

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

**Misurazione dell'angolo γ ottenuta
attraverso una combinazione bayesiana di
risultati dell'esperimento LHCb**

Relatore:
Prof. Angelo Carbone

Presentata da:
Massimiliano Galli

Correlatore:
Dott. Flavio Pisani

Sessione II
Anno Accademico 2016/2017

Indice

1	Modello Standard: <i>mixing</i> dei quark nelle interazioni deboli	7
1.1	Il Modello Standard	7
1.2	La matrice CKM	8
1.2.1	Parametrizzazione di Wolfenstein e triangoli unitari.	12
2	L'esperimento LHCb	15
2.1	Motivazioni fisiche e requisiti	15
2.2	Il rivelatore-LHCb	16
2.2.1	Sistema tracciante	18
2.2.2	Sistema di identificazione di particelle	19
2.2.3	Sistema di trigger	23
3	Misura di γ e risultati sperimentali	25
3.1	Metodi di misura	25
3.1.1	GLW	26
3.1.2	ADS	28
3.1.3	GGSZ	30
3.1.4	GLS	30
3.1.5	Analisi $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$ con dipendenza temporale	30
3.1.6	$B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$ amplitude analysis	32
3.2	Risultati delle misurazioni effettuate presso LHCb	33
3.2.1	Valori sperimentali	33
3.2.2	Input esterni	42
4	Statistica bayesiana e applicazione	45
4.1	Teorema di Bayes	45
4.2	Inferenza parametrica	46
4.2.1	Minimizzazione del χ^2	48
4.3	Osservabili, incognite e metodo di misura	49
5	Risultati	51
5.1	Stima di γ per le singole misure	52
5.2	Sottocombinazioni	65
5.3	Combinazione	69
5.4	Effetto dell'aggiunta di $B^+ \rightarrow D^*K^+$ e $B^+ \rightarrow DK^{*+}$	73

5.5	Stime migliori con la minimizzazione del χ^2	75
6	Conclusioni	77
A	Definizioni degli osservabili	79
A.1	$D^0 \rightarrow h^+h^-$ GLW/ADS	79
A.2	$D^0 \rightarrow K^\pm\pi^\mp\pi^+\pi^-$ GLW/ADS-like	80
A.3	$D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp\pi^0$ GLW/ADS-like	80
A.4	$D \rightarrow K_s^0 K\pi$ GLS	81
A.5	$B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$ ADS	81
A.6	$B^+ \rightarrow Dh^+\pi\pi$ GLW/ADS-like	82
B	Truth relations	83
B.1	$D^0 \rightarrow h^+h^-$ GLW/ADS	83
B.2	$D^0 \rightarrow K^\pm\pi^\mp\pi^+\pi^-$ ADS	84
B.3	$D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp\pi^0$ ADS	84
B.4	$D^0 \rightarrow K_s^0 h^+h^-$ GGSZ	85
B.5	$D \rightarrow K_s^0 K\pi$ GLS	85
B.6	$B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$ ADS	85
B.7	$B^+ \rightarrow Dh^+\pi\pi$ GLW/ADS	86
B.8	$B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$, dipendenza dal tempo	86
B.9	$B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$	86
B.10	$B^+ \rightarrow D^*K^+$, $D \rightarrow hh$ GLW	87
B.11	$B^+ \rightarrow DK^{*+}$, $D \rightarrow hh$ GLW/ADS	87

Introduzione

L'esperimento LHCb in presa dati presso il CERN si occupa di realizzare misure di precisione nell'ambito della fisica del flavour, al fine di verificare la validità delle previsioni del Modello Standard.

Nel Modello Standard, le trasformazioni degli stati di flavour dei quark sono descritti mediante la matrice CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa). Uno degli obiettivi principali di LHCb è la misura del parametro γ associato a questa matrice.

La misura di γ è ottenuta combinando i risultati ottenuti dall'analisi di vari decadimenti dei mesoni B . La combinazione è complicata dal fatto che molti degli osservabili di ciascuna misura sono legati a γ solo tramite equazioni non lineari. Inoltre sono presenti molti parametri addizionali (parametri "nuisance") che devono essere determinati insieme a γ .

Lo scopo di questa tesi è fornire una stima di γ ottenuta tramite una combinazione bayesiana delle seguenti misure, realizzate da LHCb:

- $B^+ \rightarrow Dh^+$, $D \rightarrow hh$, GLW/ADS, 3 fb^{-1} (Run 1) + 2 fb^{-1} (Run 2) [8]
- $B^+ \rightarrow Dh^+$, $D \rightarrow h\pi\pi\pi$, GLW/ADS, 3 fb^{-1} [8]
- $B^+ \rightarrow DK^+$, $D \rightarrow K_s^0 hh$, GGSZ, 3 fb^{-1} [10]
- $B^+ \rightarrow DK^+$, $D \rightarrow K_s^0 K\pi$, GLS, 3 fb^{-1} [11]
- $B^+ \rightarrow Dh^+$, $D \rightarrow hh\pi^0$, GLW/ADS, 3 fb^{-1} [12]
- $B^0 \rightarrow DK^{*0}$, $D \rightarrow K\pi$, ADS, 3 fb^{-1} [13]
- $B^+ \rightarrow Dh^+\pi\pi$, $D \rightarrow hh$, GLW/ADS, 3 fb^{-1} [14]
- $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$, 3 fb^{-1} [16]
- $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$ amplitude analysis, 3 fb^{-1} [18]
- $B^0 \rightarrow DK^{*0}$, $D \rightarrow K_s^0 hh$, GGSZ, 3 fb^{-1} [19] [20]
- $B^+ \rightarrow D^* K^+$, $D \rightarrow h^+ h^-$, GLW, 3 fb^{-1} (Run 1) + 2 fb^{-1} (Run 2) [21]
- $B^+ \rightarrow DK^{*+}$, $D \rightarrow h^+ h^-$, GLW/ADS, 3 fb^{-1} (Run 1) + 1 fb^{-1} (Run 2) [22]

dove h indica un kaone o un pione.

La combinazione in esame verrà chiamata "DK only", in quanto contiene solo osservabili misurate nei decadimenti del tipo $B \rightarrow DK$. Vengono dunque esclusi decadimenti del tipo $B \rightarrow D\pi$, i cui osservabili hanno una sensibilità a γ che risulta soppressa rispetto ai decadimenti considerati.

La tesi inizia con un'introduzione teorica al significato fisico di γ (Capitolo 1), per poi passare ad una rapida analisi del rivelatore LHCb (Capitolo 2). Nel Capitolo 3 si descrivono i metodi di misura di γ e si riportano definizioni e risultati sperimentali degli osservabili utilizzati nella combinazione. I principi che stanno alla base della combinazione sono descritti nel Capitolo 4, insieme ad un'introduzione alla statistica bayesiana. I risultati e le conclusioni dello studio si trovano infine nei Capitoli 5 e 6.

Capitolo 1

Modello Standard: *mixing* dei quark nelle interazioni deboli

1.1 Il Modello Standard

Il Modello Standard (SM) è una teoria che descrive la natura delle interazioni fondamentali ad alta energia che avvengono tra i costituenti fondamentali della materia. La dinamica delle particelle dello SM è dovuta all'interazione elettro-debole (le interazioni elettromagnetica e debole sono unificate) e all'interazione forte (cromodinamica). Le particelle sono suddivise in due categorie principali, ciascuna divisa poi in sottocategorie, sulla base dello spin:

Fermioni, con spin semintero. Essi si distinguono in due insiemi: leptoni e quark. I quark interagiscono fortemente, mentre i leptoni no. Sia quark che leptoni interagiscono per interazione elettro-debole. Entrambi gli insiemi presentano tre generazioni di particelle che esibiscono proprietà simili. Le differenze principali tra generazioni sono dovute alla massa e alla vita media delle particelle che ne fanno parte.

All'insieme dei leptoni appartengono le famiglie di flavour (sapore) dell'elettrone (e^-), del muone (μ^-) e del tauone (τ^-). Ogni leptone carico è accompagnato da un corrispondente neutrino, privo di carica elettrica (ν_e , ν_μ e ν_τ):

$$L_e \equiv \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad L_\mu \equiv \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad L_\tau \equiv \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Assieme alle famiglie di particelle leptoniche, esistono i corrispondenti anti-leptoni. Ad ogni leptone è associato un numero quantico leptonico. Il valore $+1$ è assegnato per convenzione ai leptoni, mentre il valore -1 per tutti gli anti-leptoni. I processi di interazione descritti dallo SM conservano il numero leptonico.

Le tre famiglie di quark possono essere sintetizzate nella seguente maniera:

$$\begin{array}{l} q_{up} = +2/3 \\ q_{down} = -1/3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (1.2)$$



Figura 1.1: Il Modello Standard

con u per il quark *up*, d per il quark *down*, c per il quark *charm*, s per il quark *strange*, t per il quark *top* e b per il quark *bottom*. Con riferimento a questo schema di classificazione, i quark sono generalmente distinti in quark *up-like* e quark *down-like*, con i primi caratterizzati da carica elettrica $q_{up} = +2/3$ e i secondi $q_{down} = -1/3$. I quark si presentano in natura sempre in stati legati denominati adroni, che si dividono in due gruppi: i mesoni, costituiti da due quark e i barioni, costituiti da tre quark.

Bosoni, con spin intero. Anche detti *bosoni di gauge*, in quanto la loro esistenza viene introdotta in base ad un principio di simmetria detta "di gauge", essi sono i mediatori delle forze di interazione. A questa categoria appartengono il fotone (γ), mediatore dell'interazione elettromagnetica, i bosoni W^\pm e Z^0 , mediatori dell'interazione debole, i gluoni, mediatori dell'interazione forte e il *bosone di Higgs*. Tutte le caratteristiche appena riportate sono sintetizzate efficacemente in Figura 1.1

1.2 La matrice CKM

Lo SM prevede che per i leptoni valga una proprietà di universalità: la costante di accoppiamento (parametro che definisce l'intensità dell'interazione) tra un leptone e i bosoni mediatori dell'interazione debole è indipendente dal flavour, cioè si ha, entro gli errori sperimentali:

$$g_e = g_\mu = g_\tau = g \quad (1.3)$$

Un discorso analogo non è valido per i quark: per questi ultimi si parla di *mixing*, teoria che fu proposta nel 1963 da Nicola Cabibbo. All'epoca erano noti soltanto i quark up, down e strange. Cabibbo formulò la propria teoria per spiegare due fenomeni che emergevano da osservazioni sperimentali eseguite su decadimenti adronici:

- alcuni decadimenti conservano la stranezza ($|\Delta S| = 0$) mentre altri la violano ($|\Delta S| = 1$);
- quark diversi hanno costanti di accoppiamento diverse, con processi che risultano favoriti e altri soppressi.

Si considerino ad esempio il decadimento β del neutrone:

$$n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e \quad (1.4)$$

e quello dell'adrone Λ

$$\Lambda \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e \quad (1.5)$$

Gli adroni che compaiono nei due decadimenti sono Λ (composto dai quark $s-d-u$), il protone (composto dai quark $u-u-d$) e il neutrone (composto dai quark $u-d-d$). In (1.4) il quark down si trasforma in un quark up, emettendo un bosone W^- , mentre in (1.5) è il quark strange a trasformarsi in un quark up, con la stessa emissione osservata nel caso precedente. Per (1.4) si ha $|\Delta S| = 0$ mentre per (1.5) si ha $|\Delta S| = 1$. Se si assume che i quark *down-type* che entrano in gioco nell'interazione non sono gli autostati di flavour d ed s ma loro combinazioni lineari d' e s' è possibile ottenere una descrizione coerente dei fenomeni osservati. Si fa l'ipotesi che entrambe le coppie di quark (d, s) e (d', s') costituiscano una base ortonormale per la descrizione delle correnti di transizione dello stato dei quark. La seconda di queste coppie è ottenuta dalla prima tramite una rotazione, corrispondente al cosiddetto "angolo di Cabibbo" (θ_C).

$$d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \quad (1.6)$$

Per effetto della rotazione si ottiene uno stato di quark *down-type* che non si trova in uno stato di flavour definito. I coefficienti di d ed s devono soddisfare la condizione di normalizzazione. L'ipotesi è che l'elemento di matrice del decadimento descritto dall'Equazione (1.4) sia proporzionale al coseno dell'angolo di Cabibbo, mentre il decadimento descritto dall'Equazione (1.5) risulta proporzionale al seno dello stesso angolo. Poiché l'angolo di Cabibbo risulta essere piccolo, il processo che conserva la stranezza è favorito rispetto a quello che la viola. Il valore dell'angolo di Cabibbo risulta essere:

$$\theta_C = 12.9^\circ \quad (1.7)$$

Stabilito con la scoperta del quark charm che i quark dovessero essere almeno quattro, il mixing dei quark doveva essere espresso in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

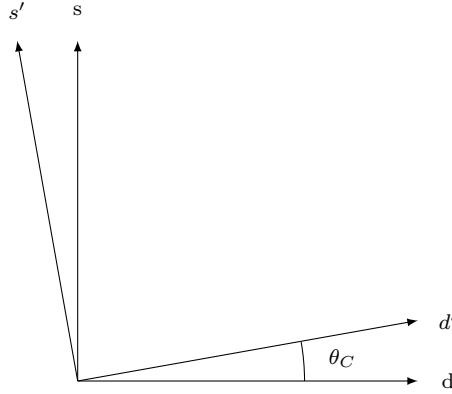


Figura 1.2: Mixing di Cabibbo

Le due basi sono connesse da una trasformazione ortogonale. La matrice di mixing presenta un solo parametro libero, che è appunto l'angolo di Cabibbo (θ_C). La generalizzazione a tre generazioni fu proposta successivamente da M. Kobayashi e K. Maskawa. La matrice di mixing dei quark passava così dall'essere una matrice quadrata di rango 2 ad una matrice quadrata di rango 3:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

La matrice dell'Equazione (1.9) è chiamata *matrice di Cabibbo-Kobayashi-K. Maskawa* (CKM). Essa ha la proprietà di essere unitaria:

$$V^\dagger V = 1 = V V^\dagger \quad (1.10)$$

La matrice CKM è una matrice 3×3 con 4 parametri liberi.

Considerando lo spazio tridimensionale generato dalla terna (x,y,z) e rinominando questi assi con il nome dei quark *down-type* (d,s,b) come mostrato in Figura 1.3, è possibile ottenere la matrice di mixing attraverso delle trasformazioni. Operando delle rotazioni nel seguente ordine: la prima di un angolo θ_{12} attorno all'asse *b*, la seconda di un angolo θ_{13} attorno all'asse *s* e la terza di un angolo θ_{23} attorno all'asse delle *d*, si ottiene:

$$V_{reale} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

dove è stata utilizzata, per brevità, la scrittura $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. L'attuale miglior stima del valore degli angoli è:

$$\theta_{12} = (13.04 \pm 0.08)^\circ \quad \theta_{23} = (2.38 \pm 0.06)^\circ \quad \theta_{13} = (0.201 \pm 0.011)^\circ \quad (1.12)$$

I valori degli angoli di rotazione sono molto piccoli, ma in Figura 1.3 sono stati esagerati per renderli visibili.

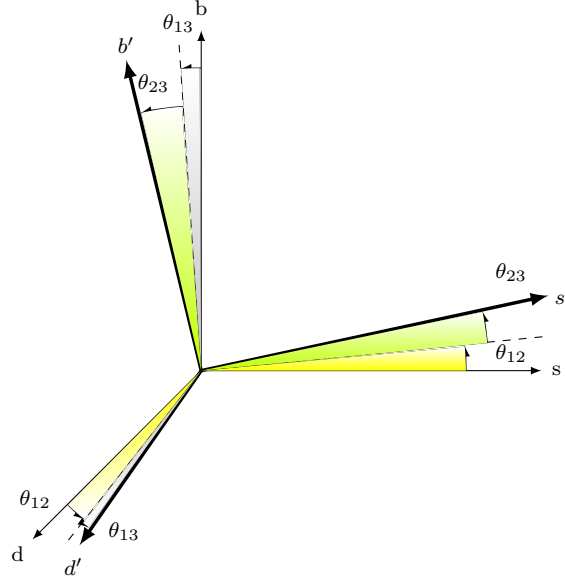


Figura 1.3: Rotazione dei quark

Ora risulta necessario introdurre la fase:

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & s_0 \\ -s_{13}e^{+i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

L'introduzione della fase in questo modo è possibile solamente se la matrice CKM è unitaria. Il suo valore è stimato essere

$$\delta_{13} = (1.20 \pm 0.08)^\circ \tag{1.14}$$

La validità della teoria, quindi dello SM stesso, può essere provata verificando che la matrice CKM sia effettivamente unitaria. Sono stati ideati precisi esperimenti volti a valutare con una incredibile accuratezza gli elementi della matrice di trasformazione. Grazie ai decadimenti semileptonici è stato possibile valutare il valore assoluto di questi. Il valore di $|V_{tb}|^2$ non è stato ancora stimato, tuttavia si è certi che esso sia incredibilmente vicino all'unità. La parte immaginaria dei termini, dove presente, è stata misurata attraverso i fenomeni di violazione di simmetria CP . Di seguito si riporta la matrice CKM con i valori assoluti dei suoi elementi:

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 973.8 \pm 0.2 & 227.0 \pm 1.0 & 4.0 \pm 0.1 \\ 227.0 \pm 1.0 & 973.0 \pm 0.2 & 42.2 \pm 0.8 \\ 8.1 \pm 0.6 & 41.6 \pm 0.8 & 999.1 \pm 0.1 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \tag{1.15}$$

Poichè i moduli quadri degli elementi della matrice CKM rappresentano i *rates* di transizione da uno stato *up-like* ad uno *down-like* o viceversa, è possibile compiere una prima verifica delle ipotesi toriche, valutando quanto sia vicino all'unità la somma dei moduli quadri lungo le righe e lungo le colonne:

$$\begin{aligned}
 |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 &= 0.9998 \pm 0.0008 && \text{prima riga} \\
 |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 &= 1.0000 \pm 0.0009 && \text{seconda riga} \\
 |V_{tc}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 &= 1.0000 \pm 0.0003 && \text{terza riga} \\
 |V_{ud}|^2 + |V_{cd}|^2 + |V_{td}|^2 &= 0.9999 \pm 0.0009 && \text{prima colonna} \\
 |V_{us}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{ts}|^2 &= 1.0001 \pm 0.0009 && \text{seconda colonna} \\
 |V_{ub}|^2 + |V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 &= 1.0000 \pm 0.0003 && \text{terza colonna}
 \end{aligned}$$

Osservando i valori della matrice CKM riportati nell'Equazione (1.15) si nota subito che i termini sulla diagonale sono molto vicini all'unità. Questo significa che i quark connessi a quel termine matriciale decadono principalmente l'uno nell'altro. Analizzando i termini non diagonali è possibile capire quanto i quark di una generazione fanno mixing con un'altra. Il mixing tra la prima e la seconda generazione, per esempio, è maggiore rispetto a quello tra la seconda e la terza. Questo a sua volta risulta maggiore rispetto al mixing tra la prima e la terza generazione. Questo significa che gli adroni preferiscono decadere semileptonicamente nella generazione accanto. Ciò implica che la sottomatrice di rango 2 che descrive il mixing tra le prime due famiglie è molto simile a quella dell'Equazione (1.9) e che $\theta_C \approx \theta_{12}$, $|V_{ud}| \approx |V_{cs} \approx \cos \theta_C|$ e $|V_{us}| \approx |V_{cd}| \approx \sin \theta_C$.

1.2.1 Parametrizzazione di Wolfenstein e triangoli unitari.

Sulla base di queste osservazioni, il fisico americano L. Wolfenstein propose una nota parametrizzazione della matrice CKM, che porta il suo nome. Partendo dall'Equazione (1.11) e procedendo con la sostituzione seguente:

$$s_{12} = \lambda \quad s_{23} = A\lambda^2 \quad s_{13}e^{-i\delta_{13}} = A\lambda^3(\rho - i\eta) \quad (1.16)$$

si ottiene facilmente il risultato desiderato, che al terzo ordine di approssimazione risulta:

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4) \quad (1.17)$$

Utilizzando la parte sinistra della definizione di unitarietà, espressa dall'Equazione (1.10), si ottengono nove equazioni, tre delle quali esprimono l'universalità debole:

$$\begin{cases} |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1 \\ |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 = 1 \\ |V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

mentre le altre sei equazioni definiscono delle relazioni di ortogonalità che rappresentano dei triangoli nel piano complesso. Di queste solamente tre risultano linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} V_{ud}^* V_{us} + V_{cd}^* V_{cs} + V_{td}^* V_{ts} = 0 \\ V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} = 0 \\ V_{us}^* V_{ub} + V_{cs}^* V_{cb} + V_{ts}^* V_{tb} = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Dalla seconda parte della relazione (1.10) si ricavano, tuttavia, altre tre equazioni linearmente indipendenti, rappresentanti altri triangoli unitari:

$$\begin{cases} V_{cd} V_{ud}^* + V_{cs} V_{us}^* + V_{cb} V_{ub}^* = 0 \\ V_{td} V_{ud}^* + V_{ts} V_{us}^* + V_{tb} V_{ub}^* = 0 \\ V_{td} V_{cd}^* + V_{ts} V_{cs}^* + V_{tb} V_{cb}^* = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Di queste solamente tre equazioni risultano linearmente indipendenti. Sfruttando la parametrizzazione di Wolfenstein è possibile valutare quali triangoli unitari hanno i lati dello stesso ordine di grandezza:

$$\begin{cases} \underbrace{V_{ud} V_{us}^*}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{cd} V_{cs}^*}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{td} V_{ts}^*}_{o(\lambda^5)} = 0 \\ \underbrace{V_{ub}^* V_{ud}}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{cb}^* V_{cd}}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{tb}^* V_{td}}_{o(\lambda^3)} = 0 \\ \underbrace{V_{us}^* V_{ub}}_{o(\lambda^4)} + \underbrace{V_{cs}^* V_{cb}}_{o(\lambda^2)} + \underbrace{V_{ts}^* V_{tb}}_{o(\lambda^2)} = 0 \\ \underbrace{V_{cd} V_{ud}^*}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{cs} V_{us}^*}_{o(\lambda)} + \underbrace{V_{cb} V_{ub}^*}_{o(\lambda^5)} = 0 \\ \underbrace{V_{td} V_{ud}^*}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{ts} V_{us}^*}_{o(\lambda^3)} + \underbrace{V_{tb} V_{ub}^*}_{o(\lambda^3)} = 0 \\ \underbrace{V_{td} V_{cd}^*}_{o(\lambda^4)} + \underbrace{V_{ts} V_{cs}^*}_{o(\lambda^2)} + \underbrace{V_{tb} V_{cb}^*}_{o(\lambda^2)} = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Quindi solamente la seconda e la quinta relazione definiscono dei triangoli di particolare rilevanza. Per analizzare geometricamente i due triangoli risulta utile riscrivere le loro relazioni in modo da ottenere un lato unitario:

$$\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} + 1 + \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} = 0 \quad (1.22a)$$

$$\frac{V_{td} V_{ud}^*}{V_{ts} V_{us}^*} + 1 + \frac{V_{tb} V_{ub}^*}{V_{ts} V_{us}^*} = 0 \quad (1.22b)$$

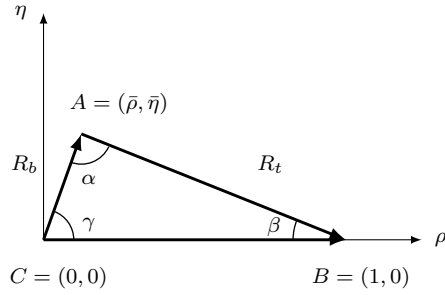


Figura 1.4: Triangolo unitario

Di particolare interesse ai fini dell'argomento trattato è il primo triangolo. Utilizzando la parametrizzazione di Wolfenstein:

$$\begin{cases} \frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} = \frac{A\lambda^3 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) (\rho + i\eta)}{-A\lambda^3} = \frac{A\lambda^3 (\rho + i\eta)}{-A\lambda^3} + \mathcal{O}(\lambda^4) \\ \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} = \frac{A\lambda^3 (1 - \rho - i\eta)}{-A\lambda^3} + \mathcal{O}(\lambda^4) \end{cases} \quad (1.23)$$

e sfruttando i parametri generalizzati:

$$\bar{\rho} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\rho \quad \bar{\eta} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\eta \quad (1.24)$$

si ottiene la seguente relazione per il triangolo unitario:

$$(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) + (-1) + (\bar{\rho} + i\bar{\eta}) = 0 \quad (1.25)$$

Calcolando il modulo dei vettori è possibile rappresentare con maggiore semplicità il triangolo unitario in analisi:

$$\begin{cases} \overline{AC} = \frac{|V_{ub}^* V_{ud}|}{|V_{cb}^* V_{cd}|} = |(\bar{\rho} + i\bar{\eta})|^2 \equiv R_b \\ \overline{BC} = 1 \\ \overline{AB} = \frac{|V_{tb}^* V_{td}|}{|V_{cb}^* V_{cd}|} = |(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta})|^2 \equiv R_t \end{cases} \quad (1.26)$$

Rappresentando graficamente questa relazione in un piano complesso con il parametro ρ sull'asse reale e η su quello immaginario, si ottiene il grafico in Figura 1.4.

Ricordando che i lati del triangoli sono i moduli dei vettori del piano complesso dei quali è nota la direzione, è possibile calcolare il valore degli angoli interni del triangolo di figura Figura 1.4:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg \left[\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{tb}^* V_{td}} \right] \\ \beta &= \arg \left[\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right] = \arctan \left(\frac{\bar{\eta}}{1 - \bar{\rho}} \right) \\ \gamma &= \arg \left[\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right] = \arctan \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Capitolo 2

L'esperimento LHCb

Il Large Hadron Collider (LHC) [3], situato presso il CERN di Ginevra, è il più grande acceleratore di particelle al mondo. Esso si estende su una superficie circolare di raggio 4.3 km. Lungo il suo percorso sono disposti i seguenti quattro esperimenti:

- ATLAS: studia un ampio range di fisica, dalle interazioni fondamentali ad alte energie, fino alla ricerca di particelle che possono formare la materia oscura;
- CMS: ha gli stessi scopi di ATLAS, ma utilizza differenti soluzioni tecniche e design dei sistemi di magneti;
- ALICE: è un rivelatore progettato per studiare la fisica della materia fortemente interagente ad estrema densità di energia, situazione in cui si spera di osservare uno stato della materia formato da plasma di quark e gluoni;
- LHCb: progettato per studiare la violazione della simmetria CP nel settore del flavor, utilizzando i decadimenti di mesoni B e D .

2.1 Motivazioni fisiche e requisiti

L'obiettivo principale di LHCb è la ricerca di evidenze indirette dell'esistenza di fisica oltre lo SM nella violazione di CP misurata nei decadimenti dei quark *beauty* e *charm*.

La maggior parte dei risultati ottenuti finora nell'ambito della fisica del flavour è consistente con le predizioni del meccanismo CKM. Tuttavia, il livello di violazione di CP misurato nelle interazioni deboli non è in grado di spiegare la quantità di materia nell'Universo. Dovendo quindi ipotizzare una nuova sorgente di violazione di CP , si cercano i suoi effetti nei decadimenti di mesoni B e D , sfruttando l'enorme numero di decadimenti collezionati dal rivelatore LHCb.

L'esperimento LHCb opera ad una luminosità istantanea molto bassa (2×10^{32} cm²/s). Questo presenta alcuni vantaggi: gli eventi sono per la maggior parte caratterizzati da una singola interazione pp per *bunch crossing*, e di conseguenza l'occupazione del rivelatore rimane bassa, permettendo così la ricostruzione completa di tutte le tracce che caratterizzano un evento.

Il rivelatore necessita di un trigger efficiente, robusto, flessibile e sensibile a stati finali diversi, così da poter essere efficace nell'ambiente adronico in cui lavora. L'eccellente risoluzione spaziale nella misura dei vertici di decadimento e l'ottima risoluzione in impulso sono prerequisiti essenziali per ottenere buone risoluzioni di tempo proprio, necessarie per studiare certi sistemi mesonici, e per ridurre il fondo combinatorio.

