura, Tensore di Riemann-Cartan e equazioni di Bianchi	7
2	Cinematica con Torsione	13
2.1	Formalismo 1+3	13
2.2	Cinematica con torsione nel formalismo 1+3	14
2.3	Equazione di evoluzione e vincoli	17
2.4	Equazioni di Raychaudhuri	19
2.5	Propagazione del taglio e della vorticità	20
2.6	Vincolo all'equazione di propagazione	20
2.7	Vincolo scalare	21
2.8	Vincolo vettoriale	21
2.9	Vincolo tensoriale	22
3	Universo di Einstein-Cartan	23
3.1	Azione di Einstein-Cartan	23
3.2	Equazioni di Raychaudhuri in un universo di Einstein-Cartan	25
3.3	Fluido di Weyssenhoff	29
4	Effetti cosmologici con fluido di spin	32
4.1	Metrica di FRW in uno spazio tempo con spin	32
4.2	Hamiltoniana del modello con fluido di spin	33
4.3	Il modello con fluido di spin testato dalle supernovae e dalla CMBR	37
4.4	Alternativa all'inflazione cosmica	38
5	Conclusioni	44

Capitolo 1

Geometria Differenziale con Torsione

Il nostro interesse primario è sviluppare una nozione intrinseca di curvatura che sia indipendente dalla varietà che stiamo considerando. Per fare ciò è necessario introdurre una struttura addizionale alla varietà, la connessione. In particolare il concetto di connessione risulta necessario poichè le derivate parziali non si comportano bene come tensori. Infatti, il concetto di connessione ci permette di definire una derivata che non dipende da un particolare sistema di riferimento: la derivata covariante. Dalla sua definizione è naturale costruire il concetto di trasporto parallelo. Infine, confrontando vettori trasportati parallelamente lungo percorsi diversi possiamo introdurre il concetto di curvatura intrinseca.

1.1 Connessione affine e trasporto parallelo

Definiamo quindi una connessione nel punto p della nostra varietà \mathcal{M} [1] come una applicazione che associa ad un vettore \mathbf{X} in p un operatore differenziale $\nabla_{\mathbf{X}}$. Quest'ultimo operatore $\nabla_{\mathbf{X}}$ mappa un arbitrario campo vettoriale \mathbf{Y} , definito in un opportuno intorno di p , in un vettore $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ in p . Chiediamo inoltre che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

- $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ è un tensore nell'argomento \mathbf{X} , ovvero per ogni funzione f, g continua e per i campi vettoriali $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ abbiamo:

$$\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}; \quad (1.1)$$

- $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ è lineare in \mathbf{Y} , ovvero per ogni campo vettoriale \mathbf{Y}, \mathbf{Z} e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\alpha\mathbf{Y} + \beta\mathbf{Z}) = \alpha\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \beta\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}; \quad (1.2)$$

- per ogni funzione f continua e campo vettoriale \mathbf{Y}

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = X(f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}. \quad (1.3)$$

Quindi chiamiamo $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ la derivata covariante di \mathbf{Y} nella direzione di \mathbf{X} al punto p rispetto alla connessione affine ∇ e dalla (1.1) possiamo definire $\nabla\mathbf{Y}$ la derivata covariante di \mathbf{Y} , senza specificare la direzione nella quale facciamo la derivata. Questa sarà un tensore di tipo (1,1) che quando contratto con il campo vettoriale \mathbf{X} darà il vettore $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$.

Abbiamo anche la seguente proprietà che deriva direttamente da (1.3):

$$\nabla(f\mathbf{Y}) = df \otimes \mathbf{Y} + f\nabla\mathbf{Y}. \quad (1.4)$$

Una connessione su tutta la varietà \mathcal{M} è una mappa che ad ogni punto associa la connessione definita in tale punto e in modo che se \mathbf{Y} è un campo vettoriale, $\nabla\mathbf{Y}$ è un campo tensoriale di tipo (1,1).

Se prendiamo ora una base vettoriale \mathbf{e}_a e la sua duale \mathbf{e}^a in un intorno \mathcal{U} , indicando le componenti della derivata covariante con il simbolo $Y^b_{;a}$, vale che

$$\nabla\mathbf{Y} = Y^b_{;a} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b. \quad (1.5)$$

Esprimendo il campo vettoriale \mathbf{Y} in componenti abbiamo che $\nabla\mathbf{Y} = \nabla(Y^c\mathbf{e}_c)$ e dalla (1.4) possiamo scrivere

$$\nabla\mathbf{Y} = \nabla(Y^c\mathbf{e}_c) = dY^c \otimes \mathbf{e}_c + Y^c\nabla\mathbf{e}_c. \quad (1.6)$$

Se definiamo $\nabla\mathbf{e}_c$ come

$$\nabla\mathbf{e}_c = \Gamma^b_{ca} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}_b \implies \nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{e}_c = \Gamma^b_{ca} \mathbf{e}_b, \quad (1.7)$$

possiamo scrivere la derivata covariante di \mathbf{Y} in coordinate come

$$Y^b_{;a} = \partial_a Y^b + \Gamma^b_{ca} Y^c. \quad (1.8)$$

I coefficienti Γ^b_{ca} sono i coefficienti della connessione affine. Le regole di trasformazione di Γ^b_{ca} , determinate dalle (1.1) - (1.3), ci mostrano come Γ^b_{ca} non sia un tensore. Tuttavia, per come abbiamo definito la derivata covariante e i coefficienti Γ^b_{ca} , la somma di Γ^b_{ca} e di $\partial_a Y^b$ (1.8) invece si trasforma come un tensore. [2]

Riscrivendo (1.8) come

$$Y^b_{;a} - \partial_a Y^b = \Gamma^b_{ca} Y^c, \quad (1.9)$$

possiamo vedere che i coefficienti della connessione affine ci dicono quanto differiscono la derivata direzionale standard $\partial_a Y^b$ e la derivata covariante $Y^b_{;a}$ in un certo intorno \mathcal{U} della varietà \mathcal{M} .

La nozione di derivata covariante può essere estesa a un tensore qualsiasi \mathbf{T} tenendo conto che:

- se \mathbf{T} è un tensore di tipo (k,l) allora $\nabla\mathbf{T}$ è un tensore di tipo (k,l+1)

- ∇ è lineare e commuta con le contrazioni
- per ogni campo tensoriale \mathbf{S}, \mathbf{T} possiamo estendere la regola di Leibnitz come

$$\nabla(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \nabla\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \nabla\mathbf{T}; \quad (1.10)$$

- vale per ogni funzione f

$$\nabla f = df. \quad (1.11)$$

Possiamo scrivere in componenti $\nabla\mathbf{T}$ come ¹:

$$(\nabla_h \mathbf{T})^{a\dots d}_{e\dots g} = \mathbf{T}^{a\dots d}_{e\dots g;h}, \quad (1.12)$$

da cui segue facilmente che

$$\nabla_a \mathbf{e}^c = -\Gamma^c_{ba} \mathbf{e}^a. \quad (1.13)$$

A questo punto possiamo definire facilmente il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva $\gamma(x)$ con $x \in [a, b]$. Seguendo formalmente [3] dato un campo vettoriale \mathbf{V} su \mathcal{M} , possiamo definire la sua derivata covariante lungo $\gamma(x)$ come

$$\frac{D\mathbf{V}}{\partial t}(x) = \nabla_{\partial/\partial t} \mathbf{V}(x). \quad (1.14)$$

Diciamo che il campo vettoriale \mathbf{V} è trasportato parallelamente se $\forall x \in [a, b]$

$$\frac{D\mathbf{V}}{\partial t}(x) = 0. \quad (1.15)$$

L'equazione in coordinate si riduce a un'equazione differenziale al primo ordine che ha una unica soluzione. Inoltre, è possibile dimostrare che esiste un isomorfismo di spazi tangenti

$$\mathbf{P}_\gamma : T_{\gamma(a)} \mathcal{M} \longrightarrow T_{\gamma(b)} \mathcal{M} \quad (1.16)$$

che, dato l'unico campo vettoriale \mathbf{V} trasportato parallelamente lungo γ , associa al vettore \mathbf{V}_a il vettore \mathbf{V}_b . Questa mappa definisce il trasporto parallelo di vettori lungo una curva γ .

Data una curva chiusa $\lambda : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}$, $\lambda(0) = \lambda(1) = x$, il trasporto parallelo definisce una mappa

$$R_\lambda : T_x \mathcal{M} \longrightarrow T_x \mathcal{M}, \quad \mathbf{V}_x \mapsto \mathbf{P}_\lambda \mathbf{V}_x. \quad (1.17)$$

In uno varietà Euclidea o Minkowskiana abbiamo sempre che $\mathbf{P}_\lambda \mathbf{V}_x = \mathbf{V}_x$, ma questo non è vero in una varietà qualsiasi. Questo ci porterà successivamente alla definizione del tensore di curvatura.

¹Da qui in poi per semplicità indicheremo $\nabla_{\mathbf{e}_h}$ con ∇_h

1.2 Compatibilità Metrica

Dalla definizione che abbiamo dato di derivata covariante, non esiste una derivata predefinita e sono possibili molte scelte che soddisfino le proprietà (1.1) – (1.3). Tuttavia, per i nostri scopi, la nostra varietà \mathcal{M} è dotata naturalmente di un tensore metrico \mathbf{g} e questo ci permette di fare una scelta ben precisa della derivata covariante facendo un'assunzione naturale rispetto alla metrica: dati due vettori v^a e w^b trasportati parallelamente lungo una curva γ , richiediamo che il prodotto scalare indotto dalla metrica \mathbf{g} , ovvero $g_{ab}v^av^b$, sia costante. Questo si traduce nella condizione:

$$X^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = 0 \Rightarrow X^a v^b w^c \nabla_a g_{bc} = 0, \quad (1.18)$$

dove abbiamo usato la regola di Leibnitz e il fatto che i due vettori v^a e w^b siano trasportati parallelamente, ovvero $\nabla_a v^b = \nabla_a w^b = 0$. Poichè questa condizione deve valere in generale per qualsiasi curva e qualsiasi vettore v^a e w^b , otteniamo la condizione:

$$\nabla_a g_{bc} = 0, \quad (1.19)$$

che è detta compatibilità con la metrica. Con questa connessione, il trasporto parallelo di vettori preserva sia il prodotto scalare definito da \mathbf{g} sia la lunghezza dei vettori.

Vogliamo ora capire quali sono i vincoli su Γ_{ac}^b dovuti a questa condizione. Prendendo spunto da [2] e da [4] senza alcuna assunzione di simmetria di Γ_{bc}^a , da (1.19) abbiamo:

$$\nabla_a g_{bc} = \partial_a g_{bc} - \Gamma_{bd}^e g_{ec} - \Gamma_{cd}^e g_{be} = 0, \quad (1.20)$$

da cui²

$$\Gamma_{cbd} + \Gamma_{bcd} = \partial_d g_{bc}. \quad (1.21)$$

Permutando gli indici otteniamo altre due equazioni:

$$\Gamma_{cdb} + \Gamma_{dcb} = \partial_b g_{dc}, \quad (1.22)$$

$$\Gamma_{dbc} + \Gamma_{bdc} = \partial_c g_{db}. \quad (1.23)$$

Sommando (1.23) e (1.22) e sottraendo (1.21) e alzando gli indici otteniamo^{3 4}:

$$\frac{1}{2} g^{ab} (\partial_b g_{bc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}) = \Gamma_{bc}^a - (\Gamma_{[bc]}^a + \Gamma_{b[a]}^c + \Gamma_{c[a]}^b). \quad (1.24)$$

²Nonostante Γ_{bd}^e non sia un tensore, per comodità e semplicità di scrittura useremo l'abuso di notazione per cui $\Gamma_{cbd} = \Gamma_{bd}^e g_{ec}$

³Indichiamo con le parentesi quadre in $\Gamma_{[bc]}^a$ la parte antisimmetrica dei coefficienti della connessione affine.

⁴In questo caso è lecito parlare di indici tensoriali poichè la differenza dei coefficienti della connessione affine è un tensore.

Definiamo quindi il tensore di torsione (vedi in [4], [5], [6], [7], [8])

$$S^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{[bc]} = \frac{\Gamma^a{}_{bc} - \Gamma^a{}_{cb}}{2}, \quad (1.25)$$

il quale è antisimmetrico per definizione. Pertanto otteniamo una espressione per i coefficienti della connessione affine:

$$\Gamma^a{}_{bc} = \tilde{\Gamma}^a{}_{bc} + K^a{}_{bc}, \quad (1.26)$$

dove abbiamo definito il tensore di controtorsione $K^a{}_{bc}$ come

$$K^a{}_{bc} = S^a{}_{bc} + S_{bc}{}^a + S_{cb}{}^a \quad (1.27)$$

Questo tensore soddisfa alcune identità algebriche (utili nei calcoli che svilupperemo):

$$K_{a[bc]} = S_{a[bc]} + S_{[bc]a} + S_{[cb]a} = S_{abc}. \quad (1.28)$$

Il fatto che il tensore di torsione sia antisimmetrico negli ultimi due indici significa che $S^a{}_{ab} = -S^a{}_{ba}$ e che $S^a{}_b{}^b = 0$. Pertanto esiste un'unica contrazione non banale del tensore di torsione che definisce il vettore di torsione:

$$S_a = S^b{}_{ab} = -S^b{}_{ba}. \quad (1.29)$$

Le contrazioni del tensore di controtorsione (1.27) danno luogo ad alcune relazioni standard:

$$K^b{}_{ab} = 2S_a, \quad (1.30)$$

$$K^b{}_{ba} = 0, \quad (1.31)$$

$$K^a{}_b{}^b = -2S^a. \quad (1.32)$$

1.3 Tensore di torsione

Spendiamo qualche parola in più per capire il significato geometrico del tensore di torsione $S^a{}_{bc}$.

Possiamo definire il tensore di torsione mediante campi vettoriale e indipendentemente dal sistema di riferimento come [9]⁵

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]), \quad (1.33)$$

⁵In questa trattazione cambiamo di segno al tensore \mathbf{S}

che in coordinate (in una base olonoma $[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = 0$) e tenuto conto di (1.7) diventa

$$\begin{aligned} S^a_{bc} e_a &= -\frac{1}{2} (\nabla_b e_c - \nabla_c e_b) = -\frac{1}{2} (\Gamma^a_{cb} - \Gamma^a_{bc}) e_a = \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}) e_a, \end{aligned} \tag{1.34}$$

che coincide con la definizione di S^a_{bc} data precedentemente.

Per visualizzare il significato di S^a_{bc} , prendiamo due vettori $\mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P$ al punto P e trasportiamo parallelamente il primo lungo la direzione del secondo e viceversa, ottenendo due nuovi vettori: \mathbf{u}_R^{\parallel} e \mathbf{v}_Q^{\parallel} . Vediamo dalla figura (1.1) che nel caso questo parallelogramma infinitesimo non si chiudesse, la connessione affine sarebbe dotata di torsione. [6] [10]

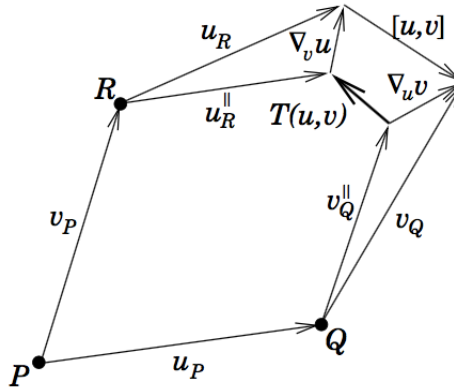


Figura 1.1: Vediamo come la torsione possa avere una interpretazione geometrica nella mancata chiusura di parallelogrammi infinitesimi (R e Q sono molto vicini a P). In questo caso $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -2\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

1.4 Curvatura, Tensore di Riemann-Cartan e equazioni di Bianchi

Come abbiamo appena visto, in generale, se prendiamo due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} e li trasportiamo parallelamente uno rispetto all'altro, non è detto che sia sufficiente considerare il vettore $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ per chiudere il loop. Cosa succede se prendiamo ora tre vettori, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}$? [11]

Consideriamo sempre il parallelogramma che abbiamo costruito nel paragrafo precedente. Trasportiamo il terzo vettore \mathbf{z} in due modi diversi: o lungo il percorso $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ o lungo il percorso $\mathbf{v} - \mathbf{u}$. Vediamo dalla figura (1.2) che otteniamo in generale due

vettori differenti la cui differenza è misurata da un vettore $\mathbf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{u}$. In particolare \mathbf{R} è il tensore di curvatura di Riemann.

