

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# IL MODELLO QUANTISTICO DI RABI

**Relatore:**  
Prof.ssa Elisa Ercolessi

**Presentata da:**  
Valerio Crescimanna

Anno Accademico 2016/2017



## Sommario

Nel 1936, nel corso della primavera della meccanica quantistica, Isidor Isaac Rabi investigò la versione semiclassica di un modello che adesso porta il suo nome. Il modello di Rabi descrive la più semplice interazione tra un atomo a due livelli e un'onda elettromagnetica monocromatica. A lungo, si è pensato che il modello quantistico di Rabi, in cui anche il campo è quantizzato, non avesse soluzioni esatte e pertanto gli è stato preferito una versione approssimata e valida solo a determinate condizioni, il modello Jaynes-Cummings. Questo modello ha il vantaggio di essere più facilmente risolvibile e in più le condizioni di applicabilità sono comunque verificate nella maggior parte dei regimi sperimentali. Nel 2011, tuttavia, è stata presentata una soluzione analitica al problema di Rabi, dimostrando così che il modello quantistico di Rabi è risolvibile esattamente. In questa tesi, si introduce inizialmente l'hamiltoniana di Rabi che descrive il sistema, studiando separatamente i tre termini che la compongono: l'hamiltoniana atomica, l'hamiltoniana del campo e l'hamiltoniana di interazione. Si presentano successivamente tre approcci risolutivi del problema: la soluzione attraverso la trasformazione di Bogoliubov, la soluzione nello spazio di Bargmann-Fock e la soluzione in termini di funzioni confluenti di Heun. Infine si propongono tre generalizzazioni del modello tra le tante studiate negli ultimi anni: il modello di Rabi a due fotoni, il modello di Rabi anisotropo e il modello di Rabi asimmetrico.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 L' hamiltoniana di Rabi</b>	<b>1</b>
1.1 L'hamiltoniana atomica . . . . .	1
1.2 L'hamiltoniana del campo . . . . .	2
1.3 Stati di Fock e stati coerenti . . . . .	4
1.4 L'hamiltoniana di interazione . . . . .	8
1.5 Le oscillazioni di Rabi . . . . .	11
<b>2 Le soluzioni analitiche</b>	<b>15</b>
2.1 Il problema agli autovalori . . . . .	15
2.2 La soluzione tramite trasformazione di Bogoliubov . . . . .	17
2.3 La soluzione nello spazio di Bargmann-Fock . . . . .	21
2.4 La soluzione in termini di funzioni confluenti di Heun . . . . .	24
<b>3 Le generalizzazioni del modello</b>	<b>31</b>
3.1 Il modello di Rabi a due fotoni . . . . .	31
3.2 Il modello di Rabi anisotropo . . . . .	36
3.3 Il modello di Rabi asimmetrico . . . . .	38
<b>Conclusioni</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>



# Introduzione

Il modello di Rabi venne introdotto da Isidor Isaac Rabi alla fine degli anni '30 [1, 2]. Inizialmente, fu pensato per descrivere il comportamento di uno spin nucleare in un campo magnetico rotante nell'esperimento di risonanza magnetica nucleare (NMR). Rabi creò un modello semiclassico, trattando la materia quantisticamente e il campo classicamente. Nell'esperimento di NMR, lo spin è immerso in un campo magnetico costante e omogeneo con lo scopo di sollevare la degenerazione dei livelli “spin su” e “spin giù”, per effetto Zeeman. Successivamente, si aggiunge un campo magnetico rotante che ha l'effetto di indurre le transizioni tra gli stati di spin. Il modello nasce per descrivere proprio l'accoppiamento con questi due campi.

È possibile ottenere una versione totalmente quantistica del modello di Rabi quantizzando anche il campo elettromagnetico. Questo è il modo più facile di accoppiare un sistema a due livelli con un modo bosonico; di conseguenza il modello quantistico di Rabi si è imposto come uno dei modelli più semplici e quindi utilizzati per trattare le interazioni tra due sistemi quantistici. Una versione completamente quantizzata, ma anche approssimata, del modello venne studiata nel 1963 da Edwin Jaynes e Fred Cummings [3]. Questo modello limitato, noto come modello Jaynes–Cummings, ha a lungo nascosto gli aspetti più generali del modello quantistico di Rabi; infatti, l'approssimazione detta di onda rotante, necessaria per la sua applicabilità, è valida, comunque, nella maggior parte dei regimi sperimentali ma soprattutto, il modello Jaynes–Cummings è facile da risolvere, quindi permette di ottenere velocemente i valori ricercati per il sistema fisico in esame e di confrontarli con i dati ottenuti sperimentalmente.

Tuttavia, la situazione è recentemente cambiata a favore del modello quantistico di Rabi originale per tre ragioni: gli esperimenti sono adesso in grado di raggiungere regimi in cui l'approssimazione di onda rotante e quindi il modello Jaynes–Cummings non sono più applicabili; ci sono nuove interessanti prospettive per i nuovi regimi di interazione luce-materia [4] con potenziali applicazioni nelle tecnologie per l'informazione quantistica [5] e, soprattutto, è stata ottenuta una soluzione analitica per il modello quantistico di Rabi completo [6], seguito da ulteriori progressi nel risolvere diverse sue estensioni. Questa tesi si propone l'obiettivo di esaminare proprio i diversi approcci che conducono alla soluzione analitica del modello e di tre

delle tante generalizzazioni dello stesso.

In particolare, nel primo capitolo si esplicita l'hamiltoniana del sistema. Tutti i sistemi quantistici sono caratterizzati da una loro hamiltoniana, cioè l'operatore associato all'energia del sistema. La conoscenza degli autovalori, che definiscono i livelli energetici del sistema, è cruciale: da una parte, questi sono direttamente accessibili attraverso gli esperimenti di spettroscopia che permettono di osservare le diverse transizioni tra i livelli energetici del sistema; dall'altra, poiché l'hamiltoniana è indipendente dal tempo, conoscere gli autovalori e gli autovettori è sufficiente per predire la dinamica del sistema.

Nel secondo capitolo, dopo una sezione introduttiva dedicata al problema agli autovalori, si approfondiscono tre approcci risolutivi dello stesso. Il primo approccio, che utilizza la trasformazione di Bogoliubov venne presentato nel 2012 a un solo anno dalla scoperta della soluzione esatta del modello di Rabi [7]. Il secondo approccio che viene mostrato in questa trattazione è in realtà il primo in ordine cronologico essendo quello utilizzato originariamente da Daniel Braak, il quale presentò la soluzione nello spazio delle funzioni analitiche di Bargmann-Fock [6], infine, nell'ultima sezione si mostrano quali sono i passaggi necessari a esprimere la soluzione in termini di funzioni confluenti di Heun [8].

L'ultimo capitolo offre una rapida presentazione di tre generalizzazioni del modello quantistico di Rabi, interessanti tanto dal punto di vista teorico quanto da quello sperimentale grazie alle loro molteplici applicazioni a sistemi fisicamente realizzabili. La prima generalizzazione esposta è il modello quantistico di Rabi a due fotoni [9], in cui le transizioni tra i livelli energetici dell'atomo sono indotte dall'emissione o dall'assorbimento di due fotoni anziché uno. Quindi segue il modello di Rabi anisotropo [10] in cui i termini, detti di rotazione, hanno un diverso accoppiamento [11] e infine, utilizzando in questo modo tutti i tre approcci risolutivi presentati nel capitolo precedente, si conclude con il modello quantistico di Rabi asimmetrico in cui è aggiunto un termine detto di asimmetria [6].



# Capitolo 1

## L' hamiltoniana di Rabi

In ottica quantistica, l'hamiltoniana di Rabi, introdotta da Isidor Isaac Rabi nel 1937, descrive l'interazione di un atomo a due livelli con un campo elettromagnetico quantizzato a singolo modo [2]. L'hamiltoniana di Rabi  $\hat{H}_R$  può allora essere scritta come somma di tre termini:

$$\hat{H}_R = \hat{H}_{atomo} + \hat{H}_{campo} + \hat{H}_{int} \quad (1.1)$$

in cui  $\hat{H}_{atomo}$ ,  $\hat{H}_{campo}$  e  $\hat{H}_{int}$  sono rispettivamente l'hamiltoniana dell'atomo a due livelli, l'hamiltoniana del campo elettromagnetico incidente e l'hamiltoniana di interazione fra l'atomo e il campo [12].

In questo capitolo si mostra quali siano e come si ricavano le espressioni degli operatori hamiltoniani necessarie per esplicitare e risolvere il problema agli autovalori. Si approfitta, inoltre, di alcuni risultati che emergono nella trattazione per introdurre brevemente gli stati coerenti e gli stati di Fock del campo elettromagnetico e per presentare un fenomeno noto come oscillazioni di Rabi.

### 1.1 L'hamiltoniana atomica

Per un atomo a due livelli che ha uno stato fondamentale  $|g\rangle$  e uno stato eccitato  $|e\rangle$  con energie  $E_g$  e  $E_e$ , rispettivamente, l'hamiltoniana  $\hat{H}_{atomo}$  è definita come:

$$\hat{H}_{atomo} = E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g|. \quad (1.2)$$

Come per ogni altro spazio di Hilbert 2-dimensionale, ogni operatore può essere espresso come combinazione lineare dell'operatore identità  $\hat{I}$  e delle matrici di Pauli  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  e  $\hat{\sigma}_z$ . È però possibile scegliere una diversa base di operatori, in particolare:

$$\hat{I} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (1.3)$$

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|. \quad (1.4)$$

In cui cioè si sono sostituiti gli elementi di base  $\hat{\sigma}_x$  e  $\hat{\sigma}_y$  con gli operatori di innalzamento  $\hat{\sigma}_+$  e abbassamento  $\hat{\sigma}_-$ :

$$\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)}{2}. \quad (1.5)$$

Tale scelta di base si giustifica osservando come agiscono questi operatori sugli autoket dell'hamiltoniana [13]:

$$\hat{I}|e\rangle = |e\rangle, \quad \hat{I}|g\rangle = |g\rangle, \quad (1.6)$$

$$\hat{\sigma}_z|e\rangle = |e\rangle, \quad \hat{\sigma}_z|g\rangle = -|g\rangle, \quad (1.7)$$

$$\hat{\sigma}_+|e\rangle = 0, \quad \hat{\sigma}_+|g\rangle = |e\rangle, \quad (1.8)$$

$$\hat{\sigma}_-|e\rangle = |g\rangle, \quad \hat{\sigma}_-|g\rangle = 0. \quad (1.9)$$

L'operatore  $\hat{\sigma}_+$  produce una transizione dallo stato fondamentale a quello eccitato mentre la transizione opposta è realizzata dall'operatore  $\hat{\sigma}_-$  quando agisce sullo stato eccitato  $|e\rangle$ . L'hamiltoniana dell'atomo può, a questo punto essere dedotta combinando (1.2) e (1.3):

$$\hat{H}_{atomo} = \frac{E_e + E_g}{2}\hat{I} + \frac{E_e - E_g}{2}\hat{\sigma}_z. \quad (1.10)$$

Poiché i termini proporzionali all'identità sono ininfluenti sulla dinamica, questi possono essere eliminati. Inoltre, ponendo  $E_e - E_g = \hbar\omega_0$ , con  $\omega_0$  frequenza di transizione tra i due livelli atomici, si ottiene:

$$\hat{H}_{atomo} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z. \quad (1.11)$$

## 1.2 L'hamiltoniana del campo

Nello spazio libero, l'atomo interagirebbe con infiniti modi del campo elettromagnetico, quindi per restringere l'interazione a un singolo modo, si confina il campo in una cavità. Si consideri un'onda elettromagnetica piana che si propaga lungo l'asse  $z$  e il cui campo elettrico è polarizzato lungo l'asse  $x$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x(z, t)\mathbf{e}_x. \quad (1.12)$$

Si assume che la cavità sia delimitata lungo  $z$  da due piani perfettamente conduttori posti a distanza  $L$ . Il campo elettrico deve quindi annullarsi identicamente su tali piani e soddisfare le condizioni a contorno [14]:

$$E_x(z = 0, t) = E_x(z = L, t) = 0 \quad (1.13)$$

per ogni istante di tempo  $t$ . Tali condizioni sono verificate da un'onda stazionaria con ampiezza dipendente dal tempo  $Q(t)$ :

$$E_x(z, t) = Q(t) \sin(kz), \quad (1.14)$$

in cui  $k \neq 0$  è scelto in modo tale che  $L$  sia multiplo intero di mezze lunghezze d'onda:

$$\sin(kL) = 0, \quad kL = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.15)$$

Se ora si inserisce la definizione del campo elettrico (1.14) nelle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.17)$$

si ottiene:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \dot{Q}(t) \sin(kz), \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -kQ(t) \cos(kz). \quad (1.19)$$

Da (1.18) si ricava un'espressione per il campo magnetico:

$$B_y(z, t) = \frac{1}{kc^2} \dot{Q} \cos(kz). \quad (1.20)$$

Quindi (1.19) diventa:

$$\frac{1}{kc^2} \ddot{Q}(t) \cos(kz) = -kQ(t) \cos(kz), \quad (1.21)$$

questa è identicamente verificata se  $Q(t)$  soddisfa l'equazione:

$$\ddot{Q}(t) + c^2 k^2 Q(t) = 0, \quad (1.22)$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di massa unitaria e frequenza:

$$\omega = ck. \quad (1.23)$$

Si ridefinisce ora  $Q$ , le cui dimensioni sono quelle di un campo elettrico, in termini di una variabile  $q$  che ha invece le dimensioni effettive di una coordinata per un oscillatore armonico di massa unitaria:

$$Q(t) = \left( \frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} q(t), \quad (1.24)$$

si definisce anche il suo momento coniugato come:

$$p(t) = \dot{q}(t). \quad (1.25)$$

Le espressioni per il campo elettrico e magnetico sono allora:

$$E_x(z, t) = \left( \frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz), \quad (1.26)$$

$$B_y(z, t) = \frac{1}{\omega c} \left( \frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} p(t) \cos(kz). \quad (1.27)$$

La scelta della normalizzazione per il campo elettrico e magnetico è suggerita dal calcolo dell'energia assegnata al campo elettromagnetico:

$$\begin{aligned} H_{campo} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V (\omega^2 q^2(t) \sin^2(kz) + p^2(t) \cos^2(kz)) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Questa espressione è equivalente a quella dell'hamiltoniana di un oscillatore armonico. Pertanto per realizzare la quantizzazione del problema, si identificano  $q$  e  $p$  non come numeri, ma piuttosto come operatori, rispettivamente  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$ , i quali obbediscono alla relazione  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ . In più, in perfetta analogia col problema dell'oscillatore armonico si definiscono gli operatori di distruzione e creazione, rispettivamente  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , come:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (1.29)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (1.30)$$

Sostituendo le equazioni (1.29) e (1.30) nella (1.28) si ottiene l'hamiltoniana del campo elettromagnetico:

$$\hat{H}_{campo} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{I}}{2} \right). \quad (1.31)$$

Nuovamente, poiché il termine proporzionale all'identità non influenza la dinamica, si può scrivere:

$$\hat{H}_{campo} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (1.32)$$

### 1.3 Stati di Fock e stati coerenti

Prima di studiare l'hamiltoniana di interazione è opportuno soffermarsi su alcune importanti proprietà dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico [15].