2.2 Il rivelatore-LHCb

Il rivelatore LHCb [4] è uno spettrometro a braccio singolo con un'apertura angolare (in avanti rispetto alla zona d'interazione) che va da 10 mrad a 300 mrad nel *bending plane* (piano in cui avviene la deflessione magnetica, $x - z$) e da 10 mrad a 250 mrad in quello ad esso perpendicolare (*non-bending plane*, $y - z$). Uno schema del rivelatore è riportato in Figura 2.1. Il rivelatore si estende per 20 metri lungo la direzione della *beam-pipe*; i sottorivelatori sono posizionati in sequenza, a differenza degli altri esperimenti ad LHC che racchiudono il punto di collisione attraverso strati di sottorivelatori. I componenti principali del rivelatore, illustrati in figura Figura 2.1, sono:

- sistema tracciante, costituito da rivelatore di vertici (VELO) e Silicon Tracker;
- sistema di identificazione delle particelle, composto da due rivelatori Ring Imaging Cherenkov (Rich1 e Rich2), dal sistema dei calorimetri (SPD, PS, ECAL e HCAL) e dalle camere a muoni.

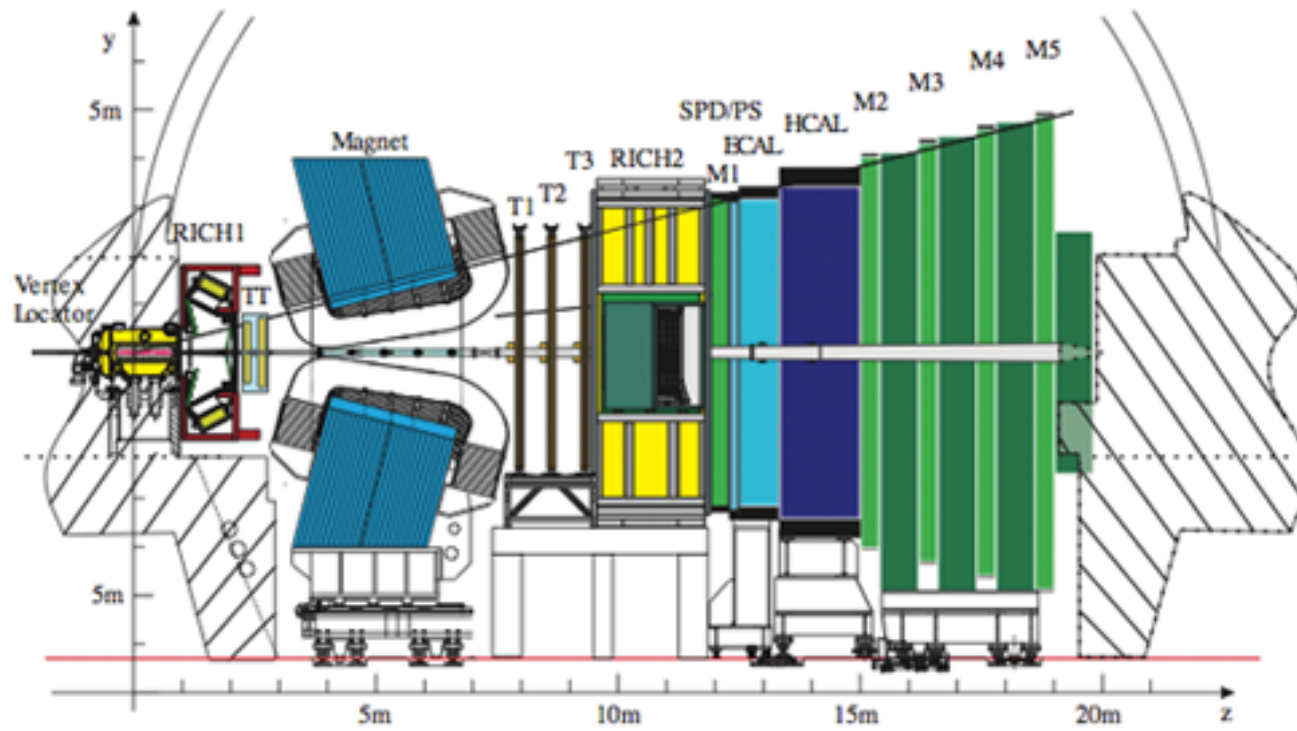


Figura 2.1: Schema del rivelatore LHCb

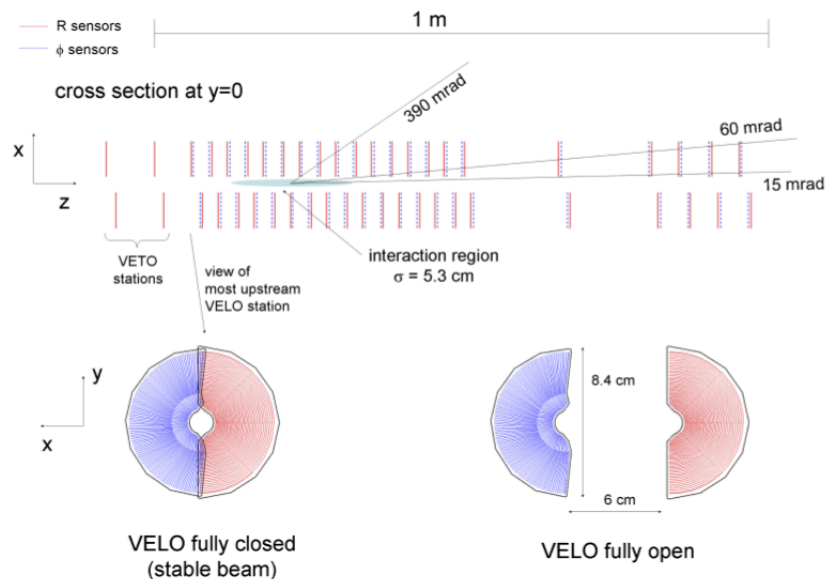


Figura 2.2: Sopra: sezione nel piano (x, z) dei sensori in silicio del VELO. Sotto: Sezione nel piano (x, y) degli stessi sensori, illustrati in entrambe le configurazioni chiusa e aperta.

2.2.1 Sistema tracciante

Il sistema tracciante è composto dal rivelatore di vertici (VELO) e da quattro stazioni di tracking: il *Trigger Tracker* (TT), posizionato prima del dipolo magnetico, e le stazioni T1-T3, posizionate dopo lo stesso. Sia il VELO che il TT utilizzano rivelatori a microstrip di silicio. In T1-T3 le microstrip sono utilizzate nella regione vicina alla beam pipe (*Inner Track*, IT), mentre per la regione più esterna delle stazioni sono impiegati degli *straw-tubes*, che formano l'*Outer Tracker* (OT). TT e IT costituiscono il *Silicon Tracker* (ST).

VELO. Il VELO fornisce precise misure delle coordinate del percorso delle particelle vicino alla zona d'interazione. Queste coordinate sono poi utilizzate per identificare i vertici secondari, che sono una caratteristica distintiva dei decadimenti di adroni contenenti quark b e c . Il VELO è composto da una serie di moduli di silicio, i quali forniscono una misura delle coordinate r e ϕ delle tracce, sistemati lungo la direzione del fascio (Figura 2.2). A seconda della grandezza misurata, i sensori si dividono nei due tipi R e Φ . Sempre in Figura 2.2 si può vedere che il VELO si presenta in due configurazioni, *Fully Closed* e *Fully Open*. La prima rappresenta la configurazione di lavoro, mentre la seconda rappresenta la fase di attesa di stabilizzazione del fascio o di manutenzione.

Silicon Tracker. Il ST è costituito da quattro stazioni (TT e parte interna delle T1-T3, IT): ognuna di esse presenta quattro piani $(x - u - v - x)$ composti da

micro-strip in silicio verticali nel primo e nell'ultimo e strisce ruotate rispettivamente di -5° e $+5^\circ$ nel secondo e nel terzo, rispettivamente. Sia TT che IT usano sensori a micro-strip di silicio con un passo di $200\mu\text{m}$.

Il TT è una stazione planare tracciante larga 150 cm e alta 130 cm localizzata a monte del magnete, che copre l'intera accettazione angolare dell'esperimento. Ha un'area attiva di circa 8.4m^2 , con 143360 strisce di lettura di oltre 38 cm di lunghezza. I quattro strati rivelatori sono allocati in un volume isolato termicamente ed elettricamente; per favorire gli algoritmi di ricostruzione della traccia, essi sono sistemati in due coppie, (x, u) e (v, x) , separate da circa 27 cm lungo l'asse del fascio.

L'IT è costituito dalla parte delle stazioni T1-T3 più vicine alla beam pipe. Esso è posizionato dopo il magnete e copre una regione di 120 cm di larghezza e 40 di altezza a forma di croce.

Outer Track. L'OT è un rivelatore costituito da due strati di 64 *straw-tubes* (progettato come un array di moduli). Ogni tubo a deriva ha un diametro interno di 4.9 mm e pareti spesse $75\mu\text{m}$, ed è riempito con una miscela gassosa composta da Argon (70%) e anidride carbonica (30%). Ogni modulo è composto da tre stazioni, ciascuna con un'area totale attiva di $5971 \times 4850\text{mm}^2$.

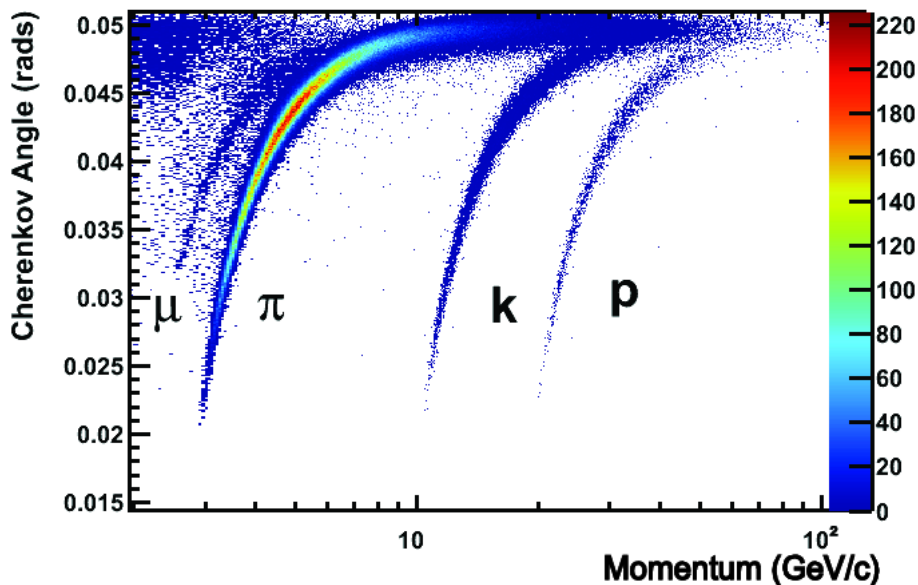


Figura 2.3: Angolo di Cherenkov in funzione dell'impulso per vari tipi di particelle.

2.2.2 Sistema di identificazione di particelle

Questo sistema è composto dai due rivelatori RICH (RICH1 e RICH2), dal sistema di calorimetri e dal rivelatore di muoni. La disposizione dei vari elementi è ben visibile in Figura 2.1: il RICH1 si trova subito dopo il VELO, mentre il RICH2 immediatamente dopo l'ultima *Tracking Station*; a seguire si trovano i calorimetri ECAL

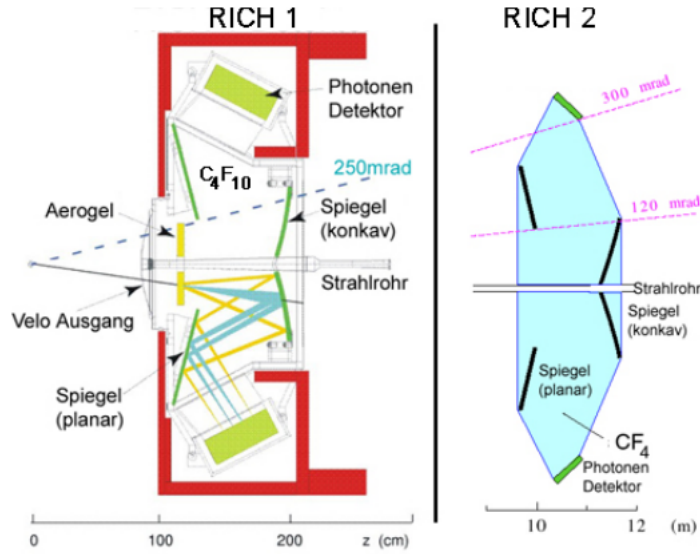


Figura 2.4: Schema dei due rivelatori RICH.

(*Electromagnetic CALorimeter*), HCAL (*Hadronic CALorimeter*), PS (*Preshower Detector*) ed SPD (*Scintillator Pad Detector*), posti prima del rivelatore di muoni.

RICH. I rivelatori *Ring-Imaging Cherenkov* identificano la natura di una particella analizzando la radiazione *Cherenkov* emessa dalla stessa quando attraversa un mezzo con indice di rifrazione $n > 1$. L'identificazione si raggiunge attraverso la misura dell'angolo di emissione θ_c (angolo di Cherenkov), il quale si lega alla velocità v della particella tramite la relazione:

$$\cos(\theta_c) = \frac{c}{nv} \quad (2.1)$$

In Figura 2.3 si riporta la distribuzione di θ_c in funzione dell'impulso della particella.

Dato che i vari radiatori riescono a discriminare in certi range di impulso mentre saturano in altri, si sono introdotti due rivelatori, chiamati, come detto, RICH1 e RICH2: RICH1 discrimina particelle con momento compreso tra 1 GeV/c e 60 GeV/c, usando come mezzi radiatori aerogel e fluorobutano (C_4F_{10}), mentre RICH2 discrimina tra 15 GeV/c e 100 GeV/c utilizzando come mezzo radiatore il tetrafluorometano (CF_4).

In entrambi i rivelatori la luce *Cherenkov* viene collezionata utilizzando una combinazione di specchi piatti e sferici, per riflettere l'immagine fuori dall'accettanza dello spettrometro; per RICH1 la disposizione è verticale, mentre per RICH2 è orizzontale. Per rivelare la posizione dei fotoni Cherenkov nella lunghezza d'onda 200-600 nm, entrambi i RICH utilizzano HPD (*Hybrid Photon Detector*).

Uno schema dei due rivelatori è riportato in Figura 2.4.

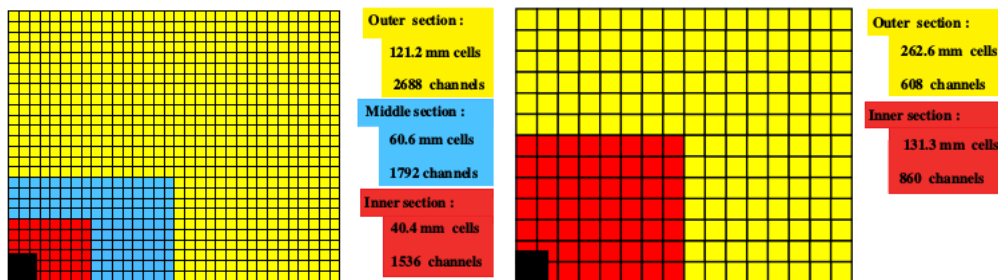


Figura 2.5: Segmentazione laterale di SPD/PS ed ECAL (sinistra) ed HCAL (destra), per un quarto della facciata anteriore. Nella figura a sinistra le dimensioni delle celle riportate sono quelle di ECAL.

Calorimetri. Il sistema di calorimetri è progettato per misurare l'energia delle particelle che attraversano il rivelatore. I calorimetri presenti ad LHCb sono di due tipi: il calorimetro elettromagnetico (ECAL), che misura l'energia di particelle come elettroni, fotoni e π^0 e il calorimetro adronico (HCAL), che invece si occupa di misurare l'energia degli adroni. Entrambi i tipi di calorimetro sono posizionati tra le prime due camere a muoni, M1 ed M2, con ECAL che precede HCAL. Prima di ECAL si trovano i due rivelatori ausiliari PS ed SPD. Essi hanno il compito, rispettivamente, di discriminare l'elevato fondo costituito da pioni carichi e di distinguere le particelle cariche da quelle neutre.

I quattro calorimetri adottano una segmentazione laterale variabile (mostrata in Figura 2.5), dal momento che l'occupanza del rivelatore diminuisce di due ordini di grandezza allontanandosi dal centro. ECAL, SPD e PS seguono una segmentazione in tre sezioni differenti, mentre HCAL è segmentato in due zone con celle più larghe. ECAL ed HCAL hanno una struttura simile: il primo è composto da fogli di piombo spessi 2 mm che si alternano a piani scintillatori spessi 4 mm, mentre nel secondo i piani scintillatori si alternano a strati di ferro spessi 16 mm.

Tutti i calorimetri seguono lo stesso principio: la luce di scintillazione è trasmessa ad un fototubo attraverso una fibra plastica WLS (*WaveLength-Shifting fiber*).

Rivelatore di muoni. Tracciamento e identificazione di muoni costituiscono un elemento chiave nell'esperimento LHCb, essendo i muoni presenti in molti stati finali di decadimenti di mesoni B . Il rivelatore di muoni, mostrato in figura Figura 2.6, è composto da cinque stazioni (M1-M5) rettangolari, posizionate perpendicolarmente all'asse del fascio. L'intero sistema comprende 1380 camere e copre un'area totale di 435 m^2 . Le accettanze angolari interna ed esterna sono rispettivamente di 20 (16) mrad e 306 (258) mrad nel *bending (non-bending) plane*.

Le stazioni M2-M5 sono poste dopo i calorimetri e sono intervallate da assorbitori di ferro spessi 80 cm per selezionare i muoni che penetrano. Il momento minimo che un muone deve avere per penetrare tutte e cinque le stazioni è di circa $6 \text{ GeV}/c$, poiché lo spessore assorbente complessivo, inclusi i calorimetri, è di circa 20 lunghezze

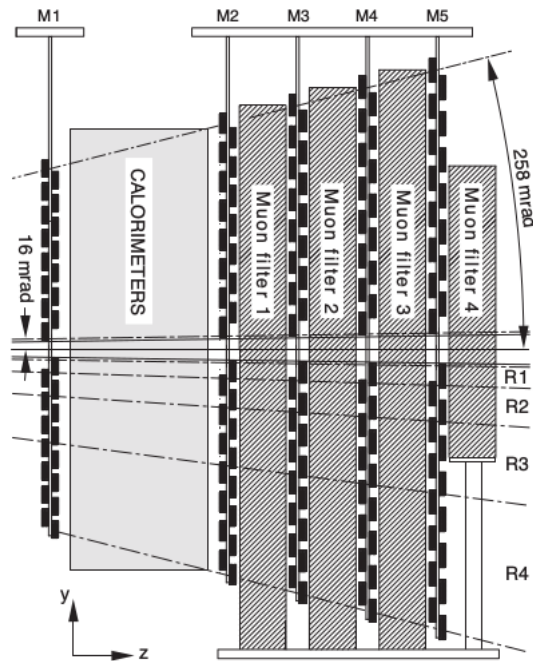


Figura 2.6: Sezione laterale del rivelatore di muoni.

d'interazione. La stazione M1 è posta davanti ai calorimetri ed è utilizzata per migliorare la misura dell'impulso nel trigger. La geometria delle cinque stazioni è proiettiva, cioè le dimensioni trasversali rispetto all'asse del fascio scalano con la distanza rispetto al punto d'interazione.

La disposizione delle stazioni è illustrata in Figura 2.7: ogni sezione è divisa in quattro regioni (R1-R4), che presentano dimensioni lineari le cui segmentazioni scalano con proporzioni 1:2:4:8. Con queste caratteristiche, ci si aspetta che il flusso di particelle sia circa lo stesso nelle quattro regioni di una data stazione.

Magnete. Pur non facendo formalmente parte del sistema di identificazione di particelle, si riporta in questa sezione anche una breve descrizione del magnete. Esso è posizionato tra i rivelatori TT e T1; è costituito da due bobine di forma trapezoidale, pesanti 27 tonnellate ciascuna, montate all'interno da un'armatura di acciaio; è lungo 4.3 m orizzontalmente e 3.6 m verticalmente. Ciascuna bobina è costituita da 10 strati ricoperti da circa 3000 metri di cavi di alluminio. Il magnete è di tipo *warm*: questo consente al campo magnetico di essere facilmente invertito, grazie alla natura non superconduttiva del magnete. L'intensità massima del campo magnetico prodotto è di circa 1 T, mentre l'integrale di campo magnetico è approssimativamente di 4 Tm. Durante la presa dati la polarità del magnete viene invertita diverse volte, così da minimizzare gli effetti sistematici dovuti ad asimmetrie destra-sinistra del rivelatore.

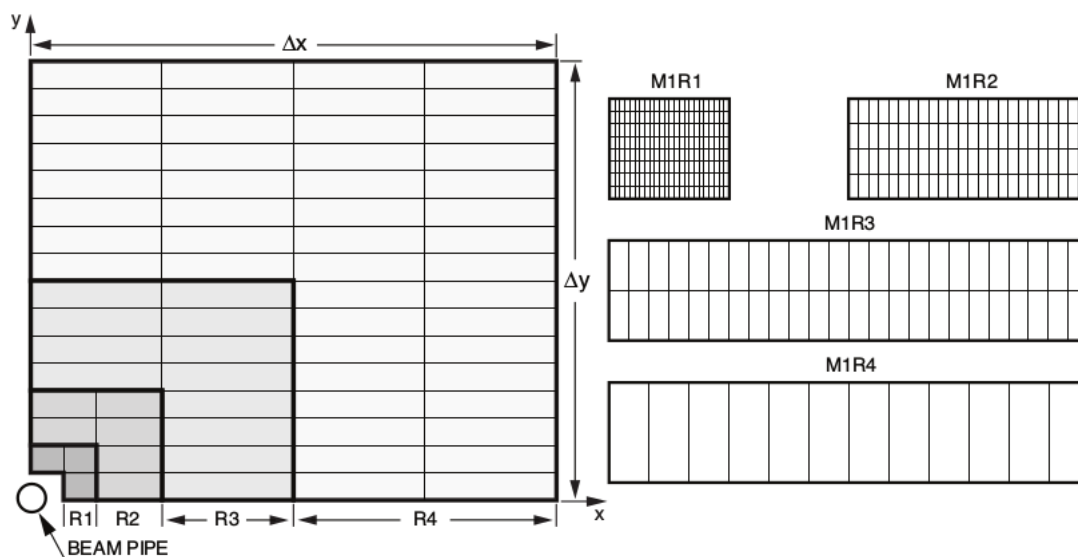


Figura 2.7: Sinistra: vista frontale di un quadrante di una stazione per la rivelazione di muoni. Ogni rettangolo rappresenta una camera. Ogni stazione contiene 276 camere. Destra: divisione in blocchi logici delle quattro camere appartenenti alle quattro regioni della stazione M1.

2.2.3 Sistema di trigger

LHCb lavora ad una luminosità media due ordini di grandezza inferiore rispetto a quella nominale di LHC, riducendo così i danni da radiazione a rivelatori e componenti elettroniche. Inoltre, durante l'incontro tra i fasci, ci sono quasi solo collisioni singole, facilitando così ricostruzione e trigger. A causa di questi fattori, la frequenza di *bunch-crossing* di circa 40 MHz, deve essere ridotta dal trigger a circa 3.5 kHz (2011) e 5 kHz (2012), frequenze alle quali gli eventi sono memorizzati per future analisi offline. Questa riduzione è raggiunta attraverso due livelli di trigger, illustrati in Figura 2.8: il Livello-0 (L0) e l'High Level Trigger (HLT). Il primo opera in sincronia rispetto alla frequenza di *bunch crossing* di 40 MHz, mentre il secondo viene eseguito asincronicamente su una farm di PC. L'analisi offline rigetta gran parte degli aventi di *background* basandosi su masse dei mesoni, loro vite medie ed altre condizioni stringenti; per ottenere la migliore performance totale, il trigger è stato pertanto ottimizzato per ottenere la più alta efficienza per gli eventi selezionati nell'analisi offline.

L0. L'obiettivo di L0 è quello di il *rate* di input da 40 MHz ad 1 MHz. A causa delle loro grandi masse, i decadimenti dei mesoni B producono spesso particelle con grandi momento trasverso (p_T) ed energia trasversa (E_T). L0 ricostruisce:

- i *cluster* di adroni, elettroni e fotoni con E_T più alta nei calorimetri;
- i due muoni con p_T più alto nel rivelatore di muoni;

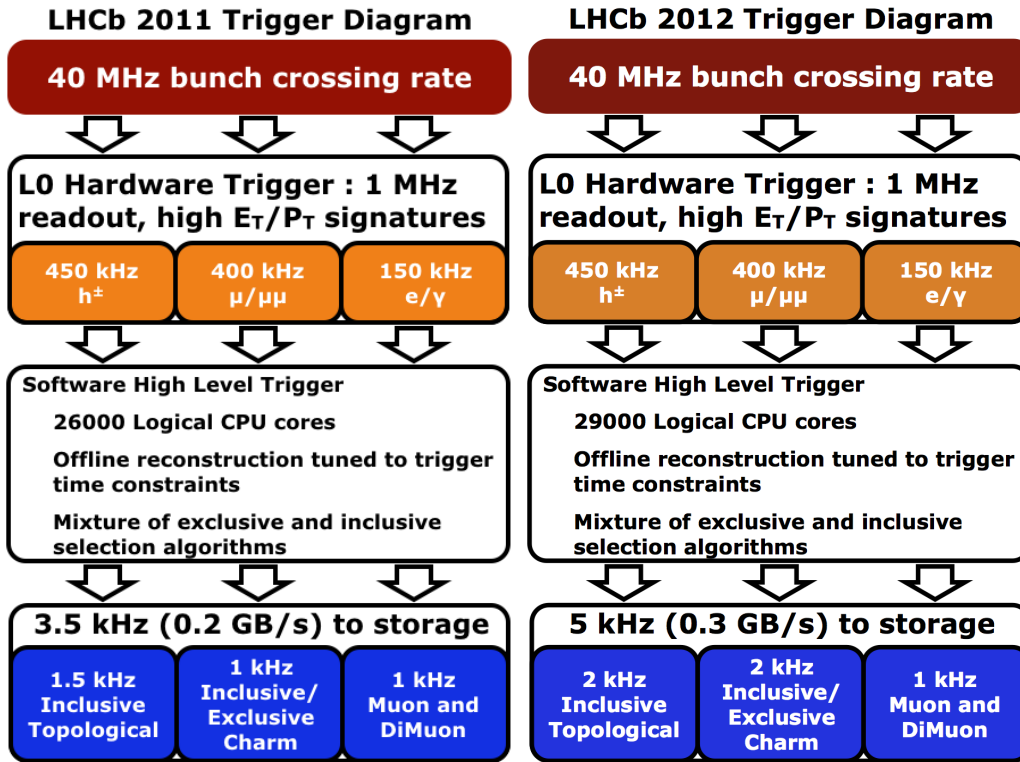


Figura 2.8: Schema del trigger di LHCb.

Inoltre, un sistema *pile-up* nel VELO calcola il numero di interazioni primarie pp . I calorimetri calcolano l'energia totale osservata e stimano il numero delle tracce basandosi sul numero di hit in SPD. Infine, una Level-0 Decision Unit (DU) raccoglie tutte le informazioni e produce la decisione finale di trigger L0 per ogni bunch crossing.

HLT. L'High Level Trigger (Trigger di Alto Livello) consiste in una applicazione C++ eseguita su ogni CPU dell'Event Filter Farm (EFF), la quale contiene oltre 2000 nodi di calcolo. L'HLT è diviso in due sottolivelli, HLT1 e HLT2. L'obiettivo di HLT1 è ricostruire le particelle nel VELO e nelle T-Stations corrispondenti agli oggetti di L0 e confermare l'assenza di particelle cariche in presenza di γ e π^0 (*Level-0 confirmation*). HLT1 riduce la frequenza ad un livello sufficientemente basso (circa 30 kHz) da permettere una completa ricostruzione degli eventi rimanenti. A questo punto HLT2 esegue una combinazione di algoritmi di trigger inclusivi, in cui il decadimento di B è ricostruito solo parzialmente, e algoritmi esclusivi, il cui obiettivo è ricostruire completamente gli stati finali degli adroni B .

Capitolo 3

Misura di γ e risultati sperimentali

In questo capitolo si descrivono i metodi di misura dell'angolo γ ; successivamente si riportano le misure sperimentali degli osservabili dei decadimenti considerati per la combinazione descritta in questa tesi, con riferimento a definizione e relazione con le incognite.