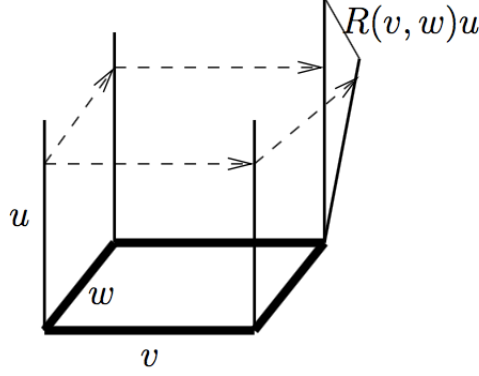


Figura 1.2: Da questa immagine visualizziamo il trasporto parallelo del vettore lungo i due diversi percorsi. In questo caso consideriamo il tensore di torsione nullo per semplicità ($\mathbf{S} = 0$).

In un modo più formale (vedi [3] e [12]) possiamo considerare due campi vettoriali \mathbf{v}, \mathbf{w} . Sia \mathbf{z} un terzo campo vettoriale: possiamo interpretare $\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{z}$ come la variazione di \mathbf{z} quando è trasportato parallelamente prima lungo \mathbf{w} e poi lungo \mathbf{v} e viceversa per $\nabla_{\mathbf{w}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$. Dobbiamo tenere conto anche del fatto che (in assenza della torsione per semplificare il tutto) il loop potrebbe non chiudersi e dovremmo tenere conto anche del vettore $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ che chiude il parallelogramma e che da un contributo $\nabla_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{z}$. Combinando queste espressioni, otteniamo quindi un'espressione del tutto generale per il tensore di curvatura di Riemann-Cartan:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{z} - \nabla_{\mathbf{w}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z} - \nabla_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \mathbf{z}. \quad (1.35)$$

Ci interessa ora calcolare le coordinate di questo tensore. Per semplificare il tutto, possiamo scrivere il tensore di Riemann-Cartan in funzione delle derivate covarianti seconde.

Per capire come è fatta una derivata covariante seconda, partiamo da $\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{z}$ e scriviamo tutto in coordinate:

$$v^a \nabla_a (w^b \nabla_b z^c) = v^a (\nabla_a w^b) (\nabla_b z^c) + v^a w^b \nabla_a \nabla_b z^c \quad (1.36)$$

L'ultimo termine è proprio la derivata covariante seconda $\nabla_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}^2 \mathbf{z}$ scritta in coordinate. Da questa relazione possiamo scrivere la derivata covariante seconda in funzione della derivata covariante prima come

$$\nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{z} = \nabla^2_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\mathbf{z} + \nabla_{\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}}\mathbf{z} \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\mathbf{z} = \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{z} - \nabla_{\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}}\mathbf{z}. \quad (1.37)$$

Andando a sostituire questa relazione nella definizione generale del tensore di curvatura (1.35) otteniamo

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \nabla^2_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\mathbf{z} - \nabla^2_{\mathbf{w},\mathbf{v}}\mathbf{z} + \nabla_{\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} - [\mathbf{v},\mathbf{w}]}\mathbf{z} \quad (1.38)$$

Notiamo come la direzione lungo la quale avviene la derivazione nella terza derivata covariante coincide con l'opposto del tensore di torsione (1.33). Pertanto possiamo esprimere il tensore di curvatura in funzione delle derivate covarianti secondo e del tensore di torsione come

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \nabla^2_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\mathbf{z} - \nabla^2_{\mathbf{w},\mathbf{v}}\mathbf{z} - 2\nabla_{\mathbf{S}(\mathbf{v},\mathbf{w})}\mathbf{z} \quad (1.39)$$

Possiamo ora trovare le componenti $R^a{}_{bcd}$ del tensore di curvatura. Da (1.39) e in base alla definizione di derivata covariante seconda otteniamo che

$$R^a{}_{bcd}z^b = \nabla_c\nabla_d z^a - \nabla_d\nabla_c z^a - 2S^b{}_{cd}\nabla_b z^a = [\nabla_c, \nabla_d]z^a - 2S^b{}_{cd}\nabla_b z^a. \quad (1.40)$$

Andiamo quindi a calcolarci $[\nabla_c, \nabla_d]z^a$ [7]:

$$\begin{aligned} [\nabla_c, \nabla_d]z^a &= 2\nabla_{[c}\nabla_{d]}z^a = 2\partial_{[c}\nabla_{d]}z^a - 2\Gamma^b{}_{[dc]}\nabla_b z^a + 2\Gamma^a{}_{e[c}\nabla_{d]}z^e = \\ &= 2\partial_{[c}(\partial_{d]}z^a + \Gamma^a{}_{|e|d]}z^e) + 2S^b{}_{cd}\nabla_b z^a + 2\Gamma^a{}_{e[c}(\partial_{d]}z^e + \Gamma^e{}_{|b|d]}z^b) = \\ &= 2\partial_{[c}\Gamma^a{}_{|b|d]}z^b - 2\Gamma^a{}_{e[c}\partial_{d]}z^e + 2S^b{}_{cd}\nabla_b z^a + 2\Gamma^a{}_{e[c}\partial_{d]}z^e + 2\Gamma^a{}_{e[c}\Gamma^e{}_{|b|d]}z^b = \\ &= 2(\partial_{[c}\Gamma^a{}_{|b|d]} + \Gamma^a{}_{e[c}\Gamma^e{}_{|b|d]})z^b + 2S^b{}_{cd}\nabla_b z^a. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Sostituendo questa espressione in (1.40) otteniamo il tensore di Riemann-Cartan in coordinate

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd} &= 2\partial_{[c}\Gamma^a{}_{|b|d]} + 2\Gamma^a{}_{e[c}\Gamma^e{}_{|b|d]} = \\ &= \partial_c\Gamma^a{}_{bd} - \partial_d\Gamma^a{}_{bc} + \Gamma^a{}_{ec}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{ed}\Gamma^e{}_{bc}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

che è in generale diverso dal tensore di Riemann classico poichè come abbiamo visto precedentemente i coefficienti della connessione affine non sono simmetrici. In questo caso otteniamo che il tensore di Riemann-Cartan si decompone in tre parti: una completamente Riemanniana $\tilde{R}^a{}_{bcd}$ ⁶, una completamente di torsione e una mista:

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd} &= \tilde{R}^a{}_{bcd} + \partial_c K^a{}_{bd} - \partial_d K^a{}_{bc} + K^s{}_{bd}K^a{}_{sc} - K^s{}_{bc}K^a{}_{sd} \\ &\quad + \tilde{\Gamma}^s{}_{bd}K^a{}_{sc} + K^s{}_{bd}\tilde{\Gamma}^a{}_{sc} - \tilde{\Gamma}^s{}_{bc}K^a{}_{sd} - K^s{}_{bc}\tilde{\Gamma}^a{}_{sd} \end{aligned} \quad (1.43)$$

⁶Da qui in poi indicheremo le parti relative alla sola componente simmetrica della connessione con una tilde.

Notiamo ora che aggiungendo e sottraendo $\tilde{\Gamma}_{dc}^s K_{bs}^a$ e tenendo conto che $\tilde{\Gamma}_{dc}^s = \tilde{\Gamma}_{cd}^s$, otteniamo due espressioni per la derivata covariante rispetto alla parte Riemanniana della connessione affine che indichiamo con $K_{bd:c}^a$ e $K_{bc:d}^a$. Possiamo scrivere (1.43) come

$$R^a{}_{bcd} = \tilde{R}^a{}_{bcd} + K_{bd:c}^a - K_{bc:d}^a + K_{bd}^s K_{sc}^a - K_{bc}^s K_{sd}^a. \quad (1.44)$$

Il tensore di Riemann-Cartan soddisfa alcune simmetrie. La prima è $R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc}$ che si ottiene direttamente dalla definizione (1.42). Una seconda proprietà si ottiene sviluppando i conti in maniera analoga a quanto fatto in (1.41) per z_a . Tenuto conto di $R^d{}_{acb} = -R^d{}_{abc}$, si ha che

$$2\nabla_{[c}\nabla_{b]}z_a = R^d{}_{abc}z_d - 2S_{bc}^d\nabla_d z_a = R_{dabc}z^d - 2S_{bc}^d\nabla_d z_a \quad (1.45)$$

Ricordando che $\nabla_c g_{ab} = 0$, da (1.42) otteniamo

$$2\nabla_{[c}\nabla_{b]}z_a = R_{adcb}z^d + 2S_{cb}^d\nabla_d z_a \quad (1.46)$$

che uguagliata a (1.45), grazie all'antisimmetria di S_{cb}^d , ci da $R_{dabc} = R_{adcb}$

In alternativa allo sviluppo che abbiamo portato avanti qui, è possibile dare un'interpretazione diversa al tensore di curvatura considerando le geodesiche (vedi [13]), ovvero quelle curve il cui vettore tangente è trasportato parallelamente alla curva stessa. Partendo da una famiglia di geodesiche $\lambda(n)$ nella varietà \mathcal{M} , dove n è il parametro selettore della famiglia, si può studiare come varia la separazione di queste curve nel limite di $\Delta n \rightarrow 0$ e si arriva alla stessa conclusione (1.35).

Supponiamo di voler studiare l'evoluzione di un certo volume invece che di un singolo oggetto che si muove lungo una geodesica $\lambda(n)$. Per studiare come evolve un certo volume dobbiamo fare una sorta di media delle geodesiche che passano in questo volume [14]. Per fare questo prendiamo la traccia del tensore di Riemann-Cartan e, tenendo conto che (1.30), otteniamo il tensore di Ricci-Cartan:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R^c{}_{acb} = \tilde{R}_{ab} + K_{ab:c}^c - K_{ac:b}^c + K_{ab}^s K_{sc}^c - K_{ac}^s K_{sb}^c = \\ &= \tilde{R}_{ab} + K_{ab:c}^c - 2S_{a:b} + 2K_{ab}^s S_s - K_{ac}^s K_{sb}^c \end{aligned} \quad (1.47)$$

Prendendo la traccia del tensore di Ricci-Cartan otteniamo lo scalare di Ricci-Cartan

$$\begin{aligned} R &= g^{ab}R_{ab} = \tilde{R} + K_a{}^a{}_{:c} - 2g^{ab}S_{a:b} + 2K_a{}^s S_s - K^{sbc}K_{csb} = \\ &= \tilde{R} - 2S^a{}_{:a} - 2g^{ab}S_{a:b} - 4S_a^a - K^{abc}K_{cab}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

dove abbiamo usato (1.32). Per un discorso analogo al tensore di Ricci-Cartan, lo R ci da informazioni su come l'area di un certo volume cambi rispetto all'area calcolata in uno spazio piatto.

Il tensore di Riemann-Cartan (in analogia al tensore di Riemann classico) può essere diviso nella sua traccia, il tensore di Ricci-Cartan, e nella sua parte senza traccia C_{abcd} che prende il nome di tensore di Weyl-Cartan [5]. Possiamo scrivere (1.35) in funzione di questo tensore come

$$R_{abcd} = C_{abcd} + R_{a[c}g_{d]b} - R_{b[c}g_{d]a} - \frac{1}{3}Rg_{a[c}g_{d]b}. \quad (1.49)$$

Andiamo ora a studiare come cambiano le identità di Bianchi se il tensore di torsione è diverso da 0. Le due identità se la torsione si annulla sono le seguenti:

$$R^a{}_{b[cd;f]} = 0 \quad (1.50)$$

$$R^b{}_{[dfc]} = 0 \quad (1.51)$$

La prima equazione è legata intrinsecamente alla conservazione dell'energia. Cerchiamo ora di capire il significato alla base della seconda identità: analogamente a quanto fatto precedentemente, prendiamo tre vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} e formiamo un parallelogramma con \mathbf{u} e \mathbf{v} ; se ora trasportiamo parallelamente \mathbf{u} lungo il percorso $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ o lungo il percorso $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ otteniamo due risultati diversi e questo è dovuto al fatto che il tensore di Riemann è diverso da 0. Pertanto ci sono diversi modi per costruire il sesto vertice del cubo (vedi figura (1.3)): dati tre vettori, tre sono i vertici possibili ($\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}$, $\mathbf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{u}$, $\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{u})\mathbf{v}$) che formano un triangolo e poichè i tre lati del triangolo si chiudono abbiamo

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} + \mathbf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{u} + \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{u})\mathbf{v} = 0 \quad (1.52)$$

che in coordinate è proprio la (1.51).

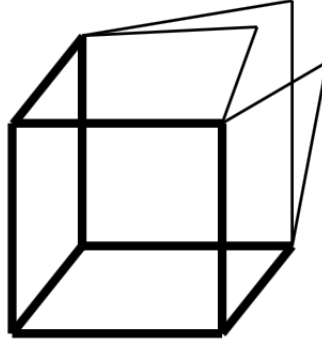


Figura 1.3: Vediamo la mancata chiusura del cubo e il significato geometrico della seconda identità nel caso di torsione nulla.

Vogliamo generalizzare queste due identità a uno spazio tempo con torsione [7]. Partiamo considerando la derivata covariante della (1.41):

$$2\nabla_f \nabla_{[c} \nabla_{d]} V^a = \nabla_f (R^a{}_{bcd} V^b) + \nabla_f (2S^e{}_{cd} \nabla_e V^a) \quad (1.53)$$

e ancora usando (1.41) al posto

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[c}\nabla_{d]}(\nabla_f V^a) &= R^a{}_{bcd}\nabla_f V^b - R^b{}_{fcd}\nabla_b V^a + 2S^e{}_{cd}\nabla_e\nabla_f V^a = \\ &= R^a{}_{bcd}\nabla_f V^b - R^b{}_{fcd}\nabla_b V^a + 2S^e{}_{cd}\nabla_f\nabla_e V^a + \\ &\quad + 2S^e{}_{cd}R^a{}_{gef}V^g + 4S^e{}_{cd}S^g{}_{ef}\nabla_g V^a. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Antisimetrizzando queste due equazioni otteniamo dalla prima

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[f}\nabla_c\nabla_{d]}V^a &= \nabla_{[f}R^a{}_{|b|cd]}V^b + R^a{}_{b[cd}\nabla_{f]}V^b \\ &\quad + 2\nabla_{[f}S^e{}_{cd]}\nabla_e V^a + 2S^e{}_{[cd}\nabla_{f]}\nabla_e V^a \end{aligned} \quad (1.55)$$

e dalla seconda

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[f}\nabla_c\nabla_{d]}V^a &= R^a{}_{b[fc}\nabla_{d]}V^b - R^b{}_{[dfc]}\nabla_b V^a + 2S^e{}_{[fc}\nabla_{d]}\nabla_e V^a \\ &\quad + 2S^e{}_{[fc}R^a{}_{|be|d]}V^b + 4S^e{}_{[fc}S^b{}_{|e|d]}\nabla_b V^a. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Uguagliando quest'ultime due otteniamo l'identità

$$\begin{aligned} \nabla_{[f}R^a{}_{|b|cd]}V^b + 2\nabla_{[f}S^e{}_{cd]}\nabla_e V^a &= -R^b{}_{[dfc]}\nabla_b V^a + \\ &\quad + 2S^e{}_{[fc}R^a{}_{|be|d]}V^b + 4S^e{}_{[fc}S^b{}_{|e|d]}\nabla_b V^a. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Uguagliando i termini in V^b presenti nelle (1.55) e (1.57) otteniamo la prima identità di Bianchi:

$$R^a{}_{b[cd;f]} = 2R^a{}_{be[cd}S^e{}_{f]c}, \quad (1.58)$$

mentre uguagliando i termini in $\nabla_b V^a$ presenti nelle (1.55) e (1.57) otteniamo la seconda identità di Bianchi:

$$R^b{}_{[dfc]} = -2S^b{}_{[cd;f]} + 4S^e{}_{[fc}S^b{}_{|e|d]} \quad (1.59)$$

Possiamo notare nella prima equazione di Bianchi (1.58) come la torsione possa essere una sorta sorgente energetica, mentre nella seconda (1.59), che rappresenta la mancata chiusura di un cubo infinitesimo (vedi fig (1.3)), il tensore di torsione tiene conto della mancata chiusura del parallelogramma di base (vedi fig (1.1)).

Capitolo 2

Cinematica con Torsione

2.1 Formalismo 1+3

Consideriamo ora uno spaziotempo 4-dimensionale con tensore metrico \mathbf{g} di segnatura $\{-, +, +, +\}$ (d'ora in avanti daremo per scontato che la nostra varietà sia di questo tipo). L'approccio che seguiremo in questa trattazione è basato sulla decomposizione dello spazio tempo in due parti: una temporale di dimensione 1 e una spaziale di dimensione 3 (seguiamo [5], [15] [16] [17]).

