

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

I campi solitonici e l'equazione di Sine-Gordon

Relatore:
Prof. Francesco Ravanini

Presentata da:
Alessandro Marco Oliva

Anno Accademico 2016/2017

“True laws of nature cannot be linear”
A. Einstein

Sommario

In questo lavoro di tesi verranno presentati inizialmente i concetti di onda solitaria e di solitone e ne verranno descritte le principali proprietà. Questa prima parte dal carattere prettamente matematico verrà poi sfruttata per analizzare a fondo l'equazione di Sine-Gordon, la quale emerge nelle più disparate aree della fisica. In particolare ne ricaveremo alcune soluzioni solitoniche utilizzando il metodo dello scattering inverso, sviluppato appositamente per risolvere equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari di questo tipo. Infine, vedremo come l'equazione di Sine-Gordon emerga dallo studio del fenomeno della self-induced transparency.

Indice

Introduzione	1
1 Onde solitarie e solitoni	3
1.1 Notazioni e convenzioni	3
1.2 I concetti di onda solitaria e solitone	3
1.3 La carica topologica	6
1.4 Un esempio pratico	8
1.5 Un cenno a dimensioni superiori	13
2 Il modello di Sine-Gordon	16
2.1 L'equazione di Sine-Gordon	16
2.2 Il metodo dello scattering inverso	21
2.3 Alcune soluzioni solitoniche dell'equazione di Sine-Gordon	25
3 La self-induced transparency	28
3.1 Descrizione qualitativa del fenomeno	28
3.2 Analisi della SIT	29
Bibliografia	33
Ringraziamenti	34

Introduzione

Nello studio della fisica spesso si incontrano delle equazioni d'onda che descrivono vari fenomeni. Generalmente le prime equazioni di questo tipo con cui si ha a che fare sono quella delle onde su una corda e quella delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Tali equazioni sono lineari e non dispersive, pertanto le sue soluzioni godono di proprietà piuttosto peculiari: si potrebbe quindi pensare di generalizzare questo risultato immaginando che in realtà tali proprietà caratterizzino le soluzioni di una qualsiasi equazione d'onda. Tuttavia non è così: sistemi più realistici prevedono l'introduzione di termini non lineari e dispersivi e molte di queste caratteristiche vanno perdute. Nonostante ciò, esistono delle particolari soluzioni che risolvono equazioni non lineari e che preservano tali caratteristiche: esse sono le *onde solitarie* e i *solitoni* che descriveremo nel primo capitolo. La loro prima osservazione fu dovuta all'ingegnere scozzese John Scott Russell, che nel suo articolo "*Report on waves*", pubblicato sul "*Report of the fourteenth meeting of the British association for the advancement of Science*" del 1844, descrive così il suo incontro con quelle che lui chiama *onde di traslazione*:

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phænomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; which I have since found to be an important element in almost every case of fluid resistance, and ascertained to be the type of that great moving elevation of

the sea, which, with the regularity of a planet, ascends our rivers and rolls along our shores.

Come si evince dall'estratto, Russell si accorse subito di una proprietà molto interessante dei solitoni, ovvero quella di non disperdere energia, proprietà che come vedremo è parte integrante della loro definizione.

È difficile poter affermare a priori se una certa equazione d'onda ammetta o meno soluzioni solitoniche. Diversi modelli sono stati analizzati a fondo e uno di questi, quello di Sine-Gordon, sarà l'oggetto di studio del secondo capitolo.

Nel terzo e ultimo capitolo vedremo invece un'applicazione dei risultati ottenuti in precedenza, affrontando lo studio della *self-induced transparency*, un fenomeno che prevede, come del resto suggerisce il suo nome, che in determinate condizioni anche un mezzo opaco possa diventare a tutti gli effetti trasparente.

Capitolo 1

Onde solitarie e solitoni

In questo primo capitolo forniremo le notazioni e le convenzioni utilizzate nel testo e presenteremo i concetti fondamentali di *onde solitarie* e di *solitoni*. Verrà anche introdotto il concetto di *carica topologica* e verrà discusso un esempio. Infine verrà fatto un cenno a dimensioni superiori.

1.1 Notazioni e convenzioni

In questo e nei capitoli successivi, verrà utilizzata la notazione tensoriale standard: in particolare, le somme sugli indici ripetuti saranno sottintese. Lavoreremo quasi esclusivamente con sistemi bidimensionali, ai quali ci riferiremo come sistemi in (1+1) dimensioni, intendendo con ciò una dimensione temporale e una spaziale: la metrica e le trasformazioni di Lorentz si scriveranno quindi

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} cx'^0 = \gamma(cx^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta cx^0) \end{cases}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Un vettore e l'operatore di derivata parziale si indicheranno rispettivamente con

$$x^\mu \equiv (cx^0, x^1), \quad \partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu, \quad \mu = 0, 1$$

Inoltre spesso verrà scritto ϕ' per indicare la derivata di ϕ rispetto a x e $\dot{\phi}$ per indicare la derivata di ϕ rispetto a t .

1.2 I concetti di onda solitaria e solitone

I termini *onda solitaria* e *solitone* non si riferiscono ad altro che a delle particolari soluzioni di equazioni d'onda non lineari. Per poterle apprezzare al meglio, richiamiamo

qui di seguito alcune proprietà della più semplice equazione d'onda, ovvero

$$\square\phi(x, t) = \partial^\mu \partial_\mu \phi(x, t) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0 \quad (1.1)$$

dove $\phi(x, t)$ è un campo scalare reale in (1+1) dimensioni e c è la velocità della luce. Questa equazione è lineare e non dispersiva e le sue soluzioni godono di due particolari proprietà:

1. Qualsiasi funzione reale sufficientemente liscia della forma $f(x \pm ct)$ è soluzione della (1.1). In particolare, scelta una funzione f di questo tipo, possiamo costruire un pacchetto d'onda che viaggerà a velocità uniforme $\pm c$ mantenendo inalterata la sua forma. Consideriamo ad esempio $f(x - ct)$: tale funzione può essere scritta come

$$f(x - ct) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk, \quad \omega = ck \quad (1.2)$$

Il fatto che il pacchetto d'onda $f(x - ct)$ viaggi a velocità c mantenendo inalterata la sua forma è legato al fatto che le onde piane che lo compongono hanno tutte la stessa velocità di fase, ovvero $c = \omega/k$.

2. Poichè l'equazione d'onda è lineare, date due soluzioni distinte $f_1(x - ct)$ e $f_2(x + ct)$, la loro somma $f_3(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ è ancora una soluzione. Nel lontano passato ($t \rightarrow -\infty$) $f_3(x, t)$ consiste di due pacchetti d'onda separati che successivamente collidono in un tempo t finito. Dopo la collisione, essi si separano asintoticamente (per $t \rightarrow +\infty$) nei due pacchetti iniziali conservando la loro forma e la loro velocità.

Spesso, tuttavia, si ha a che fare con equazioni d'onda più complesse della (1.1), contenenti ad esempio termini non lineari e dispersivi: è quindi lecito chiedersi se tali equazioni ammettano delle soluzioni che godono delle proprietà (1) e (2). Per alcune equazioni in cui sono presenti sia termini dispersivi sia termini non lineari è infatti possibile che i loro effetti si "bilancino" in modo tale che alcune soluzioni particolari godano della proprietà (1): esse prendono il nome di onde solitarie. Talvolta tali soluzioni godono anche della proprietà (2): si parla in questo caso di solitoni.

Cercheremo ora di quantificare in maniera più precisa le proprietà (1) e (2): in seguito ragioneremo in termini di densità di energia piuttosto che di campi d'onda, dato che la prima è più significativa per i sistemi di nostro interesse. Ciò vuol dire che restringiamo il nostro interesse a quelle equazioni di campo (eventualmente valide per un insieme di campi accoppiati $\phi_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, 2, \dots$) che hanno associata una densità di energia

$\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ che è una qualche funzione dei campi $\phi_i(\mathbf{x}, t)$. Il suo integrale spaziale rappresenta l'energia totale che si conserva $E[\phi_i]$. Poichè i sistemi fisici hanno un'energia limitata inferiormente, senza perdita di generalità possiamo fissare il valore minimo assunto da E pari a zero. Inoltre chiameremo *localizzate* quelle soluzioni la cui densità di energia $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ è localizzata nello spazio per ogni tempo t finito, ovvero è finita in ogni regione dello spazio e tende a zero all'infinito spaziale in maniera sufficientemente veloce da essere integrabile. Possiamo quindi ora definire *onda solitaria* come quella soluzione di un'equazione d'onda non lineare che è localizzata e non singolare e la cui densità di energia ha una dipendenza della forma

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) \quad (1.3)$$

dove \mathbf{u} è un certo vettore velocità. In altre parole, la densità di energia si “muove” a velocità costante senza deformarsi.

L'equazione (1.3) definisce le onde solitarie in una o più dimensioni spaziali. Notiamo come ogni soluzione statica, ovvero indipendente dal tempo, è automaticamente un'onda solitaria con velocità $\mathbf{u} = 0$. Inoltre, per i sistemi relativisticamente invarianti, nota una soluzione statica, quelle per le quali $\mathbf{u} \neq 0$ si ottengono applicando le trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo ora un'equazione d'onda non lineare che ammette una soluzione di onda solitaria la cui densità di energia è qualche funzione localizzata $\varepsilon_0(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)$. Consideriamo poi un'altra soluzione che nel lontano passato consisteva di N onde di questo tipo con arbitrarie velocità iniziali e posizioni. Allora la densità di energia $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ di questa soluzione avrà la forma

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t), \quad \text{per } t \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

Data questa configurazione in $t = -\infty$, essa evolverà nel tempo secondo l'equazione non lineare. Supponiamo che l'evoluzione sia tale per cui

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t + \boldsymbol{\delta}_i), \quad \text{per } t \rightarrow +\infty \quad (1.5)$$

dove $\boldsymbol{\delta}_i$ sono dei vettori costanti. Un'onda solitaria di questo tipo è detta *solitone*. In altre parole i solitoni sono quelle onde solitarie i cui profili delle densità di energia riassumono asintoticamente (per $t \rightarrow +\infty$) le loro forme e velocità. I vettori $\boldsymbol{\delta}_i$ rappresentano la possibilità che i solitoni subiscano uno sfasamento rispetto ai momenti precedenti la collisione: tale sfasamento deve essere l'unico effetto residuo della collisione stessa.