3.1 Metodi di misura

In questo paragrafo vengono descritti i metodi sviluppati per misurare l'angolo γ , evidenziando i parametri che ogni metodo consente di ricavare; questi metodi sono quelli di cui ci si è serviti per ottenere le misure utilizzate nella combinazione qui descritta. Essi sono basati sullo studio delle interferenze $b \rightarrow u$ e $b \rightarrow c$ nei decadimenti ad albero del tipo $B^- \rightarrow D^{(*)}K^{(*)-}$, nei quali si hanno stati finali accessibili sia mediante il decadimento del D^0 sia mediante quello del \bar{D}^0 . Questa interferenza tra le due ampiezze si traduce in osservabili che dipendono dalla fase debole γ , oltre che da vari altri parametri adronici.

Si utilizza una notazione che assume la forma a_X^{YZ} per un certo parametro a riferito al decadimento $X \rightarrow YZ$, in cui i principali parametri che compaiono sono r per i rapporti di ampiezza dei decadimenti B e D , κ per i fattori di coerenza per i decadimenti a molti corpi B e D e δ per differenze di fase forti.

I metodi menzionati differiscono tra loro per i diversi stati finali di D utilizzati. Essi possono essere:

- autostati di CP (metodo GLW), ad esempio $D \rightarrow KK$ o $D \rightarrow \pi\pi$;
- decadimenti doppiamente Cabibbo soppressi (metodo ADS), ad esempio $D \rightarrow K\pi$;
- C-coniugati a tre corpi (metodo GGSZ o *metodo Dalitz*), ad esempio $D \rightarrow K_s^0 KK$ o $D \rightarrow K_s^0 \pi\pi$;
- decadimenti Cabibbo soppressi (metodo GLS), ad esempio $D \rightarrow K_s^0 K\pi$.

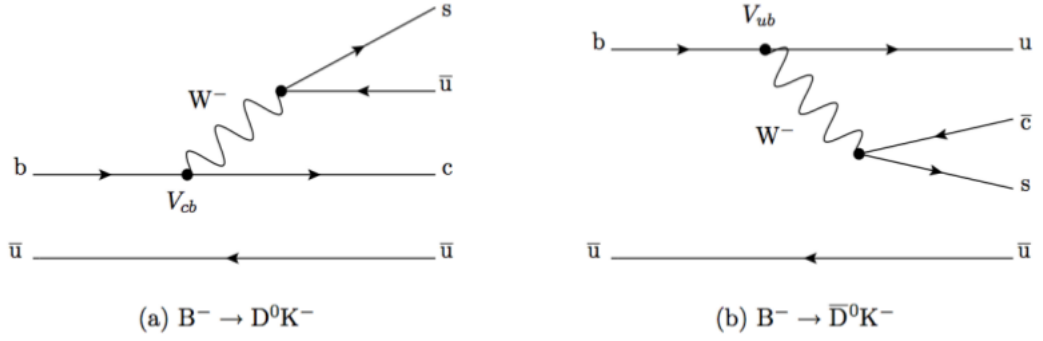


Figura 3.1: Decadimenti $B^- \rightarrow D^{(*)}K^{(*)-}$ studiati per misurare il valore di γ

La migliore precisione su γ si ottiene ovviamente combinando i risultati di tutte le diverse analisi.

Le ampiezze di decadimento del B^- e del D^0 possono essere definite come:

$$\begin{aligned} A(B^- \rightarrow D^0 K^-) &= A_c e^{i\delta_c} & A(D^0 \rightarrow f) &= A_f e^{i\delta_f} \\ A(B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-) &= A_u e^{i(\delta_u - \gamma)} & A(D^0 \rightarrow \bar{f}) &= A_{\bar{f}} e^{i\delta_{\bar{f}}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove A_c , A_u , A_f e $A_{\bar{f}}$ sono grandezze reali e positive e si è ignorata la violazione di CP nei decadimenti del D^0 . Gli indici c e u si riferiscono rispettivamente alle transizioni $b \rightarrow c$ e $b \rightarrow u$. Qualora il D^0 segua un canale di decadimento in tre corpi, le quantità A_f , $A_{\bar{f}}$, δ_f e $\delta_{\bar{f}}$ saranno funzioni delle coordinate nel diagramma di Dalitz. L'ampiezza del processo $B^- \rightarrow D[\rightarrow f]K^-$ si scrive:

$$A(B^- \rightarrow D[\rightarrow f]K^-) = A_c A_f e^{i(\delta_c + \delta_f)} + A_u A_{\bar{f}} e^{i(\delta_u + \delta_{\bar{f}} - \gamma)} \quad (3.2)$$

da cui si deduce la seguente espressione per il tasso di decadimento:

$$\begin{aligned} \Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow f]K^-) &\propto A_c^2 A_f^2 + A_u^2 A_{\bar{f}}^2 + 2A_c A_f A_u A_{\bar{f}} \Re(e^{i(\delta_B + \delta_D - \gamma)}) \\ &\propto A_c^2 \left(A_f^2 + r_B^2 A_{\bar{f}}^2 + 2r_B A_f A_{\bar{f}} \cos(\delta_B + \delta_D - \gamma) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

con $r_B = A_u/A_c$, $\delta_B = \delta_u - \delta_c$ e $\delta_D = \delta_{\bar{f}} - \delta_f$. A partire dall'Equazione (3.3) si ricavano tutte le formule rilevanti per i vari metodi. Analoghe relazioni possono essere costruite per il decadimento del B^+ .

3.1.1 GLW

Nell'analisi GLW i mesoni D decadono in autostati di CP $f_{CP\pm}$, come ad esempio $D \rightarrow K^- K^+$ ($CP = +1$). Si ha quindi $A_f/A_{\bar{f}} = 1$ e $\delta_D = 0, \pi$ per $CP = \pm 1$. L'Equazione (3.3) diventa:

$$\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow f_{CP\pm}]K^-) \propto A_c^2 (1 + r_B^2 \pm 2r_B \cos(\delta_B - \gamma)) \quad (3.4)$$

I decadimenti $B^- \rightarrow DK^-$, nei quali D decade secondo i canali *Cabibbo favoriti* possono essere utilizzati per normalizzare l'espressione. Si può scrivere, con buona approssimazione:

$$\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^- \pi^+]K^-) = \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+ \pi^-]K^+) \propto A_c^2 \quad (3.5)$$

A questo punto è possibile definire gli osservabili usuali di GLW come:

$$R_{CP\pm} = \frac{2[\Gamma(B^- \rightarrow D_{CP\pm}K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D_{CP\pm}K^+)]}{\Gamma(B^- \rightarrow D^0K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow \bar{D}^0K^+)} \quad (3.6)$$

$$A_{CP\pm} = \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D_{CP\pm}K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow D_{CP\pm}K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D_{CP\pm}K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D_{CP\pm}K^+)} \quad (3.7)$$

Le Equazioni (3.6) e (3.7) sono legate alle incognite γ , r_B e δ_B attraverso:

$$R_{CP\pm} = 1 + r_B^2 \pm 2r_B \cos \delta_B \cos \gamma \quad (3.8)$$

$$A_{CP\pm} = \pm 2r_B \sin \delta_B \sin \gamma / R_{CP\pm} \quad (3.9)$$

Questo è un sistema di quattro equazioni in tre incognite che permette di ottenere una misura di γ , r_B e δ_B grazie ad una misura di $R_{CP\pm}$ e $A_{CP\pm}$.

Analisi GLW con $B^0 \rightarrow DK^{*0}$. Relazioni analoghe valgono per decadimenti $B \rightarrow D_{CP}K^{*0}$, con valori differenti dei parametri adronici che caratterizzano il decadimento del B^0 . Senza dilungarsi nella spiegazione, si sottolinea che ci sono importanti conseguenze per le analisi ADS e GGSZ (descritte in seguito) dei decadimenti $B^0 \rightarrow DK^{*0}$. Le Equazioni (3.6) e (3.7) diventano:

$$R_{CPs\pm} = \frac{2[\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow D_{CP\pm}\bar{K}^{*0}) + \Gamma(B^0 \rightarrow D_{CP\pm}K^{*0})]}{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow D^0\bar{K}^{*0}) + \Gamma(B^0 \rightarrow \bar{D}^0K^{*0})} \quad (3.10)$$

$$A_{CPs\pm} = \frac{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow D_{CP\pm}\bar{K}^{*0}) - \Gamma(B^0 \rightarrow D_{CP\pm}K^{*0})}{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow D_{CP\pm}\bar{K}^{*0}) + \Gamma(B^0 \rightarrow D_{CP\pm}K^{*0})} \quad (3.11)$$

Nel caso in cui le larghezze dei decadimenti $B^0 \rightarrow DK^{*0}$ sono determinate a partire da un diagramma di Dalitz, vengono applicate (3.6) e (3.7). Tuttavia, nel caso di un'analisi *quasi-two-body* (Q2B), esse devono essere modificate.

Analisi GLW-like con decadimenti D a molti corpi. Nel caso di decadimenti D a molti corpi in stati finali *self-conjugate*, come ad esempio $D \rightarrow KK\pi^0$, le relazioni (3.6) e (3.7) cambiano leggermente. Un fattore aggiuntivo $(2F_+ - 1)$ entra nell'espressione, legandosi a γ nella seguente maniera:

$$R_{CP\pm} = 1 + r_B^2 \pm (2F_+ - 1)2r_B \cos \delta_B \cos \gamma \quad (3.12)$$

$$A_{CP\pm} = \pm(2F_+ - 1)2r_B \sin \delta_B \sin \gamma / R_{CP\pm} \quad (3.13)$$

Le quantità $F_{KK\pi^0}$, $F_{\pi\pi\pi^0}$ e $F_{\pi\pi\pi\pi}$ sono misurate utilizzando le analisi dei dati CLEO-c come descritto successivamente.

Analisi GLW-like con $B \rightarrow Dh\pi\pi$. Nel caso di analisi con decadimenti $B \rightarrow Dh\pi\pi$ viene aggiunto un *coherence factor* κ alle equazioni GLW, per tenere conto della diluizione dell'interferenza che deriva dalla variazione della fase forte δ attraverso lo spazio di Dalitz B del decadimento. Si avranno:

$$R_{CP\pm} = 1 + r_B^2 \pm 2\kappa_B r_B \cos \delta_B \cos \gamma \quad (3.14)$$

$$A_{CP\pm} = \pm 2\kappa_B r_B \sin \delta_B \sin \gamma / R_{CP\pm} \quad (3.15)$$

3.1.2 ADS

Nell'analisi ADS, vengono scelti i canali di decadimento *Cabibbo favoriti* e *doppiamente Cabibbo soppressi*, come ad esempio $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ e $D^0 \rightarrow \pi^- K^+$, rispettivamente. Il tasso di decadimento di B è il risultato dell'interferenza del canale favorito dal punto di vista del colore $B^- \rightarrow D^0 K^-$ seguito dal processo doppiamente Cabibbo soppresso $D^0 \rightarrow \pi^- K^+$ e del canale sfavorito dal punto di vista del colore $B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-$ seguito dal canale Cabibbo favorito $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$. Conseguentemente, le ampiezze in gioco sono di grandezza simile, pertanto gli effetti di interferenza presentano intensità notevole. Dall'Equazione (3.3) si ha che:

$$\Gamma(B^\mp \rightarrow D[\rightarrow K^\pm \pi^\mp] K^\mp) \propto r_B^2 + r_D^2 \pm 2r_B r_D \cos(\delta_B + \delta_D \mp \gamma) \quad (3.16)$$

dove $r_D = A_f/A_{\bar{f}} = |A(D^0 \rightarrow \pi^- K^+)/A(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)|$ e la differenza di fase δ_D sono misurati nei decadimenti che coinvolgono il *charm*. r_D e δ_D entrano nell'analisi come parametri noti. Definendo gli osservabili R_{ADS} e A_{ADS} come:

$$R_{\text{ADS}} = \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow \pi^- K^+] K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow \pi^+ K^-] K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^- \pi^+] K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+ \pi^-] K^+)} \quad (3.17)$$

$$A_{\text{ADS}} = \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow \pi^- K^+] K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow \pi^+ K^-] K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow \pi^- K^+] K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow \pi^+ K^-] K^+)} \quad (3.18)$$

si trovano, utilizzando (3.5) e (3.16):

$$R_{\text{ADS}} = (r_B^{DK})^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2r_B^{DK} r_D^{K\pi} \cos \gamma \cos(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K\pi}) \quad (3.19)$$

$$A_{\text{ADS}} = 2r_B^{DK} r_D^{K\pi} \sin \gamma \sin(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K\pi}) / R_{\text{ADS}} \quad (3.20)$$

Essendo queste due quantità correlate, risulta più comodo per l'analisi definire le due quantità R_+ , R_- :

$$R_\pm \equiv \frac{\Gamma(B^\pm \rightarrow [\pi^\pm K^\mp]_D K^\pm)}{\Gamma(B^\pm \rightarrow [K^\pm \pi^\mp]_D K^\pm)} = \frac{1}{N} \left((r_B^{DK})^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2r_B^{DK} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K\pi} \pm \gamma) \right) \quad (3.21)$$

dove N è una costante vicina ad uno. Queste due nuove quantità sono statisticamente indipendenti.

Si fornisce inoltre la relazione dell'asimmetria di CP tra il decadimento favorito di D e le osservabili di CP :

$$\begin{aligned} A_{\text{fav}} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^- \pi^+] K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+ \pi^-] K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow D[\rightarrow K^- \pi^+] K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow D[\rightarrow K^+ \pi^-] K^+)} \\ &= \frac{2r_B^{DK} r_D^{K\pi} \sin \gamma \sin(\delta_B^{DK} - \delta_D^{K\pi})}{1 + (r_D^{K\pi})^2 (r_B^{DK})^2 + 2r_B^{DK} r_D^{K\pi} \cos \gamma \cos(\delta_B^{DK} - \delta_D^{K\pi})} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Analisi ADS-like con decadimenti D a molti corpi. Nel caso di decadimenti D a molti corpi, come ad esempio $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$ o $D^0 \rightarrow K \pi \pi^0$, le relazioni ADS vengono leggermente modificate. Introducendo le ampiezze di decadimento $A(\bar{D}^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+ \pi^-) = \bar{A}_D(\vec{m}) e^{i\bar{\delta}(\vec{m})}$ e $A(D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+ \pi^-) = A_D(\vec{m}) e^{i\delta(\vec{m})}$, dove \vec{m} indica la posizione $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+ \pi^-$ sul diagramma di Dalitz e A_D e \bar{A}_D sono reali positive, si hanno:

$$R_{\text{ADS}} = (r_B^{DK})^2 + (r_D^{K3\pi})^2 + 2r_B^{DK} r_D^{K3\pi} C \cos \gamma \quad (3.23)$$

$$A_{\text{ADS}} = 2r_B^{DK} r_D^{K3\pi} S \sin \gamma / R_{\text{ADS}} \quad (3.24)$$

dove:

$$C = \frac{\int A_D(\vec{m}) \bar{A}_D(\vec{m}) \cos(\bar{\delta}(\vec{m}) - \delta(\vec{m}) + \delta_B^{DK}) d\vec{m}}{\sqrt{\int \bar{A}_D(\vec{m})^2 d\vec{m} \times \int A_D(\vec{m})^2 d\vec{m}}}, \quad (3.25)$$

$$S = \frac{\int A_D(\vec{m}) \bar{A}_D(\vec{m}) \sin(\bar{\delta}(\vec{m}) - \delta(\vec{m}) + \delta_B^{DK}) d\vec{m}}{\sqrt{\int \bar{A}_D(\vec{m})^2 d\vec{m} \times \int A_D(\vec{m})^2 d\vec{m}}}, \quad (3.26)$$

$$(r_D^{K3\pi})^2 = \frac{\int \bar{A}_D(\vec{m})^2 d\vec{m}}{\int A_D(\vec{m})^2 d\vec{m}}. \quad (3.27)$$

Le formule precedenti possono inoltre essere riscritte in maniera diversa:

$$R_{\text{ADS}} = (r_B^{DK})^2 + (r_D^{K3\pi})^2 + 2\kappa_D^{K3\pi} r_B^{DK} r_D^{K3\pi} \cos \gamma \cos(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K3\pi}) \quad (3.28)$$

$$A_{\text{ADS}} = 2\kappa_D^{K3\pi} r_B^{DK} r_D^{K3\pi} \sin \gamma \sin(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K3\pi}) / R_{\text{ADS}} \quad (3.29)$$

dove:

$$\kappa_D^{K3\pi} e^{i\delta_D^{K3\pi}} = \frac{\int A_D(\vec{m}) \bar{A}_D(\vec{m}) e^{i\delta(\vec{m})} d\vec{m}}{\sqrt{\int \bar{A}_D(\vec{m})^2 d\vec{m} \times \int A_D(\vec{m})^2 d\vec{m}}}. \quad (3.30)$$

Si definiscono per comodità le quantità:

$$R_{\pm} = (r_B^{DK})^2 + (r_D^{K3\pi})^2 + 2\kappa_D^{K3\pi} r_B^{DK} r_D^{K3\pi} \cos(\pm\gamma + \delta_B^{DK} + \delta_D^{K3\pi}). \quad (3.31)$$

Analisi ADS-like con $B \rightarrow DK^*$ e $B \rightarrow Dh\pi\pi$. Nel caso di analisi Q2B di $B \rightarrow DK^*$ e $B \rightarrow Dh\pi\pi$ viene aggiunto alle equazioni un *coherence factor* κ che tenga conto della diluizione dell'interferenza che nasce dalla variazione di fase forte δ

attraverso lo spazio di Dalitz B del decadimento. Nel caso $B \rightarrow DK^*$, $D \rightarrow K\pi$ si hanno:

$$R_{\text{ADS}} = \left(\bar{r}_B^{DK^*0}\right)^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^*0}\bar{r}_B^{DK^*0}r_D^{K\pi}\cos\gamma\cos(\bar{\delta}_B^{DK^*0} + \delta_D^{K\pi}), \quad (3.32)$$

$$A_{\text{ADS}} = 2\kappa_B^{DK^*0}\bar{r}_B^{DK^*0}r_D^{K\pi}\sin\gamma\sin(\bar{\delta}_B^{DK^*0} + \delta_D^{K\pi})/R_{\text{ADS}}, \quad (3.33)$$

3.1.3 GGSZ

Nell'analisi GGSZ, vengono studiati i decadimenti in tre corpi C-coniugati del D ; i canali utilizzati sono $D \rightarrow K_s^0\pi^+\pi^-$ e $D \rightarrow K_s^0K^+K^-$. Per concretezza ci si concentra su $D \rightarrow K_s^0\pi^+\pi^-$, con le ampiezze $A_f e^{i\delta_f} = f(m_-^2, m_+^2)$ e $A_{\bar{f}} e^{i\delta_{\bar{f}}} = f(m_+^2, m_-^2)$, dove m_-^2 e m_+^2 sono le masse al quadrato delle combinazioni $K_s^0\pi^-$ e $K_s^0\pi^+$. I tassi di decadimento si ottengono dall'Equazione (3.3):

$$\Gamma(B^\mp \rightarrow D[\rightarrow K_s^0\pi^-\pi^+]K^\mp) \propto |f(m_\mp^2, m_\pm^2)|^2 + r_B^2 |f(m_\pm^2, m_\mp^2)|^2 \quad (3.34)$$

$$+ 2r_B |f(m_\mp^2, m_\pm^2)| |f(m_\pm^2, m_\mp^2)| \cos(\delta_B + \delta_D(m_\mp^2, m_\pm^2) \mp \gamma)$$

dove $\delta_D(m_\mp^2, m_\pm^2)$ è la differenza di fase forte tra $f(m_\pm^2, m_\mp^2)$ e $f(m_\mp^2, m_\pm^2)$. Introducendo le *coordinate cartesiane*, definite come:

$$x_\pm = \Re[r_B e^{i(\delta_B \pm \gamma)}] \quad y_\pm = \Im[r_B e^{i(\delta_B \pm \gamma)}] \quad (3.35)$$

è possibile riscrivere la (3.34) come:

$$\Gamma(B^\mp \rightarrow D[\rightarrow K_s^0\pi^+\pi^-]K^\mp) \propto |f_\mp|^2 + r_B^2 |f_\pm|^2 + 2[x_\mp \Re[f_\mp f_\pm^*] + y_\mp \Im[f_\mp f_\pm^*]] \quad (3.36)$$

dove è stata usata la notazione compatta $f_\pm = f(m_\pm^2, m_\mp^2)$.

3.1.4 GLS

Nell'analisi GLS si scelgono canali di decadimento del D *singolarmente Cabibbo soppressi*, come $D^0 \rightarrow K_s^0 K^+ \pi^-$. Il tasso di decadimento di B è il risultato dell'interferenza di decadimenti *same sign* (SS) $B^+ \rightarrow [K_s^0 K^+ \pi^-]_D K^+$ ed *opposite sign* (OS) $B^+ \rightarrow [K_s^0 K^- \pi^+]_D K^+$. L'Equazione (3.3) diventa:

$$\Gamma_{\text{SS}}^\pm = 1 + (r_B^{DK})^2 + (r_D^{K_s K \pi})^2 + 2r_B^{DK} r_D^{K_s K \pi} \kappa_D^{K_s K \pi} \cos(\delta_B^{DK} \pm \gamma - \delta_D^{K_s K \pi})$$

$$\Gamma_{\text{OS}}^\pm = (r_B^{DK})^2 + (r_D^{K_s K \pi})^2 + 2r_B^{DK} r_D^{K_s K \pi} \kappa_D^{K_s K \pi} \cos(\delta_B^{DK} \pm \gamma + \delta_D^{K_s K \pi}) \quad (3.37)$$

dove $\kappa_D^{K_s K \pi}$ è il *coherence factor* che descrive l'interferenza nel sistema D .

3.1.5 Analisi $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$ con dipendenza temporale

Oltre ai metodi già citati, è possibile misurare γ usando analisi dipendenti dal tempo di decadimenti ad albero dei mesoni neutri B^0 e B_s^0 . Il metodo si riferisce sempre all'interferenza delle ampiezze di $b \rightarrow u$ e $b \rightarrow c$, ma l'interferenza è raggiunta

attraverso il mescolamento di B^0 (B_s^0). Perciò si misura la somma di γ e della fase di mixing, nominalmente $\gamma + 2\beta$ e $\gamma - 2\beta_s$ nei sistemi B^0 e B_s^0 , rispettivamente. Dal momento che sia $\sin 2\beta$ che $-2\beta_s \approx \phi_s$ sono ora ben misurate, queste misurazioni forniscono sensibilità a γ . I tassi di decadimento degli autostati di flavour prodotti inizialmente sono dati da:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{B_s^0(\bar{B}_s^0) \rightarrow f}(t)}{dt e^{-\Gamma_s t}} &= \frac{1}{2} |A_f|^2 (1 + |\lambda_f|^2) \\ &\times \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma_s t}{2}\right) + D_f \sinh\left(\frac{\Delta\Gamma_s t}{2}\right) \pm C_f \cos(\Delta m_s t) \mp S_f \sin(\Delta m_s t) \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

dove Γ_s , $\Delta\Gamma_s$, Δm_s sono i parametri di mixing del sistema B_s^0 e si è assunto $|q/p| = 1$. A_f è l'ampiezza di decadimento per un mesone B_s^0 in uno stato finale f ; λ_f è definita come:

$$\lambda_f = \frac{q \bar{A}_f}{p A_f} \quad (3.39)$$

dove \bar{A}_f è l'ampiezza per un mesone \bar{B}_s^0 che decade in uno stato finale f . Equazioni simili valgono per il processo coniugato in carica $\bar{B}_s^0(B_s^0) \rightarrow \bar{f}$, contenente un insieme separato di coefficienti $C_{\bar{f}}$, $S_{\bar{f}}$ e $D_{\bar{f}}$ e un parametro λ , $\bar{\lambda}_{\bar{f}}$. Dal momento che ogni decadimento è dominato da un singolo diagramma, si ha $|\lambda_f| = |\bar{\lambda}_{\bar{f}}|$. Gli osservabili di asimmetria CP sono dunque dati da:

$$\begin{aligned} C_f = C_{\bar{f}} &= \frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2} & S_f &= \frac{2\Im(\lambda_f)}{1 + |\lambda_f|^2} & D_f &= \frac{2\Re(\lambda_f)}{1 + |\lambda_f|^2} \\ S_{\bar{f}} &= \frac{2\Im(\bar{\lambda}_{\bar{f}})}{1 + |\lambda_f|^2} & D_{\bar{f}} &= \frac{2\Re(\bar{\lambda}_{\bar{f}})}{1 + |\lambda_f|^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Il termine λ_f è collegato alla fase debole da:

$$\lambda_f = \left(\frac{q}{p}\right) \frac{\bar{A}_f}{A_f} \left(\frac{V_{tb}^* V_{ts}}{V_{tb} V_{ts}^*}\right) \left(\frac{V_{ub} V_{cs}^*}{V_{cb}^* V_{us}}\right) \left|\frac{A_2}{A_1}\right| e^{i\delta_B^{D_s K}} = r_B^{D_s K} e^{i(\delta_B^{D_s K} - (\gamma - 2\beta_s))} \quad (3.41)$$

dove $|A_2/A_1|$ è il rapporto delle ampiezze adroniche tra $B_s^0 \rightarrow D_s^- K^+$ e $B_s^0 \rightarrow D_s^+ K^-$, $\delta_B^{D_s K}$ è la differenza di fase forte e $\gamma - 2\beta_s$ è la differenza di fase debole. Una relazione analoga esiste per $\bar{\lambda}_{\bar{f}}$, $\bar{\lambda}_{\bar{f}} = r_B^{D_s K} e^{i(\delta_B^{D_s K} + (\gamma - 2\beta_s))}$. Dall'Equazione (3.40) si ottengono dunque cinque osservabili e si risolve per $r_B^{D_s K}$, $\delta_B^{D_s K}$, e $(\gamma - 2\beta_s)$. Riscrivendo l'Equazione (3.40) ed evidenziando la dipendenza esplicita dai parametri *nuisance*, si ottengono:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1 - (r_B^{D_s K})^2}{1 + (r_B^{D_s K})^2} \\ D_f &= \frac{2\lambda \cos(\delta_B^{D_s K} - (\gamma - 2\beta_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2} & D_{\bar{f}} &= \frac{2\lambda \cos(\delta_B^{D_s K} + (\gamma - 2\beta_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2} \\ S_f &= \frac{2\lambda \sin(\delta_B^{D_s K} - (\gamma - 2\beta_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2} & S_{\bar{f}} &= \frac{2\lambda \sin(\delta_B^{D_s K} + (\gamma - 2\beta_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.1.6 Analisi dell'ampiezza di segnale in $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$

Esiste un ulteriore metodo relativo ai diagrammi di Dalitz dei decadimenti $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$. La sensibilità rispetto a γ è determinata dall'ammontare di interferenza tra le ampiezze di $b \rightarrow \bar{c}s$ e $b \rightarrow u\bar{c}s$ che si sovrappongono nel diagramma di Dalitz. Nel caso di $B^0 \rightarrow DK^{*0}$, che costituisce uno dei maggiori contributi al decadimento a tre corpi $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$, entrambe le ampiezze sono soppresse nel colore, così che gli effetti più rilevanti di violazione di CP possono essere previsti. Inoltre, gli effetti dell'interferenza tra risonanze che si sovrappongono rimuovono le ambiguità nella determinazione di γ . Anche in questo caso valgono gli osservabili cartesiani introdotti nel caso di GGSZ.

3.2 Risultati delle misurazioni effettuate presso LHCb

Si riportano i valori degli osservabili utilizzati nelle successive sezioni, completi di matrici di correlazione per incertezze statistiche e sistematiche. Definizioni e *truth relations* (relazioni con i parametri fisici), introdotte seguendo le linee esposte nella sezione precedente, vengono riportate rispettivamente in Appendice A e Appendice B.

3.2.1 Valori sperimentali

$D^0 \rightarrow h^+h^-$, GLW/ADS

Si riporta la parte utilizzata in questa tesi degli osservabili misurati in [8]. Le due incertezze sono statistica (prima) e sistematica (seconda). Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.1 e Tabella 3.2.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi} &= -0.403 \pm 0.056 \pm 0.011 \\
 A_{\text{CP}}^{DK, KK} &= 0.126 \pm 0.014 \pm 0.001 \\
 A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi} &= 0.115 \pm 0.025 \pm 0.008 \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K\pi} &= -0.019 \pm 0.005 \pm 0.002 \\
 R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi} &= 0.0188 \pm 0.0011 \pm 0.0010 \\
 R_{\text{CP}}^{KK} &= 0.988 \pm 0.015 \pm 0.013 \\
 R_{\text{CP}}^{\pi\pi} &= 0.992 \pm 0.027 \pm 0.032
 \end{aligned}$$

Le correlazioni sistematiche sono ottenute attraverso dei cosiddetti *toy studies*, in cui ogni *toy experiment* viene generato assumendo la presenza di un effetto sistematico, e fittato al contrario ignorando questo effetto. Dall'insieme risultante dei risultati del fit viene calcolata la matrice di covarianza sistematica.

