

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

**METODI PERTURBATIVI PER
E.D.P.
E APPLICAZIONI
IN FINANZA MATEMATICA**

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche
applicate alla Finanza

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
STEFANO
PAGLIARANI

Seconda Sessione
Anno Accademico 2009-2010

ai miei genitori ...

Introduzione

In questa tesi si vuole discutere di alcuni modelli di pricing per opzioni di tipo europeo, e di opportuni metodi perturbativi che permettono di trovare delle approssimazioni soddisfacenti dei prezzi e delle volatilità implicite relative a questi modelli.

Un derivato è un titolo finanziario il cui valore dipende direttamente da un titolo sottostante rischioso su cui si appoggia, per esempio un'azione. L'esempio più semplice di derivato è appunto l'opzione, ovvero un contratto che conferisce il diritto di comprare (tipo *call*) o di vendere (tipo *put*) una tale azione a un determinato prezzo fissato, detto *strike*.

Le opzioni che tratteremo in seguito saranno quelle europee, le quali conferiscono il diritto di acquistare (o vendere) solamente ad una fissata scadenza. Il valore dell'opzione europea alla scadenza, detto *payoff*, sarà perciò una funzione dello *strike* e del prezzo dell'azione a scadenza.

I modelli che tratteremo definiscono la dinamica del titolo sottostante come il processo di Itô soluzione di un'opportuna equazione differenziale stocastica (SDE). Il prezzo dell'opzione che si appoggia su tale titolo è dato dalla media del suo *payoff*. Dalle formule di rappresentazione di Feynman-Kač si evince perciò che il prezzo dell'opzione è la soluzione dell'operatore associato all'equazione differenziale stocastica, con valore finale fissato.

I metodi perturbativi che riporteremo saranno dunque volti a risolvere questi problemi di Cauchy con operatori alle derivate parziali e a coefficienti non costanti.

Il primo modello che tratteremo sarà quello di Black&Scholes, secondo il quale, il valore del titolo sottostante è il moto Browniano geometrico la cui media è r , ovvero il tasso di interesse a breve termine, e la sua varianza è funzione di un parametro $\sigma > 0$ detto volatilità. L'importanza di tale modello è data da molteplici motivi.

Innanzitutto, l'operatore associato alla SDE è a coefficienti costanti, il che rende piuttosto agevole ottenere una forma esatta del prezzo dell'opzione quotata con questo modello. Inoltre, proprio da tale formula, emerge che il prezzo è crescente rispetto al parametro di volatilità σ , il che riflette la concezione che le opzioni acquistino valore in situazioni di maggior rischiosità del mercato.

Questa relazione biunivoca, a scadenza e strike fissati, fra volatilità e prezzo, è talmente importante che spesso le opzioni vengono quotate in termini della loro volatilità implicita di Black&Schols.

Il vantaggio di tale approccio è quello di poter effettuare un paragone di costosità fra opzioni con diversi strike e scadenze.

Per questi motivi, per i modelli seguenti, oltre a ricavare un'approssimazione del prezzo, ci concentreremo sull'approssimazione della relativa volatilità implicita.

Nonostante la sua importanza, il modello di Black&Sholes non si dimostra sufficientemente adatto a riprodurre i prezzi di mercato. Infatti, le superfici di volatilità di mercato sono tutt'altro che piatte. Utilizzando modelli che rendendo non più costante la volatilità è possibile, dopo un'opportuna calibrazione, riprodurre in modo decisamente migliore tali superfici.

Una prima classe di modelli, chiamati a volatilità locale, richiede che la volatilità sia funzione del tempo e del titolo sottostante, ovvero essa è descritta come $\sigma(S_t, t)$. Il modello che noi abbiamo trattato è conosciuto come CEV (constant elasticity of variance) e descrive la volatilità come $\sigma S_t^{\beta-1}$. Vedremo come tale modello consenta di ottenere superfici di volatilità implicita

che si avvicinano maggiormente a quelle di mercato, anche se in modo non del tutto soddisfacente.

Precisamente, a scadenza fissata, le curve di volatilità implicita risultanti sono sempre delle *skew*, ovvero sono sempre decrescenti rispetto allo strike. In certi casi, invece, le volatilità di mercato formano delle *smile*, ovvero curve che ritornano crescenti dopo un punto di minimo.

Il modello SABR (*stochastic alfa beta rho*) appartiene invece alla famiglia dei modelli a volatilità stocastica. Qui, la volatilità è anch'essa un processo di Itô, dipendente da un secondo moto Browniano oltre che dal prezzo del titolo sottostante. Di tale processo occorre fissare un valore iniziale σ non direttamente osservabile dal mercato.

Con tale modello, del quale il CEV rappresenta un caso particolare, si può riprodurre una gamma più vasta di superfici di volatilità, in quanto è possibile agire su ben quattro parametri: σ , α , β e ρ . In particolare effettueremo un esperimento di calibrazione di tali parametri allo scopo di riprodurre in maniera più efficiente possibile una serie di prezzi di mercato di un'opzione europea.

Il primo capitolo è dedicato all'esposizione dei suddetti modelli di pricing. In particolare, dopo un primo paragrafo di preliminari di finanza, i paragrafi 1.2 e 1.3 trattano rispettivamente del modello di Black&Scholes e della relativa volatilità implicita. Il paragrafo 1.4 contiene la formulazione del modello CEV, la formula di approssimazione per relativa volatilità implicita, e vari grafici che riportano i risultati ottenuti con tale modello. Analogamente il paragrafo 1.5 tratta del modello SABR, mentre nel paragrafo 1.6 sono riportati i risultati dell'esperimento di calibrazione del SABR effettuato su reali prezzi di mercato.

Il secondo capitolo è invece dedicato ai metodi perturbativi che consentono di ottenere formule chiuse per il prezzo e la volatilità implicita. Nei paragrafi 2.1 e 2.2 vengono ricavate rispettivamente le formule di approssi-

mazione di prezzo e volatilità implicita per il CEV, mentre nel paragrafo 2.3 viene calcolata l'approssimazione del prezzo per il SABR.

Indice

Introduzione	i
1 Modelli di pricing di opzioni europee	1
1.1 Preliminari di finanza	1
1.2 Il modello Black&Scholes	4
1.3 La volatilità implicita di Black&Scholes	7
1.4 Il modello CEV	10
1.5 Il modello SABR	15
1.6 Esperimento di calibrzione del SABR	20
2 Metodi numerici perturbativi	25
2.1 Calcolo del prezzo per il modello CEV	25
2.2 Calcolo della volatilità implicita per il modello CEV	36
2.3 Calcolo del prezzo per il modello SABR	39
Bibliografia	51

Elenco delle figure

1.1	prezzo opzione <i>call</i> secondo il modello CEV per $\sigma = 0.3$ e $\beta = 1/2$	12
1.2	volatilità implicita della <i>call</i> secondo il modello CEV per $\sigma = 0.3$ e $\beta = 1/2$	12
1.3	differenza prezzo CEV-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$ e $\beta = 1/2$	13
1.4	differenza prezzo CEV-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$	14
1.5	volatilità implicita della <i>call</i> secondo il modello CEV per $\sigma = 0.3$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$	14
1.6	prezzo opzione <i>call</i> secondo il modello SABR per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1/2$ e $\rho = 0.5$	17
1.7	volatilità implicita della <i>call</i> secondo il modello SABR per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1/2$ e $\rho = 0.5$	18
1.8	differenza prezzo SABR-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1/2$ e $\rho = 0.5$	18
1.9	differenza prezzo SABR-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\rho = 0.5$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$	19
1.10	volatilità implicita della <i>call</i> secondo il modello SABR per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\rho = 0.5$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$	19
1.11	prezzo secondo il modello SABR calibrato con i parametri ottimali: $\sigma = 1.5$, $\alpha = 0.737624$, $\beta = 0.681827$ e $\rho = -0.403002$	21

1.12 volatilità implicita secondo il modello SABR calibrato con i parametri ottimali: $\sigma = 1.5$, $\alpha = 0.737624$, $\beta = 0.681827$ e $\rho = -0.403002$	21
--	----

Capitolo 1

Modelli di pricing di opzioni europee

1.1 Preliminari di finanza

I principali titoli reperibili sul mercato finanziario sono i *bond*, investimenti che nel breve periodo possono essere considerati privi di rischio, e gli *stock*, titoli rischiosi come, per esempio, le azioni.

Il valore del *bond*, che normalmente consiste in un investimento in banca, seguirà quindi una traiettoria deterministica. Precisamente, se r è il *tasso privo di rischio* e B_0 il valore del bond al tempo 0, la dinamica del *bond* sarà del tipo:

- capitalizzazione semplice con r costante:

$$B_t = B_0(1 + rt),$$

- capitalizzazione composta con r costante:

$$B_t = B_0e^{rt},$$

- capitalizzazione composta con r_t funzione del tempo:

$$B_t = B_0e^{\int_0^t r_\tau d\tau}.$$

Se conosciamo il valore del *bond* al tempo t , assumendo che sia stata applicata una capitalizzazione composta a tasso costante, il valore al tempo 0 è naturalmente

$$B_0 = B_t e^{-rt},$$

che viene detto *valore scontato* di B_t .

D'altra parte, il prezzo dell'azione, in quanto titolo rischioso, non può essere rappresentato da una funzione deterministica, bensì da un processo stocastico. Nei modelli che seguono, tale processo sarà la soluzione di un'equazione differenziale stocastica che varia a seconda del modello.

Per esempio, secondo il modello di Black& Scholes, il prezzo dell'azione S_t risolve

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1.1)$$

dove μ è il rendimento atteso e σ è la volatilità. Risolvendo tale SDE, si ottiene che il prezzo dell'azione è il moto Browniano geometrico

$$S_t = S_0 e^{((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)}. \quad (1.2)$$

I titoli oggetto di studio in questa tesi sono i *derivati*. Come si evince dal nome, essi sono titoli il cui valore deriva dal valore di un titolo sottostante, generalmente un'azione o un tasso di interesse. Il mercato offre una vasta gamma di titoli derivati e il più semplice di essi è l'opzione.

L'opzione conferisce il diritto a chi la detiene di comprare (*call*) o di vendere (*put*) un determinato bene ad un certo prezzo fissato. Il possessore dell'opzione può scegliere se esercitare oppure no tale diritto.

Le opzioni si dividono poi in due categorie:

- tipo *europeo*, conferisce il diritto ad acquistare (o vendere) soltanto ad una certa scadenza fissata;
- tipo *americano*, tale diritto può essere esercitato qualsiasi istante prima della scadenza.