Mentre tutti i solitoni sono onde solitarie, il contrario è ovviamente falso. Inoltre la richiesta (1.5) è molto stringente, pertanto le soluzioni solitoniche esistono per poche equazioni. Per trovare una soluzione ad un'equazione non lineare che sia un'onda solitaria è sufficiente cercare una soluzione localizzata che soddisfi la (1.3). Per accertarci invece che una certa soluzione sia un solitone, non dobbiamo trovare semplicemente tale soluzione, ma infinite soluzioni dipendenti dal tempo che consistono di un numero arbitrario di solitoni e verificare che le condizioni (1.4) e (1.5) vengano soddisfatte. Data una certa equazione non lineare è quindi difficile calcolare le sue eventuali soluzioni solitoniche. A tale scopo sono state sviluppate diverse tecniche, come quella dello scattering inverso che verrà approfondita nel capitolo successivo.

1.3 La carica topologica

È spesso possibile fare una classificazione topologica delle soluzioni di un dato sistema di equazioni: si può infatti definire una carica topologica che si conserva nel tempo. Essa, tuttavia, ha un'origine diversa rispetto alle altre grandezze che si conservano per un dato sistema.

Come noto, un'equazione di campo può essere ricavata partendo da una densità di lagrangiana \mathcal{L} : consideriamo ad esempio

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - U(\phi) \quad (1.6)$$

dove $U(\phi)$ è una qualsiasi funzione non negativa di ϕ . L'equazione di campo associata è

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}(x, t) \quad (1.7)$$

Supponiamo che $U(\phi)$ abbia un numero discreto (non necessariamente finito) di minimi assoluti in cui si annulla. Siamo interessati alle soluzioni non singolari a energia finita, di cui i solitoni e le onde solitarie sono casi particolari. Come si dimostrerà nella prossima sezione, il campo, sia nel caso in cui sia statico sia nel caso in cui dipenda dal tempo, dovrà tendere ad ogni istante t ad un minimo di $U(\phi)$ in qualsiasi punto dell'infinito spaziale in modo tale che l'energia totale E sia finita. In (1+1) dimensioni, l'infinito spaziale consiste di due punti, $x = \pm\infty$. Consideriamo per esempio $x = +\infty$. Dato un istante di tempo t_0 , poniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x, t_0) \equiv \phi(+\infty, t_0) = \phi_1 \quad (1.8)$$

dove ϕ_1 deve essere uno dei minimi di $U(\phi)$. Allora, mentre il tempo scorre (avanti o indietro partendo da t_0), il campo $\phi(x, t)$ evolverà in maniera continua con t per ogni x secondo l'equazione (1.7). In particolare, $\phi(+\infty, t)$ sarà una qualche funzione continua di t . Inoltre, poichè l'energia di tale soluzione si conserva e rimane finita, $\phi(+\infty, t)$ deve essere sempre uno dei minimi di $U(\phi)$, che sono un insieme discreto: non può quindi saltare da ϕ_1 a un altro minimo se deve variare in maniera continua con t . Pertanto $\phi(+\infty, t)$ deve rimanere stazionaria in ϕ_1 . Lo stesso ragionamento può essere applicato per $x = -\infty$, dove $\phi(-\infty, t) = \phi_2$ deve anch'essa essere indipendente da t ed un minimo di $U(\phi)$, sebbene non necessariamente lo stesso di ϕ_1 in caso di minimi degeneri.

Possiamo quindi suddividere lo spazio di tutte le soluzioni non singolari a energia finita in settori caratterizzati da due indici, ovvero i due valori indipendenti da t di $\phi(x = +\infty)$ e $\phi(x = -\infty)$. Tali settori sono topologicamente sconnessi, nel senso che i campi di un settore non possono essere modificati in maniera continua in quelli di un altro settore senza violare la richiesta che l'energia rimanga finita. In particolare, poichè l'evoluzione temporale è un esempio di modifica continua, un campo rimarrà sempre nello stesso settore.

Consideriamo ad esempio un potenziale della forma

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (1.9)$$

dove λ e m^2 sono costanti positive. Tale potenziale ha due minimi degeneri in $\phi = (\pm m/\sqrt{\lambda})$. Di conseguenza tutte le soluzioni non singolari a energia finita, siano esse statiche o dipendenti dal tempo, si suddividono in quattro settori topologici, caratterizzati dalla coppia di valori $(\phi(x = -\infty), \phi(x = +\infty))$: $(-m/\sqrt{\lambda}, m/\sqrt{\lambda})$, $(m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda})$, $(m/\sqrt{\lambda}, m/\sqrt{\lambda})$ e $(-m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda})$. In questo caso possiamo definire la *carica topologica* Q come

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} [\phi(x = +\infty) - \phi(x = -\infty)] \quad (1.10)$$

con associata una corrente conservata

$$k^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (1.11)$$

dove $\varepsilon^{\mu\nu}$ è il tensore di Levi-Civita. Dalla definizione è chiaro che

$$\partial_\mu k^\mu = 0, \quad Q = \int_{-\infty}^{+\infty} k_0 dx \quad (1.12)$$

È bene notare che per identificare un settore topologico abbiamo bisogno sia di $\phi(x = -\infty)$ sia di $\phi(x = +\infty)$ e non soltanto di Q . Tuttavia, nei casi in cui le grandezze fisiche

rilevanti dipendano dalle differenze di ϕ e non dai suoi valori assoluti, allora Q diviene il solo indice topologico rilevante. L'aggettivo *topologica* è spesso attribuito a quelle onde solitarie che hanno $Q \neq 0$, mentre quelle con $Q = 0$ sono dette *non topologiche*.

La generalizzazione dell'idea a N campi scalari accoppiati $\phi_i(x, t)$ è banale. Siano $P^{(1)}, \dots, P^{(m)}$ dei punti discreti che sono i minimi del potenziale $U(\phi_1, \dots, \phi_N)$ nello spazio N -dimensionale dei campi. I campi devono tendere alle coordinate di uno di questi punti, $P^{(r)}$, per $x \rightarrow +\infty$, e a quelle di un altro di tali punti, $P^{(s)}$, per $x \rightarrow -\infty$. La coppia di punti $P^{(r)}$ e $P^{(s)}$ caratterizza il settore topologico delle soluzioni a energia finita. Se $P^{(r)} = P^{(s)}$, le soluzioni sono dette *non topologiche*; se $P^{(r)} \neq P^{(s)}$, esse sono dette *topologiche*.

È interessante notare come in (1+1) dimensioni, nel caso di un sistema descritto da un singolo campo, non siano possibili soluzioni non topologiche che non siano banali ($\phi = \text{cost.}$), mentre nel caso di sistemi descritti da campi accoppiati ciò è realizzabile [1]. Osserviamo infine come questi indici topologici siano differenti dalle altre grandezze che spesso si conservano per un sistema fisico, come ad esempio l'energia e la quantità di moto: mentre queste ultime sono legate ad una simmetria continua della lagrangiana, come la traslazione temporale e spaziale, gli indici topologici sono condizioni al contorno che si conservano perchè l'energia rimane finita.

1.4 Un esempio pratico

Riconsideriamo la densità di lagrangiana (1.6) e l'equazione di campo associata (1.7). Al variare del tempo, tale equazione conserva il funzionale dell'energia totale, dato da

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) \right] \quad (1.13)$$

Supponiamo che $U(\phi)$ abbia M minimi assoluti, con $M \geq 1$, ovvero

$$U(\phi) = 0 \quad \text{per} \quad \phi = g^{(i)}, \quad i = 1, \dots, M \quad (1.14)$$

Il funzionale dell'energia è minimizzato quando il campo $\phi(x, t)$ è costante e assume uno dei valori (1.14). Siamo interessati a soluzioni statiche, per cui l'equazione (1.7) si riduce a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \phi}(x) \quad (1.15)$$

Inoltre un'onda solitaria deve avere energia finita e una densità di energia localizzata, pertanto il suo campo deve tendere ad uno dei minimi $g^{(i)}$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Se $U(\phi)$ ha un solo minimo in $\phi = g$, allora la nostra soluzione statica $\phi \rightarrow g$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Se invece

ha più minimi, $\phi(x)$ deve tendere ad uno dei g^i per $x \rightarrow -\infty$ e o allo stesso o ad un altro dei g^i per $x \rightarrow +\infty$.

Prima di risolvere l'equazione, è interessante notare un'analogia con la meccanica: se consideriamo x come la variabile "tempo" e ϕ come la coordinata di una particella puntiforme di massa unitaria, allora l'equazione (1.15) è la seconda legge di Newton per il moto di tale particella soggetta al potenziale $-U(\phi)$: la soluzione $\phi(x)$ non rappresenta altro che il moto della particella. L'"energia" totale del moto, che si conserva al variare di x , è data da

$$W = \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi) \quad (1.16)$$

Le condizioni al contorno impongono che per $x \rightarrow \pm\infty$ si abbia $U(\phi) \rightarrow 0$ e $(d\phi/dx) \rightarrow 0$ e pertanto $W = 0$. L'energia W è da non confondere con l'energia E del nostro sistema iniziale data dalla (1.13), che nel caso di soluzioni statiche si riduce a

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) \right] \quad (1.17)$$

Moltiplicando la (1.15) per ϕ' e integrando si ottiene

$$\int \phi' \phi'' dx = \int \frac{dU}{d\phi} \phi' dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} (\phi')^2 = U(\phi) \quad (1.18)$$

Forti dell'analogia meccanica, consideriamo dapprima un potenziale che ha un unico minimo in $\phi = \phi_1$, dove $U(\phi_1) = 0$. La nostra particella avverte un potenziale $-U(\phi)$ con un massimo in $\phi = \phi_1$ e che assume valori negativi per tutti gli altri ϕ (fig. 1.1). Le condizioni al contorno impongono una traiettoria che inizia in $\phi = \phi_1$ in $x = -\infty$ e termina nello stesso punto in $x = +\infty$. Tuttavia, escludendo il caso in cui la particella sia ferma in $\phi = \phi_1$, un moto di questo tipo non è possibile: una volta abbandonato $\phi = \phi_1$, essa non vi farà più ritorno. Infatti la sua energia cinetica non potrà essere più nulla dato che l'energia totale W (che è nulla) sarà sempre maggiore dell'energia potenziale $-U(\phi)$. Di conseguenza, la particella non potrà fermarsi e tornare indietro in ϕ_1 . In termini della soluzione $\phi(x)$, ciò vuol dire che una soluzione diversa da $\phi(x) = \phi_1$ non è possibile. Pertanto, senza risolvere esplicitamente la (1.15) e indipendentemente dai dettagli di $U(\phi)$, possiamo subito affermare che se il potenziale ha un unico minimo assoluto, allora non esistono onde solitarie statiche diverse dalla soluzione $\phi(x) = \phi_1$: in altri termini non esistono soluzioni non topologiche.