Tabella 3.1: Correlazioni statistiche per $D^0 \rightarrow h^+h^-$, GLW/ADS.

	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	$A_{\text{CP}}^{DK, KK}$	$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi}$	$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi}$	$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	R_{CP}^{KK}	$R_{\text{CP}}^{\pi\pi}$
$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	1	0	0	0	0.10	0	0
$A_{\text{CP}}^{DK, KK}$	0	1	0	0.02	0	-0.01	0
$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi}$	0	0	1	0.01	0	0	-0.04
$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi}$	0	0.02	0.01	1	0	0	0
$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	0.10	0	0	0	1	0.04	0.02
R_{CP}^{KK}	0	-0.01	0	0	0.04	1	0.06
$R_{\text{CP}}^{\pi\pi}$	0	0	-0.04	0	0.02	0.06	1

Tabella 3.2: Correlazioni sistematiche per $D^0 \rightarrow h^+h^-$, GLW/ADS.

	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	$A_{\text{CP}}^{DK, KK}$	$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi}$	$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi}$	$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	R_{CP}^{KK}	$R_{\text{CP}}^{\pi\pi}$
$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	1	-0.06	0.27	0.09	0.78	0.23	-0.04
$A_{\text{CP}}^{DK, KK}$	-0.06	1	-0.02	0.09	-0.10	-0.28	0.03
$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi}$	0.27	-0.02	1	-0.01	0.35	0.11	-0.22
$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi}$	0.09	0.09	-0.01	1	-0.11	-0.02	-0.01
$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}$	0.78	-0.10	0.35	-0.11	1	0.33	-0.14
R_{CP}^{KK}	0.23	-0.28	0.11	-0.02	0.33	1	0.17
$R_{\text{CP}}^{\pi\pi}$	-0.04	0.03	-0.22	-0.01	-0.14	0.17	1

 $D^0 \rightarrow h^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$, GLW/ADS-like

Gli osservabili della misura $D^0 \rightarrow h^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$ GLW/ADS si trovano in [8]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.3 e Tabella 3.4.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi} &= -0.31291 \pm 0.10200 \pm 0.03800 \\
 A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi\pi\pi} &= 0.10035 \pm 0.03360 \pm 0.00790 \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K3\pi} &= -0.00042 \pm 0.01190 \pm 0.00200 \\
 R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi} &= 0.01399 \pm 0.00149 \pm 0.00061 \\
 R_{\text{CP}}^{\pi\pi\pi\pi} &= 0.97540 \pm 0.03670 \pm 0.01900
 \end{aligned}$$

 Tabella 3.3: Correlazioni statistiche $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$ ADS e $D^0 \rightarrow \pi\pi\pi\pi$ GLW-like.

	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi\pi\pi}$	$A_{\text{fav}}^{DK, K3\pi}$	$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	$R_{\text{CP}}^{\pi\pi\pi\pi}$
$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	1	0.00	0.01	0.08	0.00
$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi\pi\pi}$	0.00	1	-0.02	-0.00	-0.02
$A_{\text{fav}}^{DK, K3\pi}$	0.01	0.02	0.10	-0.00	-0.00
$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	0.08	-0.00	-0.00	1	0.04
$R_{\text{CP}}^{\pi\pi\pi\pi}$	0.00	-0.02	-0.00	0.04	1

 Tabella 3.4: Correlazioni sistematiche $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$ ADS e $D^0 \rightarrow \pi\pi\pi\pi$ GLW-like.

	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi\pi\pi}$	$A_{\text{fav}}^{DK, K3\pi}$	$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	$R_{\text{CP}}^{\pi\pi\pi\pi}$
$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	1	-0.04	0.02	0.87	-0.04
$A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi\pi\pi}$	-0.04	1	0.09	0.03	0.07
$A_{\text{fav}}^{DK, K3\pi}$	0.02	0.09	1	0.02	0.02
$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}$	0.87	0.03	0.02	1	0.04
$R_{\text{CP}}^{\pi\pi\pi\pi}$	-0.04	0.07	0.02	0.04	1

$D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp \pi^0$, GLW/ADS-like

Gli osservabili della misura $D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp \pi^0$ GLW/ADS si trovano in [9]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.5 e Tabella 3.6.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0} &= -0.20000 \pm 0.27000 \pm 0.04000 \\
 A_{CP}^{DK, KK\pi^0} &= 0.30000 \pm 0.20000 \pm 0.02000 \\
 A_{CP}^{DK, \pi\pi\pi^0} &= 0.05400 \pm 0.09100 \pm 0.01100 \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K\pi\pi^0} &= 0.01000 \pm 0.02600 \pm 0.00500 \\
 R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0} &= 0.01400 \pm 0.00470 \pm 0.00210 \\
 R_{CP}^{KK\pi^0} &= 0.95000 \pm 0.22000 \pm 0.05000 \\
 R_{CP}^{\pi\pi\pi^0} &= 0.98000 \pm 0.11000 \pm 0.05000
 \end{aligned}$$

 Tabella 3.5: Correlazioni statistiche per $D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp \pi^0$ GLW/ADS.

	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	$A_{CP}^{DK, KK\pi^0}$	$A_{CP}^{DK, \pi\pi\pi^0}$	$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi\pi^0}$	$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	$R_{CP}^{KK\pi^0}$	$R_{CP}^{\pi\pi\pi^0}$
$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	1	0	0	0.01	0.13	0	0
$A_{CP}^{DK, KK\pi^0}$	0	1	0	0.01	0	-0.20	-0.01
$A_{CP}^{DK, \pi\pi\pi^0}$	0	0	1	0.02	0	0	-0.04
$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi\pi^0}$	0.01	0.01	0.02	1	0	0	0
$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	0.13	0	0	0	1	0	0.01
$R_{CP}^{KK\pi^0}$	0	-0.20	0	0	0	1	0.02
$R_{CP}^{\pi\pi\pi^0}$	0	-0.01	-0.04	0	0.01	0.02	1

 Tabella 3.6: Correlazioni sistematiche per $D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp \pi^0$ GLW/ADS.

	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	$A_{CP}^{DK, KK\pi^0}$	$A_{CP}^{DK, \pi\pi\pi^0}$	$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi\pi^0}$	$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	$R_{CP}^{KK\pi^0}$	$R_{CP}^{\pi\pi\pi^0}$
$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	1	0.07	0.07	-0.16	0.81	0.02	0.13
$A_{CP}^{DK, KK\pi^0}$	0.07	1	0.77	0.05	0.08	-0.33	-0.18
$A_{CP}^{DK, \pi\pi\pi^0}$	0.07	0.77	1	-0.06	0.13	-0.14	-0.25
$A_{\text{fav}}^{DK, K\pi\pi^0}$	-0.16	0.05	-0.06	1	-0.05	0.04	0
$R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}$	0.81	0.08	0.13	-0.05	1	-0.03	-0.02
$R_{CP}^{KK\pi^0}$	0.02	-0.33	-0.14	0.04	-0.03	1	0.38
$R_{CP}^{\pi\pi\pi^0}$	0.13	-0.18	-0.25	0	-0.02	0.38	1

$D \rightarrow K_s^0 hh$, GGSZ

Si utilizzano i risultati dell'analisi GGSZ dei decadimenti $B^+ \rightarrow DK^+$, $D \rightarrow K_s^0 hh$, presi da [10].

$$\begin{aligned} x_- &= (2.5 \pm 2.5 \pm 1.0 \pm 0.5) \times 10^{-2} \\ y_- &= (7.5 \pm 2.9 \pm 0.5 \pm 1.4) \times 10^{-2} \\ x_+ &= (-7.7 \pm 2.4 \pm 1.0 \pm 0.4) \times 10^{-2} \\ y_+ &= (-2.2 \pm 2.5 \pm 0.4 \pm 1.0) \times 10^{-2} \end{aligned}$$

La prima incertezza è statistica, la seconda sistematica e la terza esterna. Si combinano le incertezze sistematica ed esterna in una singola incertezza sistematica tramite la somma in quadratura. Le correlazioni statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.7 e Tabella 3.8.

Tabella 3.7: Correlazioni statistiche per $D^0 \rightarrow K_s^0 h^+ h^-$ GGSZ.

	x_-	y_-	x_+	y_+
x_-	1.	-0.247	0.038	-0.003
y_-	-0.247	1.	-0.011	0.012
x_+	0.038	-0.011	1.	0.002
y_+	-0.003	0.012	0.002	1.

Tabella 3.8: Correlazioni sistematiche per $D^0 \rightarrow K_s^0 h^+ h^-$ GGSZ.

	x_-	y_-	x_+	y_+
x_-	1.	0.005	-0.025	0.070
y_-	0.005	1.	0.009	-0.141
x_+	-0.025	0.009	1.	0.008
y_+	0.070	-0.141	0.008	1.

$D \rightarrow K_s^0 K\pi$, GLS

Per le misure degli osservabili si fa riferimento a [11]. Non c'è correlazione tra le incertezze statistiche e sistematiche degli osservabili considerati.

$$\begin{aligned} R_{D\pi, \text{fav/sup}}^{K_S K\pi} &= 3.855 \pm 0.961 \pm 0.060 \\ A_{\text{fav}}^{DK, K_S K\pi} &= 0.026 \pm 0.109 \pm 0.029 \\ A_{\text{sup}}^{DK, K_S K\pi} &= 0.336 \pm 0.208 \pm 0.026 \end{aligned}$$

$B^0 \rightarrow DK^{*0}$, ADS

I risultati degli osservabili sono presi da [13]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.9 e Tabella 3.10.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K\pi} &= -0.032 \pm 0.041 \pm 0.020 \\
 R_+^{DK^{*0}, K\pi} &= 0.057 \pm 0.029 \pm 0.012 \\
 R_-^{DK^{*0}, K\pi} &= 0.056 \pm 0.032 \pm 0.012
 \end{aligned}$$

 Tabella 3.9: Correlazioni statistiche per $B^0 \rightarrow DK^{*0}$ ADS.

	$A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K\pi}$	$R_+^{DK^{*0}, K\pi}$	$R_-^{DK^{*0}, K\pi}$
$A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K\pi}$	1	0.09	0.08
$R_+^{DK^{*0}, K\pi}$	0.09	1	-0.08
$R_-^{DK^{*0}, K\pi}$	-0.08	-0.08	1

 Tabella 3.10: Correlazioni sistematiche per $B^0 \rightarrow DK^{*0}$ ADS.

	$A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K\pi}$	$R_+^{DK^{*0}, K\pi}$	$R_-^{DK^{*0}, K\pi}$
$A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K\pi}$	1	0.01	0.01
$R_+^{DK^{*0}, K\pi}$	0.01	1	1.00
$R_-^{DK^{*0}, K\pi}$	0.01	1.00	1

 $B^+ \rightarrow Dh^+\pi\pi$, GLW/ADS-like

I risultati degli osservabili sono presi da [15].

$$\begin{aligned}
 R_{CP}^{DK\pi\pi} &= 1.04000 \pm 0.06400 \pm 0.00000 \\
 A_{\text{fav}}^{DK\pi\pi, K\pi} &= 0.01300 \pm 0.01900 \pm 0.01300 \\
 A_{CP}^{DK\pi\pi, KK} &= -0.04500 \pm 0.06400 \pm 0.01100 \\
 A_{CP}^{DK\pi\pi, \pi\pi} &= -0.05400 \pm 0.10100 \pm 0.01100 \\
 R_+^{DK\pi\pi, K\pi} &= 0.01070 \pm 0.00600 \pm 0.00110 \\
 R_-^{DK\pi\pi, K\pi} &= 0.00530 \pm 0.00450 \pm 0.00060
 \end{aligned}$$

Non c'è correlazione tra incertezze statistiche e sistematiche degli osservabili considerati.

$B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$, dipendenza temporale

I risultati degli osservabili sono presi da [16]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.11 e Tabella 3.12.

$$\begin{aligned}
 C &= 0.735 \pm 0.142 \pm 0.048 \\
 D_f &= -0.395 \pm 0.277 \pm 0.122 \\
 D_{\bar{f}} &= -0.314 \pm 0.274 \pm 0.107 \\
 S_f &= -0.518 \pm 0.202 \pm 0.073 \\
 S_{\bar{f}} &= 0.496 \pm 0.197 \pm 0.071
 \end{aligned}$$

Tabella 3.11: Correlazioni statistiche per $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$

	C	D_f	$D_{\bar{f}}$	S_f	$S_{\bar{f}}$
C	1	-0.09	-0.08	0.01	0.06
D_f	-0.09	1	0.51	0.07	-0.01
$D_{\bar{f}}$	-0.08	0.51	1	0.03	-0.01
S_f	0.01	0.07	0.03	1	0
$S_{\bar{f}}$	0.06	-0.01	-0.01	0	1

Tabella 3.12: Correlazioni sistematiche per $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$

	C	D_f	$D_{\bar{f}}$	S_f	$S_{\bar{f}}$
C	1	-0.02	-0.06	0.02	-0.01
D_f	-0.02	1	-0.34	-0.04	-0.01
$D_{\bar{f}}$	-0.06	-0.34	1	0.03	0.06
S_f	0.02	-0.04	0.03	1	0
$S_{\bar{f}}$	-0.01	-0.01	0.06	0	1

$B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$, amplitude analysis

I risultati degli osservabili sono presi da [18]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.13 e Tabella 3.14.

$$\begin{aligned}
 x_- &= -0.02000 \pm 0.13000 \pm 0.14000 \\
 y_- &= -0.35000 \pm 0.26000 \pm 0.41000 \\
 x_+ &= 0.04000 \pm 0.16000 \pm 0.11000 \\
 y_+ &= -0.47000 \pm 0.28000 \pm 0.22000
 \end{aligned}$$

Tabella 3.13: Correlazioni statistiche per $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$ GGSZ.

	x_-	y_-	x_+	y_+
x_-	1	0.34	0.10	0.13
y_-	0.34	1	0.05	0.15
x_+	0.10	0.05	1	0.50
y_+	0.13	0.15	0.50	1

Tabella 3.14: Correlazioni sistematiche per $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$ GGSZ.

	x_-	y_-	x_+	y_+
x_-	1	0.81	0.31	0.38
y_-	0.81	1	0.26	0.39
x_+	0.31	0.26	1	0.70
y_+	0.38	0.39	0.70	1

$B^0 \rightarrow DK^{*0}$, GGSZ

I risultati degli osservabili sono presi da [19]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.15 e Tabella 3.16.

$$\begin{aligned}
 x_- &= -0.15 \pm 0.14 \pm 0.03 \pm 0.01 \\
 y_- &= 0.25 \pm 0.15 \pm 0.06 \pm 0.01 \\
 x_+ &= 0.05 \pm 0.24 \pm 0.04 \pm 0.01 \\
 y_+ &= -0.65 \pm 0.24 \pm 0.08 \pm 0.01
 \end{aligned}$$

Tabella 3.15: Correlazioni statistiche per $B^0 \rightarrow DK^{*0}$ GGSZ.

	x_-	y_-	x_+	y_+
x_-	1	0.14	0	0
y_-	0.14	1	0	0
x_+	0	0	1	0.14
y_+	0	0	0.14	1

Tabella 3.16: Correlazioni sistematiche per $B^0 \rightarrow DK^{*0}$ GGSZ.

	x_-	y_-	x_+	y_+
x_-	1	0	0	0
y_-	0	1	0	0
x_+	0	0	1	0
y_+	0	0	0	1

$B^+ \rightarrow D^*K^+, D \rightarrow hh, \text{GLW}$

I risultati degli osservabili sono presi da [21]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.17 e Tabella 3.18.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fav}}^{D\gamma, K\pi} &= 0.001 \pm 0.022 \pm 0.007, \\
 A_{\text{fav}}^{D\pi^0, K\pi} &= 0.006 \pm 0.012 \pm 0.004, \\
 A_{CP}^{D\gamma} &= 0.273 \pm 0.093 \pm 0.040, \\
 A_{CP}^{D\pi^0} &= -0.151 \pm 0.033 \pm 0.013, \\
 R_{CP}^{D\gamma} &= 0.909 \pm 0.087 \pm 0.099, \\
 R_{CP}^{D\pi^0} &= 1.138 \pm 0.029 \pm 0.082,
 \end{aligned}$$

 Tabella 3.17: Correlazioni statistiche per $B^+ \rightarrow D^*K^+, D \rightarrow hh, \text{GLW}$

	$A_{\text{fav}}^{D\gamma, K\pi}$	$A_{\text{fav}}^{D\pi^0, K\pi}$	$A_{CP}^{D\gamma}$	$A_{CP}^{D\pi^0}$	$R_{CP}^{D\gamma}$	$R_{CP}^{D\pi^0}$
$A_{\text{fav}}^{D\gamma, K\pi}$	1	-0.62	0	0	-0.01	0
$A_{\text{fav}}^{D\pi^0, K\pi}$	-0.62	1	0	0.01	0	0
$A_{CP}^{D\gamma}$	0	0	1	-0.21	-0.27	0.08
$A_{CP}^{D\pi^0}$	0	0.01	-0.21	1	-0.07	0.12
$R_{CP}^{D\gamma}$	-0.01	0	-0.27	-0.07	1	-0.26
$R_{CP}^{D\pi^0}$	0	0	0.08	0.12	-0.26	1

 Tabella 3.18: Correlazioni sistematiche per $B^+ \rightarrow D^*K^+, D \rightarrow hh, \text{GLW}$

	$A_{\text{fav}}^{D\gamma, K\pi}$	$A_{\text{fav}}^{D\pi^0, K\pi}$	$A_{CP}^{D\gamma}$	$A_{CP}^{D\pi^0}$	$R_{CP}^{D\gamma}$	$R_{CP}^{D\pi^0}$
$A_{\text{fav}}^{D\gamma, K\pi}$	1	0.78	-0.01	0.07	0.05	-0.03
$A_{\text{fav}}^{D\pi^0, K\pi}$	0.78	1	0.01	-0.04	-0.01	0.01
$A_{CP}^{D\gamma}$	-0.01	0.01	1	-0.09	-0.88	-0.13
$A_{CP}^{D\pi^0}$	0.07	-0.04	-0.09	1	0.19	0.64
$R_{CP}^{D\gamma}$	0.05	-0.01	-0.88	0.19	1	0.15
$R_{CP}^{D\pi^0}$	-0.03	0.01	-0.13	0.64	0.15	1

$B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh, \text{GLW/ADS}$

I risultati degli osservabili sono presi da [22]. Le correlazioni tra incertezze statistiche e sistematiche sono riportate rispettivamente in Tabella 3.19 e Tabella 3.20.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fav}}^{DK^{*+}, K\pi} &= -0.027 \pm 0.028 \pm 0.007, \\
 A_{CP}^{DK^{*+}, KK} &= 0.12 \pm 0.08 \pm 0.01, \\
 A_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi} &= 0.08 \pm 0.16 \pm 0.02, \\
 R_{CP}^{DK^{*+}, KK} &= 1.31 \pm 0.11 \pm 0.05, \\
 R_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi} &= 0.98 \pm 0.17 \pm 0.04, \\
 R_+^{DK^{*+}, K\pi} &= 0.009 \pm 0.007 \pm 0.002, \\
 R_-^{DK^{*+}, K\pi} &= -0.003 \pm 0.004 \pm 0.002,
 \end{aligned}$$

 Tabella 3.19: Correlazioni statistiche per $B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh$ GLW/ADS.

	$A_{\text{fav}}^{DK^{*+}, K\pi}$	$A_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	$A_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	$R_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	$R_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	$R_+^{DK^{*+}, K\pi}$	$R_-^{DK^{*+}, K\pi}$
$A_{\text{fav}}^{DK^{*+}, K\pi}$	1	0	0	0	0	0.04	0.02
$A_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	0	1	0	-0.02	0	-0.01	-0.01
$A_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	0	0	1	0	0.01	0	0
$R_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	0	-0.02	0	1	0.06	0.03	0.01
$R_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	0	0	0.01	0.06	1	0.02	0.01
$R_+^{DK^{*+}, K\pi}$	0.04	-0.01	0	0.03	0.02	1	0.04
$R_-^{DK^{*+}, K\pi}$	0.02	-0.01	0	0.01	0.01	0.04	1

 Tabella 3.20: Correlazioni sistematiche per $B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh$ GLW/ADS.

	$A_{\text{fav}}^{DK^{*+}, K\pi}$	$A_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	$A_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	$R_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	$R_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	$R_+^{DK^{*+}, K\pi}$	$R_-^{DK^{*+}, K\pi}$
$A_{\text{fav}}^{DK^{*+}, K\pi}$	1	0.46	0.52	0	0	0.01	-0.02
$A_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	0.46	1	0.41	-0.03	0	0.05	0.02
$A_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	0.52	0.41	1	-0.05	0.02	0.08	0.05
$R_{CP}^{DK^{*+}, KK}$	0	-0.03	-0.05	1	-0.01	-0.01	0
$R_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi}$	0	0	0.02	-0.01	1	0.02	0.02
$R_+^{DK^{*+}, K\pi}$	0.01	0.05	0.08	-0.01	0.02	1	0.03
$R_-^{DK^{*+}, K\pi}$	-0.02	0.02	0.05	0	0.02	0.03	1

3.2.2 Input esterni

Le misurazioni LHCb e CLEO-c di $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$ e $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^0$

Le misurazioni ADS dei decadimenti $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^0$ e $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$ raggiungono la massima sensibilità quando vengono combinate con la conoscenza dei parametri adronici che descrivono i decadimenti D . Essi sono rapporto, fase e *coherence factor* dei due decadimenti, rispettivamente: $r_D^{K3\pi}$, $\delta_D^{K3\pi}$, $\kappa_D^{K3\pi}$, $r_D^{K2\pi}$, $\delta_D^{K2\pi}$, $\kappa_D^{K2\pi}$. Per questi valori si fa riferimento alle misurazioni fatte da LHCb e CLEO, riportate in [23]

$$\begin{aligned}\kappa_D^{K3\pi} &= 0.43 \pm 0.17 \\ \delta_D^{K3\pi} &= 2.23 \pm 0.49 \\ \kappa_D^{K2\pi} &= 0.81 \pm 0.06 \\ \delta_D^{K2\pi} &= 3.46 \pm 0.26 \\ r_D^{K3\pi} &= 0.0549 \pm 0.0006 \\ r_D^{K2\pi} &= 0.0447 \pm 0.0012\end{aligned}$$

	$\kappa_D^{K3\pi}$	$\delta_D^{K3\pi}$	$\kappa_D^{K2\pi}$	$\delta_D^{K2\pi}$	$r_D^{K3\pi}$	$r_D^{K2\pi}$
$\kappa_D^{K3\pi}$	1	-0.67	0.04	-0.05	-0.48	-0.04
$\delta_D^{K3\pi}$	-0.67	1	0.02	0.15	0.12	0.08
$\kappa_D^{K2\pi}$	0.04	0.02	1	0.23	-0.04	-0.04
$\delta_D^{K2\pi}$	-0.05	0.15	0.23	1	-0.02	0.36
$r_D^{K3\pi}$	-0.48	0.12	-0.04	-0.02	1	-0.03
$r_D^{K2\pi}$	-0.04	0.08	-0.04	0.36	-0.03	1

Tabella 3.21: Matrice di correlazione per gli input $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$ e $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^0$ da CLEO ed LHCb

Contenuto CP di $D \rightarrow \pi\pi\pi\pi$ e $D \rightarrow hh\pi^0$

Nell'ambito dell'esperimento CLEO-c [23] è possibile ottenere valori per i tre osservabili $F_{KK\pi^0}$, $F_{\pi\pi\pi^0}$, $F_{\pi\pi\pi\pi}$.

$$\begin{aligned}F_{\pi\pi\pi^0} &= 0.973 \pm 0.017 \\ F_{KK\pi^0} &= 0.732 \pm 0.055 \\ F_{\pi\pi\pi\pi} &= 0.737 \pm 0.032\end{aligned}$$

Input di charm da HFAG

Le misurazioni GLW/ADS necessitano di un maggiore numero di input per restringere il sistema charm in tre aree. Questi valori vengono presi da un recente charm fit di

HFAG.

$$\begin{aligned}
 x_D &= 0.00370 \pm 0.00160 \\
 y_D &= 0.00660 \pm 0.00100 \\
 \delta_D^{K\pi} &= 3.34754 \pm 0.25656 \\
 R_D^{K\pi} &= 0.00349 \pm 0.00004 \\
 A_{CP}^{\text{dir}}(\pi\pi) &= 0.00100 \pm 0.00150 \\
 A_{CP}^{\text{dir}}(KK) &= -0.00150 \pm 0.00140
 \end{aligned}$$

Tabella 3.22: Matrice di correlazione dei parametri HFAG charm (CHARM 2015, “Fit 3”, CP violation allowed).

	x_D	y_D	$\delta_D^{K\pi}$	$R_D^{K\pi}$	$A_{CP}^{\text{dir}}(\pi\pi)$	$A_{CP}^{\text{dir}}(KK)$
x_D	1	-0.36	-0.33	0.23	0.12	0.15
y_D	-0.36	1	0.94	0.23	-0.18	-0.22
$\delta_D^{K\pi}$	-0.33	0.94	1	0.44	-0.20	-0.24
$R_D^{K\pi}$	0.23	0.23	0.44	1	-0.08	-0.07
$A_{CP}^{\text{dir}}(\pi\pi)$	0.12	-0.18	-0.20	-0.08	1	0.73
$A_{CP}^{\text{dir}}(KK)$	0.15	-0.22	-0.24	-0.07	0.73	1

Constraints per $D \rightarrow K_s^0 K \pi$

La misurazione con il metodo GLS necessita di valori in input per i parametri $R_D^{K_s K \pi}$, $\delta_D^{K_s K \pi}$ e $\kappa_D^{K_s K \pi}$; essi vengono presi da una misurazione CLEO del 2012 [24].

$$\begin{aligned}
 R_D^{K_s K \pi} &= 0.356 \pm 0.034 \pm 0.007 \\
 \delta_D^{K_s K \pi} &= 0.46 \pm 0.28 \\
 \kappa_D^{K_s K \pi} &= 1.00 \pm 0.16
 \end{aligned}$$

Constraint su ϕ_s

La misura con dipendenza temporale di $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$ misura $\gamma - 2\beta_s$. Per interpretare quest'ultima come una misurazione di γ , si costringe $-2\beta_s$ ad assumere il valore misurato di ϕ_s , preso dalla misurazione LHCb di $B_s^0 \rightarrow J/\psi hh$ [25].

$$\phi_s = -0.010 \pm 0.039 \text{ rad}$$

Constraints su $r_D^{K^3\pi}$

Si applica un constraint su $r_D^{K^3\pi}$. Si ha l'osservabile:

$$R_{WS}(D \rightarrow K\pi\pi\pi) = \frac{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- K^+ \pi^- \pi^+)}{\Gamma(D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^- \pi^+)} = 0.324 \pm 0.008 \pm 0.007$$

che si lega ad $r_D^{K3\pi}$ tramite:

$$R_{WS}(D \rightarrow K\pi\pi\pi) = (r_D^{K3\pi})^2 - \kappa_D^{K3\pi} r_D^{K3\pi} (y_D \cos \delta_D^{K3\pi} - x_D \sin \delta_D^{K3\pi}) + \frac{1}{2}(x_D^2 + y_D^2)$$

Constraints su $r_D^{K2\pi}$

Si applica un constraint su $r_D^{K2\pi}$. Si ha l'osservabile:

$$R_{WS}(D \rightarrow K\pi\pi^0) = \frac{\Gamma(D^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0)}{\Gamma(D^0 \rightarrow K^-\pi^+\pi^0)} = 0.220 \pm 0.010$$

che si lega ad $r_D^{K2\pi}$ tramite:

$$R_{WS}(D \rightarrow K\pi\pi^0) = (r_D^{K2\pi})^2 - \kappa_D^{K2\pi} r_D^{K2\pi} (y_D \cos \delta_D^{K2\pi} - x_D \sin \delta_D^{K2\pi}) + \frac{1}{2}(x_D^2 + y_D^2)$$

Capitolo 4

Statistica bayesiana e applicazione

Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre i concetti fondamentali della statistica bayesiana, per poi esporne le applicazioni alla combinazione in esame.