Colui che vende l'opzione si impegna perciò a vendere (o comprare) il titolo sottostante ad un determinato prezzo qualora il possessore dell'opzione decida di far valere il suo diritto.

Come esempio, consideriamo un'opzione *call* di tipo *europeo* con i seguenti parametri:

- K *strike*, prezzo d'esercizio dell'opzione;
- T scadenza, tempo al quale è possibile far valere l'opzione d'acquisto;
- S_t prezzo di mercato del titolo sottostante al tempo $t \in [0, T]$;
- C_t prezzo dell'opzione al tempo $t \in [0, T]$.

Il prezzo dell'opzione alla scadenza, detto *payoff*, vale

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+. \quad (1.3)$$

Infatti, alla data T , il possessore dell'opzione eserciterà il suo diritto di acquisto solo nel caso in cui $S_T > K$, ottenendo un guadagno pari a $S_T - K$. Analogamente, nel caso di una *put* europea, il *payoff* sarà dato da

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+. \quad (1.4)$$

Appare evidente che il compratore di una *call* ha una possibilità di guadagno illimitata, in quanto il prezzo dell'opzione può salire ipoteticamente a qualsiasi prezzo. Di conseguenza, la banca che vende la *call* si espone ad un rischio di perdita illimitato.

Nei paragrafi seguenti esporremo dei modelli di valutazione per il prezzo delle opzioni di tipo *europeo*. In tali modelli, si suppone che la dinamica del titolo sottostante risolva una certa equazione differenziale stocastica, e che il prezzo dell'opzione sia dato da

$$C = e^{-rT} E[(S_T - K)^+] \quad (1.5)$$

nel caso di una *call*, e da

$$P = e^{-rT} E[(K - S_T)^+] \quad (1.6)$$

nel caso di una *put*.

1.2 Il modello Black&Scholes

Secondo il modello di Black&Scholes, ideato nel 1973, il prezzo dell'azione sottostante al derivato è il processo soluzione di

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (1.7)$$

Si ipotizza inoltre che

$$\mu = r, \quad (1.8)$$

dove r è il tasso a breve privo di rischio introdotto nel paragrafo precedente. Perciò, se al tempo t l'azione sottostante vale s , il prezzo dell'azione è rappresentato dal processo $S^{t,s}$, soluzione di

$$\begin{cases} dS_{t'} = r S_{t'} dt + \sigma S_{t'} dW_{t'}, & t' > t \\ S_t = s \end{cases}, \quad (1.9)$$

mentre il prezzo delle opzioni *call* e *put* è dato dal valore attualizzato della media del suo *payoff*, ovvero:

$$C(t, s) = e^{-r(T-t)} E[(S_T^{t,s} - K)^+], \quad (1.10)$$

$$P(t, s) = e^{-r(T-t)} E[(K - S_T^{t,s})^+]. \quad (1.11)$$

Il seguente teorema ci restituisce una formula chiusa per tali prezzi.

Teorema 1.2.1. *Sotto le ipotesi precedenti il prezzo delle opzioni call e put risulta:*

$$C(t, s) = s\phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_2), \quad (1.12)$$

$$P(t, s) = Ke^{-r(T-t)}\phi(-d_2) - s\phi(-d_1), \quad (1.13)$$

dove

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \Gamma(1, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (1.14)$$

è la funzione di distribuzione normale standard e

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (1.15)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (1.16)$$

Dimostrazione. Riportiamo la dimostrazione solamente per il prezzo dell'opzione *call*. Il caso della *put* è completamente analogo.

Risulta:

$$C(t, s) = e^{-r(T-t)}u(t, s), \quad (1.17)$$

con

$$u(t, s) = E[(S_T - K)^+]. \quad (1.18)$$

Per il teorema di rappresentazione ?? vale

$$\begin{cases} Lu(t, s) = 0, & t < T, s > 0 \\ u(T, s) = (s - K)^+, & s > 0 \end{cases}, \quad (1.19)$$

dove L è l'operatore associato alla SDE (1.9), ovvero

$$L = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} + rs \partial_s + \partial_t. \quad (1.20)$$

Perciò $u(t, s)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} u + rs \partial_s u + \partial_t u = 0, & t < T, s > 0 \\ u(T, s) = (s - K)^+, & s > 0 \end{cases}. \quad (1.21)$$

È facile verificare che $u(t, s)$ verifica (1.21) se e solo se $C(t, s)$ soddisfa

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} C + rs \partial_s C + \partial_t C - rC = 0, & t < T, s > 0 \\ C(T, s) = (s - K)^+, & s > 0 \end{cases}. \quad (1.22)$$

Il prezzo della *call* è quindi la soluzione di un problema di Cauchy a coefficienti non costanti.

Con un cambio di variabili possiamo ora trasformare il problema (1.22) in un problema di Cauchy a coefficienti costanti. Infatti si verifica facilmente che

$$C(t, s) = v(T - t, \log s), \quad (1.23)$$

dove $v(\tau, x)$ risolve:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2\partial_{xx}v + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\partial_xv - \partial_\tau v - rv = 0, & \tau > 0, s \in \mathbb{R} \\ v(0, x) = (e^x - K)^+, & s \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (1.24)$$

Ora, la soluzione di (1.24) è

$$v(\tau, x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma'(\tau, x - y)(e^x - K)^+ dy, \quad (1.25)$$

dove

$$\Gamma'(\tau, x) = e^{-\alpha\tau - \beta x} \Gamma(\tau\sigma^2, x), \quad (1.26)$$

e dove

$$\alpha = \frac{1}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + r, \quad (1.27)$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad (1.28)$$

$$\Gamma(\tau\sigma^2, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\tau\sigma^2}}. \quad (1.29)$$

Risolvendo l'integrale si ottiene la tesi. \square

La quantità $\frac{s}{K}$ è generalmente chiamata *moneyness* dell'opzione. Si possono avere tre casi:

- $\frac{s}{K} > 1$: l'opzione *call* si dice *in the money*, ovvero è in una situazione di potenziale guadagno;
- $\frac{s}{K} < 1$: l'opzione *call* si dice *out of the money*, ovvero ha valore intrinseco nullo;
- $\frac{s}{K} = 1$: l'opzione *call* si dice *at the money*.

1.3 La volatilità implicita di Black&Scholes

Si noti come il prezzo di un'opzione *call* secondo il modello di Black&Scholes è del tipo:

$$C_{BS}(\sigma, T, s, K, r). \quad (1.30)$$

L'unico di questi parametri che non è direttamente osservabile è la volatilità σ .

Fissati gli altri parametri, la funzione

$$\sigma \mapsto C_{BS}(\sigma, T, s, K, r) \quad (1.31)$$

è invertibile in quanto strettamente crescente. Ovvero, ad ogni valore di $\sigma > 0$ corrisponde un prezzo di Black&Scholes per l'opzione e, viceversa, per ogni prezzo C^* nell'intervallo $]0, S[$ è associato un unico valore della volatilità σ^* tale che

$$C^* = C_{BS}(\sigma^*, T, s, K, r). \quad (1.32)$$

Risulta perciò ben posta la seguente

Definizione 1.1. La funzione

$$C^* \mapsto VI(C^*, T, s, K, r) := \sigma^* \quad (1.33)$$

è detta *funzione di volatilità implicita*.

Il concetto di volatilità implicita è talmente importante e diffuso che, all'interno dei mercati finanziari, viene utilizzato come indicatore principale del valore delle opzioni. Le opzioni vengono cioè quotate mediante la loro volatilità implicita anziché mediante il loro prezzo. Questo approccio consente comunque di avere un'idea della costosità dell'opzione, in quanto il prezzo è funzione crescente della volatilità, e inoltre, permette di confrontare il valore di opzioni con diversi strike e scadenze.

Fissiamo ora S e r . Dato un set di prezzi

$$\{C_{i,j}^* | i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N\}, \quad (1.34)$$

dove $C_{i,j}^*$ indica il prezzo dell'opzione con strike K^i e scadenza T^j , il grafico della funzione

$$(K^i, T^j) \mapsto VI(C_{i,j}^*, T^j, s, K^i, r) \quad (1.35)$$

è detto *superficie di volatilità implicita* relativa ai prezzi (1.34).

Risulta chiaro che se i prezzi $(C_{i,j}^*)_{i \in I, j \in J}$ corrispondono con i prezzi di Black&Scholes basati su una dinamica del sottostante di tipo

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1.36)$$

allora la superficie di volatilità implicita sarà costante, ovvero:

$$VI(C_{i,j}^*, T^j, s, K^i, r) = \sigma, \quad i \in I, j \in J. \quad (1.37)$$

In realtà, le superfici di volatilità implicita relative ai prezzi di mercato sono solitamente tutt'altro che piatte. Esse variano infatti con lo strike e la scadenza come si può osservare in tabella (1.1), dove è riportata una serie di volatilità implicite di opzioni sull'azione S&P 500 in data 18 aprile 2002 ([4]).

Tipicamente risulta che le quotazioni di mercato attribuiscono più valore alle opzioni nelle situazioni estreme di *in* o *out of the money*. Tale comportamento riflette la percezione di maggior rischiosità in determinate situazioni di mercato, come per esempio nel caso di estremi rialzi o ribassi del sottostante. Per quanto riguarda la dipendenza dalla scadenza T , solitamente *smile* e *skew* si accentuano quando T si avvicina a 0.

Dall'analisi di queste superfici di volatilità implicita emerge perciò come il modello di Black&Scholes non sia sufficientemente realistico. Questo è un problema di interesse teorico così come di interesse pratico. Infatti, immaginando di voler utilizzare tale modello per quotare un'opzione, si pone il problema della scelta del parametro σ . Utilizzando la volatilità storica, ovvero il valore di σ ricavato a partire da una stima sulla serie storica del sottostante, si rischia di ottenere quotazioni fuori mercato. D'altra parte, utilizzando la volatilità implicita si pone il problema di scegliere uno fra tutti i valori che il mercato attribuisce in funzione dei vari strike e scadenze.

Strike	May 2002	June 2002	Sep. 2002	Dec. 2002	March 2003	June 2003	Dec. 2003
1100	0.1546		0.1651	0.1670	0.1721	0.1791	0.1929
1110		0.1632					
1120	0.151	0.1607					
1125	0.1512	0.1594	0.1619	0.1644	0.1689	0.1763	
1130		0.1580					
1135		0.1575	0.1598				
1140	0.1488	0.1562		0.1624			
1150		0.1553	0.1572	0.1611	0.1653	0.1724	0.1870
1160		0.1531					
1170		0.1513					
1175		0.1518	0.1539	0.1577	0.1625		0.1833

Tabella 1.1: volatilità implicita di opzioni *call* sull'azione S&P 500. Qui il valore dell'azione S&P 500 è $s = 1124.47$, mentre si ha $r = 0.019$.