Sia ora $U(\phi)$ un potenziale con due o più minimi assoluti ϕ_i in cui si annulla. Le condizioni al contorno impongono che la particella debba abbandonare uno di questi punti in $x = -\infty$ e arrivare in un altro in $x = +\infty$. Supponiamo per chiarezza che $U(\phi)$ abbia tre minimi ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 con $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$ (fig. 1.2). La particella può ad esempio

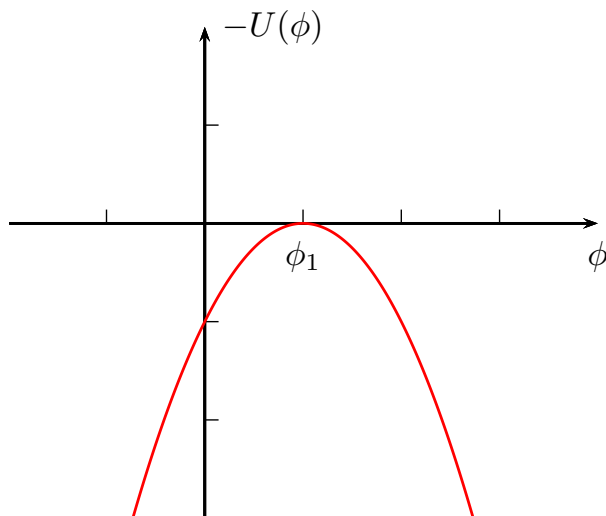


Figura 1.1: Esempio di potenziale $-U(\phi)$ con un solo massimo assoluto avvertito dalla particella

partire da ϕ_1 e arrivare in ϕ_2 o partire da ϕ_3 e arrivare in ϕ_2 . Tuttavia non può partire da ϕ_1 , arrivare in ϕ_2 e fare ritorno in ϕ_1 o proseguire sino a ϕ_3 . Notiamo infatti che in ϕ_2 si annullano sia $U(\phi)$ sia $dU/d\phi$. Di conseguenza, dalle (1.18) e (1.15), sia la velocità ϕ' sia l'accelerazione ϕ'' si annullano in ϕ_2 . Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\phi''' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dU(\phi)}{d\phi} \right) = \frac{d^2U}{d\phi^2} \phi' = 0 \\ \phi'''' &= \frac{d^2U}{d\phi^2} \phi'' + \frac{d^3U}{d\phi^3} (\phi')^2 = 0\end{aligned}\tag{1.19}$$

Pertanto tutte le derivate $d^n\phi/dx^n$ si annullano in ϕ_2 . La particella, quindi, una volta raggiunto ϕ_2 per $x \rightarrow +\infty$ non può tornare indietro verso ϕ_1 o proseguire verso ϕ_3 .

L'analogia meccanica ci permette di trarre due conclusioni:

- quando $U(\phi)$ ha un unico minimo assoluto, non sono possibili onde solitarie statiche o, in altri termini, soluzioni statiche non topologiche che non siano banali;
- quando $U(\phi)$ ha n minimi discreti, possiamo avere $2(n - 1)$ tipi di soluzioni che connettono due minimi adiacenti per x che varia da $-\infty$ a $+\infty$. In questo caso sono possibili soluzioni statiche topologiche.

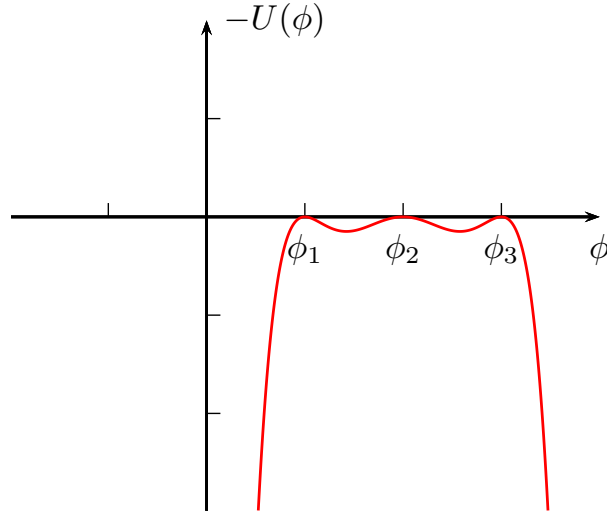


Figura 1.2: Esempio di potenziale $-U(\phi)$ con tre massimi assoluti avvertito dalla particella

Possiamo ora risolvere la (1.15): dalla (1.18) abbiamo

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm [2U(\phi)]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{[2U(\bar{\phi})]^{1/2}} \quad (1.20)$$

Dalla precedente discussione sappiamo che $\phi(x)$ assumerà i valori ϕ_i che minimizzano $U(\phi)$ solo per $x \rightarrow \pm\infty$. Di conseguenza $U(\phi)$ si annullerà solo in $x \rightarrow \pm\infty$ e assumerà valori positivi per tutti gli altri valori di x . L'integrale (1.20) sarà quindi non singolare eccetto i casi in cui $x \rightarrow +\infty$ o $x_0 \rightarrow -\infty$. La soluzione $\phi(x)$ può essere ottenuta in principio integrando la (1.20) ed invertendo il risultato ottenuto, sebbene all'atto pratico ciò sia possibile solo per pochi potenziali.

Per illustrare quanto descritto finora, consideriamo il potenziale (1.9). L'equazione del moto sarà allora

$$\ddot{\phi} - \phi'' = m^2\phi - \lambda\phi^3 \quad (1.21)$$

In questo caso $U(\phi)$ si annulla nei due minimi $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$, quindi le soluzioni localizzate devono tendere a $\pm m/\sqrt{\lambda}$ per $x \rightarrow \pm\infty$. In particolare le soluzioni statiche possono essere di due tipi: possono partire da $\phi = -m/\sqrt{\lambda}$ in $x = -\infty$ e terminare in $\phi = +m/\sqrt{\lambda}$ in $x = +\infty$ o viceversa. In particolare, l'equazione statica

$$\phi'' = -m^2\phi + \lambda\phi^3 \quad (1.22)$$

può essere risolta sfruttando la (1.20)

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{\lambda/2(\bar{\phi}^2 - m^2/\lambda)}} \quad (1.23)$$

Scegliendo $\phi(x_0) = 0$, integrando secondo $\bar{\phi}$ e invertendo, si ottiene

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] \quad (1.24)$$

La soluzione con il segno positivo è detta *kink* mentre quella con il segno negativo è detta *antikink* (fig. 1.3). L'effetto della simmetria traslazionale della lagrangiana rispetto a x ha come effetto quello di traslare la soluzione nello spazio. Le altre due simmetrie della lagrangiana, rispettivamente $x \leftrightarrow -x$ e $\phi \leftrightarrow -\phi$, danno origine ad una particolare relazione quando x_0 viene scelto uguale a zero:

$$\phi_{\text{kink}}(x) = -\phi_{\text{antikink}}(x) = \phi_{\text{antikink}}(-x) \quad (1.25)$$

La densità di energia del kink è pari a

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) = (\phi')^2 = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] \quad (1.26)$$

L'energia totale del kink è data quindi da

$$E_{\text{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda} \quad (1.27)$$

che è finita. Il kink è quindi un'onda solitaria così come l'antikink. Tuttavia, essi non sono solitoni. Per vederlo, è sufficiente notare che una configurazione con due kink che collidono non può esistere con energia finita. Il primo kink deve iniziare in $x = -\infty$ con $\phi = -m/\sqrt{\lambda}$ e tendere a $\phi = m/\sqrt{\lambda}$ in $x = +\infty$; se fosse seguito da un secondo kink, quest'ultimo tenderebbe a $\phi = 2m/\sqrt{\lambda}$ in $x = +\infty$. Ciò comporterebbe una densità di energia costante ma non nulla per $x \rightarrow +\infty$ e quindi un'energia totale infinita. Un kink può anche essere seguito da un antikink che riporterebbe indietro il campo ϕ in $-m/\sqrt{\lambda}$. In questo caso l'analisi numerica mostra che il kink e l'antikink non mantengono la loro forma dopo la collisione.