Nell'inferenza bayesiana si assume che un modello teorico (descritto da certi parametri θ_i) sia vero e si cerca di ottenere la distribuzione dei θ_i noti i dati d_i . Questa distribuzione è chiamata probabilità a posteriori (*posterior*), ossia la probabilità che i parametri assumano certi valori, una volta effettuato l'esperimento e avendo fatto una serie di assunzioni. Dalle distribuzioni a posteriori delle variabili di interazione si possono calcolare i relativi intervalli di credibilità.

4.1 Teorema di Bayes

Teorema 4.1.1 (Teorema di Bayes).

Si consideri un gruppo completo di ipotesi incompatibili, dette H_1, H_2, \dots, H_n . Si esegue ora un esperimento che porta al verificarsi dell'evento A . Allora, la probabilità che A sia stato causato dalla validità dell'ipotesi H_i è data da:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)} \quad (4.1)$$

Dimostrazione. In accordo con la regola di moltiplicazione delle probabilità si ha:

$$P(AH_i) = P(A|H_i)P(H_i) = P(H_i|A)P(A) \quad (4.2)$$

Risolviendo rispetto a $P(H_i|A)$ si ottiene:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)} \quad (4.3)$$

Ma la probabilità che si verifichi A è data dalla somma sulle n ipotesi H_n dei prodotti $P(A|H_i)P(H_i)$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i) \quad (4.4)$$

Perciò, sostituendo la (4.4) nella (4.3) si ottiene la tesi. \square

La generalizzazione al caso continuo di quanto esposto è:

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{\int P(H)P(A|H) dH} \quad (4.5)$$

Le grandezze che compaiono in questa formula sono densità di probabilità definite nel modo seguente:

- $P(A|H)$, cioè la probabilità di registrare un certo valore sperimentale A data l'ipotesi H , è detta anche *verosimiglianza*;
- $P(H)$, cioè la probabilità di validità dell' ipotesi H , detta anche probabilità *a priori*;
- $P(H|A)$, cioè la probabilità di validità dell'ipotesi H una volta registrato il dato sperimentale A , detta anche probabilità *a posteriori*.

4.2 Inferenza parametrica

In fisica si ha a che fare con misure di quantità fisiche, modelli (teorie) e parametri corrispondenti ad un certo modello. In molte applicazioni, dato un modello che interpreta una misura, è possibile ottenere una misura a posteriori dell'incognita del modello, applicando la statistica bayesiana. Il metodo che si accorda con queste applicazioni viene chiamato *inferenza parametrica*. Il teorema di Bayes assume un ruolo centrale nel problema dell'inferenza parametrica. Detti θ un generico parametro e d una variabile che rappresenta una quantità misurabile, la (4.5) può essere riscritta come:

$$P(\theta|d) = \frac{P(d|\theta)P(\theta)}{\int P(d|\theta)P(\theta)d\theta} \quad (4.6)$$

dove $P(\theta)$ è il prior, $P(\theta|d)$ il posterior e $P(d|\theta)$ la verosimiglianza, detta anche *likelihood* e indicata con $\mathcal{L}(\theta; d)$. Il denominatore è detto *evidence* ed è un fattore di normalizzazione.

Le distribuzioni di probabilità a posteriori forniscono la descrizione del nostro stato di conoscenza dei parametri: essi permettono infatti di calcolare gli intervalli di credibilità, ovvero la probabilità che il valore vero di un dato parametro sia in un certo intervallo.

Si riporta, a titolo di esempio, il caso del modello gaussiano, largamente utilizzato in questa tesi. Si assume che il segnale d da parte di un rivelatore, con *valore vero* μ e *deviazione standard* σ , sia conosciuto esattamente. Applicando la (4.6), dalla likelihood:

$$P(d|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(d - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.7)$$

si ottiene per μ :

$$P(\mu|d, \sigma) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] P(\mu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] P(\mu) d\mu} \quad (4.8)$$

Ora, se si assume un prior uniforme (cioè si pone $P(\mu) = \text{costante}$), la (4.8) si semplifica in:

$$P(\mu|d, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(\mu - d)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.9)$$

da cui si ricavano il *valore di aspettazione* $E(\mu) = d$ e la deviazione standard $\sigma(\mu) = \sigma$.

Se invece si assume una conoscenza a priori del parametro di tipo gaussiano:

$$P(\mu|\mu_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} \right] \quad (4.10)$$

si ottiene, inserendo la (4.10) nella (4.8):

$$P(\mu|d, \mu_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left[-\frac{(\mu - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \quad (4.11)$$

dove:

$$\mu_1 = E(\mu) = \frac{\frac{d}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}} \quad (4.12)$$

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(\mu) = (\sigma_0^{-2} + \sigma^{-2})^{-1} \quad (4.13)$$

Si noti come la distribuzione a priori uniforme ($P(\mu) = \text{costante}$) corrisponda al caso limite della distribuzione a priori gaussiana con grande σ_0 e valore limitato superiormente di μ_0 . Come si vede dalle equazioni (4.12) e (4.13) l'aggiunta di nuove misure riduce l'incertezza sui parametri da determinare.

Nel caso siano disponibili più misure d_i distinte, il procedimento di aggiornamento della conoscenza è il seguente. Dopo la prima misura di valore d_1 la distribuzione a posteriori per il generico parametro θ diventa:

$$P(\theta|d_1) \propto P(d_1|\theta)P(\theta) \quad (4.14)$$

dopo una seconda misura si ha:

$$P(\theta|d_1, d_2) \propto P(d_2|\theta, d_1)P(d_1|\theta) = P(d_1, d_2|\theta)P(\theta) \quad (4.15)$$

Da quest'ultima equazione si capisce come l'inferenza sequenziale restituisca lo stesso risultato di un'inferenza singola che tiene conto propriamente di tutte le informazioni disponibili. Considerando le d_i facenti parte di un vettore di misure \mathbf{d} , la naturale generalizzazione della (4.15) sarà:

$$P(\theta|\mathbf{d}) \propto P(\mathbf{d}|\theta)P(\theta) \quad (4.16)$$

Nel caso in cui le d_i siano indipendenti si ottiene che la verosimiglianza combinata è il prodotto delle singole verosimiglianze:

$$P(\mathbf{d}|\theta) = \prod_i P(d_i|\theta) \quad (4.17)$$

Se, come nel caso della combinazione proposta in questa tesi, si ha a che fare con più parametri organizzati in un vettore $\boldsymbol{\theta}$, il teorema di Bayes diventa:

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{d}) = \frac{P(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta})}{\int P(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \quad (4.18)$$

dove $P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{d})$ è una posterior multidimensionale. Attraverso la *marginalizzazione* ($\int P(x, y)dy = P(x)$) è possibile calcolare la distribuzione di probabilità per un singolo parametro, $P(\theta_i|\mathbf{d})$ integrando su quelli rimanenti. La *distribuzione marginale* $P(\theta_i|\mathbf{d})$ è dunque il risultato completo dell'inferenza bayesiana sul parametro θ_i .

Come esempio si pensi all'inferenza del parametro μ di una distribuzione gaussiana nel caso in cui anche un altro parametro σ è incognito e deve essere determinato dai dati. Dalle equazioni (4.18), (4.17) e (4.7) si ottengono:

$$P(\mu, \sigma|\mathbf{d}) \propto \sigma^{-n} \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] P(\mu, \sigma) \quad (4.19)$$

$$P(\mu|\mathbf{d}) = \int P(\mu, \sigma|\mathbf{d})d\sigma \quad (4.20)$$

$$P(\sigma|\mathbf{d}) = \int P(\mu, \sigma|\mathbf{d})d\mu \quad (4.21)$$

4.2.1 Minimizzazione del χ^2

Si analizza ora il caso in cui la conoscenza a priori dei parametri è così povera da rendere la distribuzione uniforme la scelta più adeguata per i prior. La (4.18) diventa:

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{d}) \propto P(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta})P(\boldsymbol{\theta}) \propto P(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{d}) \quad (4.22)$$

dove si ricorda che la likelihood $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{d})$ è vista come una funzione di $\boldsymbol{\theta}$ con parametri \mathbf{d} . L'insieme di parametri più probabile è quello che massimizza la likelihood: questo risultato è noto come *principio di massima verosimiglianza*.

Si prenda come esempio il caso semplice di una coppia di variabili $\{x_i, y_i\}$ i cui valori veri sono legati dalla funzione $\mu_{y_i} = y(\mu_{x_i}, \boldsymbol{\theta})$ e con errori gaussiani solo sulle ordinate (cioè $x_i \approx \mu_{x_i}$). Nel caso di misurazioni indipendenti, si ottiene:

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto \prod_i \exp \left[-\frac{(y_i - y(x_i, \boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma_i^2} \right] = \exp \left[-\frac{1}{2}\chi^2 \right] \quad (4.23)$$

dove

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_i \frac{(y_i - y(x_i, \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2} \quad (4.24)$$

è chiamato *chi-quadrato*. Si capisce che massimizzare la likelihood è equivalente a minimizzare il χ^2 , così da ottenere il valore più probabile di $\boldsymbol{\theta}$.

Nel caso in cui si consideri l'incertezza su $\boldsymbol{\theta}$ la (4.23) diventa:

$$P(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \exp \left[-\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H} \Delta\boldsymbol{\theta} \right] \quad (4.25)$$

dove \mathbf{H} è la matrice hessiana e $\Delta\boldsymbol{\theta}$ è l'insieme di differenze $\theta_i - \theta_{m_i}$, con θ_{m_i} valore più probabile per θ .

4.3 Osservabili, incognite e metodo di misura

Come accennato, lo scopo finale della procedura consiste nel ricavare la densità di probabilità a posteriori di γ , così da stimarne il valore più probabile, insieme alle altre incognite del problema, utilizzando per ognuna di esse la formula di Bayes (4.18). I vettori di parametri e osservabili saranno rispettivamente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &= (\gamma, r_B^{DK}, \delta_B^{DK}, r_D^{K\pi}, \dots) \\ \mathbf{d} &= (x_{\pm}; y_{\pm}; \dots)\end{aligned}\tag{4.26}$$

Per quel che riguarda la distribuzione statistica a priori $P(\mathbf{d})$, si assume una distribuzione uniforme per ognuna delle incognite nei seguenti range:

$$\begin{aligned}\gamma &\in [-180^\circ; 180^\circ] \\ \delta_B^{DK} &\in [-180^\circ; 180^\circ] \\ \delta_B^{DK^{*0}} &\in [200^\circ; 580^\circ] \\ \delta_B^{DK\pi\pi} &\in [0^\circ; 360^\circ] \\ \delta_B^{D_s K} &\in [200^\circ; 580^\circ] \\ \delta_B^{D^* K^+} &\in [0^\circ; 360^\circ] \\ \delta_B^{DK^{**}} &\in [0^\circ; 360^\circ] \\ r_B^{DK} &\in [0.05; 0.16] \\ r_B^{DK^{*0}} &\in [0; 0.7] \\ r_B^{DK\pi\pi} &\in [0; 0.34] \\ r_B^{D_s K} &\in [0; 2.0] \\ r_B^{D^* K^+} &\in [0; 0.5] \\ r_B^{DK^{**}} &\in [-0.05; 0.15]\end{aligned}$$

La verosimiglianza è data invece dalla formula:

$$P(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_i \exp \left[-\frac{(d_i(\boldsymbol{\theta}) - d_i)^2}{2\sigma_{d_i}^2} \right]\tag{4.27}$$

dove con d_i si è indicato il valore misurato dell' i -esimo osservabile, con σ_{d_i} la sua incertezza e con $d_i(\boldsymbol{\theta})$ la sua espressione teorica come funzione delle incognite.

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo vengono riportati i risultati più rilevanti dell'analisi effettuata. Per comodità, in Tabella 5.1 vengono riassunte le misurazioni utilizzate nella combinazione e i rispettivi osservabili.

Tabella 5.1: Schema riassuntivo degli osservabili utilizzati nella combinazione, completi delle misure a cui sono associati. Sotto la doppia linea sono riportati gli input esterni.

$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow hh$, GLW/ADS	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}, A_{\text{CP}}^{DK, KK}, A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi}, A_{\text{fav}}^{DK, K\pi},$ $R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi}, R_{\text{CP}}^{KK}, R_{\text{CP}}^{\pi\pi}$
$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow h\pi\pi\pi$, GLW/ADS	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}, A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi\pi\pi}, A_{\text{fav}}^{DK, K3\pi}, R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi},$ $R_{\text{CP}}^{\pi\pi\pi\pi}$
$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow hh\pi^0$, GLW/ADS	$A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}, A_{\text{CP}}^{DK, KK\pi^0}, A_{\text{CP}}^{DK, \pi\pi\pi^0}, A_{\text{fav}}^{DK, K\pi\pi^0},$ $R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0}, R_{\text{CP}}^{KK\pi^0}, R_{\text{CP}}^{\pi\pi\pi^0}$
$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow K_S^0 hh$, GGSZ	x_-, x_+, y_-, y_+
$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow K_S^0 K\pi$, GLS	$R_{\text{DK, fav/sup}}^{K_S K\pi}, A_{\text{fav}}^{DK, K_S K\pi}, A_{\text{sup}}^{DK, K_S K\pi}$
$B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, ADS	$A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K\pi}, R_+^{DK^{*0}, K\pi}, R_-^{DK^{*0}, K\pi}$
$B^+ \rightarrow DK^+ \pi\pi$, GLW/ADS	$A_{\text{fav}}^{DK\pi\pi, K\pi}, A_{\text{CP}}^{DK\pi\pi, KK}, A_{\text{CP}}^{DK\pi\pi, \pi\pi},$ $R_+^{DK\pi\pi, K\pi}, R_-^{DK\pi\pi, K\pi}, R_{\text{CP}}^{DK\pi\pi}$
$B_s^0 \rightarrow D_s^{\mp} K^\pm$	$C, D_f, D_{\bar{f}}, S_f, S_{\bar{f}}$
$B^0 \rightarrow DK^+ \pi^-$	$x_-^{DK^*}, y_-^{DK^*}, x_+^{DK^*}, y_+^{DK^*}$
$B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, GGSZ	$x_-^{DK^*}, y_-^{DK^*}, x_+^{DK^*}, y_+^{DK^*}$
$B^+ \rightarrow D^* K^+, D \rightarrow hh$, GLW	$A_{\text{fav}}^{D\gamma, K\pi}, A_{\text{fav}}^{D\pi^0, K\pi}, A_{\text{CP}}^{D\gamma}, A_{\text{CP}}^{D\pi^0}, R_{\text{CP}}^{D\gamma}, R_{\text{CP}}^{D\pi^0}$
$B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh$, GLW/ADS	$A_{\text{fav}}^{DK^{*+}, K\pi}, A_{\text{CP}}^{DK^{*+}, KK}, A_{\text{CP}}^{DK^{*+}, \pi\pi},$ $R_{\text{CP}}^{DK^{*+}, KK}, R_{\text{CP}}^{DK^{*+}, \pi\pi}, R_+^{DK^{*+}, K\pi},$ $R_-^{DK^{*+}, K\pi}$
CLEO-c + LHCb	$r_D^{K3\pi}, \delta_D^{K3\pi}, \kappa_D^{K3\pi}, r_D^{K2\pi}, \delta_D^{K2\pi}, \kappa_D^{K2\pi}, R_{WS}$
CLEO-c	$F_{\pi\pi\pi^0}, F_{KK\pi^0}, F_{\pi\pi\pi\pi}$
CLEO-c	$R_D^{K_S K\pi}, \kappa_D^{K_S K\pi}, \delta_D^{K_S K\pi}$
LHCb	ϕ_s
HFAG	$x_D, y_D, \delta_D^{K\pi}, R_D^{K\pi}, A_{\text{CP}}^{\text{dir}}(KK), A_{\text{CP}}^{\text{dir}}(\pi\pi)$

5.1 Stima di γ per le singole misure

Prima di combinare i risultati delle varie misurazioni, si estrae una stima di γ da ognuna di esse indipendentemente. Questi plot forniscono una valida indicazione di quanto ogni misurazione contribuisca al risultato finale. Dove necessario vengono utilizzati gli input ausiliari riportati nel Capitolo 3. Qui e nelle prossime sezioni si utilizza l'abbreviazione IC per "intervallo di credibilità".

$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow hh, \text{GLW/ADS}$

Tabella 5.2: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow hh, \text{GLW/ADS}$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
36.55	[29,47.2]	[25.9, 57.3]
	[76.3, 89.6]	[65.4, 108]
	[142.1, 154.4]	[135.6, 156.8]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
97.75	[32.8,34.3]	[27.1,43.5]
	[78.1,106.9]	[70,119.4]
	[139.4,148.6]	[128.9,152.6]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.11245	[0.0977,0.1221]	[0.0879,0.137]

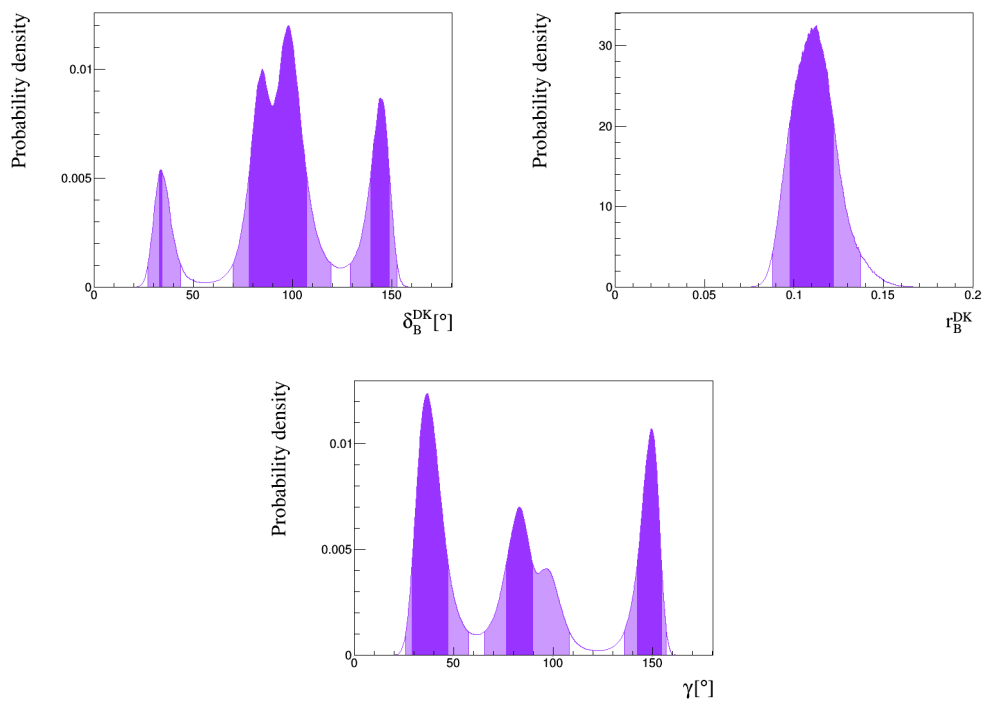


Figura 5.1: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+$, $D \rightarrow hh$, GLW/ADS. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow h\pi\pi\pi, \text{GLW/ADS}$

Tabella 5.3: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow h\pi\pi\pi, \text{GLW/ADS}$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
66.65	[41,104.4]	[25.8,138.4]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
107.75	[80.5,137.6]	[54.2,163.7]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.10405	[0.0936,0.1155]	[0.0822,0.1275]

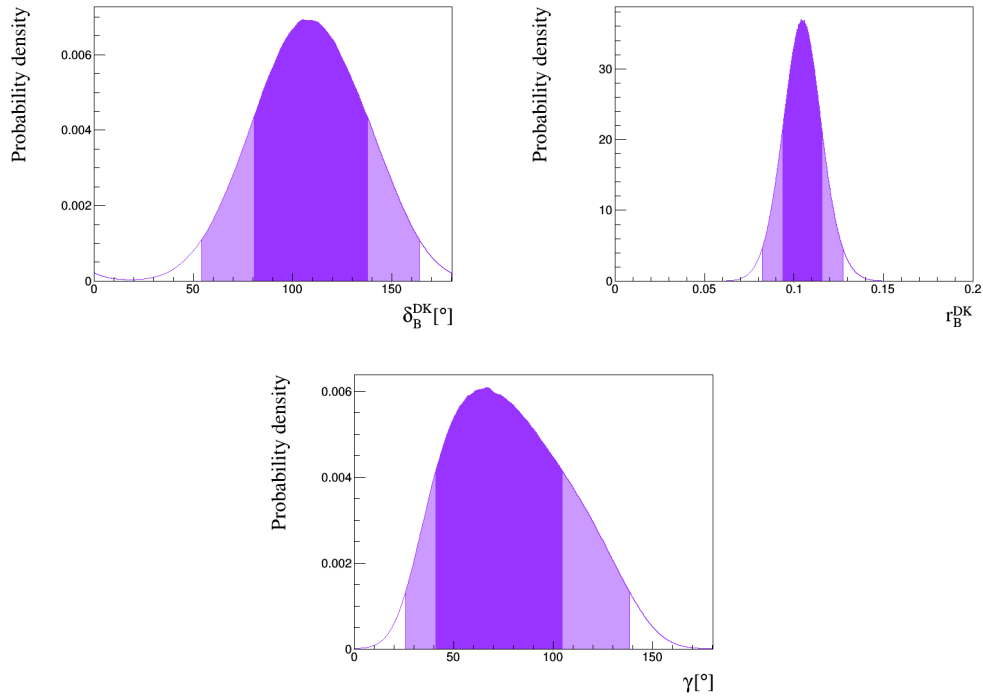
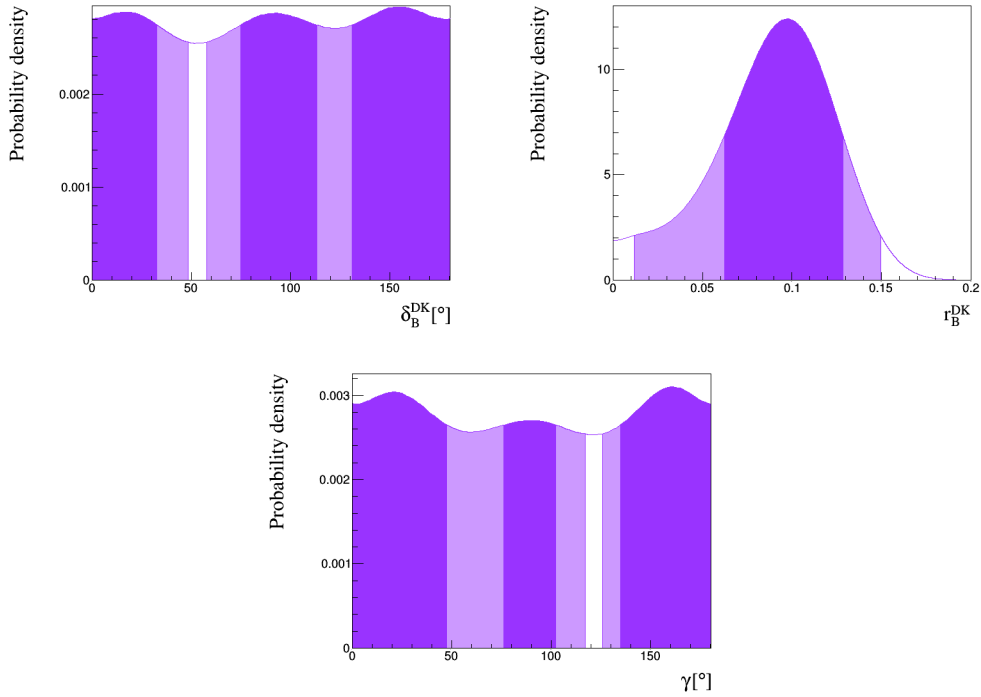


Figura 5.2: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow h\pi\pi\pi, \text{GLW/ADS}$. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow hh\pi^0, \text{GLW/ADS}$

 Tabella 5.4: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow hh\pi^0, \text{GLW/ADS}$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
160.95	[0,47.5] [76.2, 102.2] [134.6, 180]	[-54.3, 117.1] [125.7, 180]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
154.95	[0,32.6] [74.9,113] [131,180]	[0,48.4] [57.7,180]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.09765	[0.0621,0.1285]	[0.0118,0.1496]


 Figura 5.3: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow hh\pi^0, \text{GLW/ADS}$. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow K_s^0 hh, \text{ GGSZ}$

Tabella 5.5: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow K_s^0 hh, \text{ GGSZ}$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
63.55	[46.6, 77.8]	[23.4, 96.7]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
133.5	[116.8,150.7]	[94.5,172]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.07265	[0.0479,0.0946]	[0.0217,0.1175]

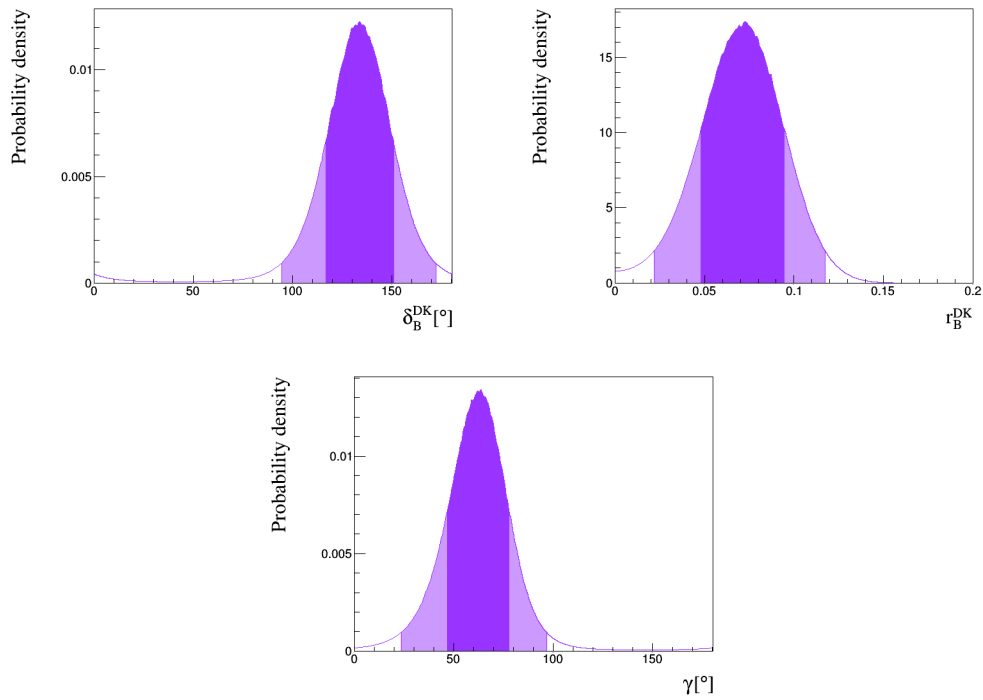


Figura 5.4: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+, D \rightarrow K_s^0 hh, \text{ GGSZ}$. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^+ \rightarrow DK^+$, $D \rightarrow K_s^0 K\pi$, GLS

Tabella 5.6: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+$, $D \rightarrow K_s^0 K\pi$, GLS.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
12.15	[0, 61.3] [142.2, 180]	[0, 95.9] [103.2, 180]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
17.05	[0,101.5] [174.9,180]	[0,137.9] [150.6,180]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.0985	[0,0.248]	[0,0.709]

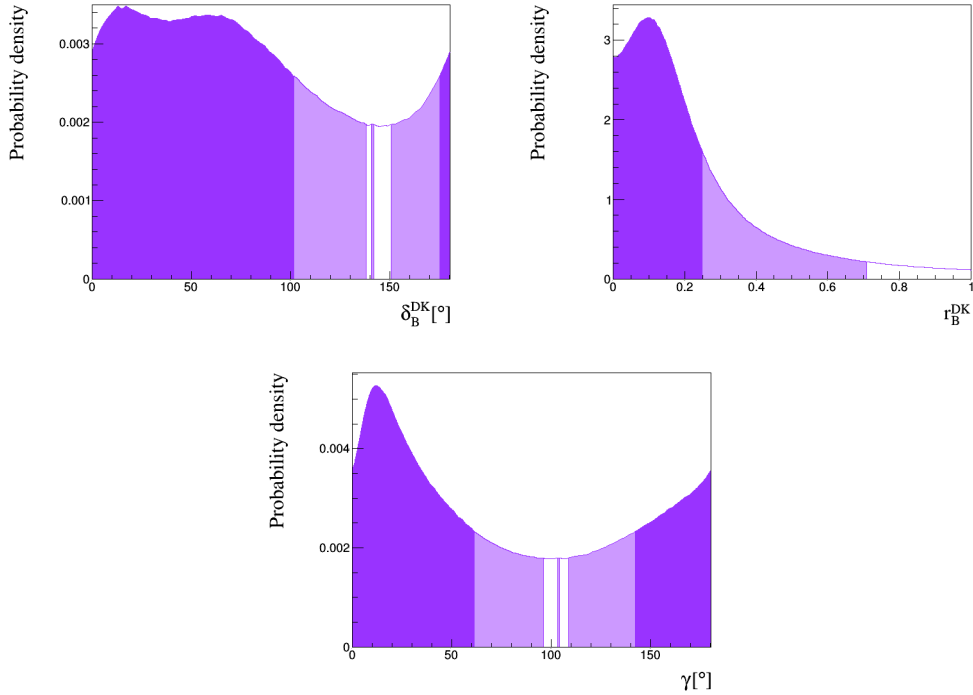


Figura 5.5: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+$, $D \rightarrow K_s^0 K\pi$, GLS. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, ADS