Per prima cosa introduciamo una famiglia di curve γ di tipo tempo, ovvero curve il cui vettore tangente u_a è di tipo tempo e unitario ($u^a u_a = -1$). Queste curve possono rappresentare le storie di particelle test e in tal caso le curve saranno geodesiche o linee di mondo.

Dato u_a abbiamo due proiettori naturali

$$U^a_b = -u^a u_b, \quad (2.1)$$

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b. \quad (2.2)$$

Il primo proietta il vettore $X^b \in T_q \mathcal{M}$ nella componente parallela a u_a mentre il secondo proiettore proietta il vettore X^b nel sottospazio $H_q \mathcal{M}$ di $T_q \mathcal{M}$ ortogonale a u_a . Possiamo pensare ad h_{ab} come alla metrica del sistema di riferimento istantaneamente a riposo nel punto q di osservatori con 4-velocità u_a .

Inoltre ricordiamo che η_{abcd} è l'elemento di volume 4-dimensionale completamente antisimmetrico ($\eta_{[abcd]} = \eta_{abcd}$, $\eta_{0123} = \sqrt{|\det g_{ab}|}$) e nella decomposizione 1+3 si decompone in

$$\eta_{abcd} = 2u_{[a} \varepsilon_{b]cd} - 2\varepsilon_{ab[c} u_{d]} \quad (2.3)$$

dove $\varepsilon_{abc} = \eta_{abcd} u^d$ è l'elemento di volume 3-dimensionale del sottospazio ortogonale $H_q \mathcal{M}$ ed è anche esso completamente antisimmetrico, $\varepsilon_{[abc]} = \varepsilon_{abc}$; vale che

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon^{dmn} = 3!h_{[a}{}^d h_b{}^m h_{c]}{}^n. \quad (2.4)$$

La decomposizione di ogni spazio tangente in due parti, una di tempo parallela a u^a e la sua controparte ortogonale può essere usata per decomporre ogni tensore dello spaziotempo e ogni equazione tensoriale nelle sue parti spaziali e temporali. I tensori e le equazioni di tipo spazio sono quelle per cui ogni contrazione con u^b è uguale a 0. Un esempio è proprio il proiettore h_{ab} per cui vale l'identità $h_{ab}u^b = 0$.

Ricaviamo anche una formula che ci tornerà utile successivamente. Considerando u_a il vettore unitario per cui vale $u^a u_a = -1$ abbiamo che

$$0 = \nabla_b(u^a u_a) = u_a \nabla_b u^a + u^a \nabla_b u_a = 2u^a \nabla_b u_a \quad (2.5)$$

dove abbiamo usato nella terza uguaglianza il fatto che $u_a = g_{ac}u^c$ e il fatto che $\nabla_b g_{ac} = 0$.

Una volta introdotta questa divisione dello spaziotempo, possiamo decomporre la derivata covariante proiettandola prima lungo u^a e poi lungo h_{ab} . Definiamo così la derivata temporale di un campo tensoriale generico $T_{abc\dots}{}^{def\dots}$ come

$$\dot{T}_{abc\dots}{}^{def\dots} = u^m \nabla_m T_{abc\dots}{}^{def\dots} \quad (2.6)$$

e la derivata spaziale come

$$D_m T_{abc\dots}{}^{def\dots} = h_m{}^q h_a{}^g h_b{}^k h_c{}^j \dots h_p{}^d h_r{}^e h_s{}^f \dots \nabla_q T_{gkj\dots}{}^{prs\dots}. \quad (2.7)$$

Notiamo che la derivata spaziale di h_{ab} si annulla sempre ($D_c h_{ab} = 0$) ovvero il proiettore rimane invariante rispetto alla derivata covariante spaziale.

In modo simile a quanto fatto per il tensore di Riemann-Cartan è possibile separare (2.7) nelle sue componenti Riemanniane e non. Usando (1.26), otteniamo per un tensore di tipo (2,0)

$$D_c T_{ab} = \tilde{D}_c T_{ab} - h_c{}^f h_a{}^d h_b{}^m (K_{df}{}^p T_{pm} + K_{mf}{}^p T_{dp}). \quad (2.8)$$

Quest'ultima relazione assicura che se $D_c h_{ab} = 0$ allora anche $\tilde{D}_c h_{ab} = 0$. Quindi il proiettore rimane invariante sia rispetto alla derivata covariante spaziale generale D che quella riemanniana \tilde{D} . Inoltre l'espressione (2.4) assicura che l'elemento 3-D di volume è anch'esso invariante rispetto alla derivazione covariante $D_d \varepsilon_{abc} = 0$.

2.2 Cinematica con torsione nel formalismo 1+3

Andiamo ora a studiare la cinematica in uno spazio tempo con torsione. Tutta la cinematica delle particelle test è racchiusa nella derivata covariante del campo vettoriale della 4-velocità u_a .

Il primo passo per ricavarci la cinematica è calcolare la derivata spaziale di u_a . Questo permette di separare la derivata covariante in due termini. Infatti, dalla definizione di h_{ab} e da (2.7) otteniamo

$$\begin{aligned} D_b u_a &= h_b^c h_a^d \nabla_c u_d = (\delta_b^c \delta_a^d + u_b u^c \delta_a^d + u_a u^d \delta_b^c + u_b u^c u_a u^d) \nabla_c u_d \\ &= \nabla_b u_a + u_b u^c \nabla_c u_a + u_a u^d \nabla_b u_d + u_b u^c u_a u^d \nabla_c u_d. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Poichè gli ultimi due termini sono 0 per la (2.5), ponendo $A_a = u^c \nabla_c u_a$ otteniamo

$$\nabla_b u_a = D_b u_a - A_a u_b. \quad (2.10)$$

Il vettore A^a è l'accelerazione relativistica e rappresenta il contributo al moto di forze diverse dalla gravità e l'inerzia, pertanto si annulla quando la particella test è in caduta libera. Notiamo che A^a è di tipo spazio: infatti contraendo lungo u_a

$$A^a u_a = u_a u^c \nabla_c u^a = u^c u^a \nabla_c u_a = 0, \quad (2.11)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto di (2.5).

Le traiettorie delle particelle con velocità u^a possono subire diversi effetti che conosciamo dalla teoria dei fluidi e dalla teoria elastica (vedi fig. (2.1)):

- Effetti di espansione o contrazione del volume sono dati quantitativamente dalla divergenza del campo di velocità $\Theta = \nabla_a u^a = D_a u^a$ (visto che $A_a u^a = 0$);
- Effetti di taglio, ovvero deformazione della forma senza cambio nel volume, sono descritti da un tensore simmetrico σ_{ab} senza traccia (ovvero escludiamo effetti dovuti al volume) e ortogonale al campo di velocità u^a ($u^a \sigma_{ab} = 0$):

$$\sigma_{ab} = D_{\langle b} u_{a \rangle} = D_{(b} u_{a)} - \frac{1}{3} \Theta h_{ab}. \quad (2.12)$$

Il fatto che sia ortogonale a u^a è un semplice calcolo che fa uso del fatto che h_{ab} sia di tipo spazio ($h_{ab} u^a = 0$).

- Effetti di vorticità dovuti ad una rotazione senza cambio nella forma sono dati da un tensore antisimmetrico ω_{ab} ortogonale al campo di velocità u^a :

$$\omega_{ab} = D_{[b} u_{a]} \quad (2.13)$$

Da queste definizioni è possibile decomporre la parte spaziale della derivata covariante $D_b u_a$ nelle tre componenti

$$D_b u_a = \frac{1}{3} \Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (2.14)$$

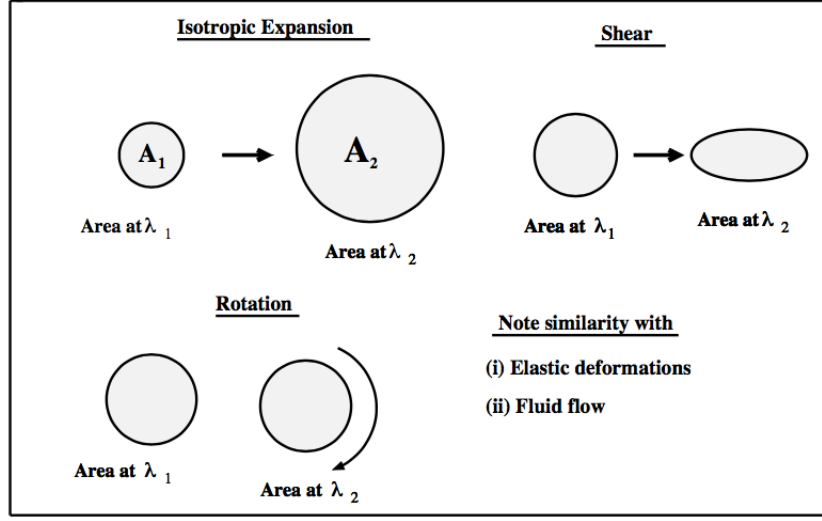


Figura 2.1: Da questa immagine vediamo i tre effetti descritti rispettivamente da $\Theta, \sigma_{ab}, \omega_{ab}$. Notiamo l'analogia con fenomeni relativi a deformazioni elastiche e al flusso di un fluido.

e ottenere per la derivata covariante di u_a l'espressione seguente:

$$\nabla_b u_a = \frac{1}{3} \Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} - A_a u_b. \quad (2.15)$$

Abbiamo quindi espresso la derivata covariante della 4-velocità nelle sue componenti irriducibili $\Theta, \sigma_{ab}, \omega_{ab}$ e l'accelerazione A_a .

Elenchiamo alcuni risultati che ci saranno utili successivamente. Il primo è la derivata temporale del proiettore \dot{h}_{ab} . Partendo dalla definizione di derivata temporale e di h_{ab} (2.2) otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab} &= u^m \nabla_m h_{ab} = u^m \nabla_m (u_a u_b) = u^m (u_a \nabla_m u_b + u_b \nabla_m u_a) = \\ &= u^m \left[u_a \left(\frac{1}{3} \Theta h_{bm} + \sigma_{bm} + \omega_{bm} - A_b u_m \right) + \right. \\ &\quad \left. + u_b \left(\frac{1}{3} \Theta h_{am} + \sigma_{am} + \omega_{am} - A_a u_m \right) \right] = \\ &= A_a u_b + A_b u_a = 2A_{(a} u_{b)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove abbiamo tenuto conto che $\nabla g_{ab} = 0$ e delle relazioni di ortogonalità di u_a .

Il secondo è la derivata covariante di A_a :

$$\nabla_b A_a = D_b A_a + \frac{1}{3} \Theta u_a A_b + u_a (\sigma_{bc} - \omega_{bc}) A^c - (A_a u_b)' + A_a A_b. \quad (2.17)$$

Quando siamo in una varietà Riemanniana con torsione nulla (le cui variabili saranno indicate con una tilde) l'equazione di evoluzione (2.15) ha la stessa forma, ovvero

$$\tilde{\nabla}_b u_a = \frac{1}{3} \tilde{\Theta} h_{ab} + \tilde{\sigma}_{ab} + \tilde{\omega}_{ab} - \tilde{A}_a u_b, \quad (2.18)$$

dove le variabili puramente Riemanniane hanno le stesse proprietà che hanno quelle generali di Cartan.

Sfruttando le relazioni di simmetria del tensore di torsione, possiamo separare le variabili generali di Cartan nella loro componente Riemanniana e in quella realtiva al tensore di torsione. Otteniamo quindi le seguenti relazioni:

- Per il fattore di volume Θ

$$\Theta = \tilde{\Theta} + 2S_a u^a, \quad (2.19)$$

- per il fattore di taglio σ_{ab}

$$\sigma_{ab} = \tilde{\sigma}_{ab} - 2h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d S_{cdm} u^m - \frac{2}{3} S_c u^c h_{ab}, \quad (2.20)$$

- per il fattore di rotazione ω_{ab}

$$\omega_{ab} = \tilde{\omega}_{ab} - h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d S_{mcd} u^m, \quad (2.21)$$

- e infine per la 4-accelerazione A_a

$$A_a = \tilde{A}_a + 2S_{(bc)a} u^b u^c. \quad (2.22)$$

Notiamo come nel caso di un tensore di torsione completamente antisimmetrico ($S_{abc} = S_{[abc]} \implies S_a = 0, S_{(ab)c} = 0$) le variabili di Cartan coincidono con quelle Riemanniane eccetto per il fattore di rotazione $\omega_{ab} = \tilde{\omega}_{ab} - h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d S_{mcd} u^m$.

2.3 Equazione di evoluzione e vincoli

Ci interessa ora ricavare le equazioni di evoluzioni per le tre quantità specificate precedentemente. Tutto ciò lo possiamo ottenere dall'identità di Ricci relativa all'osservatore u_a . In particolare, la componente temporale dell'equazione risultante descrive la propagazione di Θ , σ_{ab} e ω_{ab} mentre la parte spaziale fornisce i vincoli.

Prendendo spunto da [18] e generalizzando al caso con torsione, partiamo dall'identità di Ricci (1.45) e proiettando lungo u^c otteniamo:

$$u^c \nabla_c \nabla_b u_a - u^c \nabla_b \nabla_c u_a = R^d{}_{abc} u^c u_d - 2u^c S^d{}_{bc} \nabla_d u_a \quad (2.23)$$

Riconosciamo nel primo termine della parte sinistra dell'equazione quella che abbiamo definito precedentemente come la derivata temporale, ovvero $(\nabla_b u_a)'$, mentre il secondo termine sempre nella parte sinistra lo possiamo scrivere come:

$$\begin{aligned}
u^c \nabla_b \nabla_c u_a &= \nabla_b (u^c \nabla_c u_a) - \nabla_b u^c \nabla_c u_a = \nabla_b A_a - \frac{1}{9} \Theta^2 h_{ab} - \frac{2}{3} \Theta (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) - \\
&\quad - \sigma_{ca} \sigma_b^c - \omega_{ca} \omega_b^c + 2\sigma_{c[a} \omega_{b]}^c + \frac{1}{3} \Theta A_a u_b + A^c u_b \sigma_{ac} + A^c u_b \omega_{ac} = \\
&\quad - \frac{1}{9} \Theta^2 h_{ab} - \frac{2}{3} \Theta (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) - \sigma_{ca} \sigma_b^c - \omega_{ca} \omega_b^c + 2\sigma_{c[a} \omega_{b]}^c + D_b A_a + \\
&\quad + \frac{2}{3} \Theta u_{(a} A_{b)} + 2u_{(a} \sigma_{b)c} A^c - 2u_{[a} \omega_{b]c} A^c - (A_a u_b)' + A_a A_b \quad (2.24)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato (2.17) e l'ortogonalità di u^c con i vari tensori $h_{ac}, \omega_{ac}, \sigma_{ac}, A_c$.