L'analogia con le particelle si spinge anche oltre: poichè il sistema è relativisticamente invariante, data la soluzione statica (1.3), è sufficiente applicare le trasformazioni di

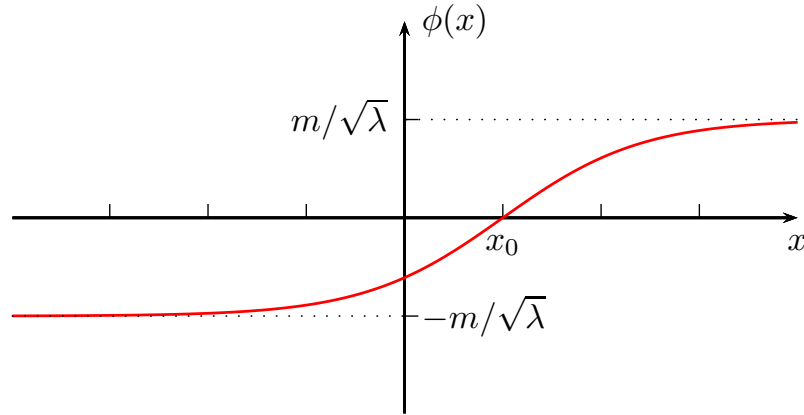


Figura 1.3: Illustrazione grafica del kink

Lorentz per ottenere un kink dipendente dal tempo. Poichè ϕ è un campo scalare, è sufficiente trasformare la variabile coordinata della (1.3). Si ottiene così

$$\phi_u(x, t) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \left(\frac{x - x_0 - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right] \quad (1.28)$$

dove $-1 < u < 1$ è la velocità. Essa è soluzione della (1.21) come può essere verificato per sostituzione. Inoltre l'energia della soluzione (1.28) è pari a

$$\begin{aligned} E[\phi_u] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi}_u)^2 + \frac{1}{2}(\phi'_u)^2 + U(\phi_u) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{2} m^3}{3} \frac{1}{\lambda \sqrt{1 - u^2}} = \frac{E_k}{\sqrt{1 - u^2}} \end{aligned} \quad (1.29)$$

dove E_k è l'energia del kink statico in (1.27). La relazione tra la (1.27) e la (1.29) è la stessa tra la massa e l'energia di una particella in ambito relativistico.

Un'altra importante caratteristica della $\phi_{\text{kink}}(x)$ è che diventa singolare se il parametro λ tende a zero: essa quindi non può essere dedotta da uno sviluppo perturbativo. Infine, il kink è una soluzione topologica: se definiamo la carica topologica Q come in (1.10), essa avrà $Q = 2$.

1.5 Un cenno a dimensioni superiori

Finora ci siamo occupati di sistemi in (1+1) dimensioni: in questo caso, considerando le soluzioni statiche, le equazioni di campo si riducevano ad equazioni differenziali ordinarie.

Tuttavia sistemi più realistici prevedono (3+1) dimensioni: in tal caso anche le soluzioni statiche devono obbedire a equazioni differenziali alle derivate parziali che non sempre si riescono a risolvere. Esiste però un teorema, detto del viriale, che limita la possibilità di avere onde solitarie statiche non banali per alcuni sistemi in dimensioni superiori. In particolare, esso afferma che non sono ammesse onde solitarie statiche non banali quando si ha a che fare con tre o più dimensioni spaziali e quando la lagrangiana ha la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\mu=0}^D (\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi_i) - U(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t)) \\ &\equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\phi}) - U(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t))\end{aligned}\quad (1.30)$$

dove $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) = (\phi_i(\mathbf{x}, t); i = 1, \dots, N)$ è un insieme di N campi scalari accoppiati in D dimensioni spaziali più una temporale. Anche in questo caso il potenziale $U(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t))$ è una funzione non negativa che si annulla solo nei suoi minimi assoluti. Una soluzione statica $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ obbedisce all'equazione

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x}) \quad (1.31)$$

dove ∇^2 è il laplaciano in D dimensioni. Questa equazione è la condizione estremante $\delta E = 0$ del funzionale statico dell'energia

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{\phi}] &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^D (\nabla_j \boldsymbol{\phi}) \cdot (\nabla_j \boldsymbol{\phi}) + U(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) \right] \\ &\equiv V_1[\boldsymbol{\phi}] + V_2[\boldsymbol{\phi}]\end{aligned}\quad (1.32)$$

dove abbiamo posto $2V_1[\boldsymbol{\phi}] = \int d^D x \sum_{j=1}^D (\nabla_j \boldsymbol{\phi}) \cdot (\nabla_j \boldsymbol{\phi})$ e $V_2[\boldsymbol{\phi}] = \int d^D x U(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))$. Si noti come sia $V_1[\boldsymbol{\phi}]$ sia $V_2[\boldsymbol{\phi}]$ siano non negativi. Sia ora $\boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{x})$ una soluzione statica e consideriamo la famiglia di configurazioni ad un parametro $\boldsymbol{\phi}_\lambda(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}_1(\lambda \mathbf{x})$. È facile verificare che

$$E[\boldsymbol{\phi}_\lambda] = V_1[\boldsymbol{\phi}_\lambda] + V_2[\boldsymbol{\phi}_\lambda] = \lambda^{2-D} V_1[\boldsymbol{\phi}_1] + \lambda^{-D} V_2[\boldsymbol{\phi}_1] \quad (1.33)$$

Poichè $\boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{x})$ è un estremo di $E[\boldsymbol{\phi}]$, allora deve in particolare rendere $E[\boldsymbol{\phi}_\lambda]$ stazionario rispetto alle variazioni di λ , ovvero

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E[\boldsymbol{\phi}_\lambda] \right|_{\lambda=1} = 0 \quad (1.34)$$

Derivando la (1.33) e usando la (1.34) si ottiene

$$(2 - D)V_1[\phi_1] = D V_2[\phi_1] \quad (1.35)$$

Poichè V_1 e V_2 sono non negativi, la (1.35) non può essere soddisfatta per $D \geq 3$ a meno che $V_1[\phi_1] = V_2[\phi_1] = 0$, ma ciò implica che $\phi_1(\mathbf{x})$ debba essere indipendente da \mathbf{x} e pari ad uno degli zeri di $U(\phi)$, ovvero $\phi_1 = \text{cost}$. Si noti comunque che questo risultato vale solo per le soluzioni statiche e per le lagrangiane della forma (1.30): onde solitarie dipendenti dal tempo possono esistere per campi scalari in $(D + 1)$ dimensioni anche quando $D \geq 3$.

Capitolo 2

Il modello di Sine-Gordon

In questo capitolo verranno presentati il modello di Sine-Gordon e il metodo dello scattering inverso che verrà in seguito utilizzato per ricavarne alcune particolari soluzioni.

2.1 L'equazione di Sine-Gordon

L'equazione di Sine-Gordon deve il suo nome alla somiglianza alla più nota equazione di Klein-Gordon dalla quale differisce per la presenza della funzione seno. La sua forma generale è

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k \sin \phi = 0 \quad (2.1)$$

Essa è utile per la descrizione di diversi fenomeni fisici, quale ad esempio la propagazione del flusso magnetico nelle giunzioni Josephson a superconduttori basate sull'effetto tunnel, nella dinamica di alcune catene di molecole come il DNA, nella descrizione di materiali ferromagnetici e ferroelettrici e nella trattazione della *self-induced transparency* (SIT): in particolare, quest'ultimo fenomeno verrà approfondito nel prossimo capitolo. Tuttavia, l'equazione di Sine-Gordon è stata ricavata classicamente per la prima volta nello studio della geometria differenziale. A questo scopo consideriamo una superficie bidimensionale immersa in uno spazio euclideo tridimensionale. Siano $y^i, i = 1, 2, 3$, le coordinate cartesiane ortogonali e siano $u^\alpha, \alpha = 1, 2$, delle coordinate intrinseche sulla superficie. Tre equazioni della forma

$$y^i = y^i(u^1, u^2) \quad (2.2)$$

definiscono quindi la superficie. Sia $\mathbf{r}(y^i)$ il vettore posizione di un punto P sulla superficie rispetto al sistema di coordinate dello spazio in cui è immersa la superficie stessa.

Se P viene spostato di una distanza infinitesima in una nuova posizione sulla superficie, il vettore posizione sarà cambiato di una quantità data da

$$d\mathbf{r} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{\alpha}} du^{\alpha} \quad (2.3)$$

L'elemento di lunghezza d'arco è data dalla prima forma fondamentale

$$\mathcal{F}_1 \equiv d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} \quad (2.4)$$

dove

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{\beta}} \quad (2.5)$$

è il tensore metrico della superficie. Analogamente, sia \mathbf{n} il versore normale alla superficie in P . Quando P è spostato di una distanza infinitesima, \mathbf{n} varia di una quantità data da

$$d\mathbf{n} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^{\alpha}} du^{\alpha} \quad (2.6)$$

La seconda forma fondamentale è definita come

$$\mathcal{F}_2 \equiv -d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} \quad (2.7)$$

dove $h_{\alpha\beta}$ è il tensore di curvatura estrinseca. Qualsiasi curva regolare sulla superficie passante per P ha un raggio di curvatura in P rispetto allo spazio euclideo. Variando le curve passanti per P , è possibile trovare un massimo e un minimo raggio di curvatura, indicati rispettivamente con ρ_1 e ρ_2 : essi corrispondono alle cosiddette *direzioni principali* in P , le quali sono tra loro ortogonali. La *curvatura gaussiana* della superficie in P è definita come

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \quad (2.8)$$

La superficie ha curvatura gaussiana negativa in un punto se i raggi di curvatura principali giacciono sui lati opposti del piano tangente in P , come ad esempio nel caso di una sella. Siano λ^{α} , $\alpha = 1, 2$, i vettori tangenti ad una curva C passante per P . Tale curva è detta *linea asintotica* se

$$\sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} = 0 \quad (2.9)$$

lungo C . Per un punto su una superficie esistono due linee asintotiche reali e distinte se e solo se la curvatura gaussiana è ivi negativa. Se l'intera superficie ha curvatura

negativa, allora è possibile usare un sistema di linee asintotiche per definire le coordinate intrinseche sulla superficie stessa.

Consideriamo una superficie a curvatura negativa costante $K = -1/a^2$ con coordinate intrinseche definite per mezzo delle sue linee asintotiche. Con un'opportuna scelta di scala, la prima forma fondamentale può essere scritta

$$\mathcal{F}_1 = a^2(du^2 + 2 \cos \phi \, du \, dv + dv^2) \quad (2.10)$$

dove ϕ denota l'angolo tra le linee asintotiche. In queste coordinate, l'equazione di Gauss che deve soddisfare $h_{\alpha\beta}$ si riduce all'equazione di Sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = \sin \phi \quad (2.11)$$

Pertanto ogni soluzione di questa equazione definisce una superficie a curvatura negativa costante con la prima forma fondamentale data dalla (2.10). Tali superfici sono dette *pseudosferiche*.