Questi problemi richiedono l'introduzione di modelli più sofisticati rispetto a quello di Black&Scholes, che consentano di ottenere prezzi concordi con le superfici di volatilità implicita di mercato. Questo risultato può essere ottenuto con diversi modelli a volatilità non costante, che si basano generalmente sull'idea di modificare l'equazione stocastica che modella la dinamica del sottostante.

Tali modelli si dividono principalmente in due famiglie:

- a volatilità endogena, ovvero essa è descritta da un processo stocastico che dipende dagli stessi fattori di rischio del sottostante. I modelli più popolari appartenenti a questa categoria sono quelli a *volatilità locale*;
- a volatilità esogena, ovvero essa è descritta da un processo guidato da fattori di rischio aggiuntivi (un secondo moto Browniano e/o un processo di salto).

Nei prossimi due paragrafi presenteremo un modello per ognuna di queste due categorie:

- il CEV, a volatilità locale;
- e il SABR (a volatilità stocastica).

1.4 Il modello CEV

Secondo il modello CEV (constant elasticity of variance model, Coex, 1975), si suppone che la dinamica del titolo sottostante sia determinata da un'equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t)A(S_t)dW_t, \quad (1.38)$$

dove solitamente:

$$A(s) = s^\beta, \quad 0 < \beta < 1. \quad (1.39)$$

Perciò, se al tempo t il prezzo dell'azione è s , il prezzo agli istanti successivi sarà dato dal processo stocastico $S^{t,s}$ soluzione di:

$$\begin{cases} dS_{t'} = rS_{t'} dt' + \sigma(t)A(S_{t'})dW_{t'} \\ S_t = s \end{cases}, \quad (1.40)$$

e il prezzo della relativa opzione *call*, con scadenza T e strike K , sarà dato da

$$V(t, s) = e^{-r(T-t)} E[(S_T^{t,s} - K)^+]. \quad (1.41)$$

Osservazione 1.4.1. Ponendo

$$u(t, s) := E[(S_T^{t,s} - K)^+], \quad (1.42)$$

e utilizzando la formula di rappresentazione (??), si ha che:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)A^2(s)u_{ss} + rsu_s = 0, & t < T, s > 0 \\ u(T, s) = (s - K)^+, & s > 0 \end{cases}. \quad (1.43)$$

Nel paragrafo 2.1 illustreremo un metodo numerico che, perturbando il problema (1.43), fornisce un'efficace approssimazione di $u(t, s)$, e quindi di $V(t, s)$.

Tale risultato (teorema 2.1.1) oltre a fornire una formula chiusa, sebbene approssimata, del prezzo della *call* secondo il modello CEV, consente di ottenere facilmente un'approssimazione altrettanto efficace della volatilità implicita relativa a tale prezzo.

Precisamente, nel paragrafo (2.2) mostreremo il procedimento che, partendo dall'approssimazione di $V(t, s)$, permette di ottenere la seguente approssimazione della volatilità implicita (corollario 2.2.3):

$$\sigma_B(t, T, s, K, r) \approx \frac{a}{s_{av}^{1-\beta}} \left[1 + \frac{(1-\beta)(2+\beta)}{24} \left(\frac{e^{r(T-t)}s - K}{s_{av}} \right)^2 + \frac{(1-\beta^2)a^2(T-t)^2}{24 s_{av}^{2-2\beta}} \right], \quad (1.44)$$

dove

$$s_{av} = \frac{1}{2}(e^{r(T-t)}s + K) \quad (1.45)$$

e

$$a = \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T e^{2r(T-t')(1-\beta)} \sigma^2(t') dt' \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.46)$$

In riferimento alla notazione usata nel paragrafo precedente, qui si intende $\sigma_B(t, T, s, K, r) = VI(V(t, s), T-t, s, K, r)$.

Abbiamo implementato questa formula con Mathematica in riferimento ad un'opzione *call*, il cui titolo sottostante assume per $t = 0$ un valore iniziale $s = 1$. Come parametri del modello CEV abbiamo utilizzato

$$\sigma(t) = \sigma = 0.3, \quad \beta = 1/2. \quad (1.47)$$

Nelle figure (1.1) e (1.2) riportiamo le superfici del prezzo della *call* e della relativa volatilità implicita, in funzione della scadenza T e dello strike K .

Per il calcolo del prezzo non abbiamo utilizzato l'approssimazione diretta

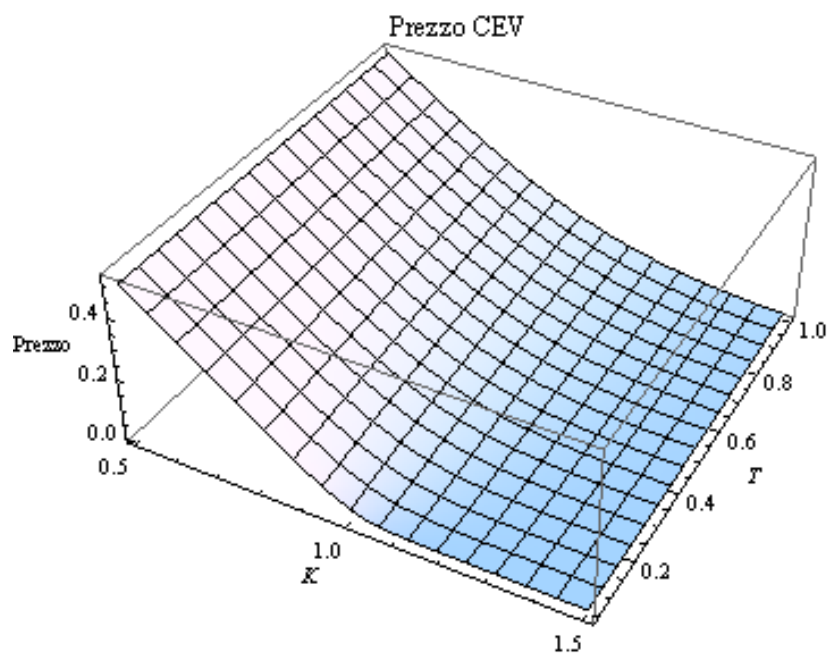


Figura 1.1: prezzo opzione *call* secondo il modello CEV per $\sigma = 0.3$ e $\beta = 1/2$.

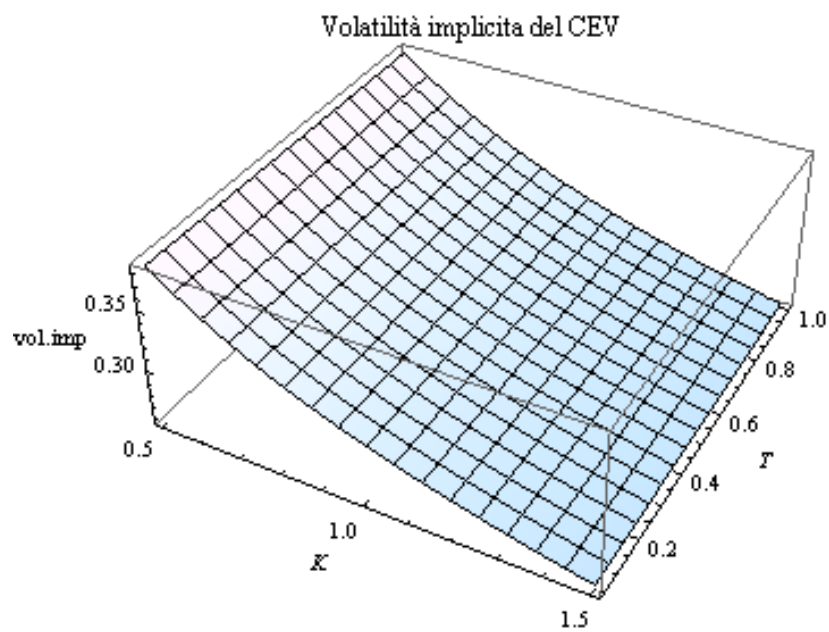


Figura 1.2: volatilità implicita della *call* secondo il modello CEV per $\sigma = 0.3$ e $\beta = 1/2$.

(2.80), ma di nuovo la formula di approssimazione della volatilità utilizzata come parametro del prezzo di Black&Scholes.

In figura (1.3) è invece riportato il grafico della differenza tra il prezzo secondo il modello CEV e quello di Black&Scholes, sempre in funzione di scadenza e strike; mentre la figura (1.4) riporta la medesima differenza per una scadenza fissata a $T = 1/2$ e tre differenti valori di β . Infine, in figura

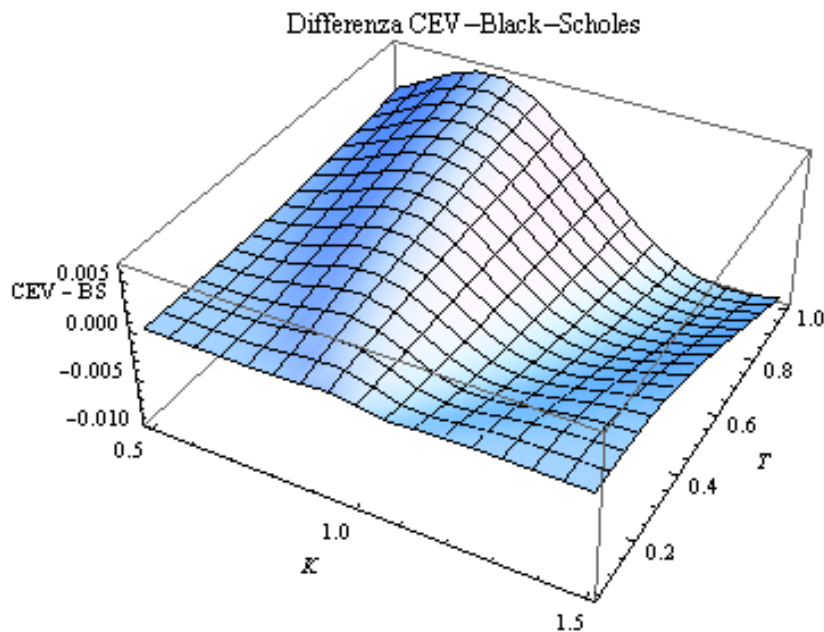


Figura 1.3: differenza prezzo CEV-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$ e $\beta = 1/2$.

(1.5) riportiamo l'andamento della volatilità implicita a scadenza fissata $T = 1/2$ relativa a tre diversi valori di β . Si noti come la curva della volatilità implicita diventi più ripida tanto più β si avvicina a 0.