Per quanto riguarda la parte relativa al tensore di torsione otteniamo:

$$\begin{aligned}
2u^c S_{bc}^d \nabla_d u_a &= 2u^c S_{bc}^d \left(\frac{1}{3} \Theta h_{ad} + \sigma_{ad} + \omega_{ad} - A_a u_d \right) = \\
&= \frac{2}{3} S_{abc} \Theta u^c + 2u^d u^c S_{dcb} \left(\frac{1}{3} \Theta u_a - A_a \right) + 2S_{dcb} (\sigma_a^d + \omega_a^d) u^c. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Unendo questi diversi sviluppi si ricava il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
(\nabla_b u_a)' &= -\frac{1}{9} \Theta^2 h_{ab} - R_{cadb} u^c u^d - \frac{2}{3} \Theta (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) - \sigma_{ca} \sigma_b^c - \omega_{ca} \omega_b^c + 2\sigma_{c[a} \omega_{b]}^c \\
&\quad + D_b A_a + \frac{2}{3} \Theta u_{(a} A_{b)} + 2u_{(a} \sigma_{b)c} A^c - 2u_{[a} \omega_{b]c} A^c - (A_a u_b)' + A_a A_b \\
&\quad - \frac{2}{3} \Theta S_{abc} u^c + 2 \left(\frac{1}{3} \Theta u_a - A_a \right) u^c u^d S_{cdb} + 2(\sigma_a^c + \omega_a^c) u^d S_{cdb} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Sviluppando il termine a sinistra e tenendo conto di (2.16) otteniamo che

$$(\nabla_b u_a)' = \frac{1}{3} \dot{\Theta} h_{ab} + \frac{2}{3} \Theta A_{(a} u_{b)} + \dot{\sigma}_{ab} + \dot{\omega}_{ab} - (A_a u_b)' \quad (2.27)$$

Inserendo quest'ultimo risultato in (2.26) ed eliminando i termini uguali si arriva a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \dot{\Theta} h_{ab} + \dot{\sigma}_{ab} + \dot{\omega}_{ab} &= -\frac{1}{9} \Theta^2 h_{ab} - R_{cadb} u^c u^d - \frac{2}{3} \Theta (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) - \sigma_{ca} \sigma_b^c - \omega_{ca} \omega_b^c + 2\sigma_{c[a} \omega_{b]}^c \\
&\quad + D_b A_a + 2u_{(a} \sigma_{b)c} A^c - 2u_{[a} \omega_{b]c} A^c + A_a A_b \\
&\quad - \frac{2}{3} \Theta S_{abc} u^c + 2 \left(\frac{1}{3} \Theta u_a - A_a \right) u^c u^d S_{cdb} + 2(\sigma_a^c + \omega_a^c) u^d S_{cdb}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Infine proiettando tutto ortogonalmente al campo u_a e usando le simmetrie del tensore di curvatura si arriva a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\dot{\Theta}h_{ab} + h_{\langle a}{}^c h_{b\rangle}{}^d \dot{\sigma}_{cd} + h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d \dot{\omega}_{cd} = & -\frac{1}{9}\Theta^2 h_{ab} - R_{acbd}u^c u^d - \frac{2}{3}\Theta(\sigma_{ab} + \omega_{ab}) - \sigma_{ca}\sigma_b{}^c - \\ & - \omega_{ca}\omega_b{}^c + 2\sigma_{c[a}\omega_{b]}{}^c + D_b A_a + A_a A_b - \frac{2}{3}\Theta h_a{}^c h_b{}^d S_{cdm} u^m - \\ & - 2A_a u^c u^d h_b{}^m S_{cdm} + 2(\sigma_a{}^c + \omega_a{}^c) u^d h_b{}^m S_{cdm}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

ricordando che valgono le seguenti identità: $h_a{}^c h_b{}^d \dot{\sigma}_{cd} = h_{\langle a}{}^c h_{b\rangle}{}^d \dot{\sigma}_{cd}$ e $h_a{}^c h_b{}^d \dot{\omega}_{cd} = h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d \dot{\omega}_{cd}$.

Questa equazione è del tutto generale e descrive completamente la cinematica di una particella test in uno spazio tempo con torsione senza alcuna assunzione specifica sulla natura del tensore di torsione.

2.4 Equazioni di Raychaudhuri

Prendendo la traccia di (2.29) otteniamo l'evoluzione temporale di Θ :

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - R_{(ab)}u^a u^b - 2(\sigma^2 - \omega^2) + D_a A^a + A_a A^a + \quad (2.30)$$

$$+ \frac{2}{3}\Theta S_a u^a - 2S_{(ab)c} u^a u^b A^c - 2S_{\langle ab\rangle c} \sigma^{ab} u^c + 2S_{[ab]c} \omega^{ab} u^c \quad (2.31)$$

dove abbiamo posto $\sigma^{ab}\sigma_{ab} = 2\sigma^2$ e $\omega^{ab}\omega_{ab} = 2\omega^2$. Questa è l'equazione di Raychaudhuri ([19], [20]) ed è l'equazione alla base della descrizione dell'espansione/contrazione gravitazionale dello spazio tempo e della formulazione di diversi teoremi sulle singolarità. I termini positivi tendono a favorire l'espansione o, dal punto di vista opposto, tendono a frenare la contrazione, mentre i termini negativi hanno effetto opposto, ovvero tendono a favorire la contrazione o a frenare l'espansione.

Sotto alcune assunzioni questa equazione si semplifica: prendendo le linee di mondo delle particelle test autoparallele, la 4-accelerazione si annulla ($A_a = 0$) (questa condizione ci permette di considerare solo forze gravitazionali ed inerziali). In più, quando la congruenza autoparallela è irrotazionale e non sono presenti effetti di taglio, ovvero $\sigma_{ab} = \omega_{ab} = 0$ la (2.31) si riduce a:

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - R_{(ab)}u^a u^b + \frac{2}{3}\Theta S_a u^a \quad (2.32)$$

In base alle assunzioni che abbiamo fatto, possiamo interpretare quest'ultima equazione come l'espansione o la contrazione di un universo spazialmente omogeneo e isotropico:

l'omogeneità è data dal fatto che per ogni evento nell'universo passa una iper superficie di tipo spazio lungo la quale le condizioni iniziali sono le stesse, mentre per isotropia si intende che un osservatore comovente col fluido non può distinguere una direzione rispetto ad un'altra con una misura fisica locale. L'isotropia garantisce che le linee di mondo del fluido sono ortogonali alle ipersuperfici di tipo spazio. Questo è l'analogo con torsione dell'universo di Friedmann-Robertson-Walker. In questo caso è necessario che il tensore di torsione sia di tipo tempo perchè altrimenti non potremmo avere un universo isotropo.

Osserviamo che quando $2\Theta S_a u^a - 3R_{(ab)} u^a u^b > 0$ le linee di mondo convergono ma la singolarità può essere evitata.

2.5 Propagazione del taglio e della vorticità

La parte simmetrica senza traccia e antisimmetrica dell'espressione generale (2.29) invece danno luogo ad altre due equazioni di propagazione.

Per l'equazione relativa al taglio σ_{ab} vale che

$$\begin{aligned} h_{\langle a}{}^c h_{b\rangle}{}^d \dot{\sigma}_{cd} = & -\frac{2}{3}\Theta\sigma_{ab} - \sigma_{c\langle a}\sigma_{b\rangle}{}^c - \omega_{c\langle a}\omega_{b\rangle}{}^c + D_{\langle b}A_{a\rangle} + A_{\langle a}A_{b\rangle} - R_{\langle a}{}^c{}_{b\rangle}{}^d u_c u_d \\ & - \frac{2}{3}\Theta h_{\langle a}{}^c h_{b\rangle}{}^d S_{cdm} u^m - 2A_{\langle a} u^c u^d h_{b\rangle}{}^m S_{cdm} \\ & + 2(\sigma_{\langle a}{}^c + \omega_{\langle a}{}^c) u^d h_{b\rangle}{}^m S_{cdm}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

mentre per l'equazione relativa al termine di vorticità ω_{ab} vale che

$$\begin{aligned} h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d \dot{\omega}_{cd} = & -\frac{2}{3}\Theta\omega_{ab} + 2\sigma_{c[a}\omega_{b]}{}^c + D_{[b}A_{a]} - R_{[a}{}^c{}_{b]}{}^d u_c u_d - \frac{2}{3}\Theta h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d S_{cdm} u^m \\ & - 2A_{[a} u^c u^d h_{b]}{}^m S_{cdm} + 2(\sigma_{[a}{}^c + \omega_{[a}{}^c) u^d h_{b]}{}^m S_{cdm}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La prima delle due descrive la distorsione in funzione del tempo della forma della congruenze u_a a volume costante e descrive le eventuali anisotropie dello spazio tempo, mentre la seconda governa il comportamento rotazionale delle stesse congruenze u_a in funzione del tempo.

2.6 Vincolo all'equazione di propagazione

Se l'evoluzione delle tre parti è data dalla parte temporale delle equazioni, i vincoli sono dati dalla loro parte spaziale. Questi si ottengono prendendo la parte spaziale dell'identità di Ricci (1.45) applicata alla 4-velocità u_a .

Contraendo (1.45) con il tensore 3-dimensionale di Levi-Civita ε_{abc} otteniamo

$$\varepsilon_{cda} \nabla^c \nabla^d u_b = -\frac{1}{2} \varepsilon_{cda} R_{mb}{}^{cd} u^m + \varepsilon_{cda} S^{mcd} \nabla_m u_b. \quad (2.35)$$

Sostituendo la decomposizione (2.15) in quest'ultima, proiettandola ortogonalmente a u_a e tenendo conto che $\omega_{ab} = \varepsilon_{abc} \omega^c$ otteniamo la relazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \varepsilon_{abc} D^c \Theta - \varepsilon_{cda} D^c \sigma_b{}^d + (D^c \omega_c) h_{ab} - D_b \omega_a &= 2\omega_a A_b - \frac{1}{2} \varepsilon_{cda} R_{bm}{}^{cd} u^m - \frac{1}{3} \Theta \varepsilon_{cda} h_{bm} S^{mcd} \\ &\quad - \varepsilon_{cda} \sigma_{bm} S^{mcd} + \varepsilon_{cda} \varepsilon_{bmn} \omega^{[m} S^{n]cd} \\ &\quad + \varepsilon_{cda} A_b u_m S^{mcd} \end{aligned} \quad (2.36)$$

che rappresenta il vincolo generale per il gradiente della 4-velocità u_a (2.29) rispetto all'osservatore istantaneamente a riposo nello spazio 3-D. Prendendo la traccia, la parte antisimmetrica e la parte simmetrica senza traccia di (2.36) ricaviamo tre vincoli: un vincolo scalare su ω^a , un vincolo vettoriale su Θ e un vincolo tensoriale su σ_{ab} .

2.7 Vincolo scalare

Prendendo la traccia di (2.36) e ricordando le proprietà del tensore di Levi-Civita ($\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{[abc]}$ e $\varepsilon_{abc} u^c = 0$), la definizione del tensore di torsione (1.29) e la decomposizione (1.49) otteniamo il vincolo scalare

$$\begin{aligned} D_a \omega^a &= A_a \omega^a + \frac{1}{4} \varepsilon_{abc} u_d C^{d[abc]} - \frac{1}{6} \Theta \varepsilon_{abc} S^{[abc]} - \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \sigma^{d[a} S_d{}^{bc]} + S_a \omega^a - S_{(ab)c} u^a u^b \omega^c \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} u^d A^{[a} S_d{}^{bc]} \end{aligned} \quad (2.37)$$

che rappresenta la divergenza spaziale 3-dimensionale del tensore di vorticità. Possiamo notare che in uno spazio tempo senza torsione vale sia $S^a{}_{bc} = 0$ che $C_{abcd} = 0$ e il vincolo scalare si semplifica notevolmente in

$$D_a \omega^a = A_a \omega^a \quad (2.38)$$

2.8 Vincolo vettoriale

Se invece prendiamo la parte antisimmetrica di (2.36), ricordando che $D_c h_{ab} = 0$, usando la (1.49) e tenendo a mente che C_{abcd} è un tensore a traccia nulla otteniamo il vincolo vettoriale

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} D_a \Theta &= D^b \sigma_{ab} - \text{curl} \omega_a - 2\varepsilon_{abc} A^b \omega^c - h_a{}^b R_{cb} u^c + \frac{2}{3} \Theta h_a{}^{[c} h_b{}^{d]} S^b{}_{cd} + 2h_a{}^{[c} \sigma_b{}^{d]} S^b{}_{cd} \\ &\quad - 2h_a{}^{[c} \varepsilon_b{}^{d]m} S^b{}_{cd} \omega_m - 2h_a{}^{[c} A^{d]} u_b S^b{}_{cd} \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove $\text{curl}v_a = \varepsilon_{abc}D^b v^c$ è il rotore di v_a per ogni vettore di tipo spazio v_a .

2.9 Vincolo tensoriale

Infine prendendo la parte simmetrica senza traccia di (2.36) e ponendo $\text{curl}v_{ab} = \varepsilon_{cd\langle a}D^c v^d_{\rangle b}$ per ogni tensore di tipo spazio v_{ab} otteniamo il vincolo tensoriale senza traccia

$$\begin{aligned} \text{curl}\sigma_{ab} = & -D_{\langle b}\omega_{a\rangle} - 2A_{\langle a}\omega_{b\rangle} + \frac{1}{2}\varepsilon_{cd\langle a}C_{b\rangle m}{}^{[cd]}u^m + \frac{1}{3}\Theta\varepsilon_{cd\langle a}h_{b\rangle m}S^{mcd} + \varepsilon_{cd\langle a}\sigma_{b\rangle m}S^{mcd} \\ & - \varepsilon_{cd\langle a}\varepsilon_{b\rangle mn}\omega^{[n}S^{m]cd} - \varepsilon_{cd\langle a}A_{b\rangle}u_m S^{mcd} \end{aligned} \quad (2.40)$$

che determina il rotore del tensore di taglio σ_{ab} in uno spazio tempo con torsione non nulla.

Concludiamo questa prima parte evidenziando il fatto che fino ad ora i risultati che abbiamo ottenuto sono puramente geometrici e svincolati da qualsiasi restrizione fisica, sia per quanto riguarda la natura della materia presente nello spaziotempo, sia per quanto riguarda l'interazione tra quest'ultima e la geometria dello spaziotempo. Una volta introdotte le equazioni di campo e specificato la natura della materia all'interno dell'universo, queste formule permettono di descrivere la cinematica associata.

Capitolo 3

Universo di Einstein-Cartan

La gravità descritta in universo di Einstein-Cartan è la più semplice espansione della Relatività Generale classica che tiene conto dello spin intrinseco delle particelle. Nella derivazione dell'equazione di Einstein classica si parte da un principio variazionale e la metrica \mathbf{g} è considerata l'unica variabile variazionale. Nel momento in cui introduciamo nella descrizione geometrica e fisica il tensore di torsione \mathbf{S} per ricavarci le equazioni di campo è necessario considerare come variabile variazionale anche il tensore di torsione. [7]

3.1 Azione di Einstein-Cartan

La nostra trattazione parte dall'azione di Einstein-Cartan. Seguendo quanto fatto in [7], l'azione che tiene conto del campo gravitazionale e della materia è la seguente:

$$S = -\frac{1}{2\kappa c} \int R\sqrt{-g}d\Omega + S_m \quad (3.1)$$

Il primo pezzo è dovuto al campo gravitazionale che è strettamente legato al tensore metrico \mathbf{g} e al tensore di Ricci mentre il secondo termine è l'azione relativa alla presenza di materia, ovvero tutto ciò che non è relativo al campo gravitazionale.

Sostituendo (1.48) e trascurando i termini con derivate totali che nell'integrazione per parti si annullano otteniamo

$$S = -\frac{1}{2\kappa c} \int \left(\tilde{R} - g^{ab} (K_{ac}^c K_{bs}^s - K_{ac}^s K_{bs}^c) \right) \sqrt{-g}d\Omega + S_m. \quad (3.2)$$

Variando S rispetto sia alla metrica g^{ab} che al tensore di torsione (il che equivale a variare rispetto al tensore di controtorsione K^a_{bc}), otteniamo:

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{2\kappa c} \int \left(\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{ab} - K^c_{ac} K^s_{bs} + K^s_{ac} K^c_{bs} + \frac{1}{2} g_{ab} (K^{cs}_c K^d_{sd} - K^{dc}_s K^s_{cd}) \right) \\ & \times \sqrt{-g} \delta g^{ab} d\Omega - \frac{1}{\kappa c} \int (K^{bc}_a - K^{sc}_s \delta^b_a) \sqrt{-g} \delta K^a_{cb} d\Omega + \\ & \frac{1}{2c} \int T_{ab} \sqrt{-g} \delta g^{ab} d\Omega + \frac{1}{2c} \int s_c^{ab} \sqrt{-g} \delta K^c_{ab} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove introduciamo il tensore di spin canonico s_{abc} e il relativo vettore di spin $s_a = s_{ba}{}^b$.

Per sole variazioni di δg^{ab} , ponendo $\delta S = 0$ otteniamo la prima equazione di campo di Einstein-Cartan:

$$\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{ab} = \kappa (T_{ab} + U_{ab}), \quad (3.4)$$

dove

$$U_{ab} = \frac{1}{\kappa} \left(K^c_{ac} K^d_{bd} - K^d_{ac} K^c_{bd} - \frac{1}{2} g_{ab} (K^{cd}_c K^e_{de} - K^{dce} K_{ecd}) \right). \quad (3.5)$$

Viceversa, per sole variazioni di δK^c_{ab} , ponendo $\delta S = 0$ otteniamo la seconda equazione di campo di Einstein-Cartan

$$K^b_{[ca]} - \delta^b_{[a} K^s_{c]s} = \frac{\kappa}{2} s_{ac}{}^b, \quad (3.6)$$

Esprimendo tutto in funzione del tensore di torsione e facendo uso di (1.28) e (1.30) risulta che

$$S^b_{ca} - \frac{1}{2} (\delta^b_a K^s_{cs} - \delta^b_c K^s_{as}) = \frac{\kappa}{2} s_{ac}{}^b \implies S_{bca} - g_{ba} S_c + g_{bc} S_a = \frac{\kappa}{2} s_{acb}, \quad (3.7)$$

e tenendo conto dell'antisimmetria di S_{abc} si ha

$$S_{bac} - S_a g_{cb} + S_c g_{ba} = -\frac{\kappa}{2} s_{acb}. \quad (3.8)$$

Alzando l'indice b e contraendo l'equazione otteniamo

$$S^b_{ab} - S_a g_b{}^b + S_b g^b{}_a = -\frac{\kappa}{2} s_{ab}{}^b \quad (3.9)$$

che diventa

$$S_a = -\frac{1}{4} \kappa s_a \quad (3.10)$$

ricordando che $S^b_{ab} = S_a$ e $s_a = s_{ba}{}^b = -s_{ab}{}^b$.