L'equazione di Sine-Gordon può essere inoltre ottenuta partendo da una densità di lagrangiana per un campo scalare in (1+1) dimensioni della forma

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{m^4}{\lambda} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right) - 1 \right] \quad (2.12)$$

Si può sviluppare la densità di lagrangiana in potenze della costante di accoppiamento λ , ottenendo

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{n-1} \phi^{2n}}{(2n)! m^{2n-4}} \quad (2.13)$$

Se $\lambda \rightarrow 0$, il sistema si riduce a quello di Klein-Gordon per una particella libera. L'equazione di campo che si ricava dalla (2.12) è la seguente

$$\square \phi + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right) = 0 \quad (2.14)$$

L'equazione (2.14) può essere semplificata effettuando il seguente cambio di variabili

$$\bar{x} = mx, \quad \bar{t} = mt, \quad \bar{\phi} = (\sqrt{\lambda}/m)\phi$$

La densità di lagrangiana (2.12) si scriverà quindi

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{m^4}{\lambda} \left[\frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu \bar{\phi})(\bar{\partial}^\mu \bar{\phi}) + \cos \bar{\phi} - 1 \right] \quad (2.15)$$

mentre l'equazione del moto diventerà

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \sin \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad (2.16)$$

Il funzionale dell'energia è inoltre dato da

$$E = \frac{m^3}{\lambda} \int d\bar{x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{t}^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + 1 - \cos \bar{\phi} \right] \quad (2.17)$$

La lagrangiana e l'equazione di campo godono delle seguenti simmetrie discrete

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) \rightarrow -\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (2.18a)$$

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) \rightarrow -\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) + 2N\pi, \quad N \in \mathbb{Z} \quad (2.18b)$$

Consistentemente con queste simmetrie, l'energia E si annulla nei minimi assoluti del potenziale $U(\bar{\phi}) = 1 - \cos \bar{\phi}$, ovvero in $\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) = 2N\pi$. Dalla sezione 1.3 sappiamo che tutte le configurazioni a energia finita, sia statiche sia dipendenti dal tempo, possono essere suddivise in un numero infinito di settori topologici, ognuno caratterizzato da una coppia di indici interi che si conservano (N_1, N_2) corrispondenti ai valori asintotici $2N_1\pi$ e $2N_2\pi$ cui il campo deve tendere rispettivamente per $\bar{x} \rightarrow -\infty$ e $\bar{x} \rightarrow +\infty$. Se da considerazioni fisiche decidiamo che solo $\bar{\phi}$ modulo 2π è significativo, come accade quando $\bar{\phi}$ è una variabile angolare, allora possiamo definire la carica topologica come

$$Q \equiv N_2 - N_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \quad (2.19)$$

Con “ $\bar{\phi}$ modulo 2π ” intendiamo che ogni punto $\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t})$ dello spaziotempo può essere considerato modulo 2π .

Possiamo ottenere subito delle soluzioni statiche localizzate. Da quanto detto nel capitolo precedente, sappiamo che esse dovranno connettere due minimi adiacenti di $U(\bar{\phi})$, ovvero avranno una carica topologica pari a $Q = \pm 1$. Sfruttando la (1.20), otteniamo

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = \pm \int_{\bar{\phi}(\bar{x}_0)}^{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{d\phi}{2 \sin(\phi/2)} \quad (2.20)$$

che si integra facilmente ottenendo

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = 4 \tan^{-1}[\exp(\bar{x} - \bar{x}_0)] \equiv \bar{\phi}_{\text{sol}}(\bar{x}) \quad (2.21a)$$

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = -4 \tan^{-1}[\exp(\bar{x} - \bar{x}_0)] \equiv \bar{\phi}_{\text{antisol}}(\bar{x}) = -\bar{\phi}_{\text{sol}}(\bar{x}) \quad (2.21b)$$

La soluzione con il segno positivo (2.21a) va da $\bar{\phi} = 0$ a $\bar{\phi} = 2\pi$ e quindi ha una carica topologica pari a $Q = 1$. Essa è spesso chiamata *solitone* di Sine-Gordon. La soluzione con il segno negativo (2.21b) va da $\bar{\phi} = 0$ a $\bar{\phi} = -2\pi$ e ha una carica topologica pari a $Q = -1$: per questo motivo essa è detta *antisolitone*. Queste due soluzioni sono rappresentate in fig. 2.1.

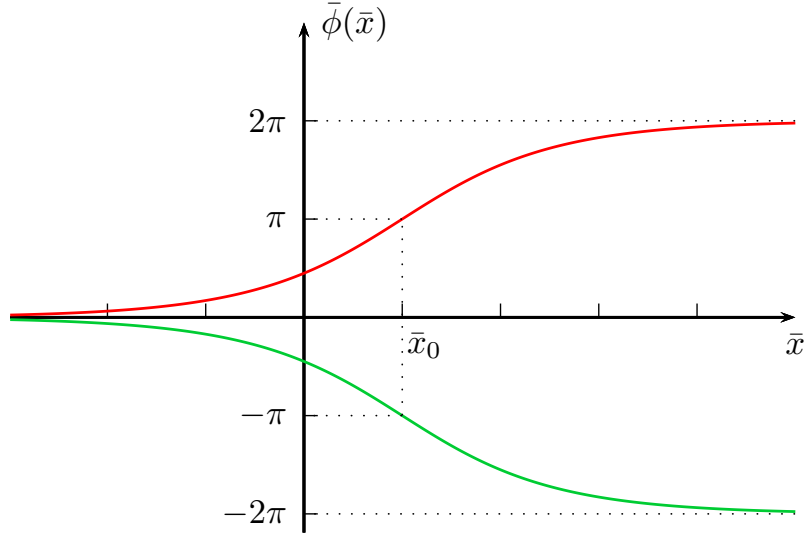


Figura 2.1: Solitone e antisolitone di Sine-Gordon: il primo è disegnato in rosso, il secondo in verde

Entrambe hanno un'energia pari a $E = 8m^2/\lambda$ come può essere facilmente verificato inserendo le (2.21) nella (2.17). Per ottenere dei solitoni dipendenti dal tempo è sufficiente effettuare una trasformazione di Lorentz con velocità u lungo x sulle equazioni (2.21), ottenendo

$$\bar{\phi}_{\text{sol}}(\bar{x}, \bar{t}) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{\bar{x} - \bar{x}_0 - u\bar{t}}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right] = -\bar{\phi}_{\text{antisol}}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (2.22)$$

In tal caso l'energia posseduta dal solitone sarà pari a

$$E_u = \frac{8m^3}{\lambda\sqrt{1 - u^2}} = \frac{E}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (2.23)$$

Anche in questo caso quindi E_u ed E sono legate dalla stessa relazione che vi è tra massa ed energia in relatività ristretta.

2.2 Il metodo dello scattering inverso

Per ottenere delle soluzioni dell'equazione di Sine-Gordon più complesse delle (2.21) sfrutteremo un metodo noto come *metodo dello scattering inverso*: quest'ultimo fu sviluppato da Gardner, Greene, Kruskal e Miura per risolvere l'equazione di Korteweg-de Vries e fu successivamente generalizzato da Lax. L'idea fondamentale è quella di impostare un problema di scattering indotto da un potenziale ignoto che è una funzione della soluzione dell'equazione differenziale non lineare che vogliamo risolvere: la sua espressione esplicita verrà poi ricostruita dalla conoscenza dei parametri di scattering. Noto il potenziale sarà quindi possibile risalire alla soluzione da noi cercata. Per far ciò bisogna innanzitutto considerare due diversi operatori lineari differenziali \hat{L} e \hat{M} . L'equazione agli autovalori di \hat{L} corrisponde all'equazione di Schrödinger legata all'equazione che vogliamo risolvere. La forma generale di questa equazione è

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \quad (2.24)$$

dove ψ è l'autofunzione e λ il corrispondente autovalore. Il potenziale $u(x, t)$ che compare in \hat{L} sarà legato alla soluzione da noi cercata. L'operatore \hat{M} descrive invece l'evoluzione temporale delle autofunzioni ψ : la forma generale di questa equazione è

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{M}\psi \quad (2.25)$$

Tuttavia \hat{L} e \hat{M} non sono indipendenti: si può infatti dimostrare [2] che se valgono la (2.24) e la seguente equazione, detta *equazione di Lax*,

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial t} + [\hat{L}, \hat{M}] = 0 \quad (2.26)$$

dove $[\hat{L}, \hat{M}] \equiv \hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}$ è il commutatore di \hat{L} e \hat{M} , allora $\partial\lambda/\partial t = 0$ e la ψ soddisfa la (2.25). Due operatori che soddisfano queste condizioni formano una cosiddetta *Lax pair*. La difficoltà principale risiede nel trovare i due operatori \hat{L} e \hat{M} , i quali, in generale, sono operatori matriciali.

Supponiamo di aver trovato la nostra equazione di Schrödinger (2.24) e risolviamo il problema di scattering per $t = 0$ soggetto alla condizione iniziale nota $u(x, 0) = f(x)$: lo spettro consisterà di una parte discreta, $\lambda = \kappa_n^2$, $n = 1, 2, \dots, N$, e di una parte continua,

$\lambda = -k^2$. Possiamo quindi scrivere il comportamento asintotico delle corrispondenti autofunzioni: per la parte discreta avremo

$$\psi_n(x, t) \sim c_n(t) \exp(-\kappa_n x), \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (2.27)$$

soggette alla normalizzazione $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1$, mentre per la parte continua

$$\psi(x, t) \sim e^{-ikx} + r(k, t)e^{ikt}, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (2.28a)$$

$$\psi(x, t) \sim a(k, t)e^{-ikx}, \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \quad (2.28b)$$

dove $r(k, t)$ e $a(k, t)$ sono rispettivamente il coefficiente di riflessione e quello di trasmissione. Per $t = 0$ abbiamo quindi i dati di scattering che possiamo far evolvere nel tempo grazie all'equazione (2.25). Il problema di scattering inverso consiste ora nel ricostruire il potenziale $u(x, t)$ dai dati di scattering. Ciò può essere fatto [3] nel seguente modo: definiamo innanzitutto

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) \exp(-\kappa_n x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(k, t) e^{ikx} dk \quad (2.29)$$

Risolviamo quindi la seguente equazione integrale, nota come *equazione di Gel'fand-Levitan-Marchenko* (GLM)

$$K(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^{+\infty} K(x, z, t) F(z + y, t) dz = 0 \quad (2.30)$$

Dalla conoscenza di $K(x, y, t)$ sarà poi possibile risalire al nostro potenziale in quanto tale funzione è legata al nucleo integrale delle cosiddette *soluzioni fondamentali*. Il modo in cui si possa calcolare il potenziale nota $K(x, y, t)$ varia a seconda che il potenziale stesso sia reale o complesso [4]. Lo schema riassuntivo del metodo dello scattering inverso è rappresentato in fig. 2.2.