Non si evidenzia invece il comportamento che a volte assumono le curve di volatilità relative ai prezzi di mercato. Infatti può capitare che tali curve siano inizialmente decrescenti e diventino crescenti dopo un punto di minimo; da qui il termine *smile*, con il quale vengono chiamate questo tipo di curve. Perciò il modello CEV non è idoneo a riprodurre delle *smile*, ma solamente delle *skew*, ovvero curve solamente decrescenti.

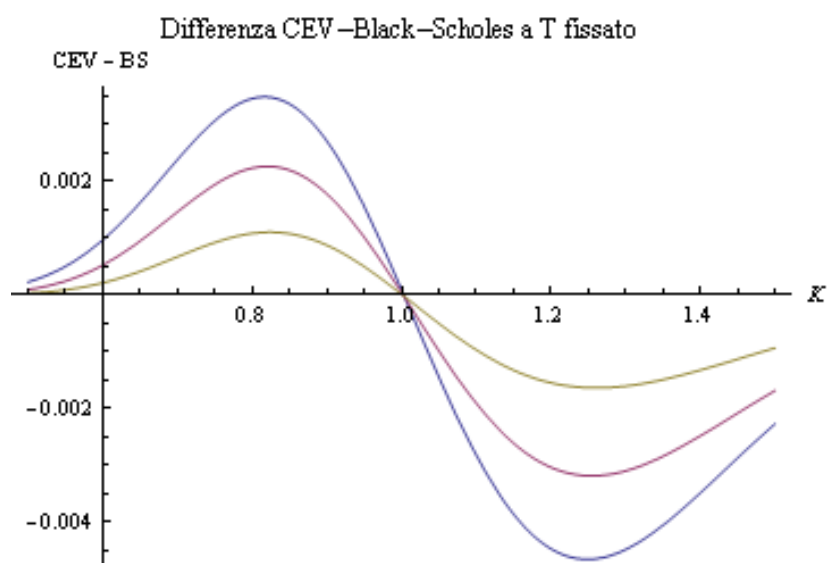


Figura 1.4: differenza prezzo CEV-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$.

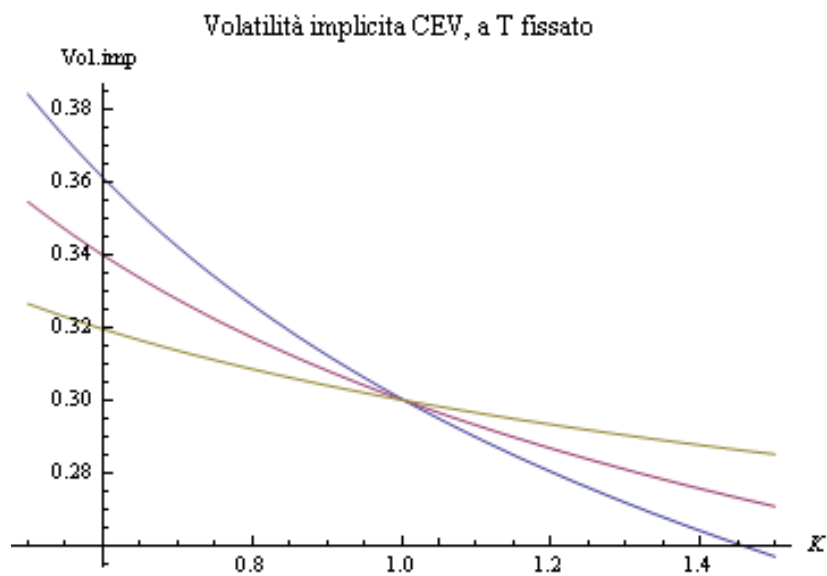


Figura 1.5: volatilità implicita della *call* secondo il modello CEV per $\sigma = 0.3$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$.

1.5 Il modello SABR

Nel modello *SABR* (*stochastic alpha beta rho*), la volatilità $\hat{\sigma}$ è a sua volta un processo stocastico guidato da un ulteriore moto Browniano. Di tale processo, occorrerà assegnare un valore iniziale non direttamente osservabile dal mercato.

Precisamente, se al tempo t il valore del titolo sottostante è s e la volatilità iniziale è $\sigma > 0$, allora il prezzo di un'opzione *call* con strike K e scadenza T è dato da:

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} E[(\hat{F}_T^{t,f} - K)^+], \quad (1.48)$$

dove $\hat{F}^{t,f}$ è la prima componente del processo bidimensionale $(\hat{F}, \hat{\sigma})^{t,(f,\sigma)}$ soluzione di

$$\begin{cases} d\hat{F}_{t'} = \hat{\sigma}_{t'} C(\hat{F}_{t'}) dW_{t'}^1 \\ d\hat{\sigma}_{t'} = \alpha \hat{\sigma}_{t'} dW_{t'}^2 \\ \hat{F}_t = f \\ \hat{\sigma}_t = \sigma \end{cases}, \quad (1.49)$$

con

$$f = e^{r(T-t)} s \quad (1.50)$$

e $(W^1, W^2)_{t'}$ moto Browniano correlato (vedi paragrafo ...) tale che

$$d\langle W^1, W^2 \rangle_{t'} = \rho dt', \quad \rho \in]-1, 1[, \quad (1.51)$$

mentre $\alpha \geq 0$ rappresenta la volatilità della volatilità, e viene perciò chiamata *volvol*.

Come per il modello *CEV*, si usa solitamente:

$$C(x) = x^\beta, \quad 0 < \beta < 1. \quad (1.52)$$

Osservazione 1.5.1. Il prezzo in (1.48) è quello che si ottiene per una dinamica del sottostante $S^{t,s}$ che risolve:

$$\begin{cases} dS_{t'} = rS_{t'} dt + e^{-r(T-t')} \hat{\sigma}_{t'} C(e^{r(T-t')} S_{t'}) dW_{t'}^1 \\ d\hat{\sigma}_{t'} = \alpha \hat{\sigma}_{t'} dW_{t'}^2 \\ S_t = s \\ \hat{\sigma}_t = \sigma \end{cases}. \quad (1.53)$$

Infatti, ponendo

$$\hat{F}_{t'}^{t,f} := e^{r(T-t')} S_{t'}^{t,s} \quad (1.54)$$

risulta che

$$\hat{F}_T^{t,f} = S_T^{t,s}. \quad (1.55)$$

Quindi,

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} E[(S_T^{t,s} - K)^+] = e^{-r(T-t)} E[(\hat{F}_T^{t,f} - K)^+], \quad (1.56)$$

e utilizzando la formula di Ito si dimostra che $\hat{F}^{t,f}$ risolve il problema di Cauchy (1.49).

Osservazione 1.5.2. Si noti che se $\alpha = 0$, per ogni $\rho \in]-1, 1[$ si ha

$$\hat{\sigma}_{t'}^{t,\sigma} = \sigma \quad \forall t' > t, \quad (1.57)$$

cioè il modello SABR si riduce al modello CEV.

Come accade per il modello CEV, anche per il modello SABR non si conosce la formula esatta per il prezzo dell'opzione e per la relativa volatilità implicita. Nel paragrafo 2.3 mostreremo però come poter trovare una buona approssimazione di $V(t, s, \sigma)$ (teorema 2.3.1).

A partire da questa, con un procedimento analogo a quello utilizzato per il CEV descritto nel paragrafo 2.2, si può trovare la seguente approssimazione della volatilità implicita:

$$\begin{aligned} \sigma_B(t, T, s, K, r) \approx & \frac{\sigma}{(fK)^{(1-\beta)/2} \left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 f/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 f/K \right\}} \cdot \left(\frac{z}{x(z)} \right) \cdot \\ & \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\sigma^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\alpha\sigma}{(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \alpha^2 \right] (T-t) \right\}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

dove:

$$z = \frac{\alpha}{\sigma} (fK)^{(1-\beta)/2} \log f/K, \quad (1.59)$$

$$x(z) = \log \left(\frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right), \quad (1.60)$$

e come prima:

$$f = e^{r(T-t)}s. \quad (1.61)$$

Abbiamo implementato questa formula con Mathematica in riferimento ad un'opzione *call*, il cui titolo sottostante assume per $t = 0$ un valore iniziale $s = 1$. Come parametri del modello SABR abbiamo utilizzato

$$\sigma = 0.3, \quad \alpha = 0.3, \quad \beta = 1/4, \quad \rho = 0.5. \quad (1.62)$$

Nelle figure (1.6) e (1.7) riportiamo le superfici del prezzo della *call* e della relativa volatilità implicita, in funzione della scadenza T e dello strike K .

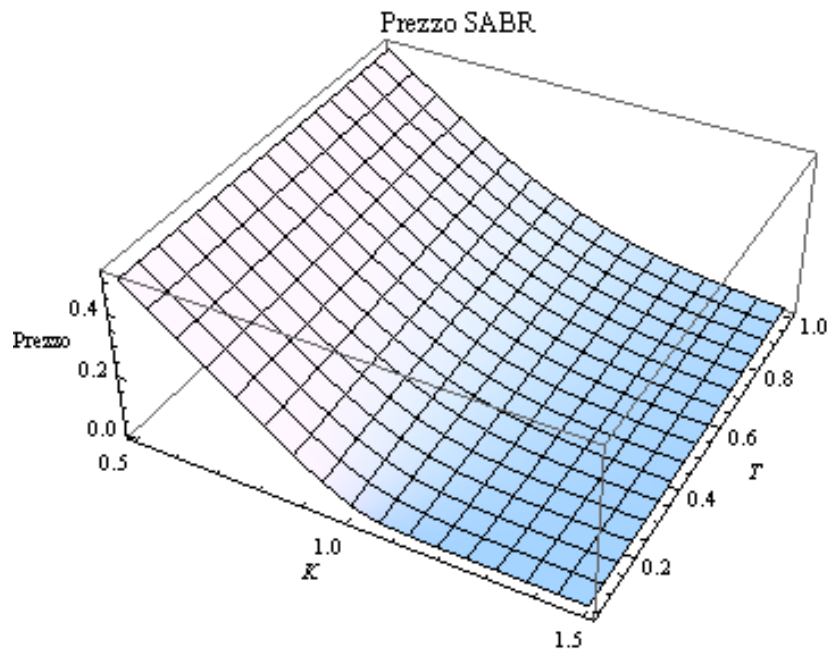


Figura 1.6: prezzo opzione *call* secondo il modello SABR per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1/2$ e $\rho = 0.5$.