Questa equazione che lega S_a a s_a ci è utile per la seguente relazione da (3.8)

$$S_{bac} = -\frac{1}{4} \kappa (2s_{acb} - s_c g_{ba} + s_a g_{cb}). \quad (3.11)$$

La relazione che vediamo è puramente algebrica: la torsione in un dato punto non è uguale zero solo se è presente materia in quel punto. Diversamente dalla metrica, che è legata alla materia (descritta dal tensore energia-impulso) da un'equazione differenziale (3.4), S_{bac} non si propaga nello spazio, piuttosto la relazione con il tensore di spin è puntuale. Notiamo che nel caso in cui il tensore di spin si annullasse anche il tensore di torsione sarebbe nullo e viceversa da (3.6) se il vettore di torsione si annullasse anche il tensore di spin sarebbe nullo. Questo ci porta a pensare che in universo di Einstein-Cartan torsione e spin siano intrinsecamente legati l'uno all'altro.

Combinando (3.5) con (1.27), (1.28) e (1.30) otteniamo

$$U_{ab} = \frac{1}{\kappa} \left[4S_a S_b - (S_{ac}^d + 2S_{(ac)}^d) (S_{bd}^c + 2S_{(bd)}^c) - 2g_{ab} S^d S_d + \frac{1}{2} (S^{dce} + 2S^{(ce)d}) (S_{ecd} + 2S_{(cd)e}) \right] \quad (3.12)$$

che può essere espressa per mezzo del tensore di spin come

$$U_{ab} = \kappa \left(-s_a^c {}_{[d} s_b^d {}_{|c]} - \frac{1}{2} s_a^{cd} s_{bcd} + \frac{1}{4} s_a^{cd} s_{cdb} + \frac{1}{8} g_{ab} (-4s_{c[e}^d s_{d]}^{ce} + s^{cde} s_{cde}) \right) \quad (3.13)$$

Il tensore U_{ab} rappresenta la correzione dovuta alla presenza dello spin al tensore energia momento (vedi [7] [21]), come possiamo vedere dall'equazione (3.4). Nel caso in cui la materia non dipenda direttamente dallo spin, $U_{ab} = 0$ e (3.4) si ridurrebbe all'equazione di Einstein classica. Se invece c'è dipendenza dallo spin, vediamo come la correzione sia proporzionale al quadrato dello tensore di spin (così che la correzione non dipenda dall'orientazione dello spin intrinseco).

La correzione dovuta a U_{ab} è significativa solo ad altissime densità, per le quali il quadrato del tensore di spin canonico è dell'ordine della densità di energia moltiplicata per κ . Nel vuoto, dove non essendoci materia il tensore di spin canonico è nullo, anche U_{ab} e S_{bc}^a sono nulli e la teoria di Einstein-Cartan si riduce alla teoria della Relatività Generale classica poiché le equazioni di campo sono le stesse.

3.2 Equazioni di Raychaudhuri in un universo di Einstein-Cartan

Una volta introdotte le equazioni di campo vogliamo legare le equazioni di Raychaudhuri che abbiamo derivato precedentemente, e che fin'ora sono equazioni dalla natura completamente geometrica, con i tensori di spin e il tensore energia impulso.

Per prima cosa, possiamo riscrivere la (3.4) eliminando la dipendenza esplicita da U_{ab}

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (3.14)$$

dove ora R_{ab} e R sono i tensori di Ricci-Cartan e lo scalare di Ricci-Cartan.

Quest'ultima può essere riscritta come

$$R_{ab} = \kappa T_{ab} - \frac{1}{2} \kappa T g_{ab} \quad (3.15)$$

usando la relazione $R = -\kappa T$ che lega lo scalare di Ricci-Cartan con la traccia del tensore energia impulso.

In secondo luogo, per ottenere le equazioni di propagazione e i vincoli espressi in termini del tensore di spin e del tensore energia impulso, ricaviamo i singoli termini presenti nelle (2.31) - (2.33) - (2.34) - (2.37) - (2.39) - (2.40) dalle equazioni di campo.

Per quanto riguarda le relazioni che legano il tensore Ricci Cartan e il tensore energia impulso iniziamo prendendo la parte simmetrica della prima equazione di Einstein-Cartan (3.15) e proiettando lungo $u^a u^b$ otteniamo

$$R_{(ab)} u^a u^b = \kappa T_{(ab)} u^a u^b + \frac{1}{2} \kappa T. \quad (3.16)$$

mentre contraendo lungo $h_a{}^b u^c$ abbiamo

$$h_a{}^b R_{bc} u^c = \kappa h_a{}^b T_{bc} u^c. \quad (3.17)$$

Proiettando lungo $h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d$ e lungo $h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d$ il tensore di Ricci-Cartan R_{cd} otteniamo rispettivamente

$$h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d R_{cd} = \kappa h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d T_{cd} \quad (3.18)$$

e

$$h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d R_{cd} = \kappa h_{[a}{}^c h_{b]}{}^d T_{cd} \quad (3.19)$$

Per quanto riguarda invece le relazione che legano il tensore di torsione con il tensore di spin abbiamo che contraendo (3.10) lungo u^a otteniamo

$$S_a u^a = -\frac{1}{4} \kappa s_a u^a. \quad (3.20)$$

Le altre tre si ricavano prendendo la parte simmetrica di (3.11)

$$S_{(ab)c} = \frac{1}{4} \kappa (2s_{c(ab)} + s_c g_{ab} - s_{(a} g_{b)c}), \quad (3.21)$$

ricordando che $s_{abc} = -s_{bac}$. Successivamente contraendo prima lungo $u^a u^b A^c$ (tenuto conto che $u_c A^c = 0$) otteniamo

$$S_{(ab)c} u^a u^b A^c = \frac{1}{4} \kappa (2s_{a(bc)} A^a u^b u^c - s_a A^a) \quad (3.22)$$

e poi lungo $\sigma^{ab}u^c$ otteniamo

$$S_{(ab)c}\sigma^{ab}u^c = \frac{1}{2}\kappa s_{a(bc)}u^a\sigma^{bc}. \quad (3.23)$$

Infine contraendo la parte antisimmetrica di (3.11) lungo $\omega^{ab}u^c$ si ha che

$$S_{[ab]c}\omega^{ab}u^c = -\frac{1}{2}\kappa s_{a[bc]}u^a\omega^{bc}. \quad (3.24)$$

Queste sono le relazioni che ci permettono di rimpiazzare i tensori di curvatura R_{ab} e il tensore di torsione S_{abc} con le rispettive sorgenti, il tensore energia impulso T_{ab} e il tensore di spin s_{abc} , nelle equazioni di propagazione e di vincolo ricavate in maniera del tutto generale nel capitolo precedente.

Sostituendo opportunamente in (2.31) le espressioni appena ricavate otteniamo la equazione di Raychaudhuri in universo di Einstein-Cartan

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & -\frac{1}{3}\Theta^2 - \kappa T_{(ab)}u^au^b - \frac{1}{2}\kappa T - 2(\sigma^2 - \omega^2) + D_a A^a + A_a A^a \\ & - \frac{1}{6}\kappa\Theta s_a u^a + \frac{1}{2}\kappa s_a A^a - \kappa s_{a(bc)}A^a u^b u^c - \kappa s_{a\langle bc\rangle}u^a\sigma^{bc} - \kappa s_{a[bc]}u^a\omega^{bc}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

la quale descrive la contrazione/espansione di materia con spin diverso da 0 in un universo di Einstein-Cartan, dove non abbiamo fatto alcuna assunzione sulla natura della materia e dello spin.

L'equazione di Raychaudhuri si può semplificare se assumiamo alcune condizioni sul tensore di spin e sulle congruenze descritte da u_a , come abbiamo fatto precedentemente per ricavarci l'analogo con torsione dell'universo di Friedmann-Robertson-Walker. In questo caso possiamo pensare alle linee di mondo di particelle test come linee di flusso del fluido di materia. Nel caso in cui queste linee fossero autoparallele, la 4-accelerazione si annullerebbe. Per di più se le linee di mondo delle particelle non subiscono effetti di taglio e sono irrotazionali otteniamo che

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \kappa T_{(ab)}u^au^b - \frac{1}{2}\kappa T - \frac{1}{6}\kappa\Theta s_a u^a. \quad (3.26)$$

Notiamo che l'ultimo termine si annulla quando il vettore di spin è di tipo spazio. Quando invece il vettore di spin ha una componente anche di tipo tempo, quest'ultimo termine può dare contributo positivo o negativo in base sia al segno di Θ sia al segno di $u_a s^a$ che definisce l'angolo di inclinazione iperbolico ϕ come $\sinh(\phi) = u_a s^a$.

Alternativamente possiamo considerare anche un fluido descritto da un tensore di spin completamente antisimmetrico (per cui il vettore di spin $s_a = 0$) e troviamo che

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \kappa T_{(ab)}u^au^b - \frac{1}{2}\kappa T - 2(\sigma^2 - \omega^2) + D_a A^a + A_a A^a - \kappa s_{abc}u^{[a}\omega^{bc]}. \quad (3.27)$$

Specificando la natura della materia, ovvero introducendo un'espressione esplicita per il tensore di spin s_{abc} , possiamo di valutare le espressioni appena elencate e stimare gli effetti dello spin sul termine di espansione/contrazione e di conseguenza gli effetti che la presenza di spin ha sulla cinematica.

Partendo invece da (2.33) otteniamo l'evoluzione di σ_{cd} espressa in termini delle sorgenti T_{ab} e s_{abc}

$$\begin{aligned} h_{\langle a}{}^c h_b \rangle^d \dot{\sigma}_{cd} = & -\frac{2}{3}\Theta\sigma_{ab} - \sigma_{c\langle a}\sigma_{b\rangle}{}^c - \omega_{c\langle a}\omega_{b\rangle}{}^c + D_{\langle b}A_{a\rangle} + A_{\langle a}A_{b\rangle} + \frac{1}{2}\kappa h_{\langle a}{}^c h_b \rangle^d T_{cd} \\ & - C_{\langle a}{}^c{}_{b\rangle}{}^d u_c u_d - \frac{1}{3}\kappa\Theta h_{\langle a}{}^c h_b \rangle^d u^m s_{mcd} - \kappa A_{\langle a} h_b \rangle^c s_{c(dm)} u^d u^m + \frac{1}{2}\kappa A_{\langle a} h_b \rangle^c s_c \\ & - \frac{1}{2}\kappa s_c u^c \sigma_{ab} - \kappa (\sigma_{\langle a}{}^c + \omega_{\langle a}{}^c) u^d h_b \rangle^m s_{mdc}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Da questa formula di evoluzione deduciamo che lo spin intrinseco può eventualmente essere la fonte di anisotropie nell'universo di Einstein-Cartan.

La presenza di materia può anche essere dar luogo ad effetti rotazionali al fluido di materia. L'evoluzione è descritta da (2.34), che espressa in termini di T_{ab} e s_{abc} diventa

$$\begin{aligned} h_{[a}{}^c h_b]{}^d \dot{\omega}_{cd} = & -\frac{2}{3}\Theta\omega_{ab} + 2\sigma_{c[a}\omega_{b]}{}^c + D_{[b}A_{a]} + \frac{1}{2}\kappa h_{[a}{}^c h_b]{}^d T_{cd} - C_{[a}{}^d{}_{b]}{}^d u_c u_d \\ & + \frac{1}{3}\kappa\Theta h_{[a}{}^c h_b]{}^d u^m s_{mcd} - \kappa A_{[a} h_b]{}^m s_{m(cd)} u^c u^d + \frac{1}{2}\kappa A_{[a} h_b]{}^c s_c \\ & - \frac{1}{2}\kappa s_c u^c \omega_{ab} + \kappa (\sigma_{[a}{}^c + \omega_{[a}{}^c) u^d h_b]{}^m s_{mdc}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Vediamo anche qui come lo spin intrinseco può essere fonte di effetti rotazionali.

Per avere una descrizione completa della cinematica dobbiamo tenere conto anche dei vincoli. Analogamente a quanto fatto per l'equazioni di propagazione, sostituendo in (2.37) le equazioni ricavate all'inizio del capitolo otteniamo il vincolo scalare nell'universo di Einstein-Cartan

$$\begin{aligned} D_a \omega^a = & A_a \omega^a + \frac{1}{4}\varepsilon_{abc} u_d C^{d[abc]} + \frac{1}{12}\kappa\Theta\varepsilon_{abc} s^{[abc]} + \frac{1}{4}\kappa\varepsilon_{abc} \sigma_d^{[a} s^{bc]d} - \kappa s_{(ab)c} u^a u^b \omega^c \\ & - \frac{1}{4}\kappa\varepsilon_{abc} u_d A^{[a} s^{bc]d}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

mentre se partiamo da (2.39) otteniamo il vincolo vettoriale in universo di Einstein-Cartan

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}D_a \Theta = & D^b \sigma_{ab} - \text{curl}\omega_a - 2\varepsilon_{abc} A^b \omega^c - \kappa h_a{}^b T_{cb} u^c - \frac{1}{3}\kappa\Theta h_a{}^{[c} h_b{}^d] s_{cd}{}^b - \frac{1}{3}\kappa\Theta h_a{}^b s_b \\ & - \kappa h_a{}^{[c} \sigma_b{}^d] s_{cd}{}^b + \frac{1}{2}\kappa\sigma_{ab} s^b + \kappa h_a{}^{[c} \varepsilon_b{}^d]{}_m s_{cd}{}^{[b} \omega^m]} - \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_{abc} s^{[b} \omega^c]} \\ & + \kappa h_a{}^{[c} A^d] s_{cdb} u^b, \end{aligned} \quad (3.31)$$

e infine da (2.40) otteniamo il vincolo tensoriale in un universo di Einstein-Cartan

$$\begin{aligned} \text{curl}\sigma_{ab} = & -D_{\langle b}\omega_{a\rangle} - 2A_{\langle a}\omega_{b\rangle} + \frac{1}{2}\varepsilon_{cd\langle a}C_{b\rangle m}{}^{[cd]}u^m - \frac{1}{6}\kappa\Theta\varepsilon_{cd\langle a}h_{b\rangle m}S^{cdm} - \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_{cd\langle a}\sigma_{b\rangle m}S^{cdm} \\ & + \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_{cd\langle a}\sigma_{b\rangle}{}^c s^d - \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_{cd\langle a}\varepsilon_{b\rangle mn}S^{cd[m}\omega^{n]} - \frac{1}{2}\kappa\omega_{\langle a}S_{b\rangle} + \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_{cd\langle a}A_{b\rangle}u_m S^{cdm}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nel caso in cui la torsione e lo spin si annullassero le equazioni di propagazione e i relativi vincoli si ridurrebbero alle equazioni della relatività generale standard.

3.3 Fluido di Weyssenhoff

Il modo più semplice per implementare materia con spin è considerare il fluido di Weyssenhoff (ci sono diversi modi per descriverlo: [16], [22], [23], [24]; noi useremo principalmente il modo descritto in [5]) che possiamo pensare come un fluido continuo caratterizzato microscopicamente dallo spin della materia. Quest'ultimo è descritto dal tensore antisimmetrico di densità di spin

$$s_{ab} = s_{[ab]} \quad (3.33)$$

che è legato al tensore di spin canonico da

$$s_{abc} = s_{ab}u_c \quad (3.34)$$

e che soddisfa la condizione di Frenkel

$$s_{ab}u^b = 0 \quad (3.35)$$

ovvero il tensore di densità di spin è di tipo spazio nel sistema di riferimento solidale con il fluido. Questa condizione può essere derivata rigorosamente dalla lagrangiana della materia S_m (per i dettagli si legga [22]). Inoltre abbiamo che il vettore canonico di spin è nullo ($s = {}_{ba}{}^b = -s_{ab}{}^b = s_a = 0$) e dalla (3.10) deduciamo anche che il vettore di torsione S_a si annulla. Notiamo che questa richiesta definisce una direzione spaziale privilegiata e rende incompatibile il fluido di Weyssenhoff con il principio cosmologico.