Il problema agli autovalori per  $\widehat{H}_{campo} = \hbar\omega (\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \widehat{I}/2)$  è risolto considerando il problema agli autovalori per l'operatore numero  $\widehat{n} \equiv \widehat{a}^\dagger\widehat{a}$ , poiché  $[\widehat{H}_{campo}, \widehat{n}] = 0$ . L'equazione agli autovalori è:

$$\widehat{n} |\psi_n\rangle = |\psi_n\rangle n \quad (1.33)$$

dove  $n$  è l'autovalore di  $\widehat{n}$  e  $|\psi_n\rangle$  l'autovettore corrispondente. L'operatore numero  $\widehat{n}$  è un operatore hermitiano:

$$\widehat{n}^\dagger = (\widehat{a}^\dagger\widehat{a})^\dagger = \widehat{a}^\dagger\widehat{a}^{\dagger\dagger} = \widehat{a}^\dagger\widehat{a} = \widehat{n}, \quad (1.34)$$

quindi i suoi autovalori sono reali e gli autovalori  $|\psi_n\rangle$  formano un insieme completo e ortogonale. Scrivendo:

$$\langle\psi_n|\widehat{n}|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\widehat{a}^\dagger\widehat{a}|\psi_n\rangle = n \langle\psi_n|\psi_n\rangle, \quad (1.35)$$

si deduce che  $n$  deve essere un numero non negativo perché  $|\psi_n\rangle$  e  $\widehat{a}|\psi_n\rangle$  sono entrambi vettori nello spazio di Hilbert con norma non nulla se  $n$  è diverso da zero. Se si applica la relazione di commutazione  $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1$ , si trova che  $[\widehat{a}, \widehat{n}] = [\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger\widehat{a}] = [\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger]\widehat{a} = \widehat{a}$ , quindi

$$\widehat{n}\widehat{a}|\psi_n\rangle = (\widehat{a}\widehat{n} - [\widehat{a}, \widehat{n}])|\psi_n\rangle = \widehat{a}|\psi_n\rangle(n-1). \quad (1.36)$$

Questo significa che  $\widehat{a}|\psi_n\rangle$  è un autovettore dell'operatore numero con autovalore  $n-1$  che è possibile indicare come  $|\psi_{n-1}\rangle$ . Ma poiché tutti gli autovalori di  $\widehat{n}$  devono essere non negativi ci deve essere uno stato  $|\psi_0\rangle$  tale che  $\widehat{a}|\psi_0\rangle = 0$ . Esso è detto stato fondamentale, non contiene nessuna eccitazione e pertanto nessun quanto può essere ulteriormente distrutto. In modo simile si osserva che:

$$\widehat{n}\widehat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \widehat{a}^\dagger|\psi_n\rangle(n+1). \quad (1.37)$$

Dalle equazione (1.36) e (1.37) si vede che  $\widehat{a}$  e  $\widehat{a}^\dagger$  alzano e abbassano il numero di eccitazione di un'unità, da qui i nomi operatori di distruzione e creazione. Partendo dallo stato fondamentale  $|\psi_0\rangle$ , tutti gli altri stati possono essere generati per successive applicazioni dell'operatore di creazione,  $|\psi_n\rangle = (\widehat{a}^\dagger)^n |\psi_0\rangle$ . Se si normalizzano questi stati come  $|n\rangle = |\psi_n\rangle / \langle\psi_n|\psi_n\rangle$  si giunge alla definizione di stati di Fock. Si assume che lo stato fondamentale o di vuoto  $|0\rangle \equiv |\psi_0\rangle$  sia già normalizzato. Così, si crea l' $n$ -esimo stato di Fock dalla:

$$|n\rangle = c_n (\widehat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (1.38)$$

con  $c_n$  costanti di normalizzazione definite come [15]:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}. \quad (1.39)$$

Combinando (1.38) e (1.39) si può scrivere:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.40)$$

Similmente si mostra che:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle \sqrt{n+1}, \quad \hat{a} |n\rangle = |n-1\rangle \sqrt{n} \quad (1.41)$$

Infine per le proprietà di ortonormalità e completezza, sono verificate [15]:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}, \quad (1.42)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}. \quad (1.43)$$

Per quanto visto, la quantizzazione delle equazioni di Maxwell implica l'esistenza di eccitazioni elementari del campo elettromagnetico con energia quantizzata  $\hbar\omega$ . Queste eccitazioni, o particelle, sono i fotoni, un fotone è creato dall'operatore  $\hat{a}^\dagger$  e distrutto da  $\hat{a}$ . Poiché un sistema a singolo modo, nello stato di Fock  $|n\rangle$  contiene esattamente  $n$  eccitazioni di energia  $\hbar\omega$ , l'energia totale del sistema è:

$$\langle n|\hat{H}_{campo}|n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.44)$$

Gli stati di Fock (1.40) sono caratterizzati da una energia ben definita (1.44), ma non hanno un campo elettrico ben definito. Il campo elettrico è un'osservabile del sistema ma il suo valore medio di aspettazione dello stato  $|n\rangle$  è nullo [14]:

$$\langle n|\hat{E}_x(z, t)|n\rangle = \mathcal{E}_0 \sin(kz) \langle n|\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)|n\rangle = 0 \quad (1.45)$$

in cui si è posto  $\mathcal{E}_0 \equiv \sqrt{2\omega^2/\varepsilon_0 V}$  e sostituito in (1.26). Il quadrato del valore di aspettazione ha invece un valore di aspettazione non nullo:

$$\langle n|\hat{E}_x^2(z, t)|n\rangle = \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle \quad (1.46)$$

$$= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n|2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|n\rangle \quad (1.47)$$

$$= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz)(2n+1) \quad (1.48)$$

Si ha quindi un'indeterminazione:

$$\Delta E_x = \sqrt{\langle \hat{E}_x^2 \rangle - \langle \hat{E}_x \rangle^2} = \mathcal{E}_0 |\sin(kz)| \sqrt{2n+1} \quad (1.49)$$

Procedendo in maniera simile, anche per il campo magnetico si trova che questo ha valor medio di aspettazione nullo e indeterminazione non nulla rispetto agli stati di Fock. Per queste ragioni gli stati di Fock non sono

adatti per descrivere situazioni fisiche in cui si può evidenziare un campo elettromagnetico non nullo. Se si vogliono ricercare degli stati che rendano più evidente la corrispondenza con la meccanica classica bisogna richiedere che questi restituiscano valori medi non nulli per gli operatori di creazione e distruzione e cioè stati fisici che siano combinazione lineare di stati con diverso numero  $n$ . Una soluzione possibile è quella di utilizzare stati che siano autostati di  $\hat{a}$  oppure  $\hat{a}^\dagger$ . Gli autostati dell'operatore di distruzione  $\hat{a}$  sono detti stati coerenti:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \alpha \quad (1.50)$$

con  $\alpha$  numero complesso. Una soluzione di questa equazione è banalmente il vuoto  $|0\rangle$ , con autovalore nullo,  $\alpha = 0$ . In generale poiché gli stati di Fock formano un sistema ortonormale completo, si può scrivere:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (1.51)$$

e imponendo che questo sia autovettore di  $\hat{a}$ :

$$\begin{aligned} \hat{a}|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle \\ &= \alpha |\alpha\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \end{aligned} \quad (1.52)$$

si ottiene la relazione di ricorrenza:

$$c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}, \quad n > 0 \quad (1.53)$$

quindi:

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} c_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (1.54)$$

L'espressione (1.51) può così essere riscritta come:

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1.55)$$

con  $c_0$  costante di normalizzazione che si può fissare imponendo una normalizzazione unitaria:

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} \quad (1.56)$$

per cui  $c_0 = \exp(-|\alpha|^2/2)$  e la (1.55) diventa:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.57)$$

Questo stato, essendo normalizzabile e con coefficienti dello sviluppo nella base di stati di Fock ben definiti, è uno stato fisicamente accettabile. Lo stato coerente gode per di più di caratteristiche classiche come è possibile osservare ad esempio il valor medio del campo elettrico:

$$\langle \alpha | \widehat{E}_x(z, t) | \alpha \rangle = \mathcal{E}_0 \sin(kz) \langle \alpha | \widehat{a}^\dagger e^{i\omega t} + \widehat{a} e^{-i\omega t} | \alpha \rangle \quad (1.58)$$

$$= \mathcal{E}_0 \sin(kz) (\alpha^* e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t}) \quad (1.59)$$

$$= 2\mathcal{E}_0 |\alpha| \sin(kz) \cos(\omega t - \theta), \quad (1.60)$$

in cui si è indicato con  $\alpha^*$  il complesso coniugato di  $\alpha$  e con  $\theta$  la sua fase.

Riprendendo (1.40) l'espressione per lo stato coerente (1.57) si vede:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\widehat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \widehat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \widehat{a}^\dagger} |0\rangle \end{aligned} \quad (1.61)$$

Questo suggerisce l'introduzione dell'operatore di spostamento  $D(\alpha)$ :

$$D(\alpha) = e^{\alpha \widehat{a}^\dagger - \alpha^* \widehat{a}}. \quad (1.62)$$

Poiché i due operatori a esponente commutano con il loro commutatore, è verificato il teorema di disentangling che permette di riscrivere l'operatore di spostamento come:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \widehat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \widehat{a}}, \quad (1.63)$$

ma  $\exp(\alpha^* \widehat{a}) |0\rangle = |0\rangle$ , quindi uno stato coerente si può esprimere nella seguente forma compatta:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle = e^{\alpha \widehat{a}^\dagger - \alpha^* \widehat{a}} |0\rangle. \quad (1.64)$$

## 1.4 L'hamiltoniana di interazione

Si consideri l'elettrone con carica elettrica  $e$  e velocità  $\mathbf{v}$  in orbita attorno al nucleo sulla quale i campi elettrico e magnetico esterni esercitano la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.65)$$

Poiché inoltre è presente una forza di legame derivante da un potenziale centrale  $V(r)$  si ottengono le equazioni del moto:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \left[ \nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla V \right], \quad (1.66)$$



in cui si sono espressi i campi in funzione di potenziale vettore  $\mathbf{A}$  e scalare  $\Phi$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.67)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.68)$$

Le equazioni (1.66), possono essere viste come equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_j} = 0, \quad j = x, y, z \quad (1.69)$$

con la lagrangiana  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r}). \quad (1.70)$$

Si definiscono i momenti coniugati:

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j} \quad j = x, y, z \quad (1.71)$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}, \quad (1.72)$$

e si esegue la trasformazione di Legendre della lagrangiana, con  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  nuove variabili dinamiche indipendenti. Si trova così l'hamiltoniana  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ :

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \equiv \sum_j v_j p_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}). \quad (1.73)$$

Si osserva che l'impulso di una particella carica in presenza di un campo elettromagnetico, non è  $m\mathbf{v}$ , ma contiene anche un contributo  $e\mathbf{A}$ . In più, il primo termine dell'hamiltoniana esprime comunque l'energia cinetica, pertanto formalmente l'introduzione di un campo elettromagnetico corrisponde alla sostituzione:

$$V \rightarrow V + e\Phi, \quad (1.74)$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (1.75)$$

L'hamiltoniana in accoppiamento minimale (1.73) ottenuta può essere semplificata usando l'approssimazione di dipolo. In generale, la lunghezza d'onda del campo elettromagnetico che induce o che è emessa durante le transizioni atomiche è molto più grande della dimensione di un atomo. Quindi, si può pensare che tutto l'atomo, il cui nucleo è posizionato in  $\mathbf{r}_0$  è immerso in un'onda piana elettromagnetica descritta da un vettore potenziale  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  della forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}, t) = \mathbf{A}(t) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{s})], \quad (1.76)$$

in cui  $\mathbf{s}$  è il vettore che descrive la posizione di un generico punto dell'atomo rispetto al nucleo. Poiché nell'approssimazione di dipolo  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} < |\mathbf{k}||\mathbf{s}| \ll 1$ , si può approssimare (1.76) come:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}, t) = \mathbf{A}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)(1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} + \dots) \simeq \mathbf{A}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0). \quad (1.77)$$

Nel gauge di radiazione,  $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ . L'equazione di Schrödinger per l'hamiltoniana in accoppiamento libero è dunque:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right]^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.78)$$

Questa equazione può essere semplificata definendo una nuova funzione d'onda  $\phi(\mathbf{r}, t)$ :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp \left[ \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r} \right] \phi(\mathbf{r}, t), \quad (1.79)$$

sostituendo (1.79) in (1.78) si ottiene:

$$\exp \left( \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \right) \left[ \frac{p^2}{2m} + V(r) \right] \phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \left[ \frac{ie}{\hbar} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t) + \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) \right] \exp \left( \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \right). \quad (1.80)$$

Se si tiene conto che nel gauge di radiazione in cui si sta lavorando  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ , si ha:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + V(r) \right) + (-e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)) \right] \phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.81)$$

Da (1.81), si possono identificare:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad (1.82)$$

$$H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.83)$$

$H_0$  è l'hamiltoniana dell'elettrone legato al nucleo; mentre  $H_{int}$  è l'hamiltoniana che regola l'interazione dell'elettrone col campo elettromagnetico esterno nell'approssimazione di dipolo, dove  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$  è il dipolo elettrico. Al fine di ottenere l'operatore hamiltoniana per l'interazione tra l'atomo e il campo, si sostituiscono il dipolo elettrico  $\mathbf{d}$  e il campo elettrico  $\mathbf{E}$  con i rispettivi operatori:

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}. \quad (1.84)$$

L'operatore campo elettrico può essere ottenuto sostituendo (1.29) e (1.30) in (1.26):

$$\hat{\mathbf{E}} = \left( \frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \mathbf{e}, \quad (1.85)$$

con  $\mathbf{e}$  generico vettore di polarizzazione. Sostituendo (1.85) in (1.84) risulta:

$$\hat{H}_{int} = \lambda \hat{d} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (1.86)$$

dove si è posto  $\hat{d} \equiv \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}$  e  $\lambda = -\sqrt{2\omega^2/\varepsilon_0 V} \sin(kz)$ . Se si pensa l'operatore momento elettrico  $\hat{d}$  come la proiezione sul campo elettrico  $\mathbf{E}$  dell'operatore posizione  $\hat{\mathbf{r}}$ , è evidente che questo è dispari rispetto all'inversione spaziale  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ . Le autofunzioni dell'atomo a due livelli hanno una simmetria spaziale, sia essa pari o dispari, pertanto  $\langle e | \hat{d} | e \rangle = \langle g | \hat{d} | g \rangle = 0$ . Quindi l'operatore hermitiano  $\hat{d}$  può essere espresso come:

$$\hat{d} = d |g\rangle \langle e| + d^* |e\rangle \langle g|. \quad (1.87)$$

La fase relativa tra  $|e\rangle$  e  $\langle g|$  può essere scelta liberamente, quindi si può assumere  $d = d^*$  cioè  $d \in \mathbb{R}$ . L'equazione (1.87) può essere riscritta utilizzando le relazioni (1.4) come:

$$\hat{d} = d (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (1.88)$$

Infine, sostituendo (1.88) in (1.86), si ottiene l'hamiltoniana di interazione tra l'atomo e il campo nell'approssimazione di dipolo:

$$\hat{H}_{int} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (1.89)$$

dove

$$g \equiv \frac{d\lambda}{\hbar} \quad (1.90)$$

è nota come la costante di accoppiamento fra l'atomo e il campo.

Sostituendo le equazioni (1.11), (1.32) e (1.89) in (1.1) si ottiene:

$$H_R = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) (a^\dagger + a). \quad (1.91)$$

Si osservi che è stato ommesso il segno  $\hat{\phantom{a}}$  associato agli operatori. Questa notazione verrà utilizzata da qui in avanti.

Il termine di interazione dell'hamiltoniana può essere letto come la somma di due contributi: il termine di rotazione  $\hbar g (\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$  e il termine di contro-rotazione  $\hbar g (\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a)$ . Grande interesse ha in fisica atomica il modello di Jaynes e Cummings in cui il è trascurato il termine di contro-rotazione [3, 16].

## 1.5 Le oscillazioni di Rabi

Prima di tornare all'hamiltoniana del modello di Rabi si sfruttano i risultati dell'ultima sezione per dimostrare un fenomeno peculiare del modello di

Rabi e cioè le oscillazioni di Rabi. Si esplicita, per prima cosa, la dipendenza temporale di  $\widehat{H}_{int}$  da (1.84) osservando che la radiazione elettromagnetica è scelta monocromatica di frequenza  $\omega$ :

$$H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \quad (1.92)$$

con  $\mathbf{d}$  operatore di dipolo elettrico e  $\mathbf{E}_0$  vettore campo elettrico all'istante iniziale. Poiché si assume che gli stati fondamentale  $|g\rangle$  ed eccitato  $|e\rangle$  siano gli unici stati coinvolti nel processo di assorbimento ed emissione la funzione d'onda dell'elettrone all'istante  $t$  è data da:

$$|\psi(t)\rangle = |g\rangle e^{-iE_g t/\hbar} g(t) + |e\rangle e^{-iE_e t/\hbar} e(t) \quad (1.93)$$

con  $g(t)$  ed  $e(t)$  ampiezze il cui modulo quadro esprime la probabilità di trovare l'elettrone nello stato corrispondente. Si è inserito esplicitamente un fattore esponenziale che esprime l'evoluzione temporale imperturbata in assenza del campo elettrico. Si può allora verificare l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = [H_{atomo} + H_{int}(t)] |\psi(t)\rangle \quad (1.94)$$

nel sottospazio generato da  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ . Si ottengono in questo modo le equazioni per le ampiezze  $g(t)$  e  $e(t)$ :

$$\begin{aligned} i \frac{dg(t)}{dt} &= g^* \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} e(t) = \frac{g^*}{2} \left( e^{-i(\omega_0 - \omega)t} + e^{-i(\omega_0 + \omega)t} \right) e(t) \\ i \frac{de(t)}{dt} &= g \cos(\omega t) e^{+i\omega_0 t} g(t) = \frac{g}{2} \left( e^{+i(\omega_0 - \omega)t} + e^{+i(\omega_0 + \omega)t} \right) g(t) \end{aligned} \quad (1.95)$$

in cui con  $g$  si è indicata la costante di accoppiamento definita in (1.90). Si deve richiedere anche la condizione di normalizzazione ad ogni istante:

$$|g(t)|^2 + |e(t)|^2 = 1 \quad (1.96)$$

Se ora si considera  $\omega$  molto vicino a  $\omega_0$ , il fattore dipendente da  $\omega_0 - \omega$  oscilla lentamente, mentre il fattore dipendente dalla somma risulta, rapidamente oscillante e, su tempi macroscopici il suo contributo diventa trascurabile. L'eliminazione dei termini rapidamente oscillanti è detta approssimazione di onda rotante e conduce alle equazioni più semplici:

$$i \frac{dg(t)}{dt} = \frac{g^*}{2} \exp(-i(\omega_0 - \omega)t) e(t) \quad (1.97)$$

$$i \frac{de(t)}{dt} = \frac{g}{2} \exp(+i(\omega_0 - \omega)t) g(t) \quad (1.98)$$

È adesso sufficiente fissare le condizioni iniziali, ad esempio:

$$g(0) = 1, \quad e(0) = 0 \quad (1.99)$$

per trovare che:

$$g(t) = e^{-i(\omega_0 - \omega)t/2} \left[ \cos(\Omega_R t/2) + i \frac{\omega_0 - \omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \right] \quad (1.100)$$

$$e(t) = -i \frac{g}{\Omega_R} e^{i(\omega_0 - \omega)t/2} \sin(\Omega_R t/2)$$

con  $\Omega_R$  frequenza di Rabi:

$$\Omega_R = \sqrt{|g|^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (1.101)$$

Dalla soluzione si può determinare la probabilità che l'elettrone si trovi negli stati fondamentale ed eccitato:

$$P_g(t) = |g(t)|^2 = 1 - \frac{|g|^2}{\Omega_R^2} \sin^2(\Omega_R t/2) \quad (1.102)$$

$$P_e(t) = \frac{|g|^2}{\Omega_R^2} \sin^2(\Omega_R t/2) \quad (1.103)$$

Si definisce, di conseguenza la funzione di inversione atomica come:

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t) = -\frac{\Omega_R^2}{|g|^2} - \frac{|g|^2}{\Omega_R^2} \cos^2(\Omega_R t/2). \quad (1.104)$$

La funzione di inversione mostrata in Figura 1.1 descrive l'andamento di popolazione tra i due livelli. Quando  $W(t) = -1$  solo il livello fondamentale è occupato, mentre se  $W(t) = 1$  allora il livello fondamentale è vuoto e l'atomo si trova nello stato eccitato. Questa condizione può verificarsi soltanto quando, si ha una perfetta risonanza tra la frequenza di radiazione e quella di eccitazione atomica, cioè quando  $\omega = \omega_0$ .

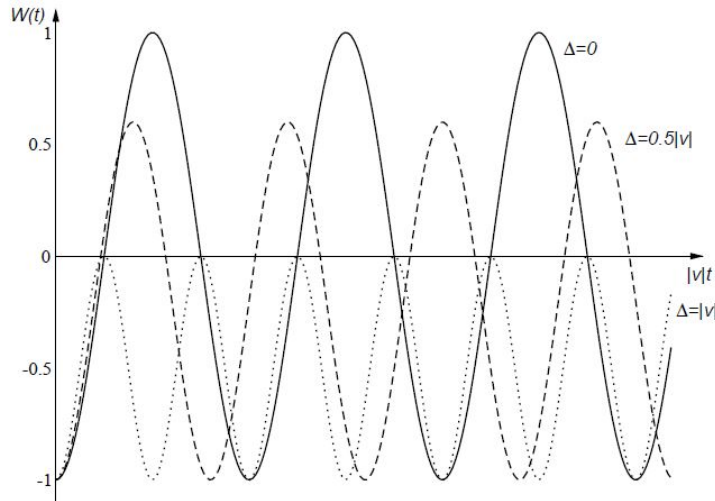


Figura 1.1: Funzione di inversione del modello di Rabi in cui si è posta  $\Delta = \omega_0 - \omega$ . Figura tratta da [14]



## Capitolo 2

# Le soluzioni analitiche

Il problema di Rabi, venne risolto per la prima volta da Daniel Braak nel 2011, il quale presentò la soluzione analitica del modello nello spazio delle funzioni analitiche di Bargmann-Fock [6]. Lo stesso risultato fu trovato, successivamente, attraverso la trasformazione di Bogoliubov [7] e per ultimo, nel 2013, la soluzione è stata ottenuta in termini di funzioni confluenti di Heun [8, 17]. In questo capitolo, dopo aver esplicitato il problema agli autovalori, si presentano tutti e tre i sopracitati approcci risolutivi del problema. Ciascuno degli approcci, quindi, sarà riutilizzato per risolvere una delle tre generalizzazioni del sistema proposte nel prossimo capitolo.

### 2.1 Il problema agli autovalori

L'hamiltoniana di Rabi (1.91) trovata nel precedente capitolo può essere riscritta come:

$$H_R = \Delta\sigma_z + \omega a^\dagger a + g\sigma_x (a^\dagger + a), \quad (2.1)$$

dove cioè si è posto  $\hbar = 1$ ,  $\frac{\omega_0}{2} = \Delta$  e si è utilizzata la relazione (1.5) che lega  $\sigma_x$  agli operatori di innalzamento e di abbassamento. Il modello quantistico di Rabi possiede una simmetria  $\mathbb{Z}_2$ , che è sfruttata nella derivazione delle condizioni che determinano lo spettro. Si dimostra infatti che l'operatore parità  $P$  è conservato osservando che questi commuta con l'hamiltoniana:  $[P, H_R] = 0$ . L'operatore parità  $P$  è definito come:

$$P = (-1)^{a^\dagger a} \sigma_z, \quad (2.2)$$

dove  $(-1)^{a^\dagger a}$  è l'operatore parità del numero di fotoni e  $\sigma_z$  è l'operatore parità dell'atomo [18]. La commutazione dell'operatore parità con l'hamiltoniana di Rabi è dimostrata verificando che l'operatore parità commuta

con ciascuno dei tre termini che compongono l'hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
[P, H_{atomo}] |f\rangle |n\rangle &= [(-1)^{a^\dagger a} \sigma_z, \Delta \sigma_z] |f\rangle |n\rangle \\
&= (-1)^{a^\dagger a} \sigma_z \Delta \sigma_z |f\rangle |n\rangle - \Delta \sigma_z (-1)^{a^\dagger a} \sigma_z |f\rangle |n\rangle \\
&= \sigma_z \sigma_z |f\rangle (-1)^{a^\dagger a} |n\rangle \Delta - \sigma_z \sigma_z |f\rangle (-1)^{a^\dagger a} |n\rangle \Delta \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
[P, H_{campo}] |f\rangle |n\rangle &= [(-1)^{a^\dagger a} \sigma_z, \omega a^\dagger a] |f\rangle |n\rangle \\
&= (-1)^{a^\dagger a} \sigma_z \omega a^\dagger a |f\rangle |n\rangle - \omega a^\dagger a (-1)^{a^\dagger a} \sigma_z |f\rangle |n\rangle \\
&= \sigma_z |f\rangle (-1)^{a^\dagger a} \omega a^\dagger a |n\rangle - \sigma_z |f\rangle \omega a^\dagger a (-1)^{a^\dagger a} |n\rangle \\
&= \sigma_z |f\rangle |n\rangle (-1)^n \omega n - \sigma_z |f\rangle |n\rangle \omega n (-1)^n \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
[P, H_{int}] |f\rangle |n\rangle &= [(-1)^{a^\dagger a} \sigma_z, g \sigma_x (a^\dagger + a)] |f\rangle |n\rangle \\
&= (-1)^{a^\dagger a} \sigma_z g \sigma_x (a^\dagger + a) |f\rangle |n\rangle \\
&\quad - g \sigma_x (a^\dagger + a) (-1)^{a^\dagger a} \sigma_z |f\rangle |n\rangle \\
&= \sigma_z \sigma_x |f\rangle (-1)^{a^\dagger a} (a^\dagger + a) |n\rangle g \\
&\quad - \sigma_x \sigma_z |f\rangle (a^\dagger + a) (-1)^{a^\dagger a} |n\rangle g \\
&= \sigma_z \sigma_x |f\rangle |n+1\rangle ((-1)^{n+1} \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} (-1)^n) g \\
&\quad + \sigma_z \sigma_x |f\rangle |n-1\rangle ((-1)^{n-1} \sqrt{n} + \sqrt{n} (-1)^n) g \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

nelle verifiche i commutatori sono stati applicati sull'autostato  $|f\rangle |n\rangle$  di  $H_R$  prodotto tensoriale degli autostato dell'atomo a due livelli  $|f\rangle$  e dell'autostato del campo  $|n\rangle$ , stato di Fock a  $n$  fotoni. L'operatore parità ha inoltre autovalori  $p = \pm 1$  come si verifica facilmente tenedo conto che  $P^2 = I$ .