Tabella 5.7: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, ADS.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
176.95	[0, 55.4]	[0, 80.1]
	[124.1, 180]	[99.5, 180]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
170.45	[0,48.1]	[0,75]
	[115.4,180]	[86.3,180]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.22325	[0.1554,0.2859]	[0.061,0.3444]

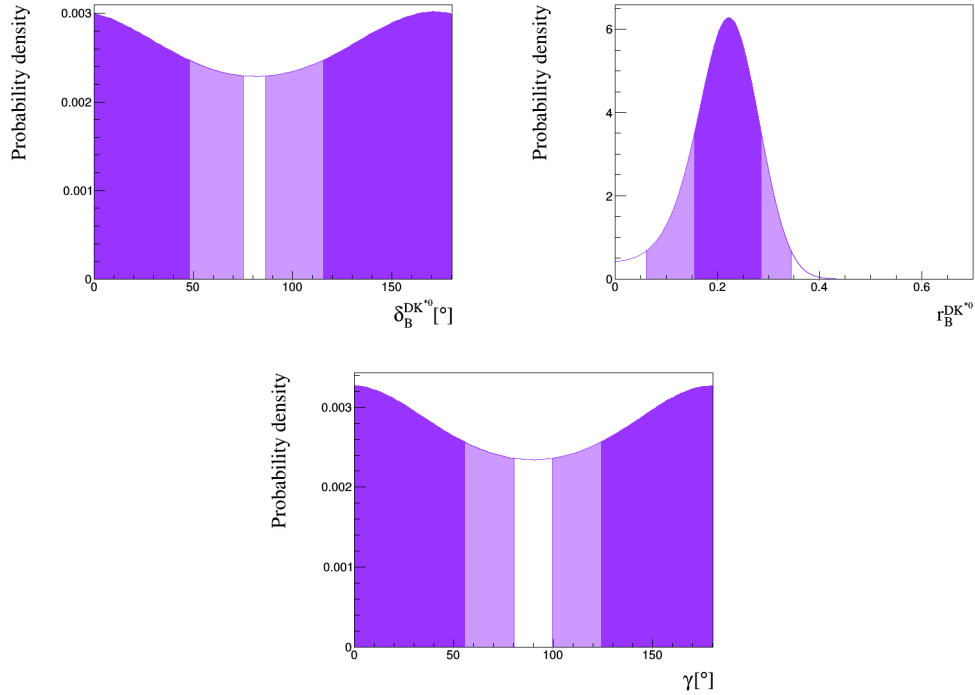


Figura 5.6: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, ADS. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^+ \rightarrow DK^+\pi\pi$, GLW/ADS

Tabella 5.8: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+\pi\pi$, GLW/ADS.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
179.95	[0, 30.5] [61.5, 116.8] [150, 180]	[0, 46.2] [48, 127.5] [137.3, 180]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
176.65	[0,24.5] [60.3,114.3] [142.8,180]	[0,37.7] [47.8,180]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.00005	[0,0.0394]	[0,0.0885]

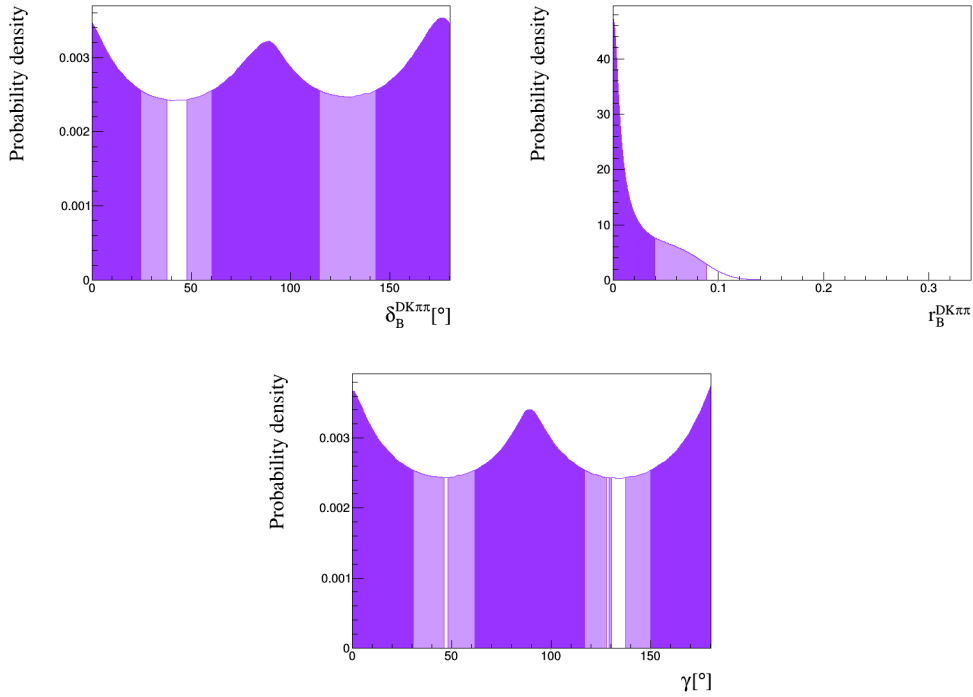


Figura 5.7: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^+\pi\pi$, GLW/ADS. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$$B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$$

Tabella 5.9: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
128.35	[104.2, 144.4]	[74.6, 160.3]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
178.05	[0,13.1]	[0,30.8]
	[161.5,180]	[145.6,180]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.3415	[0.25,0.443]	[0.154,0.548]

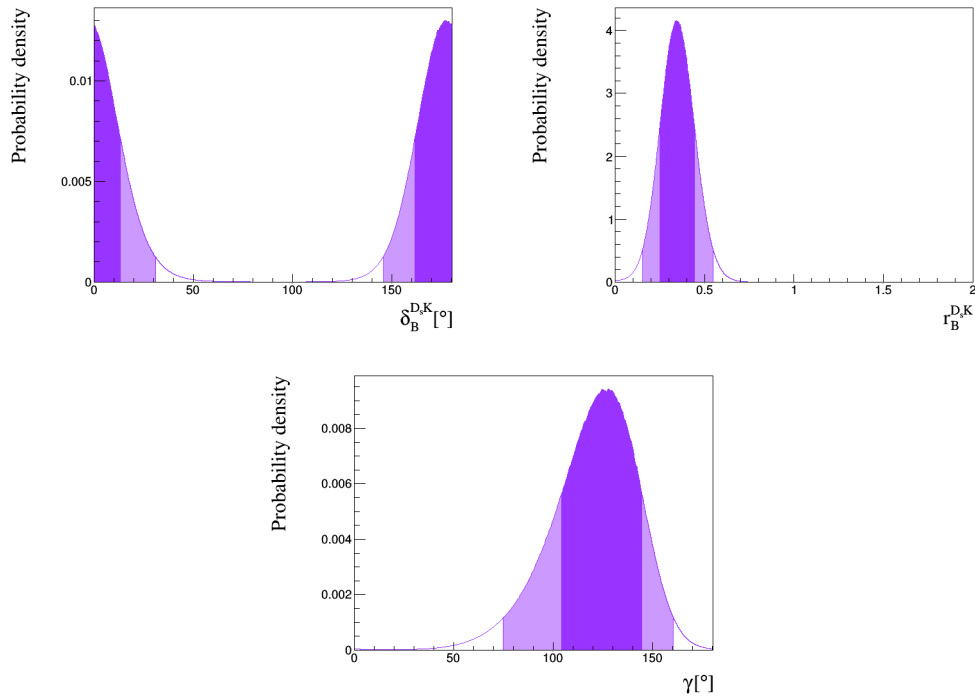


Figura 5.8: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$

Tabella 5.10: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
3.55	[0,55.7] [114.5,180]	[0,180]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
89.25	[0,37.9] [56.6,117.4] [164,180]	[0,136.9] [147.1,180]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.00005	[0,0.2056]	[0,0.4654]

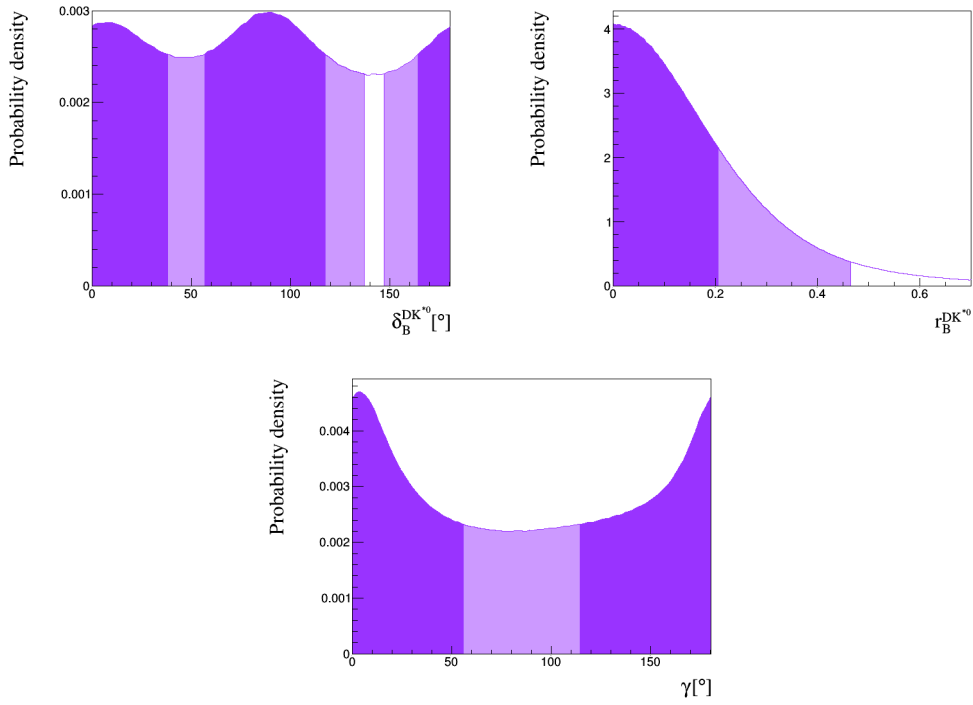


Figura 5.9: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, GGSZ

Tabella 5.11: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, GGSZ.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
76.55	[52,104.1]	[20.5,135.1]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
13.15	[0,36.9]	[27.1,43.5]
	[0,70.8]	[143.3,180]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.33635	[0.2012,0.4811]	[0.0393,0.5934]

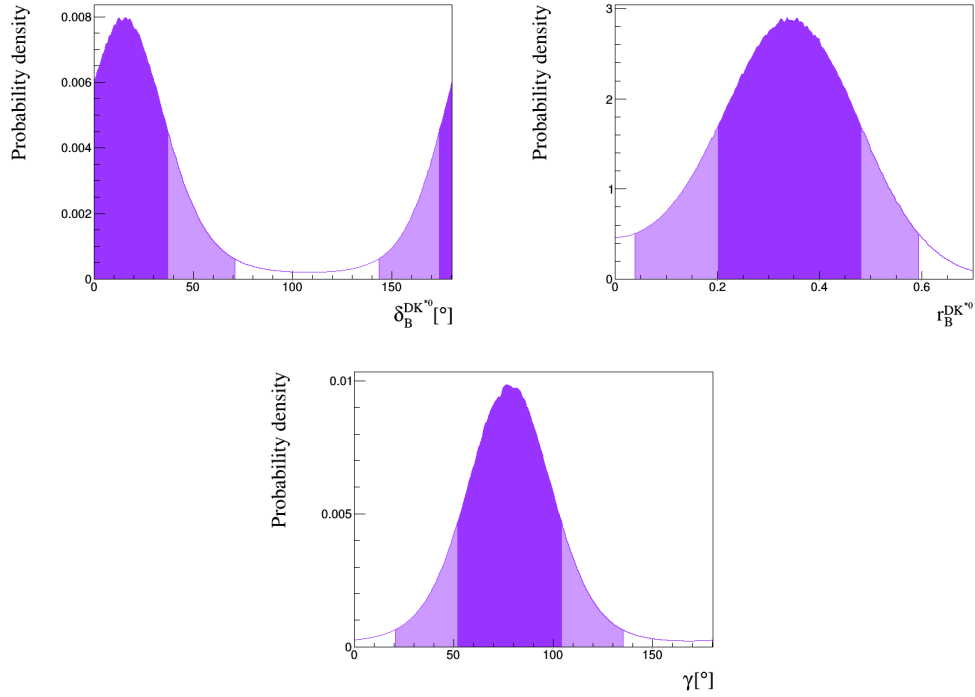


Figura 5.10: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, GGSZ. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^+ \rightarrow D^*K^+, D \rightarrow hh, \text{GLW}$

Tabella 5.12: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow D^*K^+, D \rightarrow hh, \text{GLW}$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
104.55	[47.1,146.9]	[17.2,163]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
76.45	[35.3,128.8]	[17,160.1]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.14405	[0.0901,0.2121]	[0.0629,0.3289]

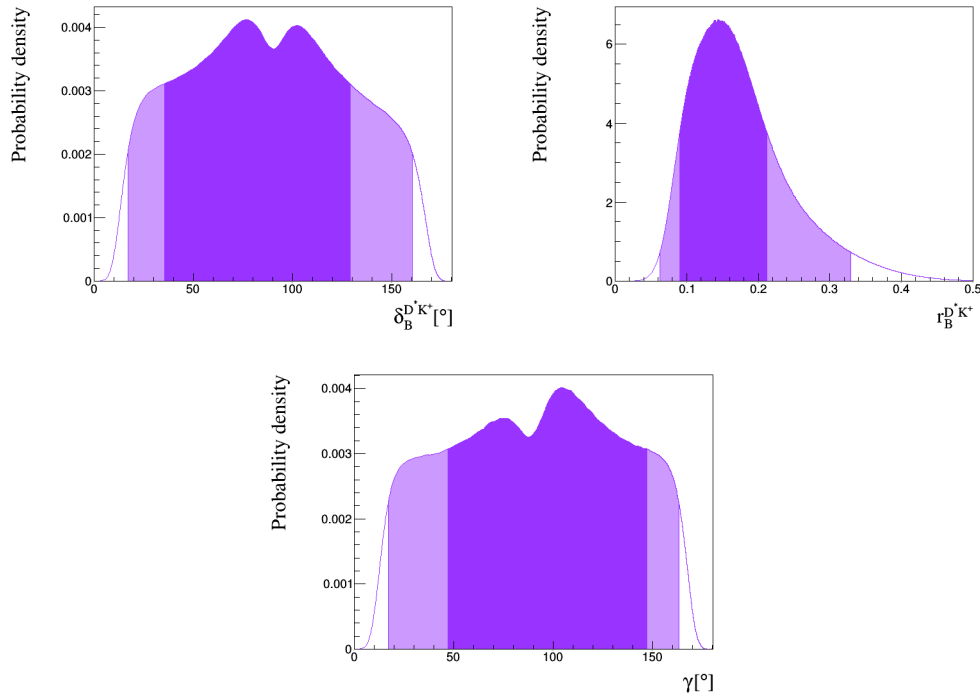


Figura 5.11: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow D^*K^+, D \rightarrow hh, \text{GLW}$. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

$B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh, \text{GLW/ADS}$

Tabella 5.13: Valori più probabili ed intervalli di credibilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh, \text{GLW/ADS}$.

γ ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
100.95	[54.4,141.6]	[15.3,175.1]
δ_B^{DK} ($^\circ$)	68% IC	95 % IC
85.65	[40.6,126.9]	[4,164]
r_B^{DK}	68% IC	95 % IC
0.04995	[0.019,0.0724]	[0,0.0843]

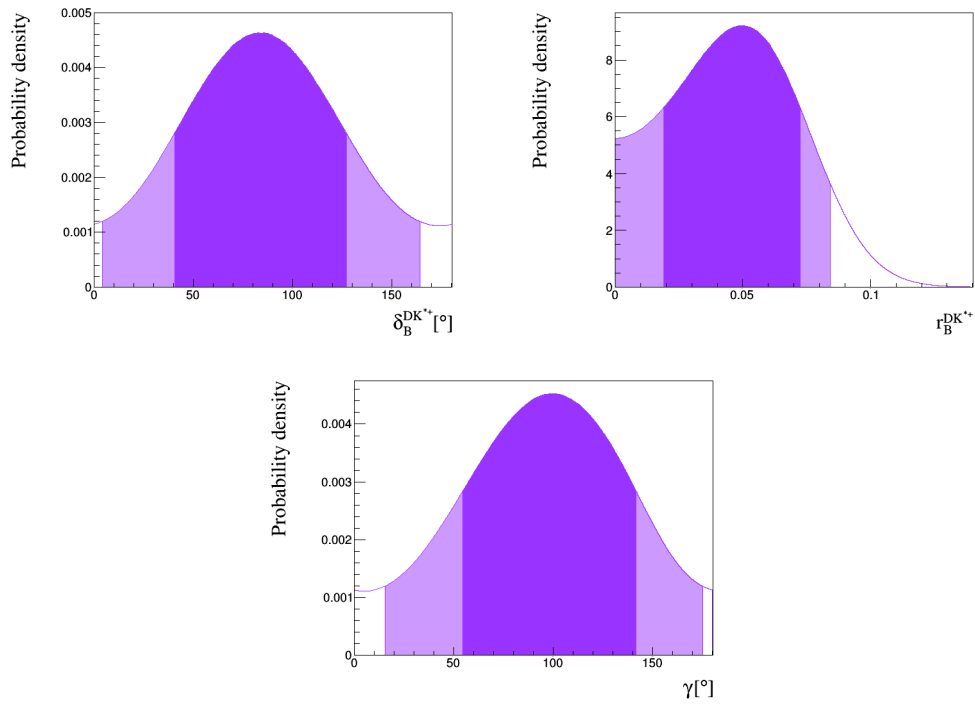


Figura 5.12: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la misurazione $B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh, \text{GLW/ADS}$. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

5.2 Sottocombinazioni

Vengono effettuate, oltre alla combinazione principale, tre sottocombinazioni, le quali combinano a gruppi di grandezza variabile le misurazioni descritte precedentemente; da ognuna di esse è possibile ricavare una stima di γ insieme ad alcune delle incognite, a seconda degli osservabili coinvolti. Le sottocombinazioni vengono chiamate:

- GLW/ADS. Include tutte le misurazioni effettuate con metodi GLW e ADS: [8], [12], [13], [14], [21], [22]. I risultati sono riportati in Tabella 5.14 e Figura 5.13; per questa sottocombinazione si sono variati i seguenti range di estrazione: $\gamma \in [0^\circ; 180^\circ]$, $\delta_B^{DK} \in [0^\circ; 180^\circ]$, $\delta_B^{D^*K^+} \in [180^\circ; 360^\circ]$, $\delta_B^{DK^{*+}} \in [0^\circ; 180^\circ]$.
- GGSZ-combo. Include le tre misurazioni effettuate con metodo GGSZ: [10], [18], [20]. I risultati sono riportati in Tabella 5.15 e Figura 5.14.
- Others. Vengono combinate le due misure rimanenti: [11], [16]. I risultati sono riportati in Tabella 5.16 e Figura 5.15.

Tabella 5.14: Valori più probabili ed intervalli di credibilità principali delle incognite per la sottocombinazione GLW/ADS.

quantità	risultato	quantità	risultato	quantità	risultato
γ ($^\circ$)	79.25	δ_B^{DK} ($^\circ$)	142.45	r_B^{DK}	0.10785
68% IC ($^\circ$)	[33.8,38.9] [70.3,87]	68% IC ($^\circ$)	[96.8,100.1] [133.2,149]	68% IC	[0.101,0.1132]
95% IC ($^\circ$)	[28.4,53.9] [58.3,91.4]	95% IC ($^\circ$)	[88.9,119] [121.2,152.3]	95% IC	[0.094,0.1183]
		$\delta_B^{DK^{*0}}$ ($^\circ$)	153.75	$r_B^{DK^{*0}}$	0.21775
		68% IC ($^\circ$)	[0,51.5] [102.6,199]	68% IC	[0.1581,0.2655]
		95% IC ($^\circ$)	[0,241.9]	95% IC	[0.0924,0.3019]
		$\delta_B^{DK\pi\pi}$ ($^\circ$)	357.05	$r_B^{DK\pi\pi}$	0,00005
		68% IC ($^\circ$)	[0,31.5] [150.8,219] [290.7,360]	68% IC	[0,0.0412]
		95% IC ($^\circ$)	[0,62.3] [115.7,360]	95% IC	[0,0.0881]
		$\delta_B^{D^*K^+}$ ($^\circ$)	337.45	$r_B^{D^*K^+}$	0.10285
		68% IC ($^\circ$)	[289,346.2]	68% IC	[0.0735,0.2097]
		95% IC ($^\circ$)	[228.8,350.6]	95% IC	[0.058,0.3295]
		$\delta_B^{DK^{*+}}$ ($^\circ$)	83.75	$r_B^{DK^{*+}}$	0.04935
		68% IC ($^\circ$)	[289,346.2]	68% IC	[0.0222,0.0709]
		95% IC ($^\circ$)	[6.1,163.4]	95% IC	[0,0.0827]

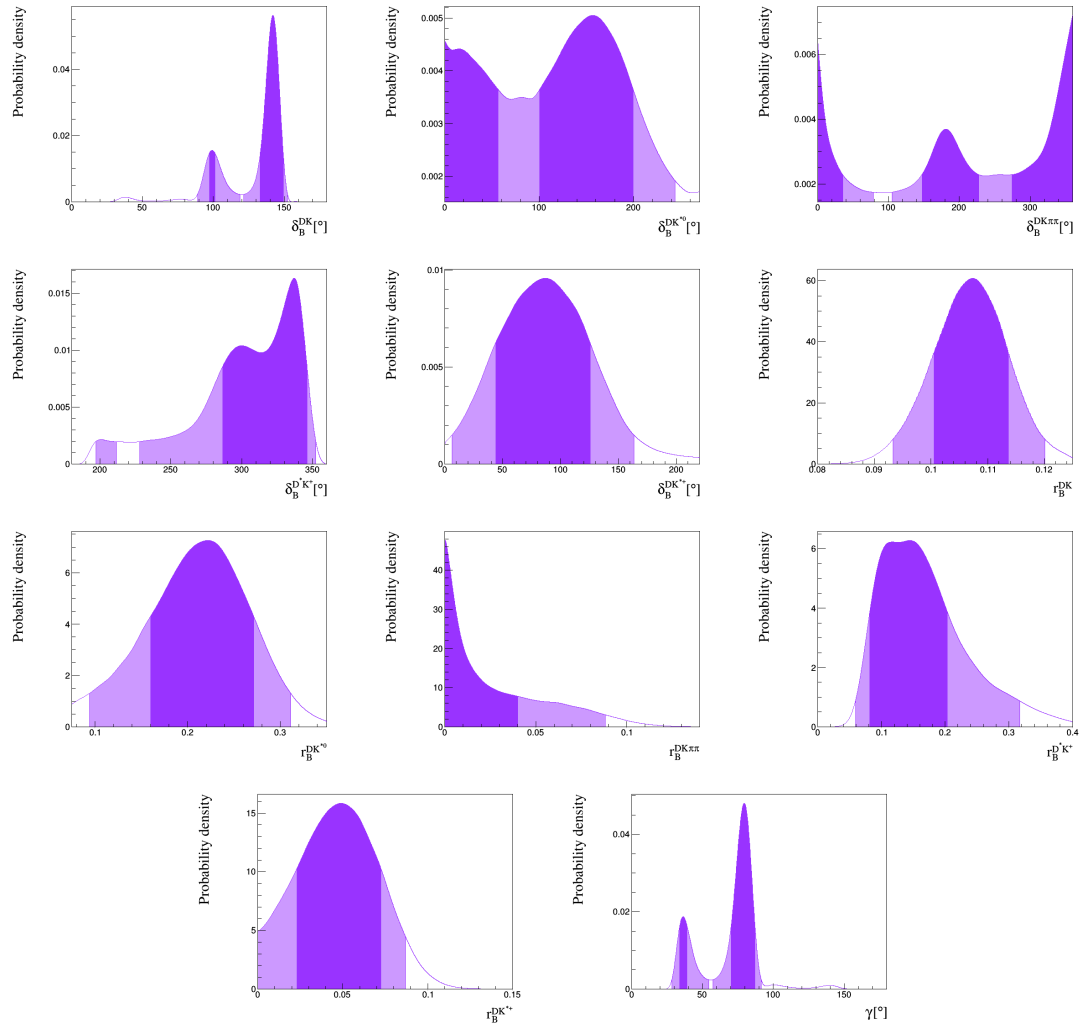


Figura 5.13: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la sottocombinazione GLW/ADS. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

Tabella 5.15: Valori più probabili ed intervalli di credibilità principali delle incognite per la sottocombinazione GGSZ-combo.

quantità	risultato	quantità	risultato	quantità	risultato
γ (°)	67.35	δ_B^{DK} (°)	133.3	r_B^{DK}	0.07305
68% IC (°)	[53.3, 81.4]	68% IC (°)	[115.1, 151.5]	68% IC	[0.0503, 0.0958]
95% IC (°)	[38.5, 95.3]	95% IC (°)	[94.6, 170.2]	95% IC	[0.0259, 0.1184]
		δ_B^{DK*0} (°)	171.15	r_B^{DK*0}	0.24805
		68% IC (°)	[0,12.4] [154.4,180]	68% IC	[0.1454,0.3583]
		95% IC (°)	[0,47.5] [131.9,180]	95% IC	[0.0307,0.4528]

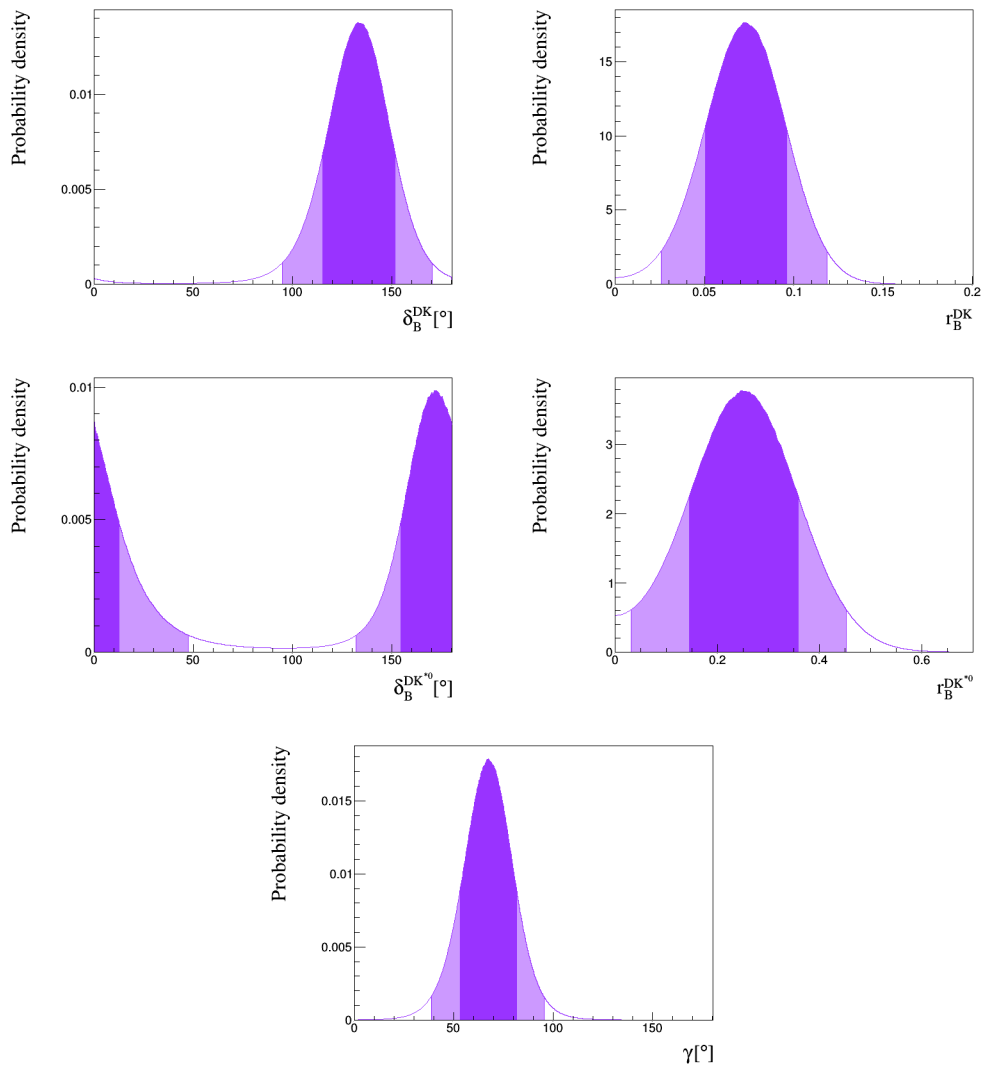


Figura 5.14: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la sottocombinazione GGSZ-combo. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