In figura (1.8) è invece riportato il grafico della differenza tra il prezzo SABR e quello di Black&Scholes, sempre in funzione di scadenza e strike; mentre la figura (1.9) riporta la medesima differenza per una scadenza fissata a $T = 1/2$ e tre differenti valori di β .

A concludere il paragrafo, in figura (1.10) riportiamo l'andamento della

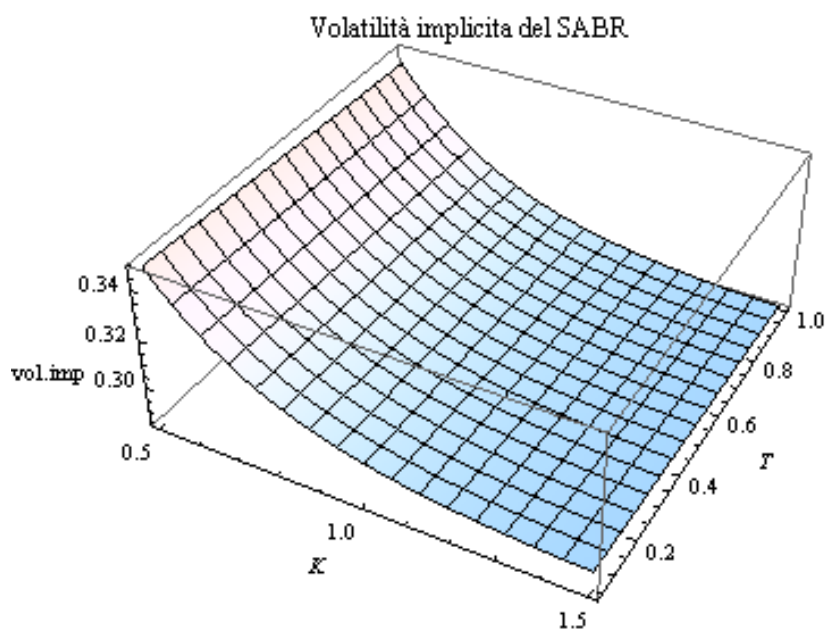


Figura 1.7: volatilità implicita della *call* secondo il modello SABR per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1/2$ e $\rho = 0.5$.

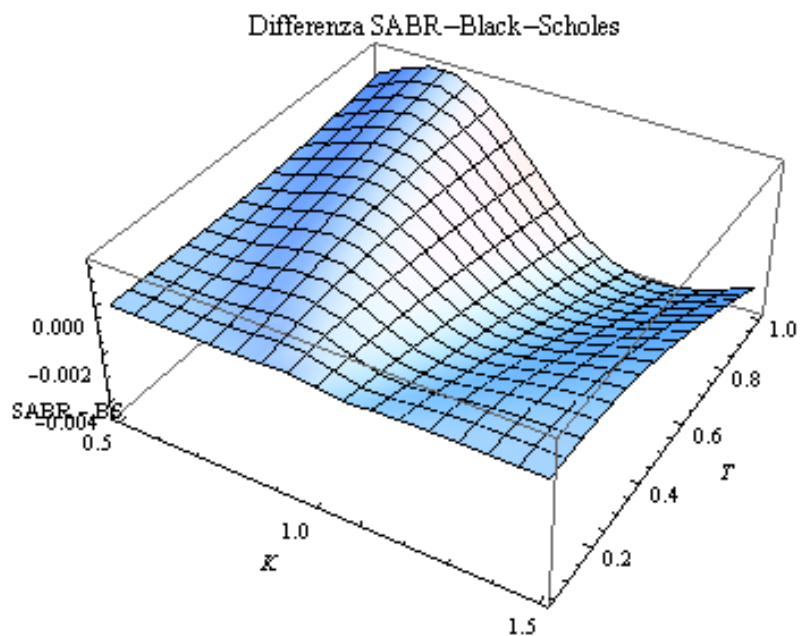


Figura 1.8: differenza prezzo SABR-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1/2$ e $\rho = 0.5$.

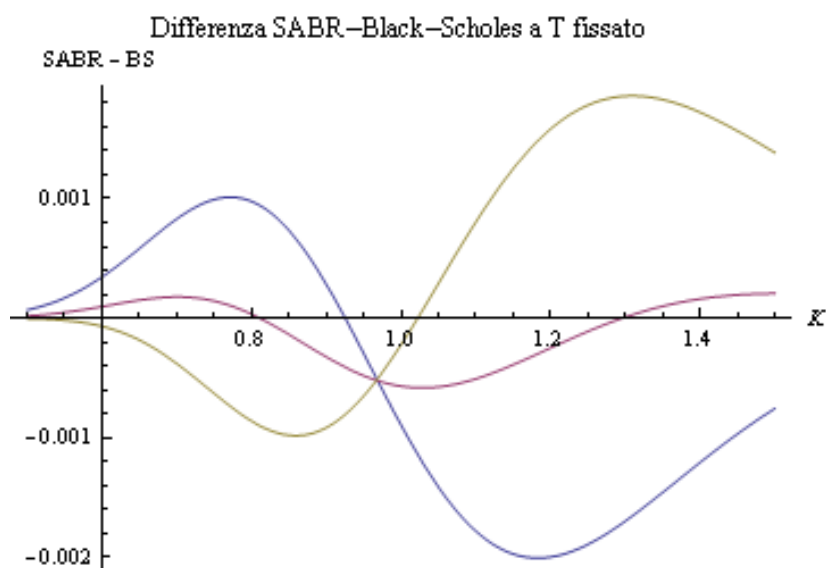


Figura 1.9: differenza prezzo SABR-Black&Scholes per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\rho = 0.5$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$.

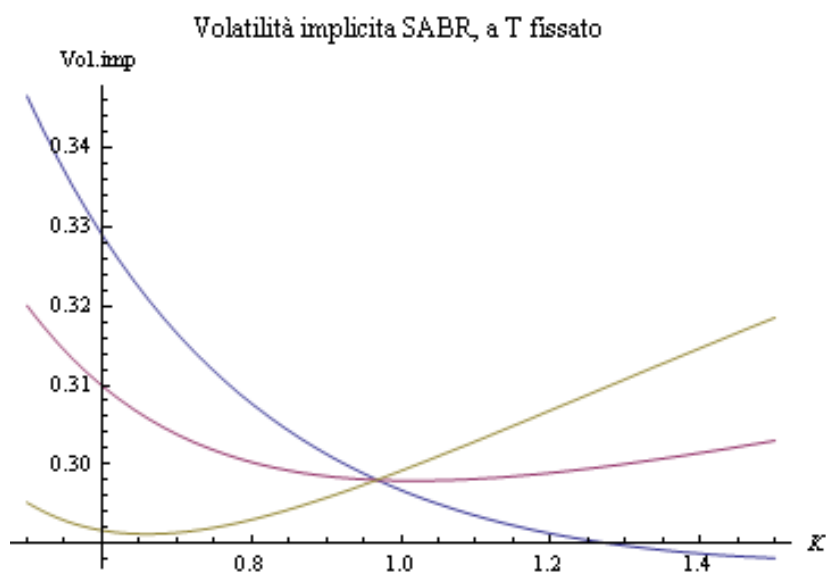


Figura 1.10: volatilità implicita della *call* secondo il modello SABR per $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $\rho = 0.5$, $T = 1/2$, $\beta = 1/4, 1/2$ e $3/4$.

volatilità implicita a scadenza fissata $T = 1/2$ relativa a tre diversi valori di β . Si noti come, a differenza del CEV, il SABR riesca a riprodurre il tipico andamento *a smile* delle curve di volatilità.

1.6 Esperimento di calibrzione del SABR

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto il modello SABR e abbiamo riportato la formula per la volatilità implicita relativa alle opzioni quotate con questo modello.

Rispetto al modello CEV, per il quale occorre fissare due parametri, per il SABR occorre impostare ben quattro parametri: σ , α , β e ρ . Questo conferisce una maggior elasticità al modello, dal quale ci aspettiamo che riesca a riprodurre in modo soddisfacente le superfici di volatilità di mercato.

In questo paragrafo riportiamo i risultati relativi a un esperimento di calibrazione del modello SABR. Ciò che faremo sarà ricercare i parametri per una riproduzione ottimale di una serie di prezzi di mercato.

Nella tabella (1.3) sono riportati da [4] i prezzi di 75 opzioni *call* sull'azione S&P 500 alla chiusura dei mercati in data 18 aprile 2002.

La calibrazione è avvenuta minimizzando la quantità

$$\sum_i \sum_j \left(\frac{\text{prezzomercato}(K_i, T_j)}{\text{prezzoSABR}(K_i, T_j, \sigma, \alpha, \beta, \rho)} - 1 \right)^2 \quad (1.63)$$

nei seguenti intervalli di ricerca dei parametri:

$$\sigma \in]0, 1.5], \quad \alpha \in]0, 5], \quad \beta \in [0, 1], \quad \rho \in]-1, 1[. \quad (1.64)$$

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella (1.2).

σ	α	β	ρ	errore relativo medio
1.5	0.737624	0.681827	-0.403002	5.36%

Tabella 1.2: risultati calibrazione SABR.

Di seguito (fig. 1.11 e 1.12) riportiamo le superfici dei prezzi e delle volatilità implicite ottenute con i parametri ottimali appena trovati.

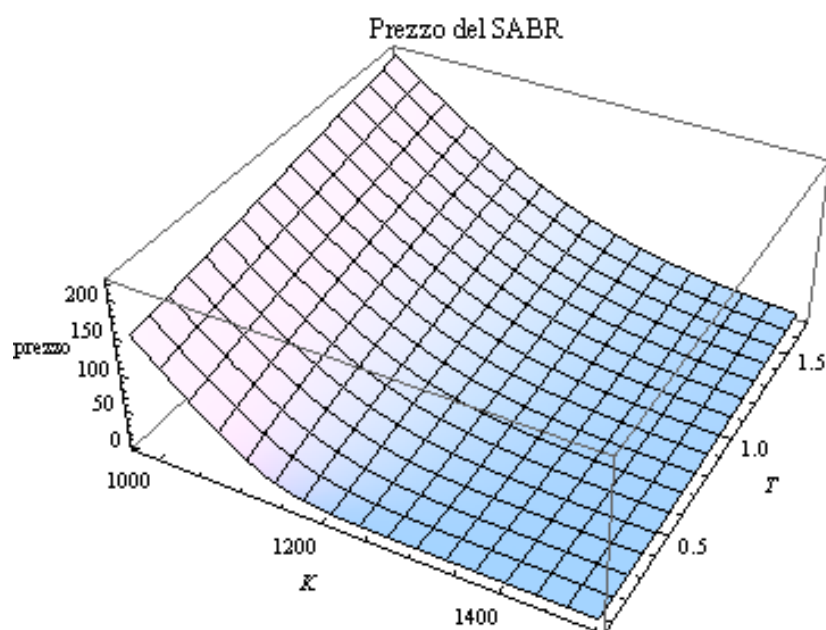


Figura 1.11: prezzo secondo il modello SABR calibrato con i parametri ottimali: $\sigma = 1.5$, $\alpha = 0.737624$, $\beta = 0.681827$ e $\rho = -0.403002$.