La relazione che lega la densità di spin al tensore di torsione si ricava direttamente da (3.11) e dalle proprietà di s_{ab} ed è

$$S_{abc} = -\frac{\kappa}{2}u_a s_{bc}. \quad (3.36)$$

Per quanto riguarda T_{ab} , il tensore energia-impulso relativo ad un fluido di Weyssenhoff può essere descritto nel modo più semplice prendendo un fluido ideale di densità ρ e

pressione isotropica p e aggiungendo il contributo dovuto alla presenza di spin intrinseco nella materia. Seguendo [23] abbiamo

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab} - A^c s_{ca} u_b. \quad (3.37)$$

Direttamente da quest'ultima segue che $T_{(ab)} u^a u^b = \rho$ e $T = 3p - \rho$ come diretta conseguenza della condizione di Frenkel.

Applicando queste relazioni a (3.27) otteniamo l'equazione di Raychaudhuri in un spazio tempo di Einstein-Cartan relativa ad un fluido di Weyssenhoff

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - 2(\sigma^2 - \omega^2) + D_a A^a + A_a A^a \quad (3.38)$$

che risulta formalmente identica alla sua controparte classica dove la torsione è nulla poichè sono assenti i termini che dipendono esplicitamente dal tensore di spin. Tuttavia le differenze si presentano quando andiamo a dividere i vari termini nella loro parte puramente Riemanniana e nella loro parte relativa alla torsione. Riferendoci alle (2.19)-(2.22) e tenendo conto delle proprietà di un fluido di Weyssenhoff otteniamo che

$$\Theta = \tilde{\Theta} \quad \sigma_{ab} = \tilde{\sigma}_{ab}, \quad \omega_{ab} = \tilde{\omega}_{ab} - \frac{1}{2}\kappa s_{ab}, \quad A_a = \tilde{A}_a. \quad (3.39)$$

Osserviamo come la presenza di un fluido di Weyssenhoff abbia effetto solo sulla vorticità mentre le altre grandezze sono analoghe a quelle classiche. In più, partendo dalla definizione di derivata covariante è semplice verificare che $D_a A^a = \tilde{D}_a \tilde{A}^a$ e che $\dot{\Theta} = \tilde{\Theta}'$, dove $\tilde{\Theta}'$ indica la derivata covariante fatta rispetto alla parte simmetrica della connessione affine.

Sostituendo tutte queste relazioni nella (3.40) otteniamo la seguente versione dell'equazione di Raychaudhuri per un fluido di Weyssenhoff

$$\tilde{\Theta}' = -\frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 - \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - 2(\tilde{\sigma}^2 - \tilde{\omega}^2) + \tilde{D}_a \tilde{A}^a + \tilde{A}_a \tilde{A}^a + \frac{1}{2}\kappa^2 s^2 - \kappa s_{ab} \tilde{\omega}^{ab} \quad (3.40)$$

dove $s^2 = s_{ab} s^{ab}/2$ definisce il quadrato del tensore di densità di spin. Vediamo come solo gli ultimi due termini diano contributi relativi alla presenza di spin. Inoltre spesso si considera l'orientazione dello spin delle particelle microscopiche casuale e pertanto lo spin macroscopico diventa mediamente nullo ($\langle s_{ab} \rangle = 0$) a differenza del suo quadrato s^2 che non sarà in media nullo. Quindi l'unico vero contributo macroscopico è dato dal termine s^2 . Notiamo come i contributi che inibiscono il collasso sono principalmente due: il contributo dato dal quadrato del tensore di densità di spin $\frac{1}{2}\kappa^2 s^2$ e il contributo dato dalla vorticità $\tilde{\omega}^2$.

Possiamo capire meglio l'effetto che ha lo spin sulla cinematica della materia se consideriamo un fluido ideale, irrotazionale e senza effetti di taglio che è immerso in un

universo in cui consideriamo solo interazioni gravitazionali ($A_a = 0$) e dove reintroduciamo momentaneamente la costante cosmologica Λ . In una tale configurazione la (3.40) si trasforma in

$$\tilde{\Theta}' = -\frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 - \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) + \frac{1}{2}\kappa^2 s^2 + \Lambda. \quad (3.41)$$

La reintroduzione di Λ ci permette di capire qualitativamente gli effetti della presenza dello spin. Se s^2 è costante, allora la presenza dello spin ha effetti simili a quelli di una costante cosmologica positiva. Viceversa, se $s = s(t)$, l'effetto dello spin è equivalente all'esistenza di un campo scalare che permea tutto lo spaziotempo.

Tuttavia lo spin da solo difficilmente può dare contributo sufficiente a giustificare l'evoluzione recente dell'universo. Ciò nonostante, poichè gli effetti dovuti allo spin sono più grandi a densità di materia maggiori, il termine s^2 può dare un contributo non indifferente nei primissimi momenti di espansione o eventualmente negli ultimi momenti di collasso dell'universo. Deduciamo da ciò che in teoria l'inclusione dello spin può dare una giustificazione geometrica all'inflazione primordiale senza l'introduzione di campi scalari esterni.

Capitolo 4

Effetti cosmologici con fluido di spin

Abbiamo visto come è possibile giustificare geometricamente la presenza dello spin macroscopico introducendo un parametro aggiuntivo, il tensore di torsione. Abbiamo separato lo spazio tempo 4-dimensionale in due parti per sviluppare le equazioni di evoluzione dei parametri che ci permettono di descrivere lo sviluppo dell'universo. In particolare siamo giunti all'equazione di propagazione (3.41), da cui partiremo per descrivere come si evolve il nostro universo. In particolare, proveremo a capire se la presenza dello spin macroscopico possa giustificare l'espansione attuale dell'universo, andando a sostituire il ruolo della costante cosmologica (seguiamo [25]); dopodichè proveremo a capire se il contributo dello spin può dare una spiegazione alternativa all'inflazione cosmologica (seguiamo [26]).

4.1 Metrica di FRW in uno spazio tempo con spin

Consideriamo un modello le cui simmetrie sono analoghe a quelle del modello classico di Friedman-Robertson-Walker. La metrica¹ per questo modello è

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 + kr^2/4} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

dove k è il parametro di curvatura e $a(t)$ è il fattore di scala adimensionale che caratterizza le dimensioni dell'universo. Introdotta questa scala rappresentativa, possiamo vedere che il rapporto \dot{a}/a è proporzionale allo scalare di volume $\tilde{\Theta}$ [5]. Infatti abbiamo che

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\tilde{\Theta}}{3} = H, \quad (4.2)$$

dove abbiamo introdotto il parametro di Hubble H , frequentemente usato in letteratura per descrivere la velocità di espansione dell'universo.

¹Abbiamo posto la velocità della luce $c = 1$.

Abbiamo visto che per descrivere il contenuto della materia nell'universo possiamo considerare un fluido di Weyssenhoff. L'influenza sulla cinematica e sulla dinamica dovuta allo spin macroscopico della materia è descritto da un contributo proporzionale al quadrato della densità di spin. Possiamo definire allora la densità di energia effettiva e la pressione effettiva come [25]:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon - \frac{1}{4}\kappa s^2, \quad (4.3)$$

e per la pressione p in

$$p_{\text{eff}} = p - \frac{1}{4}\kappa s^2, \quad (4.4)$$

dove $\epsilon_s = 1/4\kappa s^2$ rappresenta il contributo energetico e di pressione dovuto allo spin.

Le ultime osservazioni di supernovae di tipo Ia (vedi [27], [28], [29]) mostrano che l'espansione dell'universo che vediamo oggi è iniziata solo in tempi cosmologici recenti. Queste osservazioni, suggeriscono che la densità di energia dell'universo sia dominata da una componente oscura con pressione negativa che causa questa accelerazione. Il candidato naturale per descrivere tutto ciò è la costante cosmologica Λ . Nei capitoli successivi cercheremo di capire se una parte di questa energia oscura possa essere rappresentata da un fluido perfetto di spin caratterizzato dalle (4.3)-(4.4).

Per prima cosa consideriamo un fluido di polvere ($p = 0$) formato da particelle di spin $1/2$ e massa m , escludendo contributi dovuti alla radiazione. La densità di energia ϵ e la densità di spin s^2 dipendono dal numero di particelle per unità di volume n

$$\epsilon = nm, \quad s^2 = \left(\frac{\hbar}{2}n\right)^2 \quad (4.5)$$

dove m è la massa delle particelle del fluido.

Da queste assunzioni otteniamo che per un fluido di questo tipo la densità e la pressione effettiva sono

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon - \kappa \left(\frac{\hbar}{4m}\right)^2 \epsilon^2, \quad p_{\text{eff}} = 0 - \kappa \left(\frac{\hbar}{4m}\right)^2 \epsilon^2. \quad (4.6)$$

La pressione effettiva risulta negativa, quindi è in accordo con il fatto che l'energia oscura mostri comportamenti di un fluido con pressione negativa.

4.2 Hamiltoniana del modello con fluido di spin

Una volta introdotte le correzioni (4.3) e (4.4) è possibile esprimere l'equazione di Raychaudhuri (3.41) per il fluido di polvere come

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{1}{6}\kappa(\epsilon_{\text{eff}} + 3p_{\text{eff}}) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.7)$$

Questa è la prima equazione di Friedmann espressa in termini del parametro di Hubble H . In maniera analoga possiamo riscrivere questa equazione in funzione del fattore di scala $a(t)$ come

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa(\epsilon_{\text{eff}} + 3p_{\text{eff}}) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.8)$$

Consideriamo ora la seconda equazione di Friedmann

$$\dot{a}^2 + k = \frac{\kappa}{3}\epsilon_{\text{eff}}a^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2, \quad (4.9)$$

la quale se derivata rispetto al tempo da

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{a}{\dot{a}}\frac{\kappa}{6}\dot{\epsilon}_{\text{eff}} + \frac{\kappa}{3}\epsilon_{\text{eff}} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.10)$$

Sostituendo questa equazione in (4.8) e ricordando la definizione di H ricaviamo

$$\frac{d\epsilon_{\text{eff}}}{dt} = -3H(\epsilon_{\text{eff}} + p_{\text{eff}}). \quad (4.11)$$

Nel momento in cui ci limitiamo a considerare un fluido di polvere per cui vale $p = 0$ otteniamo

$$\frac{d}{dt}(\epsilon - \epsilon_s) = -3H(\epsilon - \epsilon_s - \epsilon_s). \quad (4.12)$$

che possiamo separare nelle due parti indipendenti, la prima relativa alla densità di energia ϵ

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -3H\epsilon \quad (4.13)$$

e la seconda relativa alla densità di energia ϵ_s

$$\frac{d\epsilon_s}{dt} = -6H\epsilon_s. \quad (4.14)$$

Vediamo ora come dalle equazioni di Friedmann possiamo ricondurci a un potenziale $V(a)$ e quindi ad una Hamiltoniana \mathcal{H} . Se integriamo l'equazione (4.13), tenendo conto che il parametro di Hubble possiamo scriverlo come $H = d(\ln a)/dt$, otteniamo

$$\epsilon = \epsilon_{m,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (4.15)$$

dove $\epsilon_{m,0}$ è la densità di energia dovuta alla materia e $a = a_0$ il fattore di scala entrambi al tempo odierno $t = t_0^2$. Da questa possiamo riscrivere l'equazione di Raychaudhuri

²A volte può capitare che $a_0 = 1$ per convenzione.

(4.8) in termini del fattore di scala $a(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= a \left[-\frac{1}{6}\kappa \left(\epsilon - \kappa \left(\frac{\hbar}{4m} \right)^2 \epsilon^2 - 3\kappa \left(\frac{\hbar}{4m} \right)^2 \epsilon^2 \right) + \frac{\Lambda}{3} \right] \\ &= a \left[-\frac{1}{6}\kappa\epsilon_{m,0} \frac{a^{-3}}{a_0^{-3}} + \frac{1}{6}\kappa^2 \left(\frac{\hbar}{2m} \right)^2 \epsilon_{m,0}^2 \frac{a^{-6}}{a_0^{-6}} + \frac{\Lambda}{3} \right].\end{aligned}\quad (4.16)$$

Questa equazione può essere riscritta in una forma analoga a quella di un'equazione del moto unidimensionale

$$\ddot{a} = -\frac{\partial V(a)}{\partial a} \quad (4.17)$$

con dominio $\{a : a \in \mathbb{R}_+\}$ dove il potenziale assume la forma

$$V(a) = -\frac{1}{6}\kappa\epsilon_{m,0} \frac{a^{-1}}{a_0^{-3}} + \frac{1}{24}\kappa^2 \left(\frac{\hbar}{2m} \right)^2 \epsilon_{m,0}^2 \frac{a^{-4}}{a_0^{-6}} - \frac{\Lambda}{6}a^2 + V_0, \quad (4.18)$$

dove V_0 è una costante. Da questo potenziale costruiamo l'Hamiltoniana \mathcal{H} come

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{a}^2}{2} + V(a). \quad (4.19)$$

A questo punto possiamo riscrivere la seconda equazione di Friedmann (4.9) nella forma Hamiltoniana. Considerando che per un fluido di polvere con spin vale

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon - \kappa \left(\frac{\hbar}{4m} \right)^2 \epsilon^2 = \epsilon_{m,0} \frac{a^{-3}}{a_0^{-3}} - \kappa \left(\frac{\hbar}{4m} \right)^2 \epsilon_{m,0}^2 \frac{a^{-6}}{a_0^{-6}}, \quad (4.20)$$

in (4.9) otteniamo

$$\kappa\epsilon_{m,0}a^{-3} - \kappa^2 \left(\frac{\hbar}{4m} \right)^2 \epsilon_{m,0}^2 a^{-6} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 3\frac{k}{a^2} - \Lambda$$

che è equivalente a

$$V(a) + \frac{\dot{a}^2}{2} = V_0 - \frac{k}{2}. \quad (4.21)$$

Dalla meccanica classica sappiamo che le traiettorie del moto giacciono sulle curve di livello $\mathcal{H} = E$. Nel caso in cui $V_0 = k/2$, $E = 0$ e le traiettorie si trovano sulla curva di energia zero. Ponendoci su il livello energetico $V_0 = k/2$, e ricordando che $\epsilon_{m,0} = n(0)m$, con $n(0)$ il numero di particelle per unità di volume iniziale, otteniamo la seguente forma per il potenziale:

$$V(a) = -\frac{1}{6}\kappa\epsilon_{m,0} \frac{a^{-1}}{a_0^{-3}} + \frac{\hbar^2}{96}\kappa^2 n(0)^2 \frac{a^{-4}}{a_0^{-6}} - \frac{\Lambda}{6}a^2 + \frac{k}{2}, \quad (4.22)$$

che introducendo le densità di energia per la parte relativa allo spin $\epsilon_{s,0}$ e per la parte relativa alla costante cosmologica $\epsilon_{\Lambda,0}$

$$\epsilon_{s,0} = -\frac{1}{16}\kappa\hbar^2 n(0), \quad \epsilon_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda}{\kappa} \quad (4.23)$$

diventa

$$V(a) = -\frac{1}{6} \left(\kappa\epsilon_{m,0} \frac{a^{-1}}{a_0^{-3}} + \kappa\epsilon_{s,0} \frac{a^{-4}}{a_0^{-6}} + \kappa\epsilon_{\Lambda,0} a^2 - 3k \right). \quad (4.24)$$

A questo punto ci interessa l'evoluzione di a per il livello energetico $V_0 = k/2$. In questo caso (4.21) diventa

$$\frac{\dot{a}^2}{2} + V(a) = 0. \quad (4.25)$$

Riscriviamo quest'ultima utilizzando una nuova variabile temporale T riscalata dal parametro di Hubble calcolato al tempo attuale: $T = |H_0|t$ [25]. Introducendo $v = a/a_0$ e tenuto sempre conto che $V_0 = k/2$ la (4.25) diventa

$$\frac{\dot{v}^2}{2} = \frac{1}{2}\Omega_{k,0} + \frac{1}{2} \sum_i \Omega_{i,0} v^{-(1+3w_i)} = -V(v) \quad (4.26)$$

la cui derivata da come risultato

$$\ddot{v} = -\frac{1}{2} \sum_i \Omega_{i,0} (1 + 3w_i) v^{-(2+3w_i)}, \quad (4.27)$$

dove

$$\Omega_{k,0} = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}, \quad \Omega_{m,0} = \frac{\kappa\epsilon_{m,0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{s,0} = \frac{\kappa\epsilon_{s,0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\kappa\epsilon_{\Lambda,0}}{3H_0^2}. \quad (4.28)$$

Queste equazioni esprimono la dinamica di $a(t)$ in funzione dei parametri di densità $\Omega_{i,0}$ considerati al tempo attuale (tempo t_0). In generale, questi parametri di densità sono definiti come il rapporto tra la densità di energia e la relativa densità critica. Per quanto riguarda l'esponente di v , w_i ha diversi valori in base al tipo di materia che consideriamo: vale $w_m = 0$ se consideriamo polvere, $w_s = 1$ per un fluido di spin e $w_\Lambda = -1$ per il contributo dovuto alla costante cosmologica. Questo fattore w_i è strettamente legato alle (4.13) e (4.14): per diversi contributi energetici ϵ_i abbiamo equazioni differenziali diverse e in generale possiamo scrivere la soluzione in base in funzione del valore iniziale $\epsilon_{i,0}$ come $\epsilon_i = \epsilon_{i,0} (a/a_0)^{-(1+w_i)}$.