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\text{scattering diretto}} & S(\lambda, 0) \\ & & \downarrow \\ u(x, t) & \xleftarrow{\text{scattering inverso}} & S(\lambda, t) \end{array}$$

Figura 2.2: Schema riassuntivo del metodo dello scattering inverso: con $S(\lambda, t)$ si sono indicati i dati di scattering di autovalore λ al tempo t

Le soluzioni solitoniche si ottengono imponendo $r(k, t) = 0$: $F(x, t)$ assumerà la forma

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) \exp(-\kappa_n x) \quad (2.31)$$

In tal caso il problema si riduce alla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche. Si può inoltre dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra il numero di autovalori discreti considerati e il numero di solitoni che emergono asintoticamente dalla soluzione [5].

Sfruttiamo quanto appena descritto all'equazione (2.16): innanzitutto operiamo il cambio di variabili

$$X = \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{t}), \quad T = \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{t}) \quad (2.32)$$

In queste coordinate l'equazione di Sine-Gordon si scrive

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial X \partial T} = \sin(\bar{\phi}) \quad (2.33)$$

L'equazione (2.24) associata a quella di Sine-Gordon è un'equazione di Schrödinger avente un potenziale complesso [6] che può essere ricondotta al sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial X} + i\lambda v_1 = q(X, T)v_2 \\ \frac{\partial v_2}{\partial X} - i\lambda v_2 = -q(X, T)v_1 \end{cases} \quad (2.34)$$

dove λ è l'autovalore e $q(X, T)$ il potenziale; in particolare $2q(X, T) = -\partial \bar{\phi} / \partial X$. Differenziando il sistema (2.34), si giunge all'equazione (2.25) per Sine-Gordon

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial T} = \frac{i}{4\lambda}(v_1 \cos \bar{\phi} + v_2 \sin \bar{\phi}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial T} = \frac{i}{4\lambda}(v_1 \sin \bar{\phi} - v_2 \cos \bar{\phi}) \end{cases} \quad (2.35)$$

Notiamo che se

$$\psi(X, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(X, \lambda) \\ \psi_2(X, \lambda) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

è soluzione del sistema (2.34), allora lo è anche

$$\bar{\psi}(X, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_2^*(X, \lambda^*) \\ -\psi_1^*(X, \lambda^*) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

dove con “*” si è indicato il complesso coniugato. La coppia ψ e $\bar{\psi}$ formano quindi un sistema completo di soluzioni del (2.34) e pertanto una generica soluzione sarà esprimibile come

$$\zeta = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \quad \lambda = \xi + i\eta \quad (2.38)$$

Si può effettuare la continuazione analitica di $a(\xi)$ nel semipiano superiore complesso e in particolare i suoi zeri λ_i , $i = 1, \dots, N$, sono gli autovalori discreti del sistema (2.34). Essendo il potenziale dell'equazione (2.24) complesso, gli autovalori discreti potranno essere immaginari puri o complessi coniugati a coppie $\lambda, -\lambda^*$ [7]. Valutando la (2.38) in questi punti abbiamo

$$\zeta(X, \lambda_i) = c_i\psi(X, \lambda_i) \quad (2.39)$$

L'evoluzione temporale di $a(\lambda)$, $b(\xi)$ e c_i può essere calcolata attraverso il sistema (2.35) e risulta essere pari a

$$\begin{aligned} a(\lambda, T) &= a_0(\lambda), & b(\xi, T) &= b_0(\xi) \exp\left(-\frac{iT}{2\xi}\right) \\ c_i(\lambda_i, T) &= c_{i0} \exp\left(-\frac{iT}{2\lambda_i}\right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

La soluzione del problema si ottiene risolvendo l'equazione (2.30). Il potenziale $q(x, t)$ è dato da

$$q(X, T) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\phi}(X, T)}{\partial X} = -2K(X, X, T) \quad (2.41)$$

e di conseguenza la soluzione sarà

$$\bar{\phi}(X, T) = \bar{\phi}(T, T) + 4 \int_T^X K(y, y, T) dy \quad (2.42)$$

Quando $b(\xi, t) = 0$, ovvero in assenza di riflessione, la soluzione è generata solo dallo spettro discreto e sarà data dall'espressione

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial X}\right)^2 = 4 \frac{d^2}{dX^2} \ln[\det(I + AA^*)] \quad (2.43)$$

dove I è la matrice identità $N \times N$, con N il numero di zeri di $a(\lambda)$ nel semipiano complesso superiore, e A è una matrice $N \times N$ i cui elementi sono dati da

$$A_{ij} = \frac{(c_i c_j^*)^{1/2}}{\lambda_i - \lambda_j^*} \exp[i(\lambda_i - \lambda_j^*)X] \quad (2.44)$$

2.3 Alcune soluzioni solitoniche dell'equazione di Sine-Gordon

Consideriamo il caso più semplice, ovvero quello di un singolo zero di $a(\lambda)$ posto sull'asse immaginario nel punto $\lambda = i\eta$. Sostituendolo nelle espressioni (2.44) e (2.43) ed esprimendo il risultato in funzione delle variabili \bar{x}, \bar{t} originarie otteniamo

$$\bar{\phi} = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\left(\eta + \frac{1}{4\eta} \right) (\bar{x} - \bar{x}_0) + \left(\eta - \frac{1}{4\eta} \right) \bar{t} \right) \right] \quad (2.45)$$

Con un'adeguata sostituzione [8], questa soluzione può essere espressa come

$$\bar{\phi} = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{\bar{x} - \bar{x}_0 - u\bar{t}}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right] \quad (2.46)$$

che non è altro che la soluzione (2.21a) che avevamo ottenuto in precedenza. Per ottenere l'antisolitone è sufficiente sfruttare la simmetria (2.18a).

Studiamo invece ora il caso della soluzione che rappresenta l'interazione tra due solitoni: quest'ultima può essere ottenuta considerando due zeri di $a(\lambda)$ posti sull'asse immaginario nei punti $\lambda = i\eta_\ell/2$, $\ell = 1, 2$. Risolvendo la (2.43) si ottiene

$$\bar{\phi}_{\text{SS}}(X, T) = -4 \tan^{-1} \left[\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} \right) \frac{\cosh \frac{1}{2}(u_1 - u_2)}{\sinh \frac{1}{2}(u_1 + u_2)} \right], \quad \eta_1 > \eta_2 \quad (2.47)$$

dove si è posto

$$u_\ell = \left(\eta_\ell X + \frac{T}{\eta_\ell} + \gamma_\ell \right), \quad \exp(\gamma_\ell) = \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right) \left[\frac{c_\ell}{\eta_\ell} \exp \left(-\frac{T}{\eta_\ell} \right) \right]$$

Ponendo ora $u = (\eta_1 + \eta_2)/2\sqrt{\eta_1\eta_2}$ e $\eta = \sqrt{\eta_1\eta_2}$, esprimendo la soluzione (2.47) in funzione di \bar{x} e \bar{t} e sfruttando l'identità $\tan^{-1} \theta + \pi/2 = -\tan^{-1}(1/\theta)$ si ottiene

$$\bar{\phi}_{\text{SS}}(\bar{x}, \bar{t}) = 4 \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u} \frac{\sinh(u\bar{x})}{\cosh(\sqrt{u^2 - 1}\bar{t})} \right] \quad (2.48)$$

La soluzione (2.48) è rappresentata in fig. 2.3. Dalla (2.48) è evidente che per ogni istante \bar{t} , tale soluzione va da -2π a 2π per \bar{x} che varia da $-\infty$ a $+\infty$: essa ha quindi carica topologica pari a $Q = 2$ come del resto ci si aspettava dato che rappresenta la collisione di due solitoni, ognuno con carica topologica $Q = 1$. Si può dimostrare [9] che dopo aver interagito in $\bar{t} = 0$, tali solitoni riemergono con la stessa "forma" che avevano prima

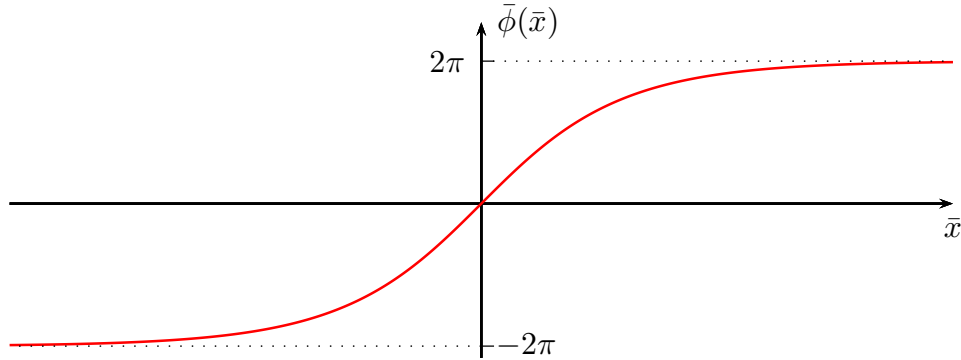


Figura 2.3: Profilo dell'interazione tra due solitoni per $\bar{t} = 0$

della collisione ma con uno sfasamento di un angolo pari a $\delta = \tanh^{-1}[2\eta_1\eta_2/(\eta_1^2 + \eta_2^2)]$, in accordo con la proprietà (1.5). Analogamente al caso precedente si può ottenere una soluzione che rappresenta l'interazione tra due antisolitoni ricorrendo alla simmetria (2.18a)

$$\bar{\phi}_{AA} = -\bar{\phi}_{SS} \quad (2.49)$$

Consideriamo infine il caso in cui gli zeri di $a(\lambda)$ sono una coppia di valori complessi coniugati tali per cui $\lambda\lambda^* = 1/4$. La soluzione dell'equazione di Sine-Gordon espressa in funzione di \bar{x}, \bar{t} in questo caso è data da

$$\bar{\phi}_B(\bar{x}, \bar{t}) = 4 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1-\omega^2}{\omega^2}} \frac{\cos[\omega(\bar{t} - \bar{t}_0)]}{\cosh[\sqrt{1-\omega^2}(\bar{x} - \bar{x}_0)]} \right] \quad (2.50)$$

dove $\omega = -2\Re(\lambda)$. La soluzione (2.50) è chiamata *breather* (fig. 2.4 - 2.5) ed è una funzione periodica di periodo $\tau = 2\pi/\omega$.