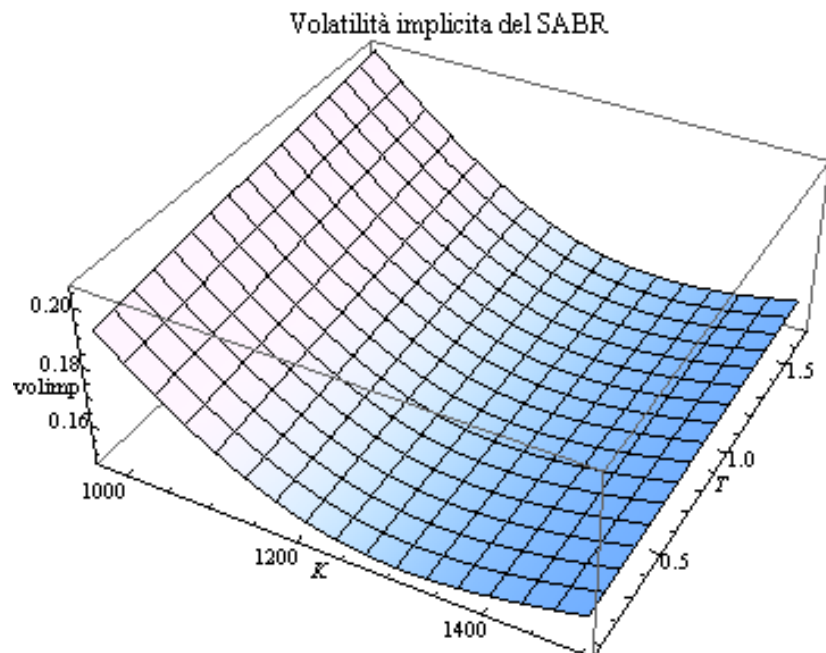


Figura 1.12: volatilità implicita secondo il modello SABR calibrato con i parametri ottimali: $\sigma = 1.5$, $\alpha = 0.737624$, $\beta = 0.681827$ e $\rho = -0.403002$.

Strike	May 2002	June 2002	Sep. 2002	Dec. 2002	March 2003	June 2003	Dec. 2003
975			161.60	173.30			
995			144.80	157.00		182.10	
1025			120.10	133.10	146.50		
1050		84.50	100.70	114.80		143.00	171.40
1075		64.30	82.50	97.60			
1090	43.10						
1100	35.60		65.50	81.20	96.20	111.30	140.40
1110		39.50					
1120	22.90	33.50					
1125	20.20	30.70	51.00	66.90	81.70	97.00	
1130		28.00					
1135		25.60	45.50				
1140	13.30	23.20		58.90			
1150		19.10	38.10	53.90	68.30	83.30	112.80
1160		15.30					
1170		12.10					
1175		10.90	27.70	42.50	56.60		99.80
1200			19.60	33.00	46.10	60.90	
1225			13.20	24.90	36.90	49.80	
1250				18.30	29.30	41.20	66.90
1275				13.20	22.50		
1300					17.20	27.10	49.50
1325					12.80		
1350						17.10	35.70
1400						10.10	25.20
1450							17.00
1500							12.20

Tabella 1.3: prezzi di 75 opzioni *call* sull'azione S&P 500 in data 18 aprile 2002, alla chiusura dei mercati. In questa data, l'azione S&P 500 ha chiuso a quota 1124.47, mentre si ha $r = 0.019$.

Per avere un metro di paragone in termini di valutazione di tale risultato abbiamo ripetuto l'esperimento utilizzando un altro modello di pricing: il modello *Merton*. La calibrazione ottimale di tale modello fa registrare un errore relativo medio del 7.67%, dal quale si evince che in questa circostanza il modello SABR è nettamente più efficiente.

Capitolo 2

Metodi numerici perturbativi

2.1 Calcolo del prezzo per il modello CEV

In questo paragrafo vogliamo riportare il procedimento che permette di trovare la seguente approssimazione asintotica del prezzo di un'opzione *call* europea secondo il modello CEV.

Come visto nel paragrafo (1.4), se al tempo t l'azione sottostante vale s , il prezzo dell'opzione con scadenza T e *strike* K è dato da

$$V(t, s) = e^{-r(T-t)}u(t, s), \quad (2.1)$$

dove

$$u(t, s) = E[(S_T^{t,s} - K)^+] \quad (2.2)$$

e il processo $S^{t,s}$ è la soluzione di

$$\begin{cases} dS_{t'} = rS_{t'}dt' + \sigma(t)A(S_{t'})dW_{t'} \\ S_t = s \end{cases} \quad (2.3)$$

Perciò, per il teorema di rappresentazione ??,

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)A^2(s)u_{ss} + rsu_s = 0, & t < T, s > 0 \\ u(T, s) = (s - K)^+, & s > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Solitamente la funzione A è del tipo $A(s) = s^\beta$, con $0 < \beta < 1$.

Il risultato principale di questo paragrafo è il seguente

Teorema 2.1.1. *Supponendo che la funzione A sia del tipo*

$$A(xy) = A(x)A(y), \quad \forall x, y > 0, \quad (2.5)$$

il prezzo dell'opzione call si approssima come

$$V(t, s) \approx e^{-r(T-t)} \left[(e^{r(T-t)}s - K) \int_{-\infty}^{\frac{e^{r(T-t)}s - K}{\tilde{\tau}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sqrt{\frac{\tilde{\tau}}{2\pi}} e^{-\frac{(e^{r(T-t)}s - K)^2}{2\tilde{\tau}}} \right], \quad (2.6)$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} = & A^2(K)\tau \left[1 + \nu_1(e^{r(T-t)}s - K) + \frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12}(e^{r(T-t)}s - K)^2 + \right. \\ & \left. + A^2(K)\frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12}\tau \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\tau = \int_t^T e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) \sigma^2(t') dt', \quad (2.8)$$

$$\nu_1 = A'(K)/A(K), \quad \nu_2 = A''(K)/A(K). \quad (2.9)$$

$$G(\tilde{\tau}, e^{r(T-t)}s - K) \quad (2.10)$$

Osserviamo innanzitutto che la PDE contenuta in (2.4) è di tipo parabolico degenere in \mathbb{R}_+ a coefficienti non costanti. Siccome non si conoscono soluzioni analitiche per tale problema, utilizzeremo degli opportuni cambi di variabili che ci permettano di approssimarne la soluzione (seguendo [1]).

Teorema 2.1.2. *Sia posto $\epsilon = A(K)$, e sia dato il cambio di variabili*

$$\tau(t) = \int_t^T e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) \sigma^2(t') dt', \quad x(t, s) = \frac{1}{\epsilon}(e^{r(T-t)}s - K). \quad (2.11)$$

Se $Q(\tau, x)$ risolve

$$\begin{cases} Q_\tau - \frac{1}{2} \frac{A^2(K+\epsilon x)}{A^2(K)} Q_{xx} = 0, & \tau > 0, \quad x > -\frac{1}{\epsilon}K \\ Q(0, x) = x^+, & x > -\frac{1}{\epsilon}K \end{cases}, \quad (2.12)$$

allora

$$u(t, s) = \epsilon Q(\tau(t), x(t, s)). \quad (2.13)$$

Quindi, il prezzo dell'opzione è dato da

$$V(t, s) = e^{-r(T-t)} A(K) Q \left(\tau(t), \frac{e^{r(T-t)} s - K}{A(K)} \right). \quad (2.14)$$

Dimostrazione. (Teorema 2.1.2)

Poniamo $f(t, s) = \epsilon Q(\tau(t), x(t, s))$ e verifichiamo che risolve il problema (2.4).

Valgono le seguenti relazioni:

$$f_t(t, s) = -\epsilon e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) \sigma^2(t) Q_\tau(\tau, x) - r s e^{r(T-t)} Q_x(\tau, x), \quad (2.15)$$

$$f_s(t, s) = e^{r(T-t)} Q_x(\tau, x), \quad (2.16)$$

$$f_{ss}(t, s) = \frac{1}{\epsilon} e^{2r(T-t)} Q_{xx}(\tau, x). \quad (2.17)$$

Segue che

$$\begin{aligned} & f_t + \frac{1}{2} \sigma^2(t) A^2(s) f_{ss} + r s f_s = \\ & = -\epsilon e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) \sigma^2(t) Q_\tau + \frac{1}{2} \sigma^2(t) A^2(s) \frac{1}{\epsilon} e^{2r(T-t)} Q_{xx} = \\ & = -\epsilon e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) \sigma^2(t) Q_\tau + \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2(t) A^2(e^{-r(T-t')}) A^2(K + \epsilon x) \frac{1}{\epsilon} e^{2r(T-t)} Q_{xx} = \\ & = -\epsilon e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) \sigma^2(t) Q_\tau + \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2(t) e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) A^2(K + \epsilon x) \frac{1}{\epsilon} Q_{xx} = \\ & = -\epsilon e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}) \sigma^2(t) \left(Q_\tau + \frac{1}{2} \frac{A^2(K + \epsilon x)}{\epsilon^2} Q_{xx} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Infine:

$$f(T, s) = \epsilon Q(\tau(T), x(T, s)) = \epsilon Q \left(0, \frac{1}{\epsilon} (s - K) \right) = (s - K)^+ \quad (2.19)$$

□

Possiamo ora supporre, senza perdere generalità (vedi oss. 2.1.8), che $A(K) \ll 1$.