Un generico autostato  $|\psi\rangle$  dell'hamiltoniana di Rabi può essere espresso come una funzione d'onda a due componenti:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Dall'equazione di Schrödinger  $H_R |\psi\rangle = E |\psi\rangle$ , segue:

$$a^\dagger a \psi_1 + g(a^\dagger + a) \psi_2 + \Delta \psi_1 = E \psi_1, \tag{2.7}$$

$$a^\dagger a \psi_2 + g(a^\dagger + a) \psi_1 - \Delta \psi_2 = E \psi_2, \tag{2.8}$$

in cui si è posto per brevità  $\omega = 1$ . Le stesse equazioni possono essere riscritte in funzione di  $\phi_1 = \psi_1 + \psi_2$  e  $\phi_2 = \psi_1 - \psi_2$ :

$$a^\dagger a \phi_1 + g(a^\dagger + a) \phi_1 + \Delta \phi_2 = E \phi_1, \tag{2.9}$$

$$a^\dagger a \phi_2 - g(a^\dagger + a) \phi_2 + \Delta \phi_1 = E \phi_2. \tag{2.10}$$



## 2.2. LA SOLUZIONE TRAMITE TRASFORMAZIONE DI BOGOLIUBOV 17

Queste possono essere scritte in forma matriciale come:

$$H'_R \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

dove:

$$H'_R = \begin{pmatrix} a^\dagger a + g(a^\dagger + a) & \Delta \\ \Delta & a^\dagger a - g(a^\dagger + a) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Negli ultimi anni, sono stati proposti diversi metodi per costruire soluzioni analitiche per l'autospettro del modello quantistico di Rabi. Alcuni di questi sono sviluppati in questo lavoro di tesi.

## 2.2 La soluzione tramite trasformazione di Bogoliubov

L'obbiettivo della trasformazione di Bogoliubov è introdurre un nuovo operatore bosonico per rimuovere i termini lineari negli operatori  $a^\dagger$  e  $a$  nell'hamiltoniana (2.12). Due diverse forme per questo operatore sono state usate:

$$A = a + g, \quad A^\dagger = a^\dagger + g, \quad (2.13)$$

$$B = a - g, \quad B^\dagger = a^\dagger - g. \quad (2.14)$$

In termini degli operatori  $A$  e  $A^\dagger$ , l'hamiltoniana  $H'_R$  diventa:

$$H'_R = \begin{pmatrix} A^\dagger A - \alpha & \Delta \\ \Delta & A^\dagger A - 2g(A^\dagger + A) + \beta \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

dove  $\alpha = g^2$  e  $\beta = 3g^2$ . Le componenti della funzione d'onda  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono espanse nella forma:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

con  $e_n$  e  $f_n$  coefficienti di espansione e  $|n_A\rangle$  definito come:

$$|n_A\rangle = \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0_A\rangle, \quad (2.17)$$

con  $|0_A\rangle$  tale che:

$$A |0_A\rangle = (a + g) |0_A\rangle = 0 \quad (2.18)$$

quindi:

$$a |0_A\rangle = -g |0_A\rangle \quad (2.19)$$

cioè  $|0_A\rangle$  è lo stato coerente  $|(-g)_a\rangle$ . Ricordando che  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$  è l'operatore di spostamento si può scrivere:

$$|0_A\rangle = e^{-ga^\dagger + ga} |0_a\rangle = |(-g)_a\rangle. \quad (2.20)$$

Sostituendo in (2.11) si trova:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n - \alpha - E) \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle = 0, \quad (2.21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + \beta - E) \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle \quad (2.22)$$

$$- 2g \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \sqrt{n!} f_n |(n-1)_A\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \sqrt{n!} f_n |(n+1)_A\rangle \right) = 0.$$

Quindi moltiplicando entrambe le equazioni (2.21) e (2.22) per  $\langle m_A|$  si ottengono le seguenti relazioni tra i coefficienti di espansione  $e_n$  e  $f_n$ :

$$e_m = -\frac{\Delta}{m - \alpha - E} f_m, \quad (2.23)$$

$$m f_m = \Omega(m-1) f_{m-1} - f_{m-2}, \quad (2.24)$$

con  $\Omega(m)$  così definito:

$$\Omega(m) = \frac{1}{2g} \left( m + \beta - E - \frac{\Delta^2}{m - \alpha - E} \right). \quad (2.25)$$

I coefficienti  $f_m$  dell'equazione (2.24) obbediscono a una relazione di ricorrenza a tre termini. Le condizioni iniziali possono essere scelte a meno di una normalizzazione globale come  $f_0 = 1$  e  $f_1 = \Omega(0)$ .

In modo simile, in termini degli operatori  $B$  e  $B^\dagger$  definiti in (2.14), l'hamiltoniana  $H'_R$  diventa:

$$H'_R = \begin{pmatrix} B^\dagger B + 2g(B^\dagger + B) + \beta' & \Delta \\ \Delta & B^\dagger B - \alpha' \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

con  $\alpha' = \alpha = g^2$  e  $\beta' = \beta = 3g^2$ . In questo caso si possono definire  $\phi'_1$  e  $\phi'_2$  come:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n!} f'_n |n_B\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n!} e'_n |n_B\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Analogamente a quanto visto per (2.16)  $e'_n$  e  $f'_n$  sono i coefficienti di espansione e  $|n_B\rangle$ :

$$|n_B\rangle = \frac{(B^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0_B\rangle, \quad (2.28)$$

in cui:

$$|0_B\rangle = e^{ga^\dagger - ga} |0_a\rangle = |(g)_a\rangle. \quad (2.29)$$

## 2.2. LA SOLUZIONE TRAMITE TRASFORMAZIONE DI BOGOLIUBOV

Come fatto con (2.16) sostituendo (2.27) in (2.11) si trova:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + \beta' - E) \sqrt{n!} f'_n |n_B\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e'_n |n_B\rangle \quad (2.30)$$

$$+ 2g \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \sqrt{n!} f'_n |(n-1)_B\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \sqrt{n!} f'_n |(n+1)_B\rangle \right) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n - \alpha' - E) \sqrt{n!} e'_n |n_B\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f'_n |n_B\rangle = 0. \quad (2.31)$$

Si ottiene così:

$$e'_m = -\frac{\Delta}{m - \alpha' - E} f'_m, \quad (2.32)$$

$$m f'_m = \Omega'(m-1) f'_{m-1} - f'_{m-2}. \quad (2.33)$$

dove:

$$\Omega'(m) = \frac{1}{2g} \left( m + \beta' - E - \frac{\Delta^2}{m - \alpha' - E} \right). \quad (2.34)$$

Le condizioni iniziali sono qui scelte a meno di una normalizzazione globale come  $f'_0 = 1$  e  $f'_1 = \Omega(0)$ .

Si osserva adesso che se l'autovalore non è degenere le due soluzioni (2.16) e (2.27) devono rappresentare lo stesso stato:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

con  $r$  costante. Si moltiplica lo stato di vuoto  $\langle 0_a |$  entrambi i membri

dell'equazione. In particolare, qui si esplicita il calcolo per  $\phi_1$ :

$$\begin{aligned}
\langle 0_a | \phi_1 &= \langle 0_a | \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle \\
&= \langle 0_a | \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0_A\rangle \\
&= \langle 0_a | \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n \frac{(a^\dagger + g)^n}{\sqrt{n!}} e^{-g^2/2} e^{-ga^\dagger} |0_a\rangle \\
&= e^{-g^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0_a | e_n (a^\dagger + g)^n e^{-ga^\dagger} |0_a\rangle \tag{2.36} \\
&= e^{-g^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0_a | e_n (a^\dagger + g)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-g)^m}{m!} (a^\dagger)^m |0_a\rangle \\
&= e^{-g^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0_a | e_n (a^\dagger + g)^n |0_a\rangle \\
&= e^{-g^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e_n g^n.
\end{aligned}$$

In (2.36) ci si è serviti della definizione di  $\phi_1$  in (2.16) e dell'ortonormalità degli  $|n_a\rangle$ . Procedendo in modo simile per  $\phi_2$ ,  $\phi'_1$  e  $\phi'_2$  si ottengono le seguenti relazioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n g^n = r \sum_{n=0}^{\infty} f'_n g^n \tag{2.37}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n = r \sum_{n=0}^{\infty} e'_n g^n \tag{2.38}$$

Da queste relazioni segue che  $G(E) = 0$  con:

$$G(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f_n g^n}{n - \alpha - E} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f'_n g^n}{n - \alpha' - E} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n \times \sum_{n=0}^{\infty} f'_n g^n. \tag{2.39}$$

Poiché  $f_n$  e  $f'_n$  soddisfano la stessa relazione di ricorrenza sotto la condizione  $\alpha = \alpha' = g^2$  e  $f_0 = f'_0 = 1$  si ha  $f_n = f'_n$ . La condizione  $G(E) = 0$  si semplifica così in  $G_{\pm}(x) = 0$  con:

$$G_{\pm}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left( 1 \mp \frac{\Delta}{x - n} g^n \right), \tag{2.40}$$

dove si è posto  $E = x - g^2$ . Gli zeri di questa funzione danno perciò lo spettro energetico cercato. Le funzioni  $G_{\pm}(x)$  sono mostrate in Figura 2.1.

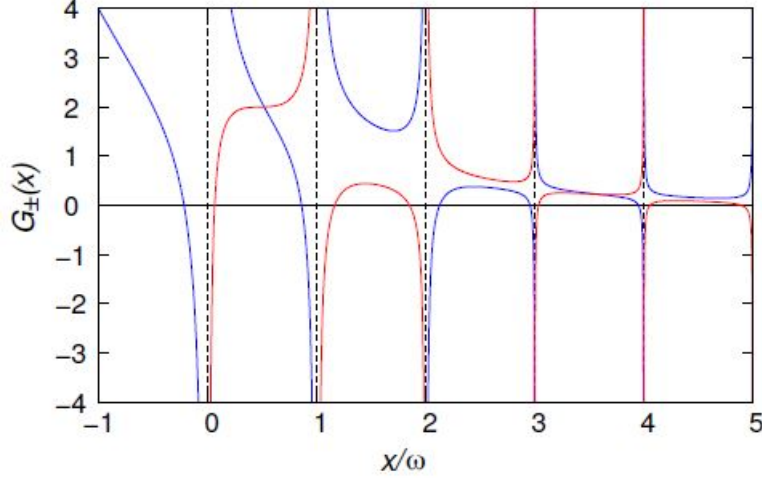


Figura 2.1: Le funzioni del modello quantistico di Rabi  $G_+$  (linea rossa) e  $G_-$  (linea blu) come funzioni della variabile  $x/\omega$  nell'intervallo  $[-1, 5]$  con parametri:  $g/\omega = 0.7$  e  $\Delta/\omega = 0.4$ . Figura tratta da [6]

### 2.3 La soluzione nello spazio di Bargmann-Fock

Per definizione lo spazio di Bargmann-Fock  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$  è l'insieme di tutte le funzioni olomorfe  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\langle F|F \rangle < \infty$ , dove il prodotto interno  $\langle F|G \rangle$  è definito come [19]:

$$\langle F|G \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F(z)^* G(z) e^{-|z|^2} dx dy. \quad (2.41)$$

Cioè,  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$  è uno spazio di Hilbert complesso rispetto al prodotto interno (2.41). L'insieme dei polinomi  $z \mapsto F(z)$  è un sottoinsieme denso di  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ . Si vogliono definire gli operatori di creazione e distruzione per questo spazio tali che:

$$[a, a^\dagger] = I. \quad (2.42)$$

Si definiscono allora gli operatori  $a^\dagger : D(a^\dagger) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C})$  e  $a : D(a) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C})$  ponendo:

$$(a^\dagger F)(z) := zF(z) \quad (2.43)$$

e

$$(aF)(z) := \frac{dF(z)}{dz} \quad (2.44)$$

Più precisamente, i domini di definizione  $D(a^\dagger)$  e  $D(a)$  degli operatori  $a^\dagger$  e  $a$  comprendono tutte le funzioni  $F \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$  con  $a^\dagger F \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$  e  $aF \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$  rispettivamente. Per provare che gli operatori  $a^\dagger$  e  $a$  siano ben definiti in

(2.43) e (2.44) si verifica che sia soddisfatta la (2.42). Per ogni polinomio  $F \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$  si deve avere allora:

$$(aa^\dagger - a^\dagger a)F = F, \quad (2.45)$$

infatti:

$$aa^\dagger F(z) - a^\dagger a F(z) = F(z) + zF(z)' - zF(z)' = F(z). \quad (2.46)$$

Sfruttando le definizioni per gli operatori di creazione (2.43) e distruzione (2.44) l'hamiltoniana  $H'_R$  (2.12) diventa:

$$H'_R = \begin{pmatrix} z \frac{d}{dz} + g \left( z + \frac{d}{dz} \right) & \Delta \\ \Delta & z \frac{d}{dz} - g \left( z + \frac{d}{dz} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Nello spazio di Bargmann-Fock, l'autostato  $|\phi\rangle$  dell'hamiltoniana  $H'_R$  può essere espressa come:

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Si fa quindi uso di una trasformazione di Fulton-Gouterman  $|\varphi\rangle = U|\phi\rangle$ , con:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ T & -T \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

dove  $T$  è l'operatore di riflessione agente sugli elementi  $f(z)$  di  $\mathcal{B}$ :  $Tf(z) = f(-z)$  e si trova:

$$U^\dagger H'_R U = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

con

$$H_\pm = z \frac{d}{dz} + g \left( z + \frac{d}{dz} \right) \pm \Delta T. \quad (2.51)$$

Questo risultato rende evidente che  $H_+$  agisce nel sottospazio di parità positiva  $\mathcal{H}_+$  e  $H_-$  agisce nel sottospazio di parità negativa  $\mathcal{H}_-$ . Nel sottospazio  $\mathcal{H}_+$  di parità positiva l'equazione di Schrödinger può essere scritta come:

$$z \frac{d}{dz} \varphi_1(z) + g \left( z + \frac{d}{dz} \right) \varphi_1(z) + \Delta \varphi_1(-z) = E \varphi_1(z) \quad (2.52)$$