Come abbiamo già detto, le osservazioni delle supernovae di tipo Ia indicano che il nostro universo è in espansione. Per capire quali sono le condizioni sui parametri di densità affinché l'universo sia in espansione, studiamo la condizione sull'accelerazione $\ddot{a} > 0$ in un universo piatto. Visto che siamo nella condizione espressa dalla (4.25) abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}^2}{2} + V(a) \right) = 0 \quad \implies \quad \ddot{a} = -\frac{dV(a)}{da}. \quad (4.29)$$

Pertanto l'universo è in espansione se $dV(a)/da < 0$. Partendo dal potenziale espresso in funzione di v in (4.26) otteniamo che la condizione di decrescenza $dV(v)/dv < 0$ è

$$-\frac{1}{2}\Omega_{m,0}v^{-2} - 2\Omega_{s,0}v^{-5} + \Omega_{\Lambda,0}v > 0 \quad (4.30)$$

poichè abbiamo considerato un universo attualmente piatto ($k = 0 \implies \Omega_{k,0} = 0$).

Il formalismo che abbiamo appena sviluppato ci permette di studiare il contributo dello spin per il modello di Friedmann-Roberston-Walker nell'evoluzione dell'universo. Infatti possiamo riscrivere la (4.30) in forma quadratica introducendo una nuova variabile $z = v^{-3}$

$$-\frac{1}{2}\Omega_{m,0}z + 2|\Omega_{s,0}|z^2 + \Omega_{\Lambda,0} > 0. \quad (4.31)$$

Per il valore $z = 1$, ovvero per $a = a_0 = 1$ otteniamo

$$-\frac{1}{2}\Omega_{m,0} + 2|\Omega_{s,0}| + \Omega_{\Lambda,0} > 0 \quad (4.32)$$

che è la condizione che devono soddisfare i parametri di densità affinché l'universo sia in espansione al tempo attuale.

Il fit dei dati delle supernovae Ia da come valori $\Omega_{\Lambda,0} = 0.72$ e $\Omega_{m,0} = 0.28$. Se escludiamo per un istante il contributo dello spin e teniamo conto della costante cosmologica in un universo piatto ($\Omega_{k,0} = 0$), i valori sperimentali ottenuti soddisfano la disuguaglianza (4.32). Quello che vogliamo capire è se lo spin può sostituire completamente o in parte la costante cosmologica per spiegare l'espansione accelerata attuale.

Per capire ciò vediamo quale deve essere la condizione su $\Omega_{s,0}$ affinché l'universo acceleri la sua espansione in assenza della costante cosmologica. Come abbiamo appena detto la stima del parametro di densità della materia è circa $\Omega_{m,0} \sim 0.3$. Per cui otteniamo la condizione

$$|\Omega_{s,0}| \gtrsim \frac{3}{40}. \quad (4.33)$$

Questo valore, come vedremo nelle prossime sezioni, sembra essere poco realistico e pertanto è necessario considerare anche la costante cosmologica per giustificare l'attuale espansione dell'Universo. I suoi effetti però non sono da scartare se consideriamo le prime fasi dell'universo, quando v è molto piccolo e quindi il fattore $\Omega_{s,0}v^{-5}$ in (4.30) può dare un contributo importante.

4.3 Il modello con fluido di spin testato dalle supernovae e dalla CMBR

Un primo test per il modello con fluido di spin è il confronto con i dati sperimentali provenienti da supernovae. Dall'analisi statistica in [25] della magnitudine di un campione di 60 supernovae in un modello piatto (dati presi da Perlmutter SN Ia), il limite

ad una confidenza di 1σ è $\Omega_{s,0} > -0.012$ e ad una confidenza di 2σ è $\Omega_{s,0} > -0.026$. Useremo successivamente il primo limite nella nostra analisi.

Un secondo test per il modello sono picchi nella radiazione cosmica di fondo che emergono dalle oscillazioni del plasma primordiale. Queste oscillazioni rappresentano punti più caldi e più freddi. È molto importante tenere in considerazione che la posizione di questi picchi è molto sensibile alle variazioni dei parametri del modello. Pertanto potrebbe essere molto utile studiare questi picchi per determinare vincoli ai parametri cosmologici. Dallo studio effettuato in [25] otteniamo un altro vincolo ai valori di $\Omega_{s,0}$

$$10^{-10} \leq |\Omega_{s,0}| \leq 1.4 \times 10^{-10}. \quad (4.34)$$

Un altro vincolo viene da considerazioni sulla nucleosintesi primordiale. Come vedremo successivamente, il termine $\Omega_{s,0}$ ha un effetto non indifferente durante la prima fase di vita dell'universo, ovvero per valori di $z \gtrsim 2$. Se così fosse, la fase in cui la radiazione domina le altre componenti non si verificherebbe e la nucleosintesi degli elementi primordiali sarebbe assente. Visto che ci sono molte prove a favore dell'esistenza del periodo di nucleosintesi è probabile che i dati delle supernovae sovrastimino il parametro di densità dovuto allo spin. Pertanto, per evitare di perdere un modello cosmologico ben testato come la nucleosintesi primordiale, il contributo dovuto allo spin $\Omega_{s,0}$ non può dominare gli effetti dovuti alla radiazione, stimabili in $\Omega_{r,0}(1+z)^4$, nelle primissime parti di vita dell'universo. Pertanto per $z \cong 10^8$ deve valere che

$$-\Omega_{s,0}(1+z)^6 < \Omega_{r,0}(1+z)^4 \quad \text{e} \quad -\Omega_{s,0} < 10^{-20}. \quad (4.35)$$

Perciò il termine dovuto allo spin $\Omega_{s,0}(1+z)^6$ è vincolato dalla necessità di una nucleosintesi primordiale per giustificare la produzione abbondante di Helio-4.

4.4 Alternativa all'inflazione cosmica

A questo punto vogliamo studiare come lo spin possa aver influenzato l'evoluzione dell'universo nei suoi istanti di vita iniziali [26]. Ricordiamo che un universo chiuso omogeneo e isotropico è descritto dalla metrica di Friedman-Lemaître-Robertson-Walker che in coordinate sferiche isotropiche è (4.1); in questo paragrafo seguiremo la trattazione in [26] e poniamo $k = 1$, ovvero consideriamo un universo chiuso. Le equazioni di Raychaudhuri per questa metrica diventano le equazioni di Friedman

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{1}{3}\kappa \left(\epsilon - \frac{1}{4}\kappa s^2 \right) a^2 \quad (4.36)$$

$$\dot{a}^2 + 2a\ddot{a} + 1 = -\kappa \left(p - \frac{1}{4}\kappa s^2 \right) a^2 \quad (4.37)$$

dove il punto indica la derivata rispetto a t . Queste equazioni possono essere anche scritte nella forma di una legge di conservazione

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\epsilon - \frac{1}{4} \kappa s^2 \right) a^3 \right) + \left(p - \frac{1}{4} \kappa s^2 \right) \frac{d}{dt} (a^3) = 0 \quad (4.38)$$

che può essere usata al posto della seconda equazione di Friedman.

La densità media del numero di particelle per volume in un fluido n è legata alla densità di energia e alla pressione del fluido dalla

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\epsilon}{\epsilon + p}. \quad (4.39)$$

Se il fluido è descritto da un'equazione barotropica $p = w\epsilon$ allora $n \propto \epsilon^{1/(1+w)}$.

Se consideriamo un fluido di fermioni con spin non polarizzato, la densità di spin³ è data da

$$s^2 = \frac{1}{4} (\hbar n)^2 \quad (4.40)$$

che porta $s^2 \propto \epsilon^{2/(1+w)}$. Sostituendo questa relazione nella (4.38) si ottiene la seguente relazione di proporzionalità

$$\epsilon \propto a^{-3(1+w)}, \quad (4.41)$$

che ha la stessa forma per $s^2 = 0$ in assenza di spin. Di conseguenza, la densità di energia dovuta allo spin è quantificabile come

$$\epsilon_S = -\frac{1}{4} \kappa s^2 \propto a^{-6} \quad (4.42)$$

proporzionale a a^{-6} come già avevamo visto nel paragrafo precedente. In pratica il fluido di Weyssenhoff che stiamo considerando lo possiamo pensare come la combinazione di un fluido standard con densità di energia ϵ e un fluido esotico con densità di energia ϵ_S per cui vale $p < 0$. Questa rappresentazione è puramente formale poichè un tale fluido esotico non può esistere da solo e la sua equazione di stato $p = p(\epsilon)$ non rappresenta una equazione di stato fisico.

In un universo primordiale le particelle di Dirac che componevano il fluido avevano energie molto maggiori delle loro energie a riposo. Pertanto la loro equazione di stato sarà una equazione barotropica ultrarelativistica con $w = 1/3$ e $p = \epsilon/3$ analogamente a quella della radiazione. Dalla relazione (4.41), otteniamo per la radiazione $\epsilon_R \propto a^{-4}$ e la densità di energia totale è data da

$$\epsilon + \epsilon_S = \epsilon_{R_0} \hat{a}^{-4} + \epsilon_{S_0} \hat{a}^{-6} \quad (4.43)$$

³in [26] è $\frac{1}{8}$ diversamente da [25]

dove $\hat{a} = a/a_0$ è il fattore di scala normalizzato e il pedice 0 indica le quantità misurate al tempo presente, per cui vale $\hat{a} = 1$. Nella (4.43) trascuriamo sia il contributo $\epsilon_{M_0}\hat{a}^{-3}$ dato dalla materia (oscura e barionica) sia il contributo $\epsilon_\Lambda = \Lambda/\kappa$ dato della costante cosmologica poichè durante l'universo primordiale abbiamo che $\hat{a} \ll 1$ e il loro contributo è sensibilmente minore rispetto a quello della radiazione e dello spin. Introducendo il parametro di Hubble $H = \dot{a}/a$ possiamo riscrivere la prima equazione di Friedman (4.36) come

$$H^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3}\kappa(\epsilon + \epsilon_S) \quad (4.44)$$

Se consideriamo il parametro di densità totale al tempo odierno

$$\Omega_0 = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_{S_0}}{\epsilon_c} \quad (4.45)$$

dove $\epsilon_c = 3H_0^2/\kappa$ è la densità di energia critica al tempo attuale, questo soddisfa la relazione $a_0H_0\sqrt{\Omega_0 - 1} = 1$ come in cosmologia standard. Per quanto riguarda il parametro di densità totale valutato a un tempo di espansione t invece abbiamo

$$\Omega(\hat{a}) = \frac{\kappa}{3H^2}(\epsilon + \epsilon_S) \quad (4.46)$$

che soddisfa in maniera analoga la relazione

$$a|H|\sqrt{\Omega(\hat{a}) - 1} = 1. \quad (4.47)$$

Considerando i parametri odierni di densità per la radiazione e per lo spin

$$\Omega_R = \epsilon_{R_0}/\epsilon_c, \quad \Omega_S = \epsilon_{S_0}/\epsilon_c, \quad (4.48)$$

tenuto conto di (4.43) e di (4.47) (valutata a t_0) otteniamo dalla (4.44) che

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \left(\frac{\kappa c^2}{3H_0^2} \epsilon_{R_0} \hat{a}^{-4} + \frac{\kappa c^2}{3H_0^2} \epsilon_{S_0} \hat{a}^{-6} - \frac{c^2}{H_0^2} a^{-2} \right) = \\ &= H_0^2 (\Omega_R \hat{a}^{-4} + \Omega_S \hat{a}^{-6} - (\Omega_0 - 1) \hat{a}^{-2}), \end{aligned} \quad (4.49)$$

equivalente a

$$|H| = H_0 (\Omega_R \hat{a}^{-4} + \Omega_S \hat{a}^{-6} - (\Omega_0 - 1) \hat{a}^{-2})^{1/2}. \quad (4.50)$$

Tuttavia l'ultimo termine sotto la radice è considerevolmente minore rispetto ai primi due relativi alla radiazione e allo spin quando siamo nella periodo iniziale dell'universo, ovvero per $\hat{a} \ll 1$, e pertanto può essere trascurato. Otteniamo

$$|H| = H_0 (\Omega_R \hat{a}^{-4} + \Omega_S \hat{a}^{-6})^{-1/2} \quad (4.51)$$

che mostra come il parametro di Hubble dipenda dal fattore di scala normalizzato \hat{a} durante l'universo primordiale. Combinando (4.47) e (4.51) otteniamo

$$\Omega(\hat{a}) = 1 + \frac{(\Omega_0 - 1)\hat{a}^4}{\Omega_R\hat{a}^2 + \Omega_S} \quad (4.52)$$

che esprime la relazione che lega il parametro di densità Ω in funzione solo di \hat{a} . Poichè il contributo dato dallo spin ϵ_S è negativo, anche il parametro di densità relativo Ω_S lo sarà. Pertanto la sua presenza è causa di repulsione, che è significativa per valori molto piccoli di \hat{a} .

Dalle osservazioni del Wilkinson Microwave Anisotropy Probe otteniamo $\Omega_0 = 1.002$. Il fatto che il valore sia maggiore di 1 indica che l'universo è chiuso. Tuttavia il valore di Ω_0 è estremamente vicino ad 1 e pertanto non è possibile escludere il caso di universo piatto. Dai dati di WMAP si ottiene anche che $H_0^{-1} = 4.4 \times 10^{17}$ s e $\Omega_R = 8.8 \times 10^{-5}$. Perciò il valore del fattore di scala al tempo odierno vale $a_0 = 2.9 \times 10^{27}$ m. Per stimare Ω_S usiamo neutrini primordiali che sono i fermioni più abbondanti nell'universo, con densità volumetrica di $n = 5.6 \times 10^7$ m⁻³ per ciascuno dei 6 tipi esistenti. L'equazioni (4.40) e (4.42) danno

$$\Omega_S = -8.6 \times 10^{-70}, \quad (4.53)$$

che è un valore molto piccolo, in accordo con le considerazioni sulla nucleosintesi primordiale del capitolo precedente.

L'equazione (4.51) ci mostra che l'espansione dell'universo iniziò quando $H = 0$, ovvero per un valore del fattore di scala rinormalizzato $\hat{a} = \hat{a}_m$ che ha un valore di

$$\hat{a}_m = \sqrt{-\frac{\Omega_S}{\Omega_R}} = 3.1 \times 10^{-33} \quad (4.54)$$

che corrisponde al valore minimo ma finito del fattore di scala $a_m = 9 \times 10^{-6}$ m, il raggio dell'universo chiuso. Prima di raggiungere questa grandezza minima, l'universo si stava contraendo con $H < 0$. Se scegliamo il tempo $t = 0$ quando $\hat{a} = \hat{a}_m$, integrando la (4.51) per $t > 0$ ricaviamo

$$-\frac{\Omega_R^{3/2} H_0}{\Omega_S} t = f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| \quad (4.55)$$

dove abbiamo posto $x = \hat{a}/\hat{a}_m$. Quando $x \gg 1$, $f(x) \approx x^2/2$ otteniamo l'evoluzione usuale dell'universo dominato dalla radiazione, ovvero $a \sim t^{1/2}$

Nella cosmologia standard $\Omega_S = 0$, dalla quale segue che $\Omega(\hat{a})$ vale

$$\Omega(\hat{a}) - 1 = \frac{(\Omega_0 - 1)\hat{a}^2}{\Omega_R} \quad (4.56)$$

che tende ad 1 per $\hat{a} \rightarrow 0$.

In cosmologia standard il fatto che il valore di Ω_0 sia molto vicino ad 1 introduce il problema della piattezza dell'universo durante l'età primordiale. Infatti poichè la condizione di piattezza $\Omega(\hat{a}) \approx 1$ è instabile [30], il fatto che osserviamo un valore vicino ad 1 oggi indica che $\Omega(\hat{a})$ doveva essere uguale ad 1 con una precisione maggiore di 52 cifre decimali per $a \ll 1$. Ci si chiede allora come è possibile che il valore $\Omega(\hat{a})$ per $a \ll 1$ fosse così vicino ad 1. Una soluzione è quella dell'inflazione cosmica, ovvero un'espansione esponenziale di un fattore almeno di 10^{26} dovuta alla presenza di campi scalari esterni che permette di giustificare la piattezza al tempo attuale.