È interessante notare come la densità di energia del breather, calcolata usando la (2.17), non ha dipendenza spazio-temporale del tipo $(x-ut)$ così come richiesto dalla definizione (1.3): tuttavia essa è una soluzione a energia finita e localizzata. Inoltre, a differenza delle soluzioni viste fin qui, la (2.50) dipende esplicitamente dal tempo anche in un sistema di riferimento a riposo; per ottenere un breather in un sistema di riferimento in moto sarà sufficiente applicare una trasformazione di Lorentz alla (2.50).

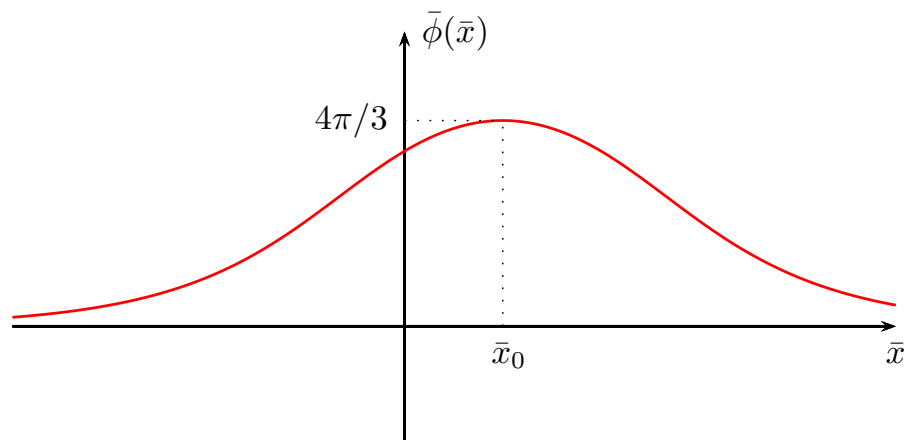


Figura 2.4: Profilo del breather per $\bar{t} = 0$: si è posto $\omega = 1/2$

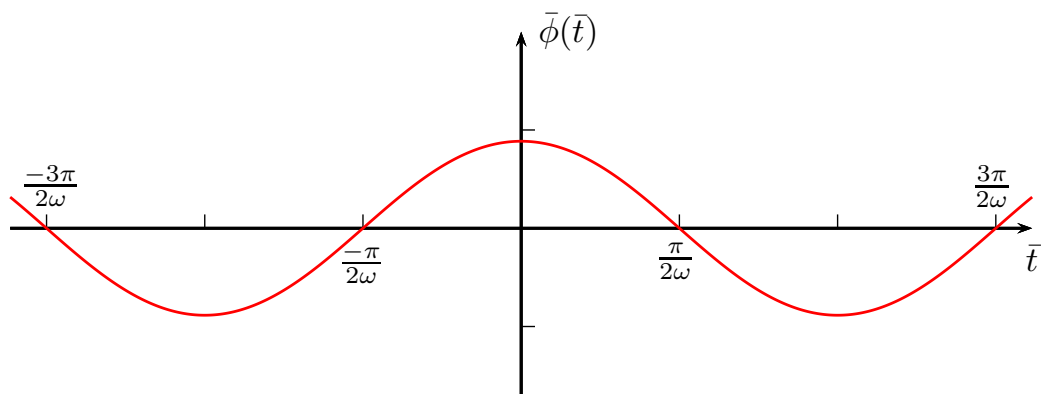


Figura 2.5: Profilo del breather per $\bar{x} = 0$: è evidente la sua periodicità

Capitolo 3

La self-induced transparency

In questo capitolo descriveremo il fenomeno della *self-induced transparency* e in che modo esso sia legato all'equazione di Sine-Gordon.

3.1 Descrizione qualitativa del fenomeno

La *self-induced transparency* (SIT) è un fenomeno tipico dell'ottica non lineare scoperto da McCall e Hahn negli anni '60. Per comprendere in che cosa consiste, consideriamo un materiale dielettrico i cui atomi possono essere descritti come un sistema quantistico a due stati, quello fondamentale e quello eccitato. Assumiamo che questi due stati non possano essere ulteriormente suddivisi a seconda del valore del momento angolare: in altre parole, non abbiamo degenerazione. Inoltre assumiamo che tutti gli atomi siano inizialmente nel livello fondamentale: il mezzo si comporta quindi da attenuatore piuttosto che da amplificatore. Il campo elettrico dell'onda incidente è realizzato in modo tale che la sua frequenza sia pari alla frequenza di risonanza degli atomi, ovvero alla frequenza di Bohr tra il livello fondamentale e quello eccitato. Il fenomeno della SIT si verifica quando un'onda incidente sufficientemente intensa e molto breve ha un particolare profilo temporale per cui la parte "anteriore" dell'onda cede coerentemente energia al mezzo, il quale la immagazzina per un certo intervallo di tempo prima di cederla coerentemente alla parte "posteriore" dell'onda. Quando ciò avviene, il mezzo viene lasciato nel suo livello fondamentale, non c'è un trasferimento netto di energia e l'onda si propaga a velocità fissa ma ridotta attraverso il mezzo stesso, il quale è diventato a tutti gli effetti trasparente: da qui il nome di self-induced transparency.

3.2 Analisi della SIT

Vediamo ora come si giunge all'equazione di Sine-Gordon mediante la descrizione teorica della SIT.

Consideriamo una radiazione elettromagnetica di frequenza ω che si propaga attraverso un insieme di atomi. Supponiamo inoltre che il nostro sistema a due stati sia descritto da un'hamiltoniana H_0 tale per cui

$$H_0 |\psi_1\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 |\psi_1\rangle \quad H_0 |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 |\psi_2\rangle \quad (3.1)$$

dove $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono gli autostati di autovalori rispettivamente $-\hbar\omega_0/2$ e $\hbar\omega_0/2$. La differenza di energia tra i due stati è quindi pari a $\hbar\omega_0$. In presenza della radiazione, l'hamiltoniana atomica diventa

$$H_{\text{at}} = H_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{p} = e \sum_i \mathbf{r}_i \quad (3.2)$$

dove \mathbf{p} è l'operatore del momento di dipolo elettrico e \mathbf{E} il campo elettrico della radiazione incidente.

Assumiamo che l'onda elettromagnetica si propaghi lungo la direzione \mathbf{x} e che $\mathbf{E} = E(x, t)\mathbf{n}$, con $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$. L'unico elemento di matrice non nullo dell'operatore $\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ può essere parametrizzato come

$$\langle \psi_2 | \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} | \psi_1 \rangle = pE(x, t)e^{-i\alpha} \quad (3.3)$$

dove p e α sono costanti che dipendono dall'atomo in questione e dove si è assunta simmetria sferica. È utile introdurre le matrici di Pauli σ_i e scrivere l'hamiltoniana come

$$H_{\text{at}} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 - E(x, t)(p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2) \quad (3.4)$$

dove $p_1 = p \cos \alpha$ e $p_2 = p \sin \alpha$.

La dinamica del sistema è governata dall'equazione di Maxwell nella materia, che possiamo scrivere come

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(x, t) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

dove $\bar{c}^2 = c^2/\epsilon_r$, con ϵ_r la costante dielettrica del mezzo, e $\mathbf{P} = P(x, t)\mathbf{n}$ è il momento di dipolo elettrico per unità di volume. Quest'ultimo può essere espresso in funzione del

valore di aspettazione delle matrici di Pauli $\langle \sigma_i \rangle = \langle \psi | \sigma_i | \psi \rangle$, con $|\psi\rangle$ funzione d'onda atomica, nel seguente modo

$$\mathbf{P} = n(p_1 \langle \sigma_1 \rangle + p_2 \langle \sigma_2 \rangle) \mathbf{n} \quad (3.6)$$

dove n è il numero di atomi per unità di volume. In aggiunta all'equazione di Maxwell (3.5), abbiamo anche le equazioni per la polarizzazione $P(x, t)$ che sono determinate dall'equazione di Schrödinger per l'atomo

$$i\hbar \frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial t} = \langle \psi | [\sigma_i, H_{\text{at}}] | \psi \rangle \quad (3.7)$$

Quest'ultima può essere scritta come

$$\frac{\partial \langle \sigma_i \rangle}{\partial t} = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} V_j \langle \sigma_k \rangle \quad (3.8)$$

dove ε è il tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita e

$$V_1 = \frac{2E(x, t)}{\hbar} p_1, \quad V_2 = \frac{2E(x, t)}{\hbar} p_2, \quad V_3 = \omega_0 \quad (3.9)$$

Riassumendo, la dinamica è determinata dalla coppia di equazioni (3.5) e (3.8), nelle quali gli atomi vengono trattati quantisticamente e la radiazione classicamente.