L'equazione funzionale trovata è un'equazione differenziale in  $z$ . Ponendo  $f_1(z) = \varphi_1(z)$  e  $f_2(z) = \varphi_1(-z)$  si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$(z + g) \frac{df_1}{dz} + (gz - E) f_1 + \Delta f_2 = 0, \quad (2.53)$$

$$(z - g) \frac{df_2}{dz} - (gz + E) f_2 + \Delta f_1 = 0. \quad (2.54)$$

Al fine di risolvere queste equazioni si pone:

$$y = z + g, \quad (2.55)$$

$$x = E + g^2, \quad (2.56)$$

$$f_{1,2} = e^{-gy+g^2} \chi_{1,2}(y), \quad (2.57)$$

così risulta:

$$y \frac{d\chi_1}{dz} = x\chi_1 - \Delta\chi_2, \quad (2.58)$$

$$(y - 2g) \frac{d\chi_2}{dz} = (x - 4g^2 + 2gy)\chi_2 - \Delta\chi_1. \quad (2.59)$$

Queste equazioni accoppiate sono risolte espandendo  $\chi_2(y)$  in serie di potenze:

$$\chi_2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)y^n. \quad (2.60)$$

Quindi, sostituendo (2.60) in (2.58) si ottiene:

$$\begin{aligned} y \frac{d\chi_1}{dz} &= x\chi_1 - \Delta \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)y^n \\ \Rightarrow \frac{d\chi_1}{dz} &= \frac{x}{y}\chi_1 - \Delta \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)y^{n-1} \\ \Rightarrow y^{-x} \frac{d\chi_1}{dz} - (y^{-x-1}x)\chi_1 &= -\Delta \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)y^{-x+n-1} \\ \Rightarrow \frac{d}{dz} (y^{-x}\chi_1) &= -\Delta \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)y^{-x+n-1} \\ \Rightarrow y^{-x}\chi_1 &= -\Delta \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \int y^{-x+n-1} dy + C \\ \Rightarrow y^{-x}\chi_1 &= \Delta \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \frac{y^{-x+n}}{x-n} + C \end{aligned} \quad (2.61)$$

Da cui, posta la costante arbitraria  $C = 0$ , si può scrivere:

$$\chi_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \frac{\Delta}{x-n} y^n. \quad (2.62)$$

Una volta sostituiti  $\chi_1(y)$  e  $\chi_2(y)$  definiti in (2.62) e (2.60) nell'equazione (2.59) si ha la seguente relazione di ricorrenza a tre termini:

$$nK_n = \Omega(n-1)K_{n-1} - K_{n-2}. \quad (2.63)$$

Qui i coefficienti iniziali  $K_0$  e  $K_1$  sono scelti come  $K_0 = 1$  e  $K_1 = \Omega(0)$ , dove  $\Omega(m)$  è definito in (2.25). Si osservi che i coefficienti  $K_n$  (2.63) hanno la stessa forma delle  $f_n$  nell'approccio con la trasformazione di Bogoliubov (2.24) e (2.33).

Segue che ci sono due rappresentazioni per  $\varphi_1(z)$  in  $\mathcal{H}_+$ :

$$\varphi_1^1 = f_1(z) = e^{-gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \frac{\Delta}{x-n} (z+g)^n \quad (2.64)$$

$$\varphi_1^2 = f_2(-z) = e^{gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) (g-z)^n \quad (2.65)$$

Analogamente ci sono due rappresentazioni per  $\varphi_2(z)$  in  $\mathcal{H}_-$ :

$$\varphi_2^1 = e^{-gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \frac{-\Delta}{x-n} (z+g)^n, \quad (2.66)$$

$$\varphi_2^2 = e^{gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) (g-z)^n. \quad (2.67)$$

Per entrambe le rappresentazioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , deve valere:

$$G_+(x, z) = \varphi_1^2(z) - \varphi_1^1(z) = 0, \quad (2.68)$$

$$G_-(x, z) = \varphi_2^2(z) - \varphi_2^1(z) = 0. \quad (2.69)$$

La condizione  $G_{\pm}(x, z) = 0$  è verificata in tutto il piano complesso se e solo se  $x = E + g^2$  corrisponde a un punto dello spettro energetico del modello quantistico di Rabi. Se  $x$  è un punto dello spettro energetico è allora sufficiente verificare la condizione in un punto, in particolare per  $x = 0$  si ottiene la seguente forma semplificata:

$$G_{\pm}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \left( 1 \mp \frac{\Delta}{x-n} \right) g^n. \quad (2.70)$$

## 2.4 La soluzione in termini di funzioni confluenti di Heun

Dalle equazioni (2.47) e (2.48) si ha:

$$(z+g) \frac{d\phi_1}{dz} + (gz-E)\phi_1 + \Delta\phi_2 = 0, \quad (2.71)$$

$$(z-g) \frac{d\phi_2}{dz} - (gz+E)\phi_2 + \Delta\phi_1 = 0. \quad (2.72)$$



## 2.4. LA SOLUZIONE IN TERMINI DI FUNZIONI CONFLUENTI DI HEUN25

È possibile disaccoppiare le due equazioni e ottenere due equazioni differenziali del secondo ordine per  $\phi_1(z)$  e  $\phi_2(z)$  della forma:

$$\frac{d^2\phi_1}{dz^2} + p_1(z)\frac{d\phi_1}{dz} + q_1(z)\phi_1 = 0, \quad (2.73)$$

$$\frac{d^2\phi_2}{dz^2} + p_2(z)\frac{d\phi_2}{dz} + q_2(z)\phi_2 = 0, \quad (2.74)$$

dove si è posto:

$$p_{1,2}(z) = \frac{(1 - 2E - 2g^2)z \mp g}{z^2 - g^2} \quad (2.75)$$

e

$$q_{1,2}(z) = \frac{-g^2z^2 \mp gz + E^2 - g^2 - \Delta^2}{z^2 - g^2}. \quad (2.76)$$

Per derivare le soluzioni analitiche dell'equazione (2.73), si scrivono le soluzioni nella forma:

$$\text{Tipo-I: } \phi_1^1(z) = e^{-gz} f_1(x_1), \quad (2.77)$$

$$\text{Tipo-II: } \phi_1^2(z) = e^{gz} f_2(x_2). \quad (2.78)$$

Nel seguito si deriveranno le soluzioni analitiche per  $f_1(x_1)$  e  $f_2(x_2)$ .

Per quanto riguarda le soluzioni di Tipo-I, si introduce la nuova variabile  $x_1 = (g - z)/2g$  e si sostituisce  $\phi_1(z)$  definita in (2.77) nell'equazione (2.73), si trova che  $f_1(z)$  obbedisce all'equazione confluyente di Heun [20]:

$$\frac{d^2 f_1}{dx_1^2} + \left( \alpha_1 + \frac{\beta_1 + 1}{x_1} + \frac{\gamma_1 + 1}{x_1 - 1} \right) \frac{df_1}{dx_1} + \frac{\mu_1 x_1 + \nu_1}{x_1(x_1 - 1)} f_1 = 0, \quad (2.79)$$

con:

$$\mu_1 = \delta_1 + \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1 + 2), \quad (2.80)$$

$$\nu_1 = \eta_1 + \beta_1/2 + (\gamma_1 - \alpha_1)(\beta_1 + 1)/2. \quad (2.81)$$

I parametri  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1$  sono dati a loro volta da:

$$\alpha_1 = 4g^2, \quad (2.82)$$

$$\beta_1 = -(E + g^2 + 1), \quad (2.83)$$

$$\gamma_1 = -(E + g^2), \quad (2.84)$$

$$\delta_1 = -2g^2, \quad (2.85)$$

$$\eta_1 = -\frac{3g^4}{2} + \frac{(1 - 2E)g^2}{2} + \frac{(E^2 + E - 2\Delta^2 + 1)}{2}. \quad (2.86)$$

L'equazione confluyente di Heun ha una soluzione locale di Frobenius intorno a  $x_1 = 0$  che è nota come la funzione confluyente di Heun:

$$\varphi_1(x_1) = \text{HC}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x_1^n, \quad (2.87)$$

dove i coefficienti  $h_n$  sono definiti da una relazione di ricorrenza a tre termini:

$$A_n h_n = B_n h_{n-1} + C_n h_{n-2}, \quad n \geq 1, \quad (2.88)$$

con condizioni iniziali  $h_0 = 1$ ,  $h_{-1} = 0$  e

$$A_n = 1 + \frac{\beta_1}{n}, \quad (2.89)$$

$$B_n = 1 + \frac{\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 - 1}{n} + \frac{\eta_1 - \beta_1/2 + (\gamma_1 - \alpha_1)(\beta_1 - 1)/2}{n^2}, \quad (2.90)$$

$$C_n = \frac{\delta_1 + \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1)/2 + \alpha_1(n-1)}{n^2}. \quad (2.91)$$

Esiste un'altra soluzione linearmente indipendente dell'equazione (2.79), cioè:

$$\tilde{\varphi}(x_1) = \text{HC}(\alpha_1, -\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, x_1). \quad (2.92)$$

Poiché però,  $-\beta_1 = (E + g^2 + 1)$  non sempre non è un intero negativo, questa seconda soluzione non è una soluzione fisica. Pertanto la soluzione fisica per  $\phi_1(z)$  è data da [21]:

$$\phi_1^1(z) = C_1 e^{-gz} \text{HC}\left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g-z}{2g}\right), \quad (2.93)$$

in cui  $C_1$  è una costante da determinare. In modo del tutto analogo si procede per determinare  $\phi_2^1(z)$ . Utilizzando la trasformazione  $\phi_2^1(z) = e^{-gz} \tilde{f}_1(x_1)$  si trova che  $\tilde{f}_1 = \varphi_2(x_1) = \text{HC}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, x_1)$  soddisfa l'equazione confluyente di Heun con parametri:

$$\alpha_2 = 4g^2, \quad (2.94)$$

$$\beta_2 = -(E + g^2), \quad (2.95)$$

$$\gamma_2 = -(E + g^2 + 1), \quad (2.96)$$

$$\delta_2 = 2g^2, \quad (2.97)$$

$$\eta_2 = -\frac{3g^4}{2} - \frac{(3+2E)g^2}{2} + \frac{(E^2 + E - 2\Delta^2 + 1)}{2}. \quad (2.98)$$

Di conseguenza la soluzione analitica del Tipo-I per  $\phi_2(z)$  è:

$$\phi_2^1(z) = C_2 e^{-gz} \text{HC}\left(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g-z}{2g}\right), \quad (2.99)$$

dove anche  $C_2$  è una costante da determinare. La sostituzione di  $\phi_1$  e  $\phi_2$  in (2.72) restituisce  $C_2/C_1 = \Delta/(E + g^2)$ .

Per quanto riguarda le soluzioni del Tipo-II, in modo simile con quanto fatto per quelle del Tipo-I, si introduce la nuova variabile  $x_2 = (g+z)/2g$

#### 2.4. LA SOLUZIONE IN TERMINI DI FUNZIONI CONFLUENTI DI HEUN27

e si sostituisce  $\phi_1(z)$  definita in (2.78) nell'equazione (2.73) per trovare che  $f_2(x_2)$  obbedisce all'equazione confluyente di Heun:

$$\frac{d^2 f_2}{dx_2^2} + \left( \alpha_3 + \frac{\beta_3 + 1}{x_1} + \frac{\gamma_3 + 1}{x_2 - 1} \right) \frac{df_2}{dx_2} + \frac{\mu_3 x_2 + \nu_3}{x_2(x_2 - 1)} f_2 = 0, \quad (2.100)$$

con

$$\mu_3 = \delta_3 + \alpha_3(\beta_3 + \gamma_3 + 3)/2, \quad (2.101)$$

$$\nu_3 = \eta_3 + \beta_3/2 + (\gamma_3 - \alpha_3)(\beta_3 + 1)/2. \quad (2.102)$$

e  $\alpha_3 = \alpha_2$ ,  $\beta_3 = \beta_2$ ,  $\gamma_3 = \gamma_2$ ,  $\delta_3 = \delta_2$ ,  $\eta_3 = \eta_2$  definiti in (2.94)-(2.98). Si ottengono allora le funzioni analitiche scritte nella forma:

$$\phi_1^2(z) = D_1 e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g+z}{2g} \right), \quad (2.103)$$

$$\phi_2^2(z) = D_2 e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g+z}{2g} \right), \quad (2.104)$$

qui  $D_1/D_2 = \Delta/(E + g^2)$  ottenuto sostituendo  $\phi_1^2(z)$  e  $\phi_2^2(z)$  nell'equazione (2.71).