Nella teoria della gravità di Einstein-Cartan abbiamo che $\Omega_S < 0$ e che $\Omega(\hat{a})$ è infinito per $\hat{a} = \hat{a}_m$. Tuttavia studiando l'equazione (4.52) in funzione di \hat{a} si trova che ha un minimo locale a $\hat{a} = \sqrt{2}\hat{a}_m$, dove Ω assume un valore di

$$\Omega(\sqrt{2}\hat{a}_m) = 1 - \frac{4\Omega_S(\Omega_0 - 1)}{\Omega_R^2} = 1 + 8.9 \times 10^{-64}. \quad (4.57)$$

Mentre l'universo si espande da \hat{a}_m a $\sqrt{2}\hat{a}_m$, il valore di $\Omega(\hat{a})$ decresce rapidamente dal valore infinito fino al valore di minimo (4.57), che sembra essere uguale ad 1 con una precisione di 63 cifre decimali. Questa fase di transizione dura

$$t = -\frac{\Omega_S}{\Omega_R^{3/2} H_0} f(\sqrt{2}) = 5.3 \times 10^{-46} s. \quad (4.58)$$

Durante questo lasso di tempo l'universo si è espanso solo di un fattore $\sqrt{2}$, diversamente da quanto predetto nell'espansione inflazionaria. Pertanto il fatto che $\Omega(\hat{a})$ sia vicino ad 1 con una grande precisione per valori molto piccoli di \hat{a} può essere spiegati dal valore estremamente piccolo del parametro di densità dello spin (4.53). Questa accuratezza del valore di $\Omega(\hat{a})$ fa sì che non sia necessaria alcuna dinamica inflazionaria. Mano a mano che l'universo si espande, il fattore $\Omega_R \hat{a}^2$ diventa via via più grande del fattore dovuto allo spin $|\Omega_S|$ e il fattore $\Omega(\hat{a}) - 1$ aumenta visto che vale $\Omega(\hat{a}) - 1 = (\Omega_0 - 1)\hat{a}^2/\Omega_R$ finchè non si giunge al periodo in cui l'universo è dominato dalla materia. In quest'ultima epoca $w < 1/3$ e il contributo dovuto alla materia oscura e barionica e alla costante cosmologica deve essere incluso in (4.43).

Possiamo riscrivere (4.47) nel seguente modo:

$$\dot{a} = \frac{1}{\sqrt{\Omega(\hat{a}) - 1}}. \quad (4.59)$$

Definiamo allora la velocità del punto antipodale all'origine delle coordinate come $v_a = \pi c \dot{a}^4$. Quest'ultima ha un massimo locale in $\hat{a} = \sqrt{2}\hat{a}_m$ di valore

$$v_a(\sqrt{2}\hat{a}_m) = \frac{\pi \Omega_R}{2\sqrt{-\Omega_S(\Omega_0 - 1)}} c = 1.1 \times 10^{32} c. \quad (4.60)$$

⁴Reintroduciamo la velocità della luce per comodità.

Pertanto mentre l'universo chiuso si espande da \hat{a}_m a $\sqrt{2}\hat{a}_m$ accelerando ($\ddot{a} > 0$), la velocità v_a aumenta molto rapidamente da 0 fino al valore enorme di (4.60), mentre nella fase successiva di espansione, dove il contributo dello spin è trascurabile, la velocità v_a decresce in accordo con (abbiamo usato (4.52))

$$v_a = \pi c \frac{\sqrt{\Omega_R \hat{a}^{-1}}}{\sqrt{\Omega_0 - 1}}. \quad (4.61)$$

La validità di questa formula è limitata al periodo in cui la materia non domina l'universo. Oltre tale periodo è necessario introdurre in quest'ultima relazione i termini dovuti al contributo della materia oscura e barionica. Durante questo periodo l'universo decelera la sua espansione ($\ddot{a} < 0$). In una fase ancora successiva è necessario considerare anche il termine dovuto alla costante cosmologica dato che l'universo ritorna ad accelerare e questa accelerazione non può essere giustificata dal parametro di densità dovuto allo spin poichè il suo valore è troppo basso.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo capitolo riassumiamo quanto fatto e cerchiamo di fare il punto e trarre le conclusioni. Nel primo capitolo ci siamo occupati di definire gli strumenti matematici relativi alla geometria differenziale che ci permettono di studiare la cinematica in uno spaziotempo 4-dimensionale. Siamo partiti dalla definizione di connessione affine da cui è seguita in maniera naturale la definizione di trasporto parallelo. Per avere una trattazione coerente, abbiamo assunto che la metrica fosse compatibile, ovvero che la metrica conservi il prodotto scalare dei vettori quando questi sono trasportati parallelamente lungo una curva. Questo vincolo ci permette di calcolare i coefficienti della connessione affine Γ^b_{ac} e da questi definire il tensore di torsione S^a_{bc} che è generalmente considerato nullo, mentre in questa trattazione è diverso da zero. Infatti il tensore di torsione S^a_{bc} può essere usato come punto di partenza per descrivere la manifestazione macroscopica dello spin intrinseco della materia. Successivamente abbiamo introdotto il tensore di Riemann, prima in maniera del tutto generale e successivamente andando a calcolare le componenti in funzione di Γ^b_{ac} e di S^a_{bc} . Separando le componenti nelle parti simmetriche e antisimmetriche abbiamo evidenziato i contributi dovuti al tensore di torsione. Infine abbiamo generalizzato le due identità di Bianchi.

Dopo aver posto le basi geometriche, abbiamo considerato un caso specifico di varietà: uno spaziotempo 4-dimensionale. Per semplificare lo studio della cinematica abbiamo sfruttato il formalismo 1+3: introducendo una famiglia di curve di tipo tempo, che rappresentano le traiettorie di eventuali particelle test, abbiamo decomposto lo spaziotempo in una dimensione temporale e in tre spaziali. La conseguenza principale di questa scelta è la decomposizione di ogni tensore e di ogni equazione tensoriale nelle due componenti temporale e spaziale. In particolare possiamo definire la derivata covariante temporale e la derivata covariante spaziale di un tensore generico. Poichè l'interesse primario è studiare la cinematica, abbiamo decomposto la derivata covariante del vettore tangente alla famiglia di curve in diverse componenti, che sono analoghe a quelle studiate in teoria dei fluidi e che ci permettono quindi di comprendere meglio l'evoluzione delle traiettorie del fluido ideale che introdurremo successivamente. Queste componenti sono: Θ che

descrive gli effetti sul volume, σ_{ab} che descrive effetti di taglio e ω_{ab} che descrive effetti rotazionali. Infine abbiamo calcolato le derivate covarianti temporali di queste componenti per comprenderne l'evoluzione rispetto al tempo: per Θ l'equazione di evoluzione prende il nome di equazione di Raychaudhuri, che opportunamente contestualizzata descrive l'espansione o la contrazione dell'universo. Proiettando invece sulla parte spaziale otteniamo i vincoli alle equazioni di evoluzione.

Nel capitolo successivo abbiamo introdotto la descrizione fisica dell'universo di Einstein-Cartan attraverso l'azione di Einstein-Cartan. Sfruttando il principio di minima azione abbiamo legato i tensori geometrici di curvatura \mathbf{R} e di torsione \mathbf{S} che abbiamo descritto nei capitoli precedenti ai tensori energia-impulso \mathbf{T} e al tensore di spin \mathbf{s} . Le due equazioni di riferimento sono le equazioni di Einstein-Cartan: la prima ha un analogo classico nell'equazione di Einstein, invece la seconda relativa allo spin e alla torsione è caratteristica dell'universo di Einstein-Cartan e ci permette di giustificare geometricamente la presenza dello spin macroscopico. Grazie a queste due equazioni abbiamo riscritto l'equazione di Raychaudhuri e le equazioni di evoluzione in funzione dei tensori di energia-impulso e di spin: così facendo possiamo descrivere l'evoluzione dell'universo direttamente in funzione della distribuzione spaziotemporale dell'energia e della materia. Per specificare la natura della materia e dello spin abbiamo introdotto un fluido ideale che prende il nome di fluido di Weyssenhoff, caratterizzato dalla densità energetica, dalla pressione e dalla densità di spin. Per inserirci in un scenario realistico abbiamo fatto alcune assunzioni sulla natura dello spin e sulla natura geometrica dell'universo per semplificare l'equazione di Raychaudhuri e ottenere quindi un'equazione che possa essere il punto di partenza per predizioni o verifiche sperimentali.

Nell'ultimo capitolo studiamo se e come la presenza dello spin macroscopico possa produrre effetti cosmologici partendo dalle equazioni che abbiamo trovato nel capitolo precedente. In particolare ci concentriamo su due problemi: l'espansione attuale dell'universo e la piattezza dell'universo.

Nel primo caso attraverso manipolazioni algebriche abbiamo costruito un potenziale $V(a)$ e di conseguenza un'Hamiltoniana \mathcal{H} . Introducendo i parametri di densità Ω_i , abbiamo studiato la condizione per cui l'universo è attualmente in espansione. In base ai dati delle supernovae Ia, affinché lo spin macroscopico possa essere la sorgente dell'espansione attuale, il parametro di densità relativo allo spin deve soddisfare un vincolo ben preciso. Tuttavia, abbiamo visto come i test sperimentali sia sulle supernovae sia sulla radiazione cosmica di fondo e alcune considerazioni sulla nucleosintesi primordiale limitino il parametro di densità relativo allo spin a valori estremamente inferiori rispetto a quelli necessari per giustificare l'espansione osservata al tempo attuale. Pertanto il fluido macroscopico di materia con spin difficilmente può dare un contributo significativo all'energia oscura che domina l'universo attuale, anche se il modello del fluido di spin non viene invalidato.

Nel secondo problema relativo alla piattezza dell'universo, abbiamo studiato l'equazione di Raychaudhuri e espresso il parametro di Hubble H in funzione del suo valore

al tempo attuale e in funzione dei parametri di densità e di a . Abbiamo introdotto il parametro di densità totale Ω in funzione dei parametri relativi alle diverse forme energetiche. Dai dati relativi alla radiazione cosmica di fondo abbiamo stimato prima il valore di Ω e di Ω_R e da questi il valore di Ω_S , che anche questa volta risulta molto piccolo. Il valore misurato di Ω è molto vicino ad 1: poichè questo valore è instabile, è necessario che nei primi istanti dell'universo il valore di Ω fosse vicino ad uno con una precisione molto elevata. Studiando Ω per valori di a molto piccoli abbiamo visto che ha un minimo il cui valore è vicino ad uno con un'elevatissima precisione, dovuto alla presenza di un fattore di spin Ω_S molto piccolo. Pertanto non è necessaria alcuna dinamica inflazionaria aggiuntiva poichè la presenza dello spin può spiegare il valore di Ω odierno. Dunque la cosmologia descritta dal modello di Einstein-Cartan può essere un'alternativa valida non soltanto al modello del Big-Bang poichè permette di evitare la singolarità iniziale, ma anche al modello inflazionario, che richiede meccanismi aggiuntivi e nuovi parametri esterni. Inoltre dallo studio del parametro di Hubble H abbiamo visto che, a causa della presenza di spin, l'espansione inizia in un istante t_0 nel quale l'universo aveva la dimensione minima ma finita a_m , mentre nel periodo temporale precedente t_0 l'universo si stava contraendo. Il fatto che l'universo si stesse contraendo dall'infinito non spiega quale sia la causa di una tale contrazione, proprio come il modello del Big-Bang non spiega cosa accade prima del Big-Bang stesso. Quale sia questa causa è fonte di speculazioni: in [26], per esempio, si fa corrispondere alla contrazione e all'espansione la dinamica della materia all'interno di un buco nero che collassa in un altro universo.

Per concludere, la teoria di Einstein-Cartan non è capace di spiegare la natura dell'energia oscura che domina l'universo attuale poichè il suo contributo è troppo piccolo, ma è capace sia di giustificare la piattezza osservata al tempo odierno senza far ricorso all'inflazione cosmica primordiale sia di evitare la singolarità essenziale iniziale. Ciò nonostante, nuove questioni nascono nello spiegare la contrazione che ha luogo nel periodo temporale precedente all'istante t_0 .

Bibliografia

- [1] Stephen W. Hawking and George Francis Rayner Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press, 1973.
- [2] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [3] Marcus Kriele. *Spacetime: foundations of general relativity and differential geometry*, volume 59. Springer Science & Business Media, 1999.
- [4] Robert M. Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [5] Klaountia Pasmatsiou, Christos G. Tsagas, and John D. Barrow. Kinematics of Einstein-Cartan universes. *Physical Review D*, 95(10):104007, 2017.
- [6] Friedrich W. Hehl and Yuri N. Obukhov. Élie cartan’s torsion in geometry and in field theory, an essay. *arXiv preprint arXiv:0711.1535*, 2007.
- [7] Nikodem J. Poplawski. Spacetime and fields. *arXiv preprint arXiv:0911.0334*, 2009.
- [8] S. Capozziello and C. Stornaiolo. Torsion tensor and its geometric interpretation. In *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, volume 32, page 195. Fondation Louis de Broglie, 2007.
- [9] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 2. Interscience publishers New York, 1969.
- [10] Friedrich W. Hehl and Yuri N. Obukhov. *Foundations of classical electrodynamics: Charge, flux, and metric*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] Yann Ollivier. A visual introduction to riemannian curvatures and some discrete generalizations. *Analysis and Geometry of Metric Measure Spaces: Lecture Notes of the 50th Séminaire de Mathématiques Supérieures (SMS), Montréal*, pages 197–219, 2011.

-
- [12] Thanu Padmanabhan. *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [13] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [14] Lee C. Lovridge. Physical and geometric interpretations of the Riemann tensor, Ricci tensor, and scalar curvature. *arXiv preprint gr-qc/0401099*, 2004.
- [15] George F. R. Ellis and Henk Van Elst. Cosmological models. In *Theoretical and Observational Cosmology*, pages 1–116. Springer, 1999.
- [16] S. D. Brechet, M. P. Hobson, and A. N. Lasenby. Weyssenhoff fluid dynamics in general relativity using a 1+3 covariant approach. *Classical and Quantum Gravity*, 24(24):6329, 2007.
- [17] Xavier Roy. On the 1+3 formalism in general relativity. *arXiv preprint arXiv:1405.6319*, 05 2014.
- [18] Naresh Dadhich. Derivation of the Raychaudhuri equation. *arXiv preprint gr-qc/0511123*, 2005.
- [19] Sayan Kar and Soumitra Sengupta. The Raychaudhuri equations: A brief review. *Pramana*, 69(1):49–76, 2007.
- [20] L. N. Katkar. Einstein-Cartan theory of gravitation: Kinematical parameters and Maxwell equations. *International Journal of Theoretical Physics*, 54(3):951–971, 2015.
- [21] Nikodem Poplawski. Intrinsic spin requires gravity with torsion and curvature. *arXiv preprint arXiv:1304.0047*, 2013.
- [22] Yu N. Obukhov and V. A. Korotky. The Weyssenhoff fluid in Einstein-Cartan theory. *Classical and Quantum Gravity*, 4(6):1633, 1987.
- [23] Christian G. Boehmer and Piotr Bronowski. The homogeneous and isotropic Weyssenhoff fluid. *arXiv preprint gr-qc/0601089*, 2006.
- [24] Larry L. Smalley and John R. Ray. Geometrization of spin and the Weyssenhoff fluid conjecture. *General relativity and gravitation*, 18(5):549–553, 1986.
- [25] Marek Szydlowski and Adam Krawiec. Cosmological model with macroscopic spin fluid. *Physical Review D*, 70(4):043510, 2004.
- [26] Nikodem J. Popławski. Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation. *Physics Letters B*, 694(3):181–185, 2010.

-
- [27] Peter M Garnavich, Robert P Kirshner, Peter Challis, John Tonry, Ron L Gilliland, R Chris Smith, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Alexei V Filippenko, Mario Hamuy, et al. Constraints on cosmological models from Hubble Space Telescope observations of high- z supernovae. *The Astrophysical Journal Letters*, 493(2):L53, 1998.
- [28] Saul Perlmutter, S. Gabi, G. Goldhaber, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, R. Pain, et al. Measurements of the cosmological parameters Ω and Λ from the first seven supernovae at $z \geq 0.35$. *The astrophysical journal*, 483(2):565, 1997.
- [29] Saul Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [30] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347, 1981.