Poniamo

$$E(x, t) = \mathcal{E}(x, t) \cos(\omega t - kx) \quad (3.10)$$

dove $\omega/k = \bar{c}$ e \mathcal{E} è l'involuppo del campo elettrico. Assumiamo che l'involuppo vari lentamente rispetto all'oscillazione armonica, ovvero

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \ll \omega \mathcal{E}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \ll k \mathcal{E} \quad (3.11)$$

In questa approssimazione, il lato sinistro dell'equazione (3.5) si riduce a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(x, t) \approx \frac{2\omega}{\bar{c}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\bar{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}(x, t) \right] \sin(\omega t - kx) \quad (3.12)$$

Definiamo ora $\langle \sigma_{\parallel} \rangle$ e $\langle \sigma_{\perp} \rangle$ come

$$\langle \sigma_{\parallel} \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \cos(\omega t - kx + \alpha) + \langle \sigma_2 \rangle \sin(\omega t - kx + \alpha) \quad (3.13a)$$

$$\langle \sigma_{\perp} \rangle = -\langle \sigma_1 \rangle \sin(\omega t - kx + \alpha) + \langle \sigma_2 \rangle \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (3.13b)$$

Facciamo inoltre l'ulteriore approssimazione che il termine $\cos[2(\omega t - kx + \alpha)]$ nell'equazione del moto (3.8) possa essere trascurato rispetto a $\cos(\omega t - kx + \alpha)$ e analogamente il termine $\sin[2(\omega t - kx + \alpha)]$; ciò comporta anche la sostituzione di $\cos^2(\omega t - kx + \alpha)$ e $\sin^2(\omega t - kx + \alpha)$ con $1/2$. Si ricavano quindi le seguenti equazioni per $\langle\sigma_{\parallel}\rangle$, $\langle\sigma_{\perp}\rangle$ e $\langle\sigma_3\rangle$

$$\frac{\partial\langle\sigma_{\parallel}\rangle}{\partial t} = (\omega - \omega_0)\langle\sigma_{\perp}\rangle \quad (3.14a)$$

$$\frac{\partial\langle\sigma_{\perp}\rangle}{\partial t} = -\frac{\mathcal{E}(x,t)}{\hbar}p\langle\sigma_3\rangle + (\omega - \omega_0)\langle\sigma_{\parallel}\rangle \quad (3.14b)$$

$$\frac{\partial\langle\sigma_3\rangle}{\partial t} = \frac{\mathcal{E}(x,t)}{\hbar}p\langle\sigma_{\perp}\rangle \quad (3.14c)$$

Infine, facendo delle approssimazioni analoghe alle (3.11), le equazioni (3.5) e (3.12) conducono a

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\bar{c}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}(x,t) \right] \sin(\omega t - kx) \\ & = \frac{2\pi}{c^2} \bar{c} n \omega p [\sin(\omega t - kx) \langle\sigma_{\perp}\rangle - \cos(\omega t - kx) \langle\sigma_{\parallel}\rangle] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Per risolvere queste equazioni, notiamo innanzitutto che

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \langle\sigma_i\rangle \langle\sigma_i\rangle \right) = 0 \quad (3.16)$$

Pertanto, se all'inizio tutti gli atomi sono nel livello fondamentale $|\psi_1\rangle$ con $\langle\sigma_3\rangle = 1$, allora si ha $\sum_i \langle\sigma_i\rangle^2 = 1$ per ogni tempo t . In caso di risonanza, ovvero quando $\omega = \omega_0$, l'equazione (3.14a) implica $\langle\sigma_{\parallel}\rangle = 0$ ad ogni tempo t . Il vincolo $\sum_i \langle\sigma_i\rangle^2 = 1$ può essere imposto con la seguente parametrizzazione:

$$\langle\sigma_{\perp}\rangle = \sin(\beta\phi(x,t)) \quad (3.17a)$$

$$\langle\sigma_3\rangle = \cos(\beta\phi(x,t)) \quad (3.17b)$$

dove β è un certo parametro il cui valore può essere ricavato quantizzando il campo elettromagnetico [10] e risulta essere pari a

$$\beta = \frac{2p\epsilon_r^{1/4}}{\hbar\sqrt{\mathcal{A}\bar{c}}} \quad (3.18)$$

dove \mathcal{A} è la sezione trasversale effettiva ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Le equazioni (3.14b) e (3.14c) implicano allora

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{p}{\beta\hbar}\mathcal{E}(x,t) \quad (3.19)$$

Inserendo la (3.19) nella (3.15) e definendo $x' = 2x - \bar{c}t$, si ottiene l'equazione di Sine-Gordon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \bar{c}^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \phi = -\frac{\mu^2}{\beta} \sin(\beta\phi) \quad (3.20)$$

dove si è posto $\mu^2 = 2\pi n p^2 \omega / \hbar \epsilon_r$.

Inserendo l'espressione del solitone (2.46) nella (3.19) si ottiene un involuppo del campo elettrico della forma

$$\mathcal{E}_{\text{sol}}(x', t) = \frac{2\hbar\mu}{p} \sqrt{\frac{\bar{c} + v}{\bar{c} - v}} \operatorname{sech} \left[\frac{\mu(x' - vt)}{\sqrt{\bar{c}^2 - v^2}} \right] \quad (3.21)$$

L'involuppo nel caso dell'antisolitone sarà semplicemente $\mathcal{E}_{\text{antisol}}(x', t) = -\mathcal{E}_{\text{sol}}(x', t)$. I campi elettrici nel caso del solitone e dell'antisolitone sono quindi sfasati di un angolo pari π . Essi sono rappresentati con i rispettivi involuppi in fig. 3.1.

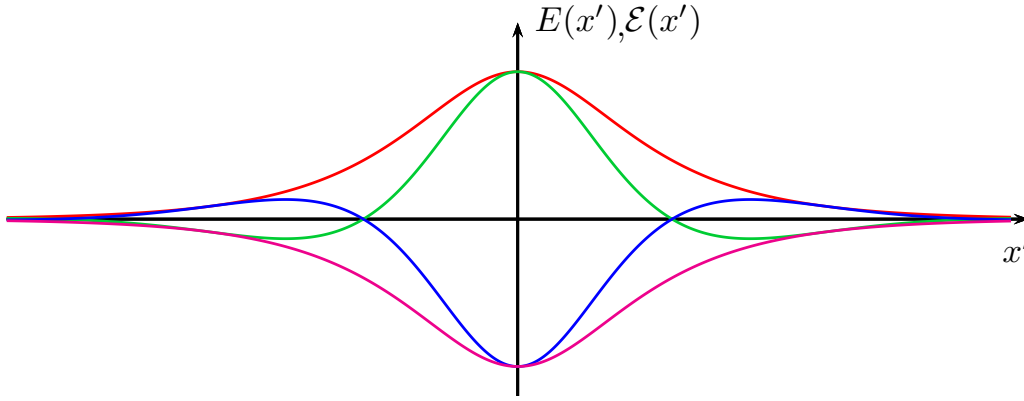


Figura 3.1: Campi elettrici con rispettivi involuppi per $t = 0$: in rosso e in verde sono rappresentati quelli del solitone, in blu e magenta quelli dell'antisolitone

Possiamo anche considerare il caso di un'onda che rappresenta l'interazione tra due solitoni come quella della (2.47): in tal caso il mezzo risulterà ancora trasparente, ma l'onda subirà una distorsione. In altre parole, non riemergerà l'impulso incidente, ma due solitoni distinti sfasati tra loro [11]. Per $t \rightarrow \infty$ avremo quindi una situazione del tipo

$$E \rightarrow E_1 \operatorname{sech}(\theta_1 + \gamma) + E_2 \operatorname{sech}(\theta_2 - \gamma) \quad (3.22)$$

dove E_1, E_2 sono le ampiezze dei campi elettrici dei due solitoni e $\theta_1 = \theta_1(x, t), \theta_2 = \theta_2(x, t)$.

Bibliografia

- [1] R. Rajaraman, *An introduction to solitons and instantons in quantum field theory*, North Holland 1987
- [2] L. Debnath, *Nonlinear partial differential equations*, Birkhäuser 2004
- [3] L. Debnath, *Nonlinear partial differential equations*, Birkhäuser 2004
- [4] G. L. Lamb Jr, *Elements of soliton theory*, John Wiley & Sons 1980
- [5] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge University Press 1991
- [6] G. L. Lamb Jr, *Elements of soliton theory*, John Wiley & Sons 1980
- [7] G. L. Lamb Jr, *Elements of soliton theory*, John Wiley & Sons 1980
- [8] G. L. Lamb Jr, *Elements of soliton theory*, John Wiley & Sons 1980
- [9] G. L. Lamb Jr, *Elements of soliton theory*, John Wiley & Sons 1980
- [10] A. LeClair, *Quantum theory of self-induced transparency*, Nuclear Physics B 450 (1995), 753-767
- [11] R. K. Bullough, P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, *A general theory of self-induced transparency*, Opto-electronics 6 (1974), 121-140

Ringraziamenti

Vorrei innanzitutto ringraziare il Prof. Ravanini per avermi guidato nella stesura di questa tesi e la disponibilità dimostratami in questi mesi: è solo grazie a lui che ho potuto conoscere e studiare gli argomenti precedentemente trattati. Ringrazio anche la Prof.ssa Fiorese, che mi ha sempre spronato a dare il meglio di me.

Desidero poi ringraziare mia sorella Federica che ha permesso la nascita della mia passione per la fisica e che mi ha aiutato quando ne avevo bisogno: magari un giorno saremo degli ottimi colleghi. Ringrazio anche i miei genitori, i quali mi sono sempre stati vicini non facendomi mai mancare il loro appoggio. Un pensiero lo dedico anche a mia nonna Teresa che veglia su di me da lassù.

Ringrazio poi Peppe, compagno di mille avventure in questi tre anni: il prossimo anno spero tu riesca a raggiungere l'università senza “perderti”. Grazie infinite anche a Ele, Ele, Miriam, Vale, Lucrezia, Brando, Irene e Leo: mi avete aiutato ad affrontare l'università e se questo percorso non è stato troppo impegnativo come poteva rivelarsi lo devo anche a voi; il prossimo anno vi aspetto per una gita sulle Dolomiti. Grazie anche ad Antonio, sempre disponibile per un aiuto sia psicologico sia fisico: continuerò a spronarti anche da lontano, spero tu faccia lo stesso. Ringrazio anche tutti i residenti di questi tre anni della Residenza Torleone, Alberto e Don Pablo: sono cresciuto tanto in questo triennio anche grazie a voi.

Vorrei poi ringraziare Pierluca, persona imprescindibile ormai da anni. Infine grazie gli amici di una vita: Daniele, Ilaria, Ilaria e Giada; se oggi sono quel che sono, lo devo anche a voi che non siete mai mancati.