Riepilogando, soluzioni del Tipo-I trovate sono:

$$\phi_1^1(z) = e^{-gz} \text{HC} \left( \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g-z}{2g} \right), \quad (2.105)$$

$$\phi_2^1(z) = \frac{\Delta}{E + g^2} e^{-gz} \text{HC} \left( \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g-z}{2g} \right), \quad (2.106)$$

mentre quelle del Tipo-II sono:

$$\phi_1^2(z) = \frac{\Delta}{E + g^2} e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g+z}{2g} \right), \quad (2.107)$$

$$\phi_2^2(z) = e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g+z}{2g} \right). \quad (2.108)$$

Si osservi che le equazioni (2.71) e (2.72) hanno una simmetria  $\mathbb{Z}_2$ . Sostituendo  $z$  con  $-z$  si ottiene infatti:

$$(z - g) \frac{d\phi_1(-z)}{dz} - (gz + E)\phi_1(-z) + \Delta\phi_2(-z) = 0, \quad (2.109)$$

$$(z + g) \frac{d\phi_2(-z)}{dz} + (gz - E)\phi_2(-z) + \Delta\phi_1(-z) = 0. \quad (2.110)$$

Risulta evidente che se  $(\phi_1(z), \phi_2(z))$  sono soluzioni di (2.71) e (2.72) anche  $(\phi_2(-z), \phi_1(-z))$  lo sono. Se le energie non sono degeneri allora:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \phi_2(-z) \\ \phi_1(-z) \end{pmatrix}, \quad (2.111)$$

$C = 1$  corrisponde alle soluzioni simmetriche, mentre  $C = -1$  corrisponde alle soluzioni antisimmetriche. Dai due insiemi di soluzioni  $\phi_1^{1,2}$  e  $\phi_2^{1,2}$  le soluzioni simmetriche sono:

$$\phi_1^+(z) = \phi_1^1(z) + \phi_1^2(z), \quad (2.112)$$

$$\phi_2^+(z) = \phi_2^1(z) + \phi_2^2(z), \quad (2.113)$$

quelle antisimmetriche sono:

$$\phi_1^-(z) = \phi_1^1(z) - \phi_1^2(z), \quad (2.114)$$

$$\phi_2^-(z) = \phi_2^1(z) - \phi_2^2(z). \quad (2.115)$$

Esse soddisfano le relazioni  $\phi_{1,2}^+(z) = \phi_{2,1}^+(-z)$  e  $\phi_{1,2}^-(z) = -\phi_{2,1}^-(-z)$ .  $\phi_{1,2}^+$  e  $\phi_{1,2}^-$  devono necessariamente soddisfare le equazioni accoppiate (2.71) e (2.72). Ciò conduce a due diverse relazioni:

$$\begin{aligned} K^\pm(E, z) &:= e^{-gz} G_1^\pm(E, z) \mp \Delta e^{gz} G_2^\pm(E, z) b \\ &:= e^{-gz} G_3^\pm(E, z) \pm \frac{\Delta}{E + g^2} e^{gz} G_4^\pm(E, z) b \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.116)$$

dove:

$$G_1^\pm(E, z) = F_1(E, z) \pm \frac{\Delta}{E + g^2} e^{2gz} F_4(E, z), \quad (2.117)$$

$$G_2^\pm(E, z) = F_3(E, z) \pm \frac{\Delta}{E + g^2} e^{-2gz} F_2(E, z), \quad (2.118)$$

$$G_3^\pm(E, z) = F_1(E, z) \mp \Delta e^{2gz} F_3(E, z), \quad (2.119)$$

$$G_4^\pm(E, z) = F_4(E, z) \mp \Delta e^{-2gz} F_2(E, z), \quad (2.120)$$

con:

$$\begin{aligned} F_1(E, z) &= (E + g^2) \text{HC} \left( \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g - z}{2g} \right) \\ &\quad + \frac{g + z}{2g} \text{HC}' \left( \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g - z}{2g} \right) \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$F_2(E, z) = \text{HC} \left( \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g - z}{2g} \right), \quad (2.122)$$

$$F_3(E, z) = \text{HC} \left( \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g + z}{2g} \right), \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} F_4(E, z) &= (E - g^2 - 2gz) \text{HC} \left( \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g + z}{2g} \right) \\ &\quad - \frac{g + z}{2g} \text{HC}' \left( \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g + z}{2g} \right). \end{aligned} \quad (2.124)$$

## 2.4. LA SOLUZIONE IN TERMINI DI FUNZIONI CONFLUENTI DI HEUN29

Con  $\text{HC}'(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, x)$  si è indicata la derivata della funzione confluyente di Heun (2.87) rispetto a  $x$ . Dalla relazione  $K^\pm(E, z) = 0$  si ottengono i seguenti due sistemi di condizioni sufficienti:

$$G_1^\pm(e, z) = G_2^\pm(E, z) = 0, \quad (2.125)$$

$$G_3^\pm(e, z) = G_4^\pm(E, z) = 0. \quad (2.126)$$

Sebbene le soluzioni analitiche  $\phi_1^1(z)$ ,  $\phi_1^2(z)$  e  $\phi_2^1(z)$ ,  $\phi_2^2(z)$  sembrano differenti, esse sono linearmente dipendenti quando  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  per le prime due e  $\beta_2$  e  $\gamma_2$  per le seconde non sono interi.

Tale dipendenza lineare può essere dimostrata imponendo il cambio di variabile  $x = 1 - x_1$  nell'equazione (2.79) così da ottenere:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left( -\alpha_1 + \frac{\beta_1 + 1}{x - 1} + \frac{-\gamma_1 + 1}{x} \right) \frac{df_1}{dx} + \frac{-\mu_1 x + \mu_1 + \nu_1}{x(x - 1)} f_1 = 0, \quad (2.127)$$

che è di nuovo l'equazione confluyente di Heun scritta rispetto altri parametri. Questo implica che sotto la trasformazione  $x = 1 - x_1$ , i parametri si trasformano secondo le relazioni  $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1 = -\alpha_2$ ,  $\beta_1 \rightarrow \gamma_1 = \beta_2$ ,  $\gamma_1 \rightarrow \beta_1 = \gamma_2$ ,  $\delta_1 \rightarrow -\delta_1 = \delta_2$  e  $\eta_1 \rightarrow \eta_1 + \delta_1 = \eta_2$ . Risulta chiaro che allora  $\phi_1^1$  può essere espressa come:

$$\phi_1^1 = C_1' e^{-gz} \text{HC}(-\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, 1 - x_1), \quad (2.128)$$

dove  $C_1'$  è una costante. Ponendo  $x_2 = 1 - x_1 = (g + z)/2g$  è sfruttando la relazione  $\text{HC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z) = e^{-\alpha z} \text{HC}(-\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z)$  si ha:

$$\phi_1^1(z) = C_1' e^{2g^2 + gz} \text{HC}\left(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g + z}{2g}\right). \quad (2.129)$$

Questa relazione prova la dipendenza lineare tra  $\phi_1^1$  e  $\phi_1^2$ , con lo stesso procedimento si prova anche la dipendenza lineare tra  $\phi_2^1$  e  $\phi_2^2$ .

Per due soluzioni linearmente indipendenti, il wronskiano deve essere nullo, cioè:

$$W_1(E, z) := \phi_1^2 \frac{d\phi_1^1}{dz} - \phi_1^1 \frac{d\phi_1^2}{dz} = 0, \quad (2.130)$$

e

$$W_2(E, z) := \phi_2^2 \frac{d\phi_2^1}{dz} - \phi_2^1 \frac{d\phi_2^2}{dz} = 0. \quad (2.131)$$

Poiché  $\phi_2^1(-z) = \phi_1^2(z)$  e  $\phi_1^1(-z) = \phi_2^2(z)$ , segue che  $W_1(E, -z) = W_2(E, z)$ . La condizione  $W_{1,2}(E, z) = 0$  è valida per arbitrari valori di  $z$  se e solo se  $E$  corrisponde a un autovalore dell'energia nello spettro del modello quantistico di Rabi. Dunque lo spettro energetico del modello quantistico di Rabi può essere ottenuto col metodo del wronskiano o, all'opposto, i wronskiani (2.130) e (2.131) possono essere espressi in termini di funzioni confluenti di Heun.



## Capitolo 3

# Le generalizzazioni del modello

Quest'ultimo capitolo è dedicato a tre delle tante generalizzazioni possibili del modello quantistico di Rabi [6, 10, 22, 23, 24, 25]. Nella fattispecie, si studiano il modello di Rabi a due fotoni, quello asimmetrico e quello anisotropo.

Queste tre estensioni non offrono soltanto stimolanti problemi teorici ma, come il modello di Rabi originale sono utili a descrivere svariati sistemi fisicamente realizzabili. Il processo ottico non lineare descritto nel modello quantistico di Rabi a due fotoni, ad esempio, ha un notevole interesse [26], con applicazioni riguardanti laser a due fotoni e bistabilità ottica a due fotoni [27]. Può essere usato inoltre per descrivere un atomo a due livelli interagente con una luce intensa [28] e, di recente, un'implementazione del modello quantistico di Rabi a due fotoni è stata proposta utilizzando ioni intrappolati [29].

Diverse sono anche le applicazioni del modello anisotropo: può essere usato per fittare dati sperimentali per circuiti superconduttori in regime di accoppiamento forte [10, 30] ma è stato da poco studiato anche nell'ambito dell'ingegneria dello stato quantico nei sistemi quantici aperti ibridi [31].

Il modello asimmetrico invece è stato recentemente utilizzato nella studio dei polaroni [32].

### 3.1 Il modello di Rabi a due fotoni

L'hamiltoniana di Rabi a due fotoni è un' ovvia estensione dell'hamiltoniana di Rabi originale, dove le transizioni atomiche sono indotte dall'assorbimento o dall'emissione di due fotoni anziché uno [9]. Essa è data da:

$$H_2 = \Delta\sigma_z + \omega a^\dagger a + g\sigma_x \left[ (a^\dagger)^2 + a^2 \right] \quad (3.1)$$

Procedendo in modo simile a quanto fatto per il modello quantistico di Rabi classico, anche in questo caso si esprimono gli autostati dell'hamiltoniana (3.1) come una funzione d'onda a due componenti:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Dall'equazione di Schrödinger  $H_R |\psi\rangle = E |\psi\rangle$ , e ponendo  $\omega = 1$ :

$$a^\dagger a \psi_1 + g \left[ (a^\dagger)^2 + a^2 \right] \psi_2 + \Delta \psi_1 = E \psi_1, \quad (3.3)$$

$$a^\dagger a \psi_2 + g \left[ (a^\dagger)^2 + a^2 \right] \psi_1 - \Delta \psi_2 = E \psi_2, \quad (3.4)$$

Quindi in funzione di  $\phi_1 = \psi_1 + \psi_2$  e  $\phi_2 = \psi_1 - \psi_2$ :

$$a^\dagger a \phi_1 + g \left[ (a^\dagger)^2 + a^2 \right] \phi_1 + \Delta \phi_2 = E \phi_1, \quad (3.5)$$

$$a^\dagger a \phi_2 - g \left[ (a^\dagger)^2 + a^2 \right] \phi_2 + \Delta \phi_1 = E \phi_2, \quad (3.6)$$

che in forma matriciale si scrivono:

$$H'_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

dove:

$$H'_2 = \begin{pmatrix} a^\dagger a + g \left[ (a^\dagger)^2 + a^2 \right] & \Delta \\ \Delta & a^\dagger a - g \left[ (a^\dagger)^2 + a^2 \right] \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Si cerca ora la soluzione attraverso le trasformazioni di Bogoliubov [7]:

$$A = ua + va^\dagger, \quad A^\dagger = ua^\dagger + va, \quad (3.9)$$

$$B = ua - va^\dagger, \quad B^\dagger = ua^\dagger - va, \quad (3.10)$$

con:

$$u = \sqrt{\frac{\beta + 1}{2}}, \quad v = \sqrt{\frac{\beta - 1}{2\beta}} \quad (3.11)$$

e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-4g^2}}$ .

In termini di  $A$ ,  $A^\dagger$ , l'hamiltoniana diventa:

$$H'_2 = \begin{pmatrix} \frac{A^\dagger A - v^2}{u^2 + v^2} & \Delta \\ \Delta & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

dove:

$$H_{22} = (u^2 + v^2 + 4guv)A^\dagger A - [uv + g(u^2 + v^2)] \left[ (A^\dagger)^2 + A^2 \right] + 2guv + v^2. \quad (3.13)$$



Le componenti della funzione d'onda  $\phi_1$  e  $\phi_2$  possono essere espresse come:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

La sostituzione in (3.7) fornisce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n-v^2}{u^2+v^2} - E \right) \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle = 0, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [(u^2 + v^2 + 4guv)n + 2guv + v^2 - E] \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle \\ - [uv + g(u^2 + v^2)] \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n(n-1)} \sqrt{n!} f_n |(n-2)_A\rangle \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} \sqrt{n!} f_n |(n+2)_A\rangle \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Moltiplicando per  $\langle m_A|$  ogni termine delle due equazioni si ottengono le relazioni:

$$e_m = - \frac{\Delta}{\frac{m-v^2}{u^2+v^2} - E} f_m \quad (3.17)$$

$$(m+2)(m+1)f_{m+2} = \frac{\Omega(m)}{uv + g(u^2 + v^2)} f_m - f_{m-2}, \quad (3.18)$$

dove:

$$\Omega(m) = (u^2 + v^2)m + v^2 + 2guv(2m+1) - E - \frac{\Delta^2}{\frac{m-v^2}{u^2+v^2} - E}. \quad (3.19)$$

L'hamiltoniana può anche essere espressa in funzione degli altri due operatori di Bogoliubov  $B$  e  $B^\dagger$  (3.10):

$$H'_2 = \begin{pmatrix} H'_{11} & \Delta \\ \Delta & \frac{B^\dagger B - v^2}{u^2 + v^2} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

con:

$$H'_{11} = (u^2 + v^2 + 4guv)B^\dagger B + [uv + g(u^2 + v^2)] [(B^\dagger)^2 + B^2] + 2guv + v^2. \quad (3.21)$$

La funzione d'onda può essere espansa nello spazio di Fock dell'operatore  $B$  nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sqrt{n!} f'_n |n_B\rangle \\ \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sqrt{n!} e'_n |n_B\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

dove  $l = n$  se  $n$  è pari e  $l = n + 1$  se  $n$  è dispari. Pertanto sono possibili solo due valori di  $i^l = \pm 1$ . Utilizzando l'equazione di Schrödinger si trova:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [(u^2 + v^2 + 4guv)n + 2guv + v^2 - E] i^l \sqrt{n!} f'_n |n_B\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} i^l \sqrt{n!} e'_n |n_B\rangle \\ + [uv + g(u^2 + v^2)] \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n(n-1)} i^l \sqrt{n!} f'_n |(n-2)_B\rangle \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} i^l \sqrt{n!} f'_n |(n+2)_B\rangle \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n-v^2}{u^2+v^2} - E \right) i^l \sqrt{n!} e'_n |n_A\rangle + \Delta \sum_{n=0}^{\infty} i^l \sqrt{n!} f'_n |n_A\rangle = 0, \quad (3.24)$$

Moltiplicando per  $\langle m_B|$  si trova:

$$e'_m = -\frac{\Delta}{\frac{m-v^2}{u^2+v^2} - E} f'_m \quad (3.25)$$

$$(m+2)(m+1) f'_{m+2} = \frac{\Omega'(m)}{uv + g(u^2 + v^2)} f'_m - f_{m-2}, \quad (3.26)$$

dove:

$$\Omega'(m) = (u^2 + v^2) m + v^2 + 2guv(2m+1) - E - \frac{\Delta^2}{\frac{m-v^2}{u^2+v^2} - E}. \quad (3.27)$$

Si noti che i due insiemi di coefficienti per le due autofunzioni hanno la stessa forma. Allo stesso modo, se gli autovalori non sono degeneri, le due autofunzioni dovrebbero rappresentare lo stesso stato e quindi differire al più per una costante  $r$ , cioè:

$$\left( \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n |n_A\rangle}{\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f_n |n_A\rangle} \right) = r \left( \frac{\sum_{n=0}^{\infty} i^l \sqrt{n!} f'_n |n_B\rangle}{\sum_{n=0}^{\infty} i^l \sqrt{n!} e'_n |n_B\rangle} \right), \quad (3.28)$$

in cui si è tenuto conto delle espressioni (3.14) e (3.22). Moltiplicando per lo stato di vuoto  $\langle 0_a|$  entrambe le equazioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} e_n \langle 0_a | n_A \rangle = r \sum_{n=0}^{\infty} i^l \sqrt{n!} f'_n \langle 0_a | n_B \rangle \quad (3.29)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} f_n \langle 0_a | n_A \rangle = r \sum_{n=0}^{\infty} i^l \sqrt{n!} e'_n \langle 0_a | n_B \rangle. \quad (3.30)$$