1. Sviluppando A intorno a K otteniamo:

$$A(K + \epsilon x) = A(K) \left\{ 1 + \epsilon \nu_1 x + \frac{1}{2} \epsilon^2 \nu_2 x^2 + \dots \right\}, \quad (2.20)$$

dove

$$\nu_1 = A'(K)/A(K), \quad \nu_2 = A''(K)/A(K), \quad \dots \quad (2.21)$$

Segue che:

$$A^2(K + \epsilon) = A^2(K) \{1 + 2\epsilon\nu_1x + \epsilon^2\nu_1^2x^2 + \epsilon^2\nu_2x^2 + \dots\}. \quad (2.22)$$

Perciò il problema (2.12) diventa

$$\begin{cases} Q_\tau - \frac{1}{2}Q_{xx} = \epsilon\nu_1xQ_{xx} + \frac{1}{2}\epsilon^2(\nu_1^2 + \nu_2)x^2Q_{xx} + \dots, & \tau > 0, \quad x > -\frac{1}{\epsilon}K \\ Q(0, x) = x^+, & x > -\frac{1}{\epsilon}K \end{cases} \quad (2.23)$$

Approssimiamo ora Q mediante il seguente

Teorema 2.1.3. *Sia*

$$\tilde{Q}(\tau, x) = Q^0(\tau, x) + \epsilon Q^1(\tau, x) + \epsilon^2 Q^2(\tau, x), \quad (2.24)$$

dove

$$\begin{cases} Q_\tau^0 - \frac{1}{2}Q_{xx}^0 = 0, & \tau > 0 \\ Q^0(0, x) = x^+ \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} Q_\tau^1 - \frac{1}{2}Q_{xx}^1 = \nu_1xQ_{xx}^0, & \tau > 0 \\ Q^1(0, x) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} Q_\tau^2 - \frac{1}{2}Q_{xx}^2 = \nu_1xQ_{xx}^1 + \frac{1}{2}(\nu_2 + \nu_1^2)x^2Q_{xx}^0, & \tau > 0 \\ Q^2(0, x) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Allora:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_\tau - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{xx} = \epsilon\nu_1x\tilde{Q}_{xx} + \frac{1}{2}\epsilon^2(\nu_1^2 + \nu_2)x^2\tilde{Q}_{xx} + \epsilon^3f(\tau, x), & \tau > 0 \\ \tilde{Q}(0, x) = x^+ \end{cases}, \quad (2.28)$$

dove

$$f = \left(-\nu_1xQ_{xx}^2 + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2)x^2(-Q_{xx}^1 - \epsilon Q_{xx}^2) \right). \quad (2.29)$$

Approssimando Q con \tilde{Q} la formula del prezzo diventa

$$V(t, s) \approx e^{-r(T-t)}A(K)\tilde{Q}\left(\tau(t), \frac{e^{r(T-t)}s - K}{A(K)}\right). \quad (2.30)$$

Dimostrazione. (Teorema 2.1.3)

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_\tau - \frac{1}{2}\tilde{Q}_{xx} &= Q_\tau^0 - \frac{1}{2}Q_{xx}^0 + \epsilon \left(Q_\tau^1 - \frac{1}{2}Q_{xx}^1 \right) + \epsilon^2 \left(Q_\tau^2 - \frac{1}{2}Q_{xx}^2 \right) = \\
&= \epsilon\nu_1 x Q_{xx}^0 + \epsilon^2 \nu_1 x Q_{xx}^1 + \frac{1}{2}\epsilon^2(\nu_2 + \nu_1^2)x^2 Q_{xx}^0 = \\
&= \epsilon\nu_1 x(Q_{xx}^0 + \epsilon Q_{xx}^1) + \frac{1}{2}\epsilon^2(\nu_2 + \nu_1^2)x^2 Q_{xx}^0 = \\
&= \epsilon\nu_1 x(\tilde{Q}_{xx} - \epsilon^2 Q_{xx}^2) + \frac{1}{2}\epsilon^2(\nu_2 + \nu_1^2)x^2(\tilde{Q}_{xx} - \epsilon Q_{xx}^1 - \epsilon^2 Q_{xx}^2) = \\
&= \epsilon\nu_1 x\tilde{Q}_{xx} + \frac{1}{2}\epsilon^2(\nu_1^2 + \nu_2)x^2\tilde{Q}_{xx} + \\
&\quad + \epsilon^3 \left(-\nu_1 x Q_{xx}^2 + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2)x^2(-Q_{xx}^1 - \epsilon Q_{xx}^2) \right). \tag{2.31}
\end{aligned}$$

La prova del dato iniziale è immediata. \square

Calcoliamo ora Q^0 , Q^1 , Q^2 e otteniamo \tilde{Q} .

Definizione 2.1. Definiamo la funzione G come

$$G(\tau, x) := x\mathcal{N}\left(\frac{x}{\tau}\right) + \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\tau}}, \tag{2.32}$$

dove

$$\mathcal{N}(y) = \int_{-\infty}^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{2.33}$$

Teorema 2.1.4. Le soluzioni dei problemi (2.25), (2.26) e (2.27) sono

$$Q^0(\tau, x) = G(\tau, x), \tag{2.34}$$

$$Q^1(\tau, x) = \nu_1 \tau x G_\tau, \tag{2.35}$$

$$Q^2(\tau, x) = \nu_1^2 \left(\tau^4 G_{\tau\tau\tau} + \frac{8}{3}\tau^3 G_{\tau\tau} + \frac{1}{2}\tau^2 G_\tau \right) + \nu_2 \left(\frac{2}{3}\tau^3 G_{\tau\tau} + \frac{1}{2}\tau^2 G_\tau \right). \tag{2.36}$$

Alla dimostrazione del teorema 2.1.4 premettiamo i seguenti

Lemma 2.1.5.

$$G_\tau = \frac{1}{2}\Gamma(\tau, x), \quad G_x = \mathcal{N}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right), \tag{2.37}$$

$$G_{\tau\tau} = \frac{x^2 - \tau}{4\tau^2}\Gamma(\tau, x), \quad G_{x\tau} = -\frac{x}{2\tau}\Gamma(\tau, x), \quad G_{xx} = \Gamma(\tau, x), \tag{2.38}$$

$$G_{\tau\tau\tau} = \frac{x^4 - 6x^2\tau + 3\tau^2}{8\tau^4}\Gamma(\tau, x). \tag{2.39}$$

Lemma 2.1.6. *Sia $\tau \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $t < \tau$ vale:*

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(\tau - t, x - y) \Gamma(t, y) dy = \Gamma(\tau, x). \quad (2.40)$$

Dimostrazione. Sia il membro sinistro (per la formula ??), sia quello destro (verifica diretta), risolvono

$$\begin{cases} f_{\tau} - \frac{1}{2} f_{xx} = 0, & \tau > t \\ f(t, x) = \Gamma(t, x) \end{cases}, \quad (2.41)$$

e per l'unicità della soluzione si ha la (2.40). \square

Dimostrazione. (Teorema 2.1.4)

Calcolo di $Q^0(\tau, x)$:

L'operatore in (2.25) è l'operatore del calore ordinario e la PDE è di tipo omogeneo. Inoltre, anche se la funzione al tempo iniziale non è limitata, essa cresce più lentamente di $e^{x^2/2}$. Quindi possiamo utilizzare la formula (??), ovvero

$$Q^0(\tau, x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(\tau, x - y) y^+ dy. \quad (2.42)$$

Ricordando che

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (2.43)$$

e adoperando il cambio di variabili $z = \frac{x-y}{\sqrt{\tau}}$, viene che

$$Q^0(\tau, x) = x \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} = G(\tau, x). \quad (2.44)$$

Calcolo di $Q^1(\tau, x)$:

La PDE nel problema (2.26) non è omogenea e quindi si utilizza la formula (??). Risulta:

$$Q^1(\tau, x) = \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) \nu_1 y G_{yy}(t, y) dy dt, \quad (2.45)$$

che per la (2.38) diventa

$$\begin{aligned}
Q^1(\tau, x) &= - \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) 2\nu_1 t G_{y\tau}(t, y) dy dt = \\
&= -2\nu_1 \int_0^\tau t dt \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) G_{y\tau}(t, y) dy = \\
&= -4\nu_1 \int_0^\tau t dt \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(\tau - t, x - y) G_{y\tau}(t, y) dy. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Integrando per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}
Q^1(\tau, x) &= -4\nu_1 \int_0^\tau t dt \left(\left[G_\tau(\tau - t, x - y) G_\tau(t, y) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dy} G_\tau(\tau - t, x - y) G_\tau(t, y) dy \right). \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Ora, siccome

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G_\tau(t, x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} G_\tau(t, x) = 0 \quad \forall t \neq 0 \quad (2.48)$$

e

$$\frac{d}{dy} G_\tau(\tau - t, x - y) = - \frac{d}{dx} G_\tau(\tau - t, x - y) \quad (2.49)$$

la (2.47) diventa

$$\begin{aligned}
Q^1(\tau, x) &= -4\nu_1 \int_0^\tau t dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} G_\tau(\tau - t, x - y) G_\tau(t, y) dy = \\
&= -4\nu_1 \int_0^\tau t dt \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(\tau - t, x - y) G_\tau(t, y) dy. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Siccome $G_\tau = \frac{1}{2}\Gamma$, utilizzando il lemma (2.1.6) si ottiene che

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(\tau - t, x - y) G_\tau(t, y) dy &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) \Gamma(t, y) dy = \\
&= \frac{1}{4} \Gamma(\tau, x) = \frac{1}{2} G_\tau(\tau, x), \quad (2.51)
\end{aligned}$$

perciò la (2.50) diventa

$$\begin{aligned}
Q^1(\tau, x) &= -4\nu_1 \int_0^\tau t \frac{1}{2} G_{x\tau}(\tau, x) dt = -2\nu_1 G_{x\tau}(\tau, x) \int_0^\tau t dt = \\
&= -\nu_1 \tau^2 G_{x\tau}(\tau, x) = \nu_1 \tau x G_\tau. \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Calcolo di $Q^2(\tau, x)$:

Poichè

$$Q_{xx}^1(\tau, x) = \nu \left(-\frac{3}{2}x + \frac{x^3}{2\tau} \right) \Gamma(\tau, x), \quad (2.53)$$

vale

$$\nu_1 x Q_{xx}^1 + \frac{1}{2}(\nu_2 + \nu_1^2)x^2 Q_{xx}^0 = \left(\nu_1^2 \frac{x^4 - 2\tau x^2}{2\tau} + \frac{1}{2}\nu_2 x^2 \right) \Gamma(\tau, x). \quad (2.54)$$

Perciò, sostituendo in (2.27) si ottiene

$$\begin{cases} Q_\tau^2 - \frac{1}{2}Q_{xx}^2 = f(\tau, x), & \tau > 0 \\ Q^2(0, x) = 0 \end{cases}, \quad (2.55)$$

dove:

$$f(\tau, x) = \left(\nu_1^2 \frac{x^4 - 2\tau x^2}{2\tau} + \frac{1}{2}\nu_2 x^2 \right) \Gamma(\tau, x). \quad (2.56)$$

Quindi, sempre per la formula (??), otteniamo

$$Q^1(\tau, x) = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) f(t, y) dy dt. \quad (2.57)$$