Tabella 5.16: Valori più probabili ed intervalli di credibilità principali delle incognite per la sottocombinazione Others.

quantità	risultato	quantità	risultato	quantità	risultato
γ (°)	76.25	δ_B^{DK} (°)	132.2	r_B^{DK}	0.069
68% IC (°)	[60.4, 92.1]	68% IC (°)	[113.1, 151.3]	68% IC	[0.0426, 0.0954]
95% IC (°)	[45.9, 126.4]	95% IC (°)	[73.6, 178.9]	95% IC	[0.0063, 0.1131]
		$\delta_B^{D_s K}$ (°)	176.9	$r_B^{D_s K}$	0.303
		68% IC (°)	[159.5, 174.4]	68% IC	[0.206, 0.4]
		95% IC (°)	[0, 14.2] [142.9, 180]	95% IC	[0.108, 0.507]

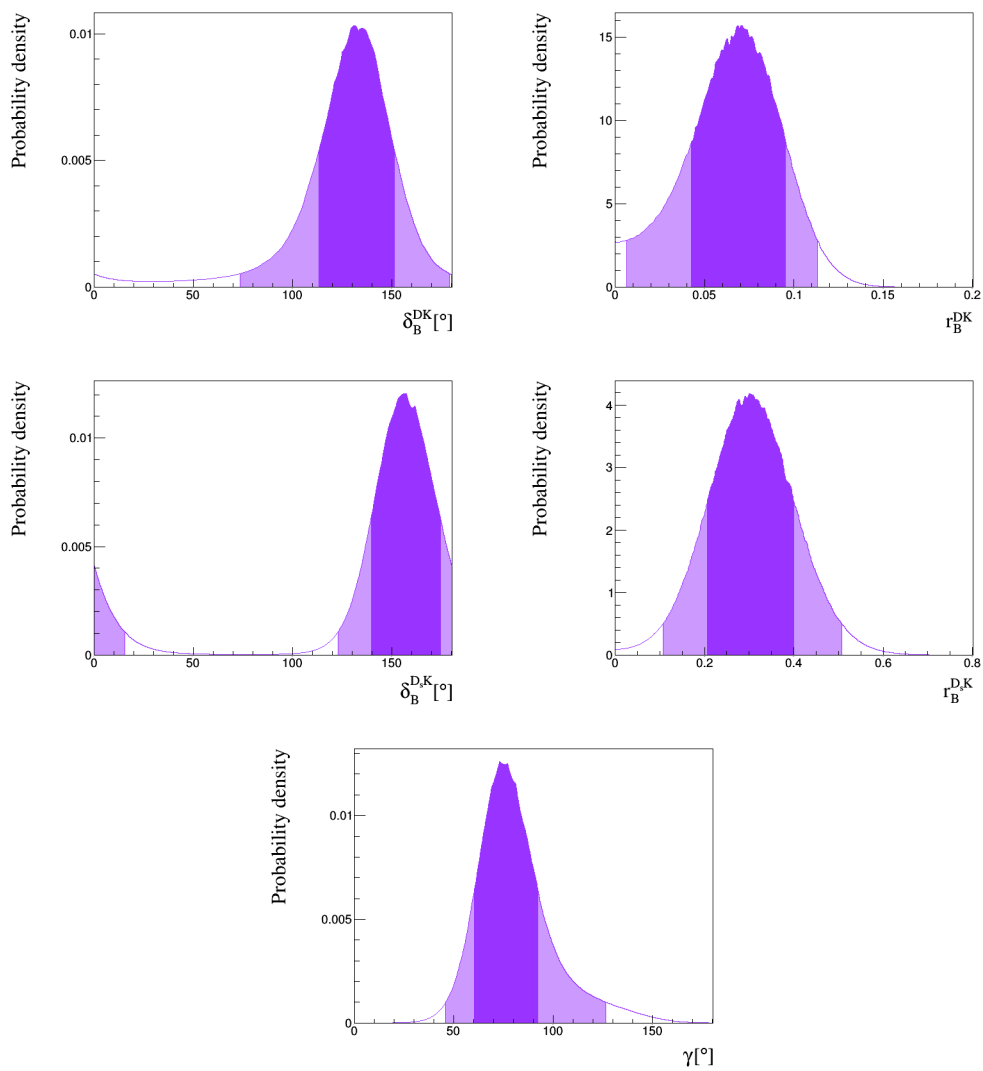


Figura 5.15: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la sottocombinazione Others. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

5.3 Combinazione

Si riportano i risultati della combinazione totale, visibili in Tabella 5.17, e Figure 5.16 e 5.17. Nelle Figure 5.18 e 5.19 sono invece riportati i confronti con misurazioni singole e sottocombinazioni. Sono stati modificati i seguenti range di estrazione: $\gamma \in [50^\circ; 120^\circ]$, $\delta_B^{DK} \in [110^\circ; 160^\circ]$, $\delta_B^{DK^{*0}} \in [130^\circ; 270^\circ]$, $\delta_B^{D_s K} \in [300^\circ; 420^\circ]$, $\delta_B^{D^* K^+} \in [180^\circ; 360^\circ]$, $\delta_B^{DK^{*+}} \in [0^\circ; 180^\circ]$, $r_B^{D_s K} \in [0; 0.6]$, $r_B^{DK} \in [0.08; 0.125]$, $r_B^{DK\pi\pi} \in [0; 0.14]$, $r_B^{DK^{*0}} \in [0.075; 0.35]$.

Tabella 5.17: Stime ed intervalli di credibilità delle incognite per la combinazione totale.

quantità	risultato	quantità	risultato	quantità	risultato
γ (°)	76.25	δ_B^{DK} (°)	139.55	r_B^{DK}	0.10365
68% CL (°)	[70.4,81.3]	68% CL (°)	[134.3,144.4]	68% CL	[0.0984,0.1093]
95% CL (°)	[62.7,85.9]	95% CL (°)	[126.9,148.5]	95% CL	[0.0927,0.1144]
		$\delta_B^{DK^{*0}}$ (°)	191.05	$r_B^{DK^{*0}}$	0.21485
		68% CL (°)	[172.8,208.3]	68% CL	[0.1764,0.267]
		95% CL (°)	[154,230.1]	95% CL	[0.1218,0.3075]
		$\delta_B^{DK\pi\pi}$ (°)	355.15	$r_B^{DK\pi\pi}$	0.00075
		68% CL (°)	[0,37.8]	68% CL	[0,0.0406]
			[144.7,224.6]		
			[293.1,360]		
		95% CL (°)	[0,69]	95% CL	[0,0.0884]
			[109.3,360]		
		$\delta_B^{D_s K}$ (°)	356.95	$r_B^{D_s K}$	0.30305
		68% CL (°)	[339.8,372.5]	68% CL	[0.2049,0.3929]
		95% CL (°)	[324.4,393.7]	95% CL	[0.1154,0.4932]
		$\delta_B^{D^* K^+}$ (°)	336.55	$r_B^{D^* K^+}$	0.09885
		68% CL (°)	[303,347.4]	68% CL	[0.0758,0.2006]
		95% CL (°)	[227.1,351.1]	95% CL	[0.0578,0.3141]
		$\delta_B^{DK^{*+}}$ (°)	100.85	$r_B^{DK^{*+}}$	0.04545
		68% CL (°)	[100,134.4]	68% CL	[0.0221,0.0703]
		95% CL (°)	[100,194.9]	95% CL	[0,0.0813]

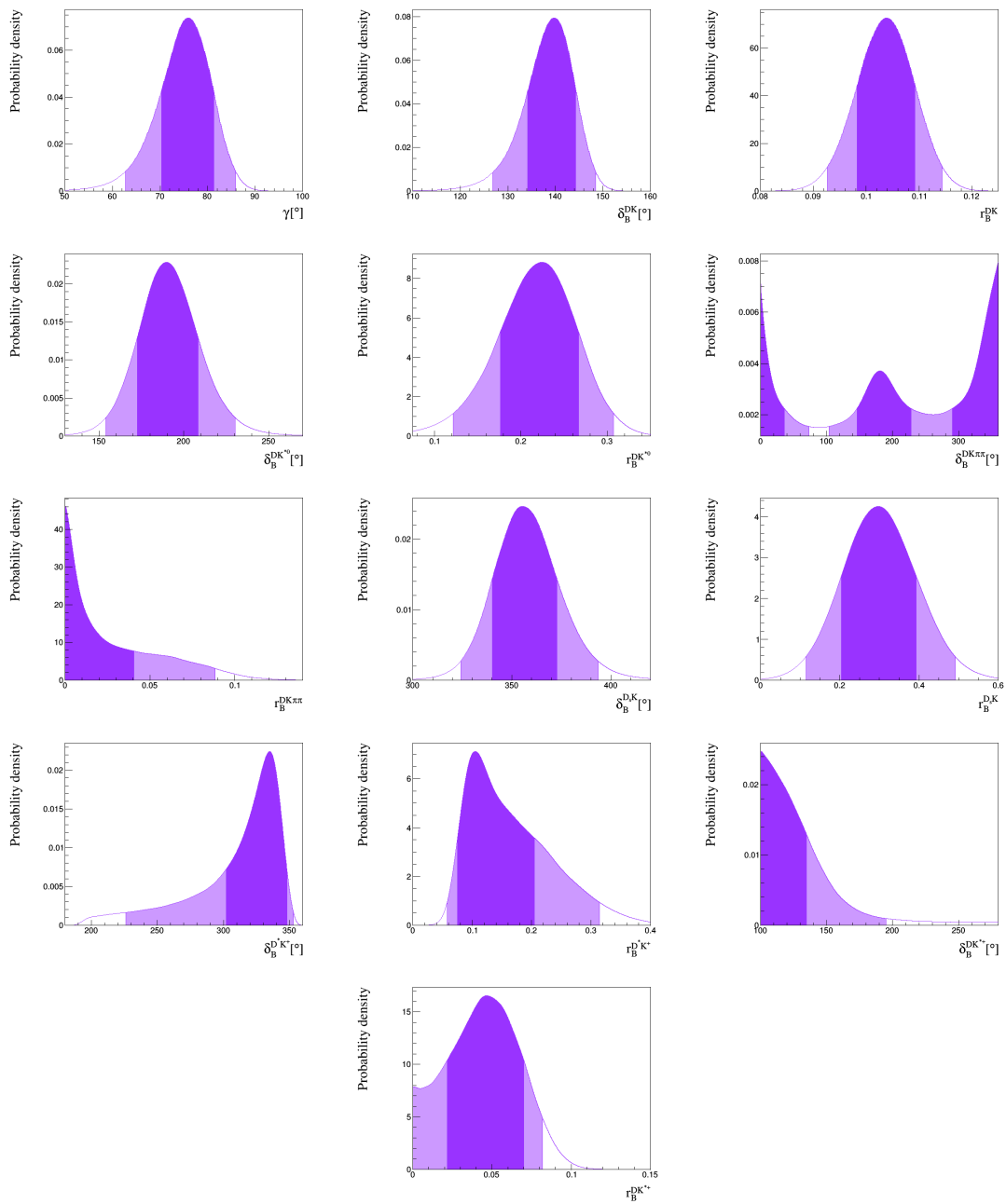


Figura 5.16: Distribuzioni di probabilità delle incognite per la combinazione totale. In viola è indicato l'intervallo di credibilità al 68%, in lilla quello al 95%.

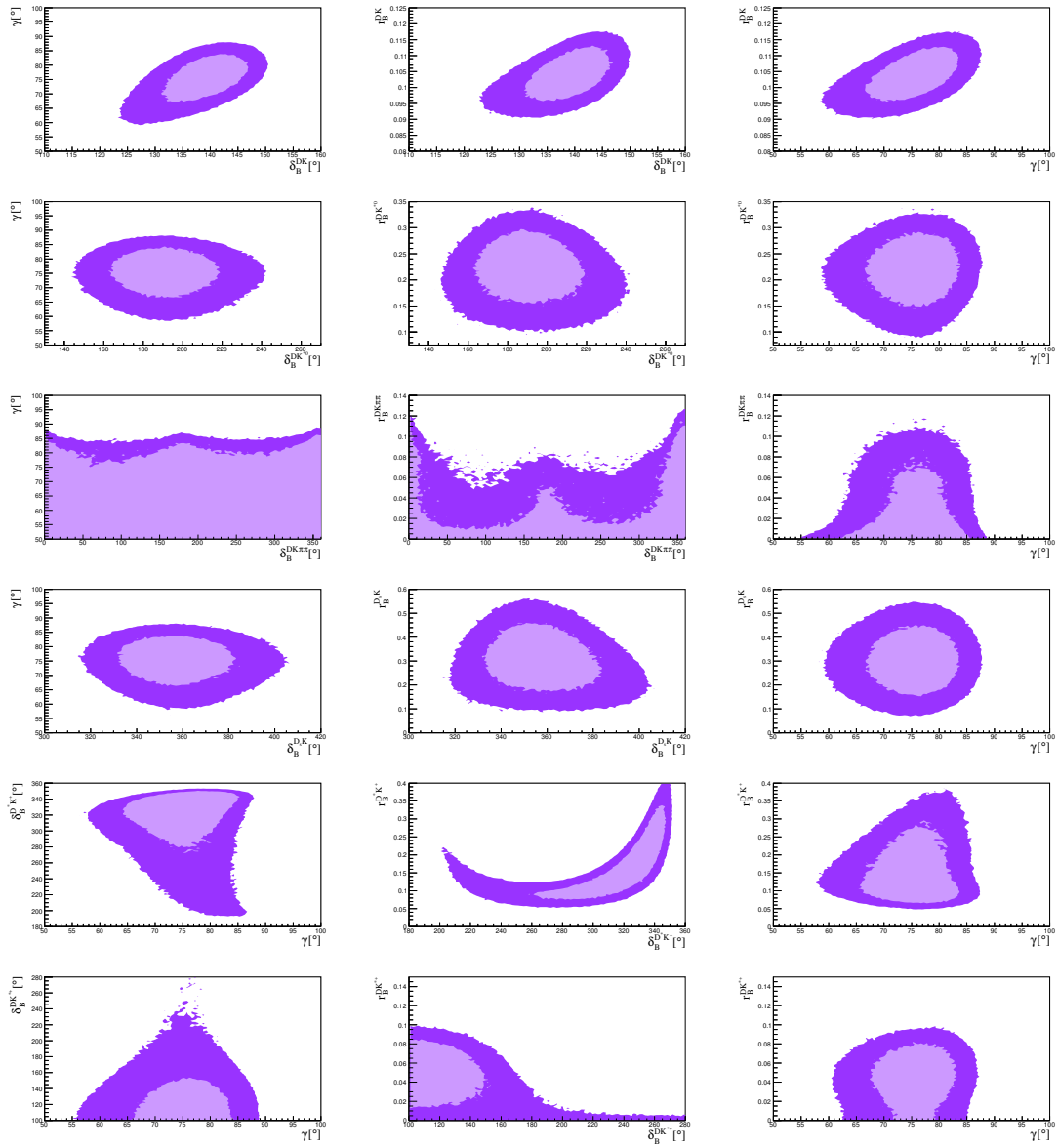


Figura 5.17: Intervalli di credibilit  in 2D delle possibili combinazioni tra γ e i vari δ ed r .

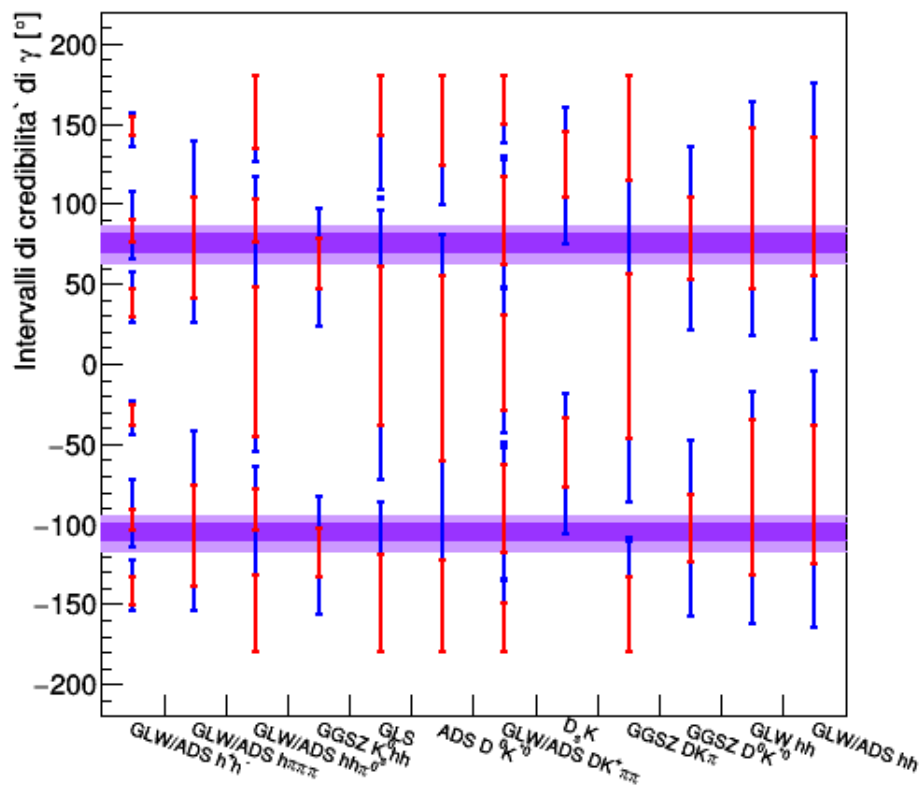


Figura 5.18: Intervalli di credibilita' di γ al 68% (rosso) e al 95% (blu) per le misurazioni singole. In viola e lilla, sullo sfondo, sono riportati gli intervalli di credibilita' rispettivamente al 68% e 95% della combinazione totale. I dati sono riportati in un intervallo di 360° .

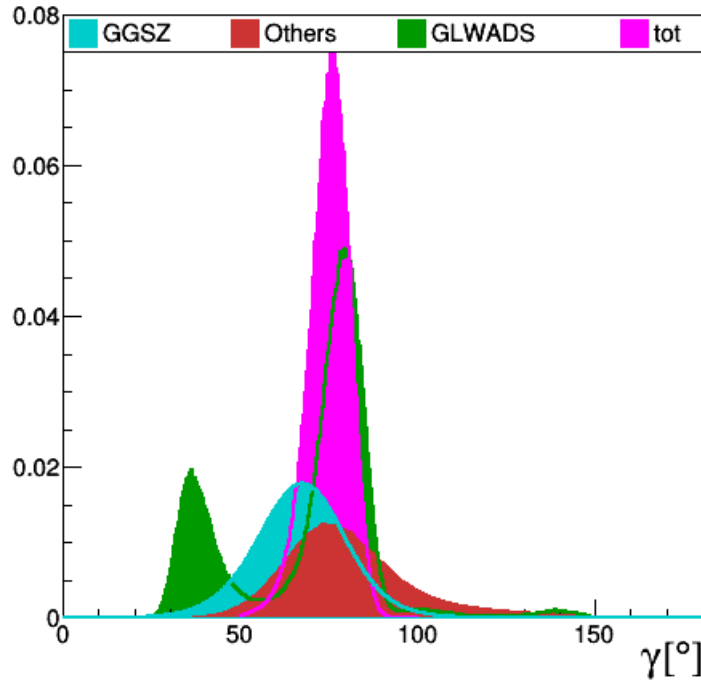


Figura 5.19: Confronto tra le distribuzioni di γ per sottocombinazioni e combinazione totale. I colori sono riportati nella legenda.

5.4 Effetto dell'aggiunta di $B^+ \rightarrow D^*K^+$ e $B^+ \rightarrow DK^{*+}$

In questa sezione si riporta il confronto tra la combinazione trattata ed una, sempre di natura bayesiana, effettuata nel 2016. La differenza tra le due risiede nell'assenza, in quella meno recente, dei dati relativi alle misurazioni $B^+ \rightarrow D^*K^+$, $D \rightarrow hh$, GLW e $B^+ \rightarrow DK^{*+}$, $D \rightarrow hh$, GLW/ADS. Questo confronto fornisce pertanto un'idea dell'effetto che hanno questi dati sui risultati della combinazione totale. Il valore di γ ottenuto nella combinazione del 2016 viene riportato, insieme a quello ricavato nella sezioine precedente, in Tabella 5.18

Tabella 5.18: Stime ed intervalli di credibilità di γ per le combinazioni 2016 e 2017.

quantità	risultato 2016	risultato 2017
γ (°)	70.25	76.25
68% CL (°)	[62.4,77.4]	[70.4,81,3]
95% CL (°)	[52.5,83.4]	[62.7,85.9]

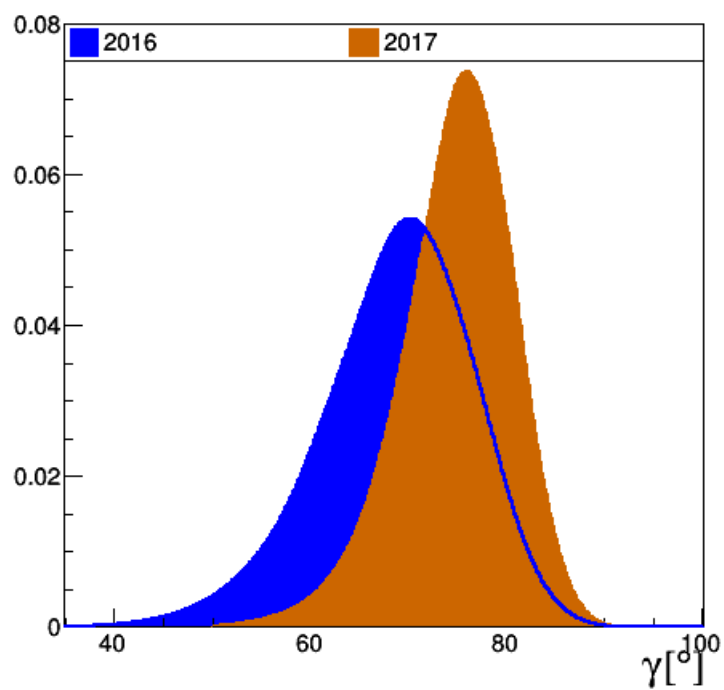


Figura 5.20: Confronto tra le distribuzioni di γ per le combinazioni 2016 e 2017.

5.5 Stime migliori con la minimizzazione del χ^2

Si riportano le stime migliori dei parametri ottenute mediante minimizzazione del χ^2 . Il procedimento è stato effettuato con il programma RooFit di ROOT.

χ^2 Parametro	Soluzione 17.9662	
	Valore	Incertezza
$A_{CP}^{dir}(KK)$	-0.00157	± 0.00137
$A_{CP}^{dir}(\pi\pi)$	0.00093	± 0.00148
$F_{KK\pi^0}$	0.73686	± 0.00549
$F_{\pi\pi\pi^0}$	0.97225	± 0.01698
$F_{\pi\pi\pi\pi}$	0.74123	± 0.02369
$\delta_D^{K3\pi}$	121.779	± 19.375
$\delta_D^{K\pi}$	190.853	± 5.579
$\delta_D^{K\pi\pi^0}$	191.825	± 13.679
$\delta_D^{K_s K\pi}$	19.2654	± 13.9541
δ_B^{DK}	139.672	± 4.603
$\delta_B^{DK\pi\pi}$	174.776	± 11.093
δ_B^{DK*0}	-170.412	± 15.855
$\delta_B^{D_s K}$	356.246	± 15.219
$\delta_B^{D^* K+}$	334.882	± 13.211
δ_B^{DK*+}	91.8490	± 46.2341
γ	76.7227	± 4.9763
$k_D^{K3\pi}$	0.36902	± 0.09924
$k_D^{K\pi\pi^0}$	0.80870	± 0.06005
$k_D^{K_s K\pi}$	0.95935	± 0.14852
$k_B^{DK\pi\pi}$	-1.43843	± 1.27662
k_B^{DK*0}	0.95781	± 0.02515
k_B^{DK*+}	0.99492	± 0.17700
ϕ_s	-13.0099	± 127.7278
$r_D^{K3\pi}$	0.05500	± 0.00057
$r_D^{K\pi}$	0.05906	± 0.00031
$r_D^{K\pi\pi^0}$	0.04476	± 0.00119
$r_D^{K_s K\pi}$	0.60691	± 0.00959
r_B^{DK}	0.10495	± 0.00530
$r_B^{DK\pi\pi}$	0.08303	± 0.03079
r_B^{DK*0}	0.23283	± 0.04218
$r_B^{D_s K}$	0.31158	± 0.09000
$r_B^{D^* K+}$	0.21107	± 0.09645
r_B^{DK*+}	0.05115	± 0.02220
x_D	0.00363	± 0.00150
y_D	0.00654	± 0.00047
Δ_B^{DK*0}	1.00497	± 6.32926
R_B^{DK*0}	1.02311	± 0.06288

Capitolo 6

Conclusioni

Sono stati combinati vari risultati ottenuti da misurazioni effettuate su decadimenti del tipo $B^+ \rightarrow DK^+$, al fine di ottenere una stima, completa di intervalli di credibilità, del parametro γ della matrice CKM. La combinazione viene detta "DK only", in quanto non tiene conto del contributo di decadimenti $B^+ \rightarrow D\pi^+$, e viene effettuata con procedimento bayesiano. Vengono stimati, oltre a γ , altri 36 parametri, combinando un totale di 79 osservabili. La migliore stima ottenuta è dunque:

$$\begin{aligned}\gamma &= (76.25_{-5.85}^{+5.05})^\circ, \quad 68\% \text{ IC} \\ \gamma &= (76.25_{-13.55}^{+9.65})^\circ, \quad 95\% \text{ IC}\end{aligned}$$

La più recente stima di γ [7], realizzata con metodo frequentista e combinazione "DK only", riporta, ad un intervallo di confidenza pari a 68.3%, il seguente risultato: $\gamma = (77.1_{-5.5}^{+4.9})^\circ$. Quest'ultimo è in accordo con il valore ricavato in questa tesi.