Vale quindi:

$$i^l \sqrt{n!} \langle 0_a | n_B \rangle = \sqrt{n!} \langle 0_a | n_A \rangle = L_n^{e,o}, \quad (3.31)$$

dove, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ :

$$L_{n=2k}^e = \frac{(2k)!(uv)^k}{2^k} \sum_{j=0}^k \frac{(-u/v)^{2j}}{j!(k-j)!}, \quad (3.32)$$

$$L_{n=2k+1}^o = \frac{(2k+1)!v(uv)^k}{2^k} \sum_{j=0}^k \frac{(-2u/v)^{2j}j!}{(2j+1)!(k-j)!}. \quad (3.33)$$

Perciò, facendo uso di (3.17) e (3.25) deve essere verificata  $g(E) = 0$ , dove:

$$G(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta}{\frac{n-v^2}{u^2+v^2} - E} f_n L_n^{e,o} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta}{\frac{n-v^2}{u^2+v^2} - E} f'_n L_n^{e,o} - \sum_{n=0}^{\infty} f'_n L_n^{e,o} \times \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_n^{e,o}. \quad (3.34)$$

Ponendo  $f_n = f'_n$  e  $x = v^2 + E(u^2 + v^2)$ , si ottiene finalmente:

$$G_{e,o}^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left[ 1 \mp \frac{\Delta(u^2 + v^2)}{x - n} \right] L_n^{e,o}, \quad (3.35)$$

dove il coefficiente  $f_0$  è inizializzato da  $f_0 = 1$  per il caso pari e  $f_1 = 1$  per quello dispari tramite le relazione di ricorrenza (3.18). Gli zeri delle funzioni  $G_{e,o}^{\pm}$  forniscono gli autovalori esatti come mostrato in Figura 3.1.

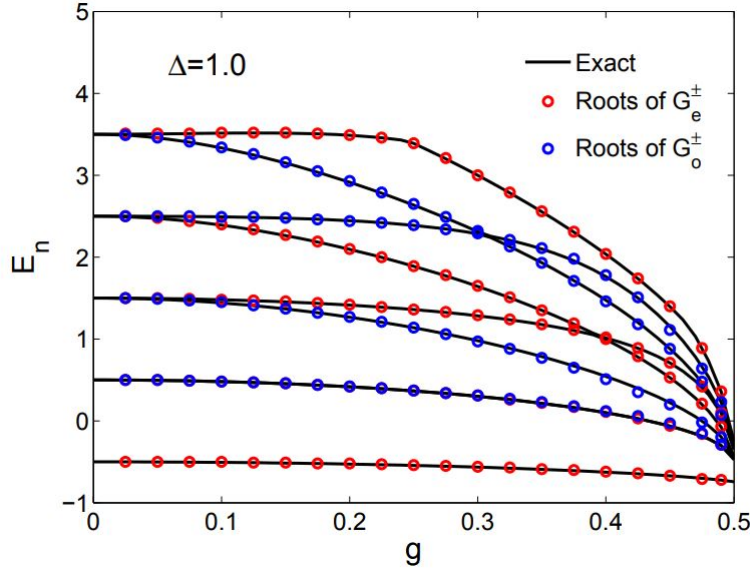


Figura 3.1: Spettro energetico del modello quantistico di Rabi a 2 fotoni come zeri delle funzioni  $G_{e,o}^{\pm}$  definite in (3.35). Figura tratta da [7]

### 3.2 Il modello di Rabi anisotropo

Il modello di Rabi anisotropo è definito dall'hamiltoniana[11]:

$$H_\lambda = \omega a^\dagger a + \Delta \sigma_z + g \left( a^\dagger \sigma^- + a \sigma^+ \right) + \lambda g \left( a^\dagger \sigma^+ + a \sigma^- \right). \quad (3.36)$$

In questa espressione, i termini di rotazione hanno un diverso accoppiamento. Per  $\lambda = 0$  ci si riduce al modello di Jaynes e Cummings mentre per  $\lambda = 1$ , al modello quantistico di Rabi. Per trovare le soluzioni di questo modello generalizzato è possibile usare lo stesso approccio della sezione 2.3. In particolare, nello spazio di Bargmann-Fock, espresso l'autostato  $|\phi\rangle$  dell'hamiltoniana (3.36) come (2.48) e dato che  $H_\lambda |\phi\rangle = E |\phi\rangle$ , seguono le equazioni accoppiate:

$$z \frac{d\phi_1}{dz} + g \frac{d\phi_2}{dz} + \lambda g z \phi_2 + \Delta \phi_2 = E \phi_1, \quad (3.37)$$

$$\lambda g \frac{d\phi_1}{dz} + z \frac{d\phi_2}{dz} + g z \phi_1 - \Delta \phi_2 = E \phi_2. \quad (3.38)$$

Le combinazioni lineari per  $\varphi_1 = \phi_1 + \phi_2$  e  $\varphi_2 = \phi_1 - \phi_2$  conducono allora alle equazioni per  $\varphi_1(z)$  e  $\varphi_2(z)$ :

$$\left( z + \frac{1+\lambda}{2} g \right) \frac{d\varphi_1}{dz} + \frac{1+\lambda}{2} g z \varphi_1 - \frac{1-\lambda}{2} g \frac{d\varphi_2}{dz} + \frac{1-\lambda}{2} g z \varphi_2 + \Delta \varphi_2 = E \varphi_1, \quad (3.39)$$

$$\left( z - \frac{1+\lambda}{2} g \right) \frac{d\varphi_2}{dz} - \frac{1+\lambda}{2} g z \varphi_2 + \frac{1-\lambda}{2} g \frac{d\varphi_1}{dz} - \frac{1-\lambda}{2} g z \varphi_1 + \Delta \varphi_1 = E \varphi_2. \quad (3.40)$$

Le equazioni (3.39) e (3.40) sono risolte introducendo la trasformazione:

$$\varphi_1 = \frac{(1 + \sqrt{\lambda})f_1 - (1 - \sqrt{\lambda})f_2}{1 + \lambda}, \quad (3.41)$$

$$\varphi_2 = \frac{(1 - \sqrt{\lambda})f_1 + (1 + \sqrt{\lambda})f_2}{1 + \lambda}, \quad (3.42)$$

che porta alle seguenti equazioni accoppiate:

$$(z + g\sqrt{\lambda}) \frac{df_1}{dz} + g\sqrt{\lambda} z f_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \Delta f_1 - g(1-\lambda) \frac{df_2}{dz} + \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \Delta f_2 = E f_1, \quad (3.43)$$

$$(z - g\sqrt{\lambda}) \frac{df_2}{dz} - g\sqrt{\lambda} z f_2 - \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \Delta f_2 - (1-\lambda) g z f_1 + \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \Delta f_1 = E f_2. \quad (3.44)$$

Se ora si pongono:

$$y = z + g\sqrt{\lambda}, \quad (3.45)$$

$$x = E + \lambda g^2 - \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\Delta, \quad (3.46)$$

$$\alpha = -(1-\lambda)g^2\sqrt{\lambda} - \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad (3.47)$$

$$f_{1,2} = \chi_{1,2} \exp(-g\sqrt{\lambda}z), \quad (3.48)$$

le equazioni diventano:

$$y \frac{d\chi_1}{dy} - x\chi_1 = \alpha\chi_2 + (1-\lambda)g \frac{d\chi_2}{dy}, \quad (3.49)$$

$$(y - 2g\sqrt{\lambda}) \frac{d\chi_2}{dy} + \left( -2g\sqrt{\lambda}y + 4g^2\lambda - 2\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\Delta - x \right) \chi_2 = \alpha\chi_1 + (1-\lambda)gy\chi_1, \quad (3.50)$$

A questo punto si può espandere  $\chi_2$  in serie di potenze:

$$\chi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n. \quad (3.51)$$

Allora dall'equazione (3.49) si ottiene:

$$\chi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha K_n + (1-\lambda)(n+1)gK_{n+1}}{n-x} y^n, \quad (3.52)$$

mentre dalla (3.50) segue:

$$a_n K_{n+1} = b_n k_n + c_n K_{n-1}, \quad (3.53)$$

relazione di ricorrenza a tre termini. In cui i parametri  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n$  sono definiti come:

$$a_n = 2g\sqrt{\lambda}(n+1) + \frac{(1-\lambda)(n+1)}{n-x}g\alpha, \quad (3.54)$$

$$b_n = n + \left( 4g^2\lambda - 2\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\Delta - x \right) - \frac{\alpha^2}{n-x} - \frac{(1-\lambda)^2g^2n}{n-1-x}, \quad (3.55)$$

$$c_n = -2g\lambda - \frac{(1-\lambda)g\alpha}{n-1-x}. \quad (3.56)$$

Dal momento che il modello in esame ha una simmetria  $\mathbb{Z}_2$  della forma  $\varphi_1(-z) = \pm\varphi_2(z)$ , attraverso la trasformazione (3.41), si osserva che le soluzioni cercate sono date dagli zeri della funzione  $G_{\pm}^{\lambda}$ , dove:

$$G_+^{\lambda} = (1 + \sqrt{\lambda})(f_1(-z) - f_2(z)) - (1 - \sqrt{\lambda})(f_1(z) + f_2(-z)), \quad (3.57)$$

$$G_-^{\lambda} = (1 + \sqrt{\lambda})(f_1(-z) + f_2(z)) + (1 - \sqrt{\lambda})(f_1(z) - f_2(-z)). \quad (3.58)$$

Naturalmente per  $\lambda = 1$  si recuperano i risultati trovati per il modello quantistico di Rabi. Il grafico dello spettro energetico del modello di Rabi anisotropo è riportato in Figura 3.2.

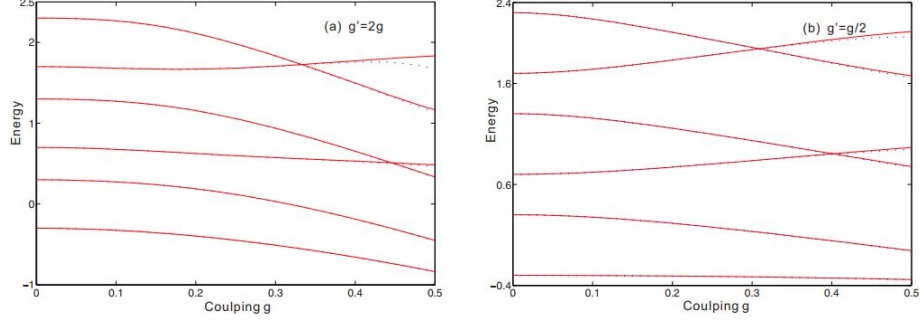


Figura 3.2: Parte inferiore dello spettro energetico del modello di Rabi anisotropo in funzione di  $g$ . Si è posto  $\Delta = 0.3$  e (a)  $\lambda = 2$  e (b)  $\lambda = 0.5$  ( $g' = \lambda g$ ). Figura tratta da [33]

### 3.3 Il modello di Rabi asimmetrico

Un'altra generalizzazione possibile del modello quantistico di Rabi è il modello quantistico di Rabi asimmetrico:

$$H_R^\epsilon = a^\dagger a + g\sigma_x (a^\dagger + a) + \Delta\sigma_z + \epsilon\sigma_x. \quad (3.59)$$

Rispetto all'hamiltoniana di Rabi (1.91) qui figura il termine aggiuntivo  $\epsilon\sigma_x$ . Fisicamente esso corrisponde a una transizione spontanea, cioè non determinata dal campo esterno, del sistema a due livelli. Procedendo in modo analogo a quanto fatto per trovare (2.47) qui si ottiene [34]:

$$H_R^{\epsilon'} = \begin{pmatrix} z\frac{d}{dz} + g(z + \frac{d}{dz}) + \epsilon & \Delta \\ \Delta & z\frac{d}{dz} - g(z + \frac{d}{dz}) - \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Ciò implica che valgono:

$$(z + g)\frac{d\phi_1}{dz} + (gz + \epsilon - E)\phi_1 + \Delta\phi_2 = 0, \quad (3.61)$$

$$(z - g)\frac{d\phi_2}{dz} - (gz + \epsilon + E)\phi_2 + \Delta\phi_1 = 0. \quad (3.62)$$

Sono cioè scritte nella stessa forma di (2.73) e (2.74). Qui però:

$$p_{1,2}(z) = \frac{(1 - 2E - 2g^2)z(2\epsilon \pm 1)g}{z^2 - g^2} \quad (3.63)$$

e

$$q_{1,2}(z) = \frac{-g^2 z^2 - (2\epsilon \mp 1)gz + E^2 - g^2 - \epsilon^2 - \Delta^2}{z^2 - g^2}. \quad (3.64)$$

Per le soluzioni di tipo-I definite come in (2.77) e si trova un'equazione della stessa forma di (2.79) con  $\mu_1$  e  $\nu_1$  definiti allo stesso modo ma dove:

$$\alpha_1 = 4g^2, \quad (3.65)$$

$$\beta_1 = -(E + \epsilon + g^2 + 1), \quad (3.66)$$

$$\gamma_1 = -(E - \epsilon + g^2), \quad (3.67)$$

$$\delta_1 = -2(1 - 2\epsilon)g^2, \quad (3.68)$$

$$\eta_1 = -\frac{3g^4}{2} + \frac{(1 - 2E - 4\epsilon)g^2}{2} + \frac{(E^2 + E - \epsilon^2 + \epsilon - 2\Delta^2 + 1)}{2}. \quad (3.69)$$

Se  $\beta_1 = (E + \epsilon + g^2 + 1)$  non è zero o un intero negativo, l'equazione confluyente di Heun ha due soluzioni di Frobenius locali e linearmente indipendenti intorno a  $x_1 = 0$  del tipo (2.87) e (2.92). Tuttavia la condizione su  $\beta_1$  non è sempre verificata e quindi l'unica soluzione fisica ha la stessa forma di (2.93). Si trova in modo analogo anche la soluzione per  $\phi_2^1$  è (2.99) in cui però:

$$\alpha_2 = 4g^2, \quad (3.70)$$

$$\beta_2 = -(E + \epsilon + g^2), \quad (3.71)$$

$$\gamma_2 = -(E - \epsilon + g^2 + 1), \quad (3.72)$$

$$\delta_2 = 2(1 + 2\epsilon)g^2, \quad (3.73)$$

$$\eta_2 = -\frac{3g^4}{2} - \frac{(3 + 2E + 4\epsilon)g^2}{2} + \frac{(E^2 + E - \epsilon^2 - \epsilon - 2\Delta^2 + 1)}{2}. \quad (3.74)$$

Inoltre, l'equazione (3.62) in cui si sostituiscono le soluzioni trovate è verificata solo se  $C_2/C_1 = \Delta/(E + g^2 + \epsilon)$ .

Per quanto riguarda le soluzioni di Tipo-II, si introduce un'altra variabile  $x_2 = (g + z)/2g = 1 - x_1$ . Come per il modello originale, anche qui la sostituzione di (2.78) in (2.73) verifica che  $f_2$  soddisfa (2.100), in questo caso però  $\alpha_3 = \alpha_1$ ,  $\beta_3 = \gamma_1$ ,  $\gamma_3 = \beta_1$ ,  $\delta_3 = -\delta_1$  e  $\eta_3 = \eta_1 + \delta_1$ . Facendo allo stesso modo anche per  $\phi_2^2$  si può scrivere che le soluzioni del Tipo-II per  $\phi_2$  sono:

$$\phi_2^2(z) = D_1 e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_1, \gamma_1, \beta_1, -\delta_1, \eta_1 + \delta_1, \frac{g+z}{2g} \right), \quad (3.75)$$

$$\phi_2^2(z) = D_2 e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_2, \gamma_2, \beta_2, -\delta_2, \eta_2 + \delta_2, \frac{g+z}{2g} \right), \quad (3.76)$$

dove  $D_1/D_2 = \Delta/(E + g^2 - \epsilon)$  può essere determinato sostituendo le due soluzioni in (3.61).

In definitiva si è mostrato che le soluzioni delle equazioni (3.61) e (3.62) sono:

$$\phi_1^1(z) = e^{-gz} \text{HC} \left( \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \eta_1, \frac{g-z}{2g} \right), \quad (3.77)$$

$$\phi_2^1(z) = \frac{\Delta}{E + g^2 + \epsilon} e^{-gz} \text{HC} \left( \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \eta_2, \frac{g-z}{2g} \right), \quad (3.78)$$

e

$$\phi_1^2(z) = \frac{\Delta}{E + g^2} e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_1, \gamma_1, \beta_1, -\delta_1, \eta_1 + \delta_1, \frac{g+z}{2g} \right), \quad (3.79)$$

$$\phi_2^2(z) = e^{gz} \text{HC} \left( \alpha_2, \gamma_2, \beta_2, -\delta_2, \eta_2 + \delta_2, \frac{g+z}{2g} \right). \quad (3.80)$$

Il contributo  $\epsilon$  rompe la simmetria  $\mathbb{Z}_2$ ; lo spettro energetico può essere allora determinato osservando che le soluzioni trovate sono linearmente dipendenti e in conseguenza di ciò il wronskiano deve essere nullo:

$$W_1^\epsilon(E, z) := \phi_1^2 \frac{d\phi_1^1}{dz} - \phi_1^1 \frac{d\phi_1^2}{dz} = 0, \quad (3.81)$$

e

$$W_2^\epsilon(E, z) := \phi_2^2 \frac{d\phi_2^1}{dz} - \phi_2^1 \frac{d\phi_2^2}{dz} = 0. \quad (3.82)$$

Tale condizione è valida per arbitrari valori di  $z$  quando  $E$  è un autovalore dell'energia del modello di Rabi generalizzato, da ciò segue che si può scegliere a piacimento il punto  $z$  in cui calcolare il wronskiano. Si osservi infine che poiché  $\phi_1^1(-z, -\epsilon) = \phi_2^2(z, \epsilon)$  e  $\phi_2^1(-z, -\epsilon) = \phi_1^2(z, \epsilon)$  vale  $W_1^\epsilon(E, z) = W_2^{-\epsilon}(E, -z)$  per cui si può scegliere di calcolare anche solo uno dei due wronskiani. In Figura 3.3 si riportano, ad esempio, i grafici del wronskiano  $W_+^\epsilon(E, z) \equiv W_1^\epsilon(E, z)$  col corrispettivo spettro energetico.



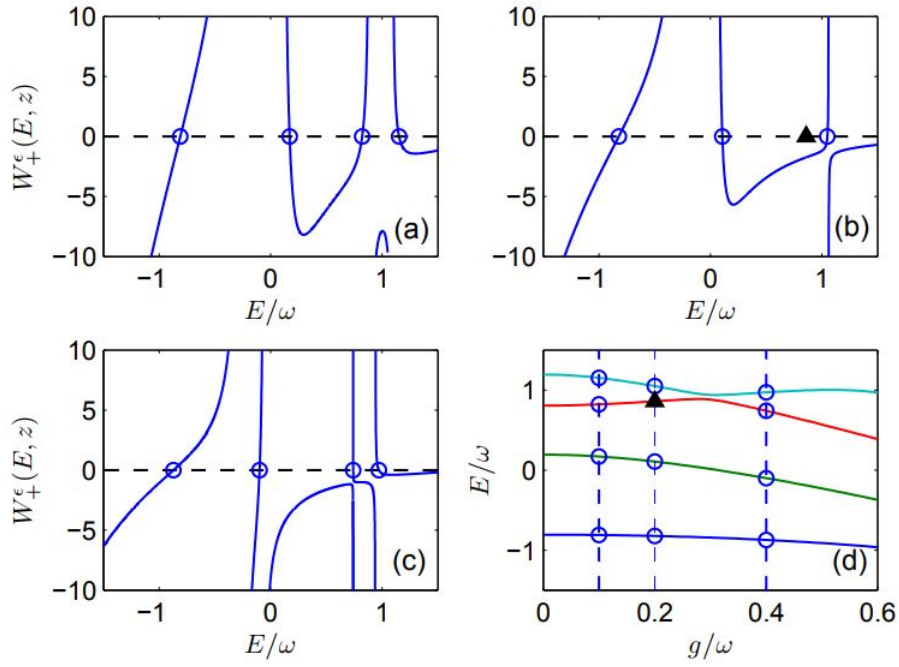


Figura 3.3: Grafici del wronskiano  $W_+^\epsilon(E, z)$  come funzione di  $E/\omega$  per  $\Delta = 0.8$ ,  $\epsilon = 0.1$  e tre diversi valori di  $g$ : (a) 0.1, (b) 0.2, (c) 0.4. La parte (d) mostra il corrispondente spettro energetico come funzione di  $g/\omega$ . Da sinistra a destra le linee verticali tratteggiate nella parte (d) corrispondono rispettivamente a  $g/\omega = 0.1, 0.2$  e  $0.4$ . I cerchi rappresentano gli zeri di  $W_+^\epsilon(E, z)$ , il triangolo nero invece denota un autovalore eccezionale dello spettro energetico. Figura tratta da [34]



# Conclusioni

Nel corso della trattazione si sono esaminati tre metodi differenti per ottenere la soluzione al modello quantistico di Rabi.

Per prima cosa si è esplicitata l'espressione dell'operatore hamiltoniano del modello quantistico di Rabi. Si è scomposta l'hamiltoniana come somma di tre termini: il primo è quello legato alle transizioni energetiche dell'atomo; il secondo è quello relativo al campo elettromagnetico, che è stato quantizzato mostrando le evidenti analogie con l'oscillatore armonico quantistico; da ultimo si è esposto il termine di interazione necessario a descrivere l'accoppiamento tra l'atomo e il campo. Prima di approfondire lo studio della soluzione si sono anche presentati gli stati di Fock e gli stati coerenti di cui ci si è serviti in questo lavoro. Successivamente, a conclusione del capitolo, si sono illustrate le oscillazioni di Rabi che discendono dal modello semiclassico e che sono alla base del funzionamento dell'imaging a risonanza magnetica, ampiamente utilizzato in campo medico. Con l'hamiltoniana trovata è stato possibile considerare il problema agli autovalori e, nel capitolo centrale, procedere alla sua risoluzione. Nel capitolo conclusivo si è quindi mostrato come sia possibile risolvere tre generalizzazioni del sistema. Diverse altre estensioni del modello sono state risolte successivamente alla soluzione analitica del modello originale; le quali, come fatto da quest'ultimo, porteranno di certo a ulteriori lavori, sia teorici che sperimentali, che indagano l'interazione tra luce e materia.



# Bibliografía

- [1] I. I. Rabi, “On the process of space quantization,” *Phys. Rev.*, vol. 49, pp. 324–328, Feb 1936.
- [2] I. I. Rabi, “Space quantization in a gyrating magnetic field,” *Phys. Rev.*, vol. 51, pp. 652–654, Apr 1937.
- [3] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, pp. 89–109, Jan 1963.
- [4] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll, and E. Solano, “Deep strong coupling regime of the jaynes-cummings model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 263603, Dec 2010.
- [5] G. Romero, D. Ballester, Y. M. Wang, V. Scarani, and E. Solano, “Ultrafast quantum gates in circuit qed,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 120501, Mar 2012.
- [6] D. Braak, “Integrability of the rabi model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 100401, Aug 2011.
- [7] Q.-H. Chen, C. Wang, S. He, T. Liu, and K.-L. Wang, “Exact solvability of the quantum rabi model using bogoliubov operators,” *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 023822, Aug 2012.
- [8] H. Zhong, Q. Xie, M. T. Batchelor, and C. Lee, “Analytical eigenstates for the quantum rabi model,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 46, no. 41, p. 415302, 2013.
- [9] C. Emary and R. F. Bishop, “Exact isolated solutions for the two-photon rabi hamiltonian,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 35, no. 39, p. 8231, 2002.
- [10] Q.-T. Xie, S. Cui, J.-P. Cao, L. Amico, and H. Fan, “Anisotropic rabi model,” *Phys. Rev. X*, vol. 4, p. 021046, Jun 2014.

- [11] Q. Xie, H. Zhong, M. T. Batchelor, and C. Lee, “The quantum rabi model: solution and dynamics,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 11, p. 113001, 2017.
- [12] J. E. Calderón Krejci, “Rabi hamiltonian and geometric phases,” Master’s thesis, Pontificia Universidad Católica del Perú, May 2016.
- [13] D. Barlett, “Jaynes-cummings model, lecture 4,” Mar 2005.
- [14] F. Ortolani, “Appunti di teoria quantistica della materia,” 2016.
- [15] B. Hage, “Lecture 4: Quantum states of light-fock states,” 2016.
- [16] B. W. Shore and P. L. Knight, “The jaynes-cummings model,” *Journal of Modern Optics*, vol. 40, no. 7, pp. 1195–1238, 1993.
- [17] A. J. Maciejewski, M. Przybylska, and T. Stachowiak, “Full spectrum of the rabi model,” *Physics Letters A*, vol. 378, no. 1, pp. 16 – 20, 2014.
- [18] P. Toussaint, “Le modèle de rabi,” Master’s thesis, Université de Liège, 2015.
- [19] E. Zeidler, *Quantization of the Harmonic Oscillator – Ariadne’s Thread in Quantization*, pp. 427–697. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [20] A. Ronveaux, *Heun’s Differential Equations*. Oxford, New York: Oxford University Press, 1995.
- [21] H. Zhong, Q. Xie, M. T. Batchelor, and C. Lee, “Analytical eigenstates for the quantum rabi model,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 46, no. 41, p. 415302, 2013.
- [22] I. Travěnc, “Solvability of the two-photon rabi hamiltonian,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 043805, Apr 2012.
- [23] S. Cui, J.-P. Cao, H. Fan, and L. Amico, “Exact analysis of the spectral properties of the anisotropic two-bosons rabi model,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 20, p. 204001, 2017.
- [24] J. Peng, Z. Ren, G. Guo, G. Ju, and X. Guo, “Exact solutions of the generalized two-photon and two-qubit rabi models,” *The European Physical Journal D*, vol. 67, p. 162, Aug 2013.
- [25] D. Braak, “Solution of the dicke model for  $n = 3$ ,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 46, no. 22, p. 224007, 2013.
- [26] Y. R. Shen, “Quantum statistics of nonlinear optics,” *Phys. Rev.*, vol. 155, pp. 921–931, Mar 1967.

- [27] M. Reid, K. J. McNeil, and D. F. Walls, “Unified approach to multiphoton lasers and multiphoton bistability,” *Phys. Rev. A*, vol. 24, pp. 2029–2043, Oct 1981.
- [28] C. C. Gerry, “Two-photon jaynes-cummings model interacting with the squeezed vacuum,” *Phys. Rev. A*, vol. 37, pp. 2683–2686, Apr 1988.
- [29] S. Felicetti, J. S. Pedernales, I. L. Egusquiza, G. Romero, L. Lamata, D. Braak, and E. Solano, “Spectral collapse via two-phonon interactions in trapped ions,” *Phys. Rev. A*, vol. 92, p. 033817, Sep 2015.
- [30] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. García-Ripoll, E. Solano, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, “Observation of the bloch-siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 237001, Nov 2010.
- [31] C. Joshi, J. Larson, and T. P. Spiller, “Quantum state engineering in hybrid open quantum systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 043818, Apr 2016.
- [32] M. Liu, Z.-J. Ying, J.-H. An, H.-G. Luo, and H.-Q. Lin, “The asymmetric quantum rabi model in the polaron picture,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 8, p. 084003, 2017.
- [33] G. Zhang and H. Zhu, “Analytical solution for the anisotropic rabi model: effects of counter-rotating terms,” *Scientific reports*, vol. 5, p. 8756, 2015.
- [34] H. Zhong, Q. Xie, X. Guan, M. T. Batchelor, K. Gao, and C. Lee, “Analytical energy spectrum for hybrid mechanical systems,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 47, no. 4, p. 045301, 2014.