Appendice A

Definizioni degli osservabili

A.1 $D^0 \rightarrow h^+h^-$, GLW/ADS

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS}(K)}^{K\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^-]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^-]_D K^+)} \\
 A_{CP}^{DK, KK} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [KK]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [KK]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [KK]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [KK]_D K^+)} \\
 A_{CP}^{DK, \pi\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi]_D K^+)} \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi]_D K^+)} \\
 R_{\text{ADS}(K)}^{K\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^-]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K^- \pi^+]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K^+ \pi^-]_D K^+)} \\
 R_{CP}^{KK} &= \frac{R_{K/\pi}^{KK}}{R_{K/\pi}^{K\pi}} \\
 R_{CP}^{\pi\pi} &= \frac{R_{K/\pi}^{\pi\pi}}{R_{K/\pi}^{K\pi}}
 \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 R_{K/\pi}^{KK} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [KK]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [KK]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [KK]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [KK]_D \pi^+)} \\
 R_{K/\pi}^{\pi\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi]_D \pi^+)} \\
 R_{K/\pi}^{K\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi]_D \pi^+)}
 \end{aligned}$$

A.2 $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$, GLW/ADS-like

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS}(K)}^{K\pi\pi\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+ \pi\pi]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^- \pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+ \pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^- \pi\pi]_D K^+)} \\
 A_{CP}^{DK, \pi\pi\pi\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- \pi^+ \pi\pi]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ \pi^- \pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- \pi^+ \pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ \pi^- \pi\pi]_D K^+)} \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K3\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D K^+)} \\
 R_{\text{ADS}(K)}^{K\pi\pi\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+ \pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^- \pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K^- \pi^+ \pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K^+ \pi^- \pi\pi]_D K^+)} \\
 R_{CP}^{\pi\pi\pi\pi} &= \frac{R_{K/\pi}^{4\pi}}{R_{K/\pi}^{K3\pi}}
 \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 R_{K/\pi}^{4\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi\pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi\pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi\pi\pi]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi\pi\pi]_D \pi^+)} \\
 R_{K/\pi}^{K3\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi\pi\pi]_D \pi^+)}
 \end{aligned}$$

A.3 $D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp \pi^0$, GLW/ADS-like

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS}(K)}^{K\pi\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+ \pi^0]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^- \pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+ \pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^- \pi^0]_D K^+)} \\
 A_{CP}^{DK, KK\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K^\pm K^\mp \pi^0]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [K^\pm K^\mp \pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K^\pm K^\mp \pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K^\pm K^\mp \pi^0]_D K^+)} \\
 A_{CP}^{DK, \pi\pi\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^\pm \pi^\mp \pi^0]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^\pm \pi^\mp \pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^\pm \pi^\mp \pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^\pm \pi^\mp \pi^0]_D K^+)} \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K\pi\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K^- \pi^+ \pi^0]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [K^+ \pi^- \pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K^- \pi^+ \pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K^+ \pi^- \pi^0]_D K^+)} \\
 R_{\text{ADS}(K)}^{K\pi\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi^- K^+ \pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi^+ K^- \pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K^- \pi^+ \pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K^+ \pi^- \pi^0]_D K^+)} \\
 R_{CP}^{KK\pi^0} &= \frac{R_{K/\pi}^{KK\pi^0}}{R_{K/\pi}^{K\pi\pi^0}} \\
 R_{CP}^{\pi\pi\pi^0} &= \frac{R_{K/\pi}^{\pi\pi\pi^0}}{R_{K/\pi}^{K\pi\pi^0}}
 \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 R_{K/\pi}^{KK\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [KK\pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [KK\pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [KK\pi^0]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [KK\pi^0]_D \pi^+)} \\
 R_{K/\pi}^{\pi\pi\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi\pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi\pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi\pi^0]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi\pi^0]_D \pi^+)} \\
 R_{K/\pi}^{K\pi\pi^0} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi\pi^0]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi\pi^0]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi\pi^0]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi\pi^0]_D \pi^+)}
 \end{aligned}$$

A.4 $D \rightarrow K_s^0 K \pi$, GLS

$$\begin{aligned}
 R_{D\pi, \text{fav/sup}}^{K_S K \pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K_s^0 K \pi]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K_s^0 K \pi]_D \pi^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K_s^0 \pi K]_D \pi^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K_s^0 \pi K]_D \pi^+)} \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K_S K \pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K_s^0 K \pi]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [K_s^0 K \pi]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K_s^0 K \pi]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K_s^0 K \pi]_D K^+)} \\
 A_{\text{sup}}^{DK, K_S K \pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K_s^0 \pi K]_D K^-) - \Gamma(B^+ \rightarrow [K_s^0 \pi K]_D K^+)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K_s^0 \pi K]_D K^-) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K_s^0 \pi K]_D K^+)}
 \end{aligned}$$

A.5 $B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, ADS

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K\pi} &= \frac{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow [K\pi]_D \bar{K}^{*0}) - \Gamma(B^0 \rightarrow [K\pi]_D K^{*0})}{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow [K\pi]_D \bar{K}^{*0}) + \Gamma(B^0 \rightarrow [K\pi]_D K^{*0})} \\
 R_+^{DK^{*0}, K\pi} &= \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow [\pi K]_D K^{*0})}{\Gamma(B^0 \rightarrow [K\pi]_D K^{*0})} \\
 R_-^{DK^{*0}, K\pi} &= \frac{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow [\pi K]_D \bar{K}^{*0})}{\Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow [K\pi]_D \bar{K}^{*0})}
 \end{aligned}$$

A.6 $B^+ \rightarrow Dh^+\pi\pi$, GLW/ADS-like

$$\begin{aligned}
 R_{CP}^{DK\pi\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [hh]_D K^- \pi\pi) + \Gamma(B^+ \rightarrow [hh]_D K^+ \pi\pi)}{\Gamma(B^- \rightarrow [flv]_D K^- \pi\pi) + \Gamma(B^+ \rightarrow [flv]_D K^+ \pi\pi)} \\
 A_{\text{fav}}^{DK\pi\pi, K\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi]_D K^- \pi\pi) - \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi]_D K^+ \pi\pi)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi]_D K^- \pi\pi) + \Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi]_D K^+ \pi\pi)} \\
 A_{CP}^{DK\pi\pi, KK} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [KK]_D K^- \pi\pi) - \Gamma(B^+ \rightarrow [KK]_D K^+ \pi\pi)}{\Gamma(B^- \rightarrow [KK]_D K^- \pi\pi) + \Gamma(B^+ \rightarrow [KK]_D K^+ \pi\pi)} \\
 A_{CP}^{DK\pi\pi, \pi\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi]_D K^- \pi\pi) - \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi]_D K^+ \pi\pi)}{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi\pi]_D K^- \pi\pi) + \Gamma(B^+ \rightarrow [\pi\pi]_D K^+ \pi\pi)} \\
 R_+^{DK\pi\pi, K\pi} &= \frac{\Gamma(B^+ \rightarrow [\pi K]_D K^+ \pi\pi)}{\Gamma(B^+ \rightarrow [K\pi]_D K^+ \pi\pi)} \\
 R_-^{DK\pi\pi, K\pi} &= \frac{\Gamma(B^- \rightarrow [\pi K]_D K^- \pi\pi)}{\Gamma(B^- \rightarrow [K\pi]_D K^- \pi\pi)}
 \end{aligned}$$

Appendice B

Truth relations

B.1 $D^0 \rightarrow h^+h^-$, GLW/ADS

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi} &= \frac{2\kappa^{K\pi} r_B^K r_D^{K\pi} \sin(\delta_B^K + \delta_D^{K\pi}) \sin \gamma}{(r_B^K)^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi} r_B^K r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^K + \delta_D^{K\pi}) \cos \gamma} \\
 A_{CP}^{DK, KK} &= A_{CP}^{DK, \pi\pi} = \frac{2r_B^K \sin \delta_B^K \sin \gamma}{1 + (r_B^K)^2 + 2r_B^K \cos \delta_B^K \cos \gamma} \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K\pi} &= \frac{2\kappa^{K\pi} r_B^K r_D^{K\pi} \sin(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi}) \sin \gamma}{1 + (r_B^K r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi} r_B^K r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi}) \cos \gamma} \\
 R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi} &= \frac{(r_B^K)^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi} r_B^K r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^K + \delta_D^{K\pi}) \cos \gamma}{1 + (r_B^K r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi} r_B^K r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi}) \cos \gamma} \\
 R_{CP}^{KK} &= 1 + (r_B^{DK})^2 + 2r_B^{DK} \cos(\delta_B^{DK}) \cos(\gamma) \\
 R_{CP}^{\pi\pi} &= 1 + (r_B^{DK})^2 + 2r_B^{DK} \cos(\delta_B^{DK}) \cos(\gamma)
 \end{aligned}$$

B.2 $D^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp \pi^+ \pi^-$, ADS

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi} &= \frac{2\kappa^{K\pi\pi\pi} r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi} \sin(\delta_B^K + \delta_D^{K\pi\pi\pi}) \sin \gamma}{(r_B^K)^2 + (r_D^{K\pi\pi\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi\pi\pi} r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi} \cos(\delta_B^K + \delta_D^{K\pi\pi\pi}) \cos \gamma} \\
 A_{CP}^{DK,\pi\pi\pi} &= A_{CP}^{DK,\pi\pi} = \frac{2r_B^K \sin \delta_B^K \sin \gamma}{1 + (r_B^K)^2 + 2r_B^K \cos \delta_B^K \cos \gamma} \\
 A_{\text{fav}}^{DK,K3\pi} &= \frac{2\kappa^{K\pi\pi\pi} r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi} \sin(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi\pi\pi}) \sin \gamma}{1 + (r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi\pi\pi} r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi} \cos(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi\pi\pi}) \cos \gamma} \\
 R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi} &= \frac{(r_B^K)^2 + (r_D^{K\pi\pi\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi\pi\pi} r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi} \cos(\delta_B^K + \delta_D^{K\pi\pi\pi}) \cos \gamma}{1 + (r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi})^2 + 2\kappa^{K\pi\pi\pi} r_B^K r_D^{K\pi\pi\pi} \cos(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi\pi\pi}) \cos \gamma} \\
 R_{CP}^{\pi\pi\pi\pi} &= 1 + (r_B^K)^2 + 2r_B^K \cos \delta_B^K \cos \gamma
 \end{aligned}$$

B.3 $D^0 \rightarrow h^\pm h^\mp \pi^0$, ADS

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0} &= 2 \frac{\kappa_{K\pi\pi^0}^D r_B^K r_D \sin(\delta_B^K + \delta_D) \sin \gamma}{R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi\pi}} \\
 A_{CP}^{DK,KK\pi^0} &= \frac{2 \left(2F_+^{KK\pi^0} - 1 \right) r_B^K \sin \delta_B^K \sin \gamma}{1 + (r_B^K)^2 + 2 \left(2F_+^{KK\pi^0} - 1 \right) r_B^K \cos \delta_B^K \cos \gamma} \\
 A_{CP}^{DK,\pi\pi\pi^0} &= \frac{2 \left(2F_+^{\pi\pi\pi^0} - 1 \right) r_B^K \sin \delta_B^K \sin \gamma}{1 + (r_B^K)^2 + 2 \left(2F_+^{\pi\pi\pi^0} - 1 \right) r_B^K \cos \delta_B^K \cos \gamma} \\
 A_{\text{fav}}^{DK,K\pi\pi^0} &= \frac{2\kappa_{K\pi\pi^0}^D r_B^K r_D^{K\pi\pi^0} \sin(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi\pi^0}) \sin \gamma}{1 + (r_B^K r_D^{K\pi\pi^0})^2 + 2\kappa_{K\pi\pi^0}^D r_B^K r_D^{K\pi\pi^0} \cos(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi\pi^0}) \cos \gamma} \\
 R_{\text{ADS(K)}}^{K\pi\pi^0} &= \frac{(r_B^K)^2 + (r_D^{K\pi\pi^0})^2 + 2\kappa_{K\pi\pi^0}^D r_B^K r_D^{K\pi\pi^0} \cos(\delta_B^K + \delta_D^{K\pi\pi^0}) \cos \gamma}{1 + (r_B^K r_D^{K\pi\pi^0})^2 + 2\kappa_{K\pi\pi^0}^D r_B^K r_D^{K\pi\pi^0} \cos(\delta_B^K - \delta_D^{K\pi\pi^0}) \cos \gamma} \\
 R_{CP}^{KK\pi^0} &= 1 + (r_B^K)^2 + 2 \left(2F_+^{KK\pi^0} - 1 \right) r_B^K \cos \delta_B^K \cos \gamma \\
 R_{CP}^{\pi\pi\pi^0} &= 1 + (r_B^K)^2 + 2 \left(2F_+^{\pi\pi\pi^0} - 1 \right) r_B^K \cos \delta_B^K \cos \gamma
 \end{aligned}$$

B.4 $D^0 \rightarrow K_S^0 h^+ h^-$, GGSZ

$$\begin{aligned}
 x_- &= r_B^{DK} \cos(\delta_B^{DK} - \gamma) \\
 y_- &= r_B^{DK} \sin(\delta_B^{DK} - \gamma) \\
 x_+ &= r_B^{DK} \cos(\delta_B^{DK} + \gamma) \\
 y_+ &= r_B^{DK} \sin(\delta_B^{DK} + \gamma)
 \end{aligned}$$

B.5 $D \rightarrow K_S^0 K \pi$, GLS

$$\begin{aligned}
 R_{DK, \text{fav/sup}}^{K_S K \pi} &= \frac{1 + (r_B^{DK})^2 (r_D^{K_S K \pi})^2 + 2\kappa_D^{K_S K \pi} r_B^{DK} r_D^{K_S K \pi} \cos(\delta_B^{DK} - \delta_D^{K_S K \pi}) \cos \gamma}{(r_B^{DK})^2 + (r_D^{K_S K \pi})^2 + 2\kappa_D^{K_S K \pi} r_B^{DK} r_D^{K_S K \pi} \cos(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K_S K \pi}) \cos \gamma} \\
 A_{\text{fav}}^{DK, K_S K \pi} &= \frac{2\kappa_D^{K_S K \pi} r_B^{DK} r_D^{K_S K \pi} \sin(\delta_B^{DK} - \delta_D^{K_S K \pi}) \sin \gamma}{1 + (r_B^{DK})^2 (r_D^{K_S K \pi})^2 + 2\kappa_D^{K_S K \pi} r_B^{DK} r_D^{K_S K \pi} \cos(\delta_B^{DK} - \delta_D^{K_S K \pi}) \cos \gamma} \\
 A_{\text{sup}}^{DK, K_S K \pi} &= \frac{2\kappa_D^{K_S K \pi} r_B^{DK} r_D^{K_S K \pi} \sin(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K_S K \pi}) \sin \gamma}{(r_B^{DK})^2 + (r_D^{K_S K \pi})^2 + 2\kappa_D^{K_S K \pi} r_B^{DK} r_D^{K_S K \pi} \cos(\delta_B^{DK} + \delta_D^{K_S K \pi}) \cos \gamma}
 \end{aligned}$$

B.6 $B^0 \rightarrow D^0 K^{*0}$, ADS

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fav}}^{DK^{*0}, K \pi} &= \frac{2\kappa_B^{DK^{*0}} r_B^{DK^{*0}} r_D^{K \pi} \sin(\delta_B^{DK^{*0}} - \delta_D^{K \pi}) \sin \gamma}{1 + (r_B^{DK^{*0}})^2 (r_D^{K \pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*0}} r_B^{DK^{*0}} r_D^{K \pi} \cos(\delta_B^{DK^{*0}} - \delta_D^{K \pi}) \cos \gamma} \\
 R_+^{DK^{*0}, K \pi} &= \frac{(r_B^{DK^{*0}})^2 + (r_D^{K \pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*0}} r_B^{DK^{*0}} r_D^{K \pi} \cos(\delta_B^{DK^{*0}} + \delta_D^{K \pi} + \gamma)}{1 + (r_B^{DK^{*0}})^2 (r_D^{K \pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*0}} r_B^{DK^{*0}} r_D^{K \pi} \cos(\delta_B^{DK^{*0}} - \delta_D^{K \pi} + \gamma)} \\
 R_-^{DK^{*0}, K \pi} &= \frac{(r_B^{DK^{*0}})^2 + (r_D^{K \pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*0}} r_B^{DK^{*0}} r_D^{K \pi} \cos(\delta_B^{DK^{*0}} + \delta_D^{K \pi} - \gamma)}{1 + (r_B^{DK^{*0}})^2 (r_D^{K \pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*0}} r_B^{DK^{*0}} r_D^{K \pi} \cos(\delta_B^{DK^{*0}} - \delta_D^{K \pi} - \gamma)}
 \end{aligned}$$

B.7 $B^+ \rightarrow Dh^+\pi\pi$, GLW/ADS

$$\begin{aligned}
 R_{CP}^{DK\pi\pi} &= 1 + (r_B^{DK\pi\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} \cos \delta_B^{DK\pi\pi} \cos \gamma \\
 A_{\text{fav}}^{DK\pi\pi, K\pi} &= \frac{2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} r_D^{K\pi} \sin(\delta_B^{DK\pi\pi} - \delta_D^{K\pi}) \sin \gamma}{1 + (r_B^{DK\pi\pi})^2 (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK\pi\pi} - \delta_D^{K\pi}) \cos \gamma} \\
 A_{CP}^{DK\pi\pi, KK} &= \frac{2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} \sin \delta_B^{DK\pi\pi} \sin \gamma}{1 + (r_B^{DK\pi\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} \cos \delta_B^{DK\pi\pi} \cos \gamma} + A_{CP}^{\text{dir}}(KK) \\
 A_{CP}^{DK\pi\pi, \pi\pi} &= \frac{2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} \sin \delta_B^{DK\pi\pi} \sin \gamma}{1 + (r_B^{DK\pi\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} \cos \delta_B^{DK\pi\pi} \cos \gamma} + A_{CP}^{\text{dir}}(\pi\pi) \\
 R_+^{DK\pi\pi, K\pi} &= \frac{(r_B^{DK\pi\pi})^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK\pi\pi} + \delta_D^{K\pi} + \gamma)}{1 + (r_B^{DK\pi\pi})^2 (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK\pi\pi} - \delta_D^{K\pi} + \gamma)} \\
 R_-^{DK\pi\pi, K\pi} &= \frac{(r_B^{DK\pi\pi})^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK\pi\pi} + \delta_D^{K\pi} - \gamma)}{1 + (r_B^{DK\pi\pi})^2 (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK\pi\pi} r_B^{DK\pi\pi} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK\pi\pi} - \delta_D^{K\pi} - \gamma)}
 \end{aligned}$$

B.8 $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$, dipendenza dal tempo

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1 - (r_B^{D_s K})^2}{1 + (r_B^{D_s K})^2} \\
 D_f &= \frac{2r_B^{D_s K} \cos(\Delta - (\gamma + \phi_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2} \\
 D_{\bar{f}} &= \frac{2r_B^{D_s K} \cos(\Delta + (\gamma + \phi_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2} \\
 S_f &= \frac{2r_B^{D_s K} \sin(\Delta - (\gamma + \phi_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2} \\
 S_{\bar{f}} &= \frac{2r_B^{D_s K} \sin(\Delta + (\gamma + \phi_s))}{1 + (r_B^{D_s K})^2}
 \end{aligned}$$

B.9 $B^0 \rightarrow DK^+\pi^-$

$$\begin{aligned}
 x_- &= r_B^{DK^*0} \cos(\delta_B^{DK^*0} - \gamma) \\
 y_- &= r_B^{DK^*0} \sin(\delta_B^{DK^*0} - \gamma) \\
 x_+ &= r_B^{DK^*0} \cos(\delta_B^{DK^*0} + \gamma) \\
 y_+ &= r_B^{DK^*0} \sin(\delta_B^{DK^*0} + \gamma)
 \end{aligned}$$

B.10 $B^+ \rightarrow D^* K^+, D \rightarrow hh$, GLW

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fav}}^{D\gamma, K\pi} &= \frac{-2r_B^{D^*K^+} r_D^{K\pi} \sin(\delta_B^{D^*K^+} - \delta_D^{K\pi}) \sin(\gamma)}{1 + (r_B^{D^*K^+} r_D^{K\pi})^2 - 2r_B^{D^*K^+} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{D^*K^+} - \delta_D^{K\pi}) \cos(\gamma)} \\
 A_{\text{fav}}^{D\pi^0, K\pi} &= \frac{2r_B^{D^*K^+} r_D^{K\pi} \sin(\delta_B^{D^*K^+} - \delta_D^{K\pi}) \sin(\gamma)}{1 + (r_B^{D^*K^+} r_D^{K\pi})^2 + 2r_B^{D^*K^+} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{D^*K^+} - \delta_D^{K\pi}) \cos(\gamma)} \\
 A_{CP}^{D\gamma} &= \frac{-2r_B^{D^*K^+} \sin(\delta_B^{D^*K^+}) \sin(\gamma)}{1 + (r_B^{D^*K^+})^2 - 2r_B^{D^*K^+} \cos(\delta_B^{D^*K^+}) \cos(\gamma)} + A_{CP}^{\text{dir}}(hh) \\
 A_{CP}^{D\pi^0} &= \frac{2r_B^{D^*K^+} \sin(\delta_B^{D^*K^+}) \sin(\gamma)}{1 + (r_B^{D^*K^+})^2 + 2r_B^{D^*K^+} \cos(\delta_B^{D^*K^+}) \cos(\gamma)} + A_{CP}^{\text{dir}}(hh) \\
 R_{CP}^{D\gamma} &= 1 + (r_B^{D^*K^+})^2 - 2r_B^{D^*K^+} \cos(\delta_B^{D^*K^+}) \cos(\gamma) \\
 R_{CP}^{D\pi^0} &= 1 + (r_B^{D^*K^+})^2 + 2r_B^{D^*K^+} \cos(\delta_B^{D^*K^+}) \cos(\gamma)
 \end{aligned}$$

B.11 $B^+ \rightarrow DK^{*+}, D \rightarrow hh$, GLW/ADS

$$\begin{aligned}
 A_{\text{fav}}^{DK^{*+}, K\pi} &= \frac{2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi} \sin(\delta_B^{DK^{*+}} - \delta_D^{K\pi}) \sin(\gamma)}{1 + (r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK^{*+}} - \delta_D^{K\pi}) \cos(\gamma)} \\
 A_{CP}^{DK^{*+}, KK} &= \frac{2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} \sin(\delta_B^{DK^{*+}}) \sin(\gamma)}{1 + (r_B^{DK^{*+}})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} \cos(\delta_B^{DK^{*+}}) \cos(\gamma)} + A_{CP}^{\text{dir}}(KK) \\
 A_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi} &= \frac{2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} \sin(\delta_B^{DK^{*+}}) \sin(\gamma)}{1 + (r_B^{DK^{*+}})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} \cos(\delta_B^{DK^{*+}}) \cos(\gamma)} + A_{CP}^{\text{dir}}(\pi\pi) \\
 R_{CP}^{DK^{*+}, KK} &= 1 + (r_B^{DK^{*+}})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} \cos(\delta_B^{DK^{*+}}) \cos(\gamma) \\
 R_{CP}^{DK^{*+}, \pi\pi} &= 1 + (r_B^{DK^{*+}})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} \cos(\delta_B^{DK^{*+}}) \cos(\gamma) \\
 R_+^{DK^{*+}, K\pi} &= \frac{(r_B^{DK^{*+}})^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK^{*+}} + \delta_D^{K\pi} + \gamma)}{1 + (r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK^{*+}} - \delta_D^{K\pi} + \gamma)} \\
 R_-^{DK^{*+}, K\pi} &= \frac{(r_B^{DK^{*+}})^2 + (r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK^{*+}} + \delta_D^{K\pi} - \gamma)}{1 + (r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi})^2 + 2\kappa_B^{DK^{*+}} r_B^{DK^{*+}} r_D^{K\pi} \cos(\delta_B^{DK^{*+}} - \delta_D^{K\pi} - \gamma)}
 \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Braibant S., Giacomelli G. e Spurio M., *Particelle e interazioni fondamentali*, Milano, Springer, II edizione, 2012.
- [2] Pagani L., *Misura dell'angolo γ a LHCb*, Bologna, 2015.
- [3] L. Evans and P. Bryant, *LHC Machine*, JINST 3 (2008) S08001.
- [4] LHCb collaboration, *The LHCb Detector at the LHC*, 2008.
- [5] LHCb collaboration, *LHCb γ Combination 2015 update*, LHCb-ANA-2015-046.
- [6] LHCb collaboration, *Measurement of the CKM angle γ from a combination of LHCb results*, LHCb-PAPER-2016-032.
- [7] LHCb collaboration, *Measurement of the CKM angle γ from a combination of $B \rightarrow DK$ analyses*, LHCb-CONF-2017-004.
- [8] LHCb collaboration, *Analysis of $B^\pm \rightarrow Dh^\pm$ with $D \rightarrow K\pi, KK, \pi\pi, K\pi\pi, \pi\pi\pi$ final states. 3fb^{-1} update*, LHCb-ANA-2014-071.
- [9] Hussain, N and John, M and Thomas, C and Wilkinson, Guy, *Search for the suppressed ADS modes $B^\pm \rightarrow (\pi^\pm K^\mp \pi^0)_D h^\pm$* , LHCb-ANA-2013-075.
- [10] LHCb collaboration, Aaij, R. and others, *Measurement of the CKM angle γ using $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ with $D \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$, $K_S^0 K^+ K^-$ decays*, JHEP 10 (2014) 097.
- [11] LHCb collaboration, Aaij, Roel and others, *A study of CP violation in $B^\pm \rightarrow DK^\pm$ and $B^\pm \rightarrow D\pi^\pm$ decays with $D \rightarrow K_S^0 K^\pm \pi^\mp$ final states*, Phys. Lett. B733 (2014) 36.
- [12] LHCb collaboration, *A study of CP violation in $B^\mp \rightarrow Dh^\mp$ ($h = K, \pi$) with the modes $D \rightarrow K^\mp \pi^\pm \pi^0$, $D \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ and $D \rightarrow K^+ K^- \pi^0$* , Phys. Rev. D91 (2015) 112014.
- [13] LHCb collaboration, Aaij, R. and others, *Measurement of CP violation parameters in $B^0 \rightarrow DK^{*0}$ decays*, Phys. Rev. D90 (2014) 112002.
- [14] LHCb collaboration, *Study of $B^- \rightarrow DK^- \pi^+ \pi^-$ and $B^- \rightarrow D\pi^- \pi^+ \pi^-$ decays and determination of the CKM angle γ* , Phys. Rev. D92 (2015) 112005.

- [15] LHCb collaboration, *ADS+GLW Analysis of the Decays $B^- \rightarrow D^0 K^- \pi^+ \pi^-$ and $B^- \rightarrow D^0 \pi^- \pi^+ \pi^-$ with $D^0 \rightarrow K^+ K^-$, $\pi^+ \pi^-$, and $K^\pm \pi^\mp$ in 3fb^{-1} of 2011 and 2012 data*, LHCb-ANA-2014-011.
- [16] LHCb collaboration, *Measurement of CP asymmetry in $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$ decays*, LHCb-CONF-2016-015.
- [17] S. Cheung and S. Malde and G. Wilkinson, *The measurement of the CKM angle γ using the decays $B^0 \rightarrow D[K_S^0 \pi \pi] K^{*0}$ and $B^0 \rightarrow D[K_S^0 K K] K^{*0}$* , LHCb-ANA-2015-060.
- [18] LHCb collaboration, *Measurement of γ with an amplitude analysis of $B^0 \rightarrow DK^+ \pi^-$ decays*, LHCb-ANA-2015-024.
- [19] S. Cheung and S. Malde and G. Wilkinson, *The measurement of the CKM angle γ using the decays $B^0 \rightarrow D[K_S^0 \pi \pi] K^{*0}$ and $B^0 \rightarrow D[K_S^0 K K] K^{*0}$* , LHCb-ANA-2015-060.
- [20] J. Garra Ticó and V. Gibson and S.C. Haines and F. Machefert and J. Smith and A. Vallier, *Measurement of CP violation observables and constraints on the CKM angle γ using the decay $B^0 \rightarrow D(K_S^0 \pi^+ \pi^-) K^{*0}$ decays*, LHCb-ANA-2014-105.
- [21] LHCb collaboration, *Measurement of CP observables in $B^\pm \rightarrow D^{(*)0} K^\pm$ and $B^\pm \rightarrow D^{(*)0} \pi^\pm$ with $D^0 \rightarrow K \pi, K K, \pi \pi$ decays*, LHCb-PAPER-2017-021.
- [22] LHCb collaboration, *Measurement of CP asymmetry in $B_s^0 \rightarrow D_s^\mp K^\pm$ decays*, LHCb-CONF-2016-015.
- [23] Malde, S. and Thomas, C. and Wilkinson, G. and Naik, P. and Prouve, C. and Rademacker, J. and Libby, J. and Nayak, M. and Gershon, T. and Briere, R. A., *First determination of the CP content of $D \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-$ and updated determination of the CP contents of $D \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ and $D \rightarrow K^+ K^- \pi^0$* , Phys. Lett. B747 (2015) 9.
- [24] CLEO collaboration, *Studies of the decays $D^0 \rightarrow K_S^0 K^- \pi^+$ and $D^0 \rightarrow K_S^0 K^+ \pi^-$* , Phys. Rev. D85 (2012) 092016.
- [25] LHCb collaboration, *Precision measurement of CP violation in $B_s^0 \rightarrow J/\psi K^+ K^-$ decays*, Phys. Rev. Lett. 114 (2015) 041801.
- [26] D'Agostini G., *Bayesian Inference in Processing Experimental Data; Principles and Basic Applications*, Roma, 2003.
- [27] Regis M., *Introduzione alla statistica bayesiana*, Torino, 2015.