Ora, per risolvere l'integrale osserviamo che

$$f(\tau, x) = \nu_1^2 (4\tau^3 G_{\tau\tau\tau} + 8\tau^2 G_{\tau\tau} + \tau G_\tau) + \nu_2 (2\tau^2 G_{\tau\tau} + \tau G_\tau), \quad (2.58)$$

e sostituendo in (2.55) otteniamo

$$f(\tau, x) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (2.59)$$

dove:

$$I_1 = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) \nu_1^2 4t^3 G_{ttt}(t, y) dy dt, \quad (2.60)$$

$$I_2 = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) \nu_1^2 8t^2 G_{tt}(t, y) dy dt, \quad (2.61)$$

$$I_3 = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) \nu_1^2 t G_t(t, y) dy dt, \quad (2.62)$$

$$I_4 = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) \nu_2 2t^2 G_{tt}(t, y) dy dt, \quad (2.63)$$

$$I_5 = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) \nu_2 t G_t(t, y) dy dt. \quad (2.64)$$

Come per il calcolo di Q^1 , risolviamo questi integrali utilizzando il lemma (2.1.6). Risulta:

$$\begin{aligned}
I_2 &= 8\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau - t, x - y) G_{tt}(t, y) dy = \\
&= 8\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} 2G_\tau(\tau - t, x - y) G_{tt}(t, y) dy = \\
&= 16\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} (G_\tau(\tau - t, x - y) G_t(t, y)) - \\
&\quad - \left(\frac{d}{dt} G_\tau(\tau - t, x - y) \right) G_t(t, y) dy = \\
&= 16\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} (G_\tau(\tau - t, x - y) G_t(t, y)) dy - \\
&\quad - 16\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} G_\tau(\tau - t, x - y) \right) G_t(t, y) dy = \\
&= 16\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(\tau - t, x - y) G_t(t, y) dy - \\
&\quad - 16\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{d}{d\tau} G_\tau(\tau - t, x - y) \right) G_t(t, y) dy \\
&= 16\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(\tau - t, x - y) G_t(t, y) dy + \\
&\quad + 16\nu_1^2 \int_0^\tau t^2 dt \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(\tau - t, x - y) G_t(t, y) dy. \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Utilizzando ora la (2.51), diventa

$$I_2 = 16\nu_1^2 \int_0^\tau \frac{1}{2} t^2 \frac{d}{dt} G_\tau(\tau, x) dt + 16\nu_1^2 \int_0^\tau \frac{1}{2} t^2 G_{\tau\tau}(\tau, x) dt, \quad (2.66)$$

e, siccome $\frac{d}{dt} G_\tau(\tau, x) = 0$, risulta

$$\begin{aligned}
I_2 &= 16\nu_1^2 \int_0^\tau \frac{1}{2} t^2 G_{\tau\tau}(\tau, x) dt = 8\nu_1^2 G_{\tau\tau}(\tau, x) \int_0^\tau t^2 dt = \\
&= \frac{8}{3} \nu_1^2 \tau^3 G_{\tau\tau}(\tau, x). \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo si ottengono anche I_1, I_3, I_4, I_5 e quindi la tesi. \square

A questo punto, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(\tau, x) &= Q^0 + \epsilon Q^1 + \epsilon^2 Q^2 = G + \epsilon \nu_1 \tau x G_\tau + \\ &+ \epsilon^2 \left[\nu_1^2 \left(\tau^4 G_{\tau\tau\tau} + \frac{8}{3} \tau^3 G_{\tau\tau} + \frac{1}{2} \tau^2 G_\tau \right) + \nu_2 \left(\frac{2}{3} \tau^3 G_{\tau\tau} + \frac{1}{2} \tau^2 G_\tau \right) \right].\end{aligned}\quad (2.68)$$

Ora, approssimiamo nuovamente \tilde{Q} con una funzione del tipo

$$G(\tau^*(\tau, x), x). \quad (2.69)$$

Teorema 2.1.7.

$$\tilde{Q}(\tau, x) = G(\tau^*, x) + O(\epsilon^3) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.70)$$

dove

$$\tau^*(\tau, x) = \tau \left[1 + \epsilon \nu_1 x + \epsilon^2 \left(\frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12} x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12} \tau \right) \right]. \quad (2.71)$$

Dimostrazione. Scriviamo Q^2 nella forma

$$Q^2(\tau, x) = \frac{1}{2} \nu_1^2 \tau^2 x^2 G_{\tau\tau} + g(\tau, x) G_\tau, \quad (2.72)$$

con

$$g(\tau, x) = \left(\frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12} x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12} \tau \right) \tau. \quad (2.73)$$

Perciò

$$\tilde{Q}(\tau, x) = G + \epsilon \nu_1 \tau x G_\tau + \frac{1}{2} \epsilon^2 \nu_1^2 \tau^2 x^2 G_{\tau\tau} + \epsilon^2 g(\tau, x) G_\tau. \quad (2.74)$$

Allora, utilizzando lo sviluppo di Taylor e ponendo

$$\tau^*(\tau, x) = \tau + \epsilon \nu_1 \tau x + \epsilon^2 g(\tau, x), \quad (2.75)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}G(\tau^*, x) &= G(\tau, x) + G_\tau(\tau, x)(\tau^* - \tau) + \frac{1}{2} G_{\tau\tau}(\tau, x)(\tau^* - \tau)^2 + O(\tau^* - \tau)^3 = \\ &= G(\tau, x) + G_\tau(\tau, x) (\epsilon \nu_1 \tau x + \epsilon^2 g(\tau, x)) + \\ &\quad + \frac{1}{2} G_{\tau\tau}(\tau, x) (\epsilon \nu_1 \tau x + \epsilon^2 g(\tau, x))^2 + O(\epsilon^3) = \\ &= G(\tau, x) + \epsilon \nu_1 \tau x G_\tau(\tau, x) + \epsilon^2 g(\tau, x) G_\tau(\tau, x) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon^2 \nu_1^2 \tau^2 x^2 G_{\tau\tau}(\tau, x) + O(\epsilon^3) = \\ &= \tilde{Q}(\tau, x) + O(\epsilon^3), \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0.\end{aligned}\quad (2.76)$$

□

Sostituendo $G(\tau^*(\tau, x), x)$ a $\tilde{Q}(\tau, x)$ in (2.30) la formula del prezzo risulta:

$$V(t, s) \approx e^{-r(T-t)} A(K) G\left(\tau^*(\tau, x(t, s)), \frac{e^{r(T-t)} s - K}{A(K)}\right), \quad (2.77)$$

dove

$$\begin{aligned} \tau^*(\tau, x(t, s)) = & \tau \left[1 + \nu_1 (e^{r(T-t)} s - K) + \frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12} (e^{r(T-t)} s - K)^2 + \right. \\ & \left. + A^2(K) \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12} \tau \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Siccome vale che

$$\epsilon G(t, y) = G(\epsilon^2 t, \epsilon y) \quad \forall t, \epsilon > 0, \quad \forall x, \quad (2.79)$$

la formula del prezzo diventa

$$V(t, s) \approx e^{-r(T-t)} G\left(\tilde{\tau}(\tau, x(t, s)), e^{r(T-t)} s - K\right), \quad (2.80)$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(\tau, x(t, s)) = & A^2(K) \tau \left[1 + \nu_1 (e^{r(T-t)} s - K) + \frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12} (e^{r(T-t)} s - K)^2 + \right. \\ & \left. + A^2(K) \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12} \tau \right]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Quest'ultima approssimazione di $V(t, s)$ è proprio quella del teorema 2.1.1, e conclude la nostra analisi.

Osservazione 2.1.8. In quest'analisi abbiamo supposto $A(K) \ll 1$. Questa non è un'ipotesi limitativa. Infatti il problema (2.4) è equivalente a

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2} \sigma'^2(t) A'^2(s) u_{ss} + r s u_s = 0, & t < T, \quad s > 0 \\ u(T, s) = (s - K)^+, & s > 0 \end{cases}, \quad (2.82)$$

dove

$$\sigma'(t) = \sigma(t)/\delta, \quad A'(s) = \delta A(s), \quad \delta \ll 1, \quad (2.83)$$

e quindi $A'(K) \ll 1$.

Ora, ripetendo l'analisi con σ' e A' si otterrebbe comunque il medesimo risultato poiché la (2.80-2.81) rimarrebbe invariata.

2.2 Calcolo della volatilità implicita per il modello CEV

In questo paragrafo vogliamo sfruttare la formula (2.80) del prezzo, per ottenere una formula della volatilità implicita di *Black-Scholes*. Ricordiamo che la volatilità implicita è l'unica scelta del parametro σ_B , che rende equivalenti prezzi ottenuti con i modelli CEV e Black-Scholes.

Il risultato di questo paragrafo è perciò il seguente

Teorema 2.2.1. *Dato il modello CEV con parametri $\sigma(t)$ e $A(s)$ tale che*

$$A(xy) = A(x)A(y), \quad \forall x, y > 0, \quad (2.84)$$

un'approssimazione della volatilità implicita di Black-Scholes è data da:

$$\begin{aligned} \sigma_B(t, T, s, K) \approx & a \frac{A(s_{av})}{s_{av}} \left[1 + \left(\gamma_2 - 2\gamma_1^2 + \frac{2}{s_{av}^2} \right) \frac{(e^{r(T-t)}s - K)^2}{24} + \right. \\ & \left. + \left(2\gamma_2 - \gamma_1^2 + \frac{1}{s_{av}^2} \right) \frac{a^2 A^2(s_{av})(T-t)}{24} \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

dove

$$s_{av} = \frac{1}{2}(e^{r(T-t)}s + K), \quad \gamma_1 = A'(s_{av})/A(s_{av}), \quad \gamma_2 = A''(s_{av})/A(s_{av}) \quad (2.86)$$

e

$$a = \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T e^{2r(T-t')} A^2(e^{-r(T-t')}s) \sigma^2(t') dt' \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.87)$$

Osserviamo che per $\sigma(t) = \sigma_B$ e $A(s) = s$ il CEV diventa il modello di Black-Scholes. Quindi l'approssimazione del prezzo di Black-Scholes è

$$V_B(t, s) = e^{-r(T-t)} G\left(\tau_B(\tau, x(t, s)), e^{r(T-t)}s - K\right), \quad (2.88)$$

dove

$$\begin{aligned} \tau_B(\tau, x(t, s)) = & K^2(T-t)\sigma_B^2 \left[1 + K^{-1}(e^{r(T-t)}s - K) + \frac{1}{12K^2}(e^{r(T-t)}s - K)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{(T-t)K^2\sigma_B^2}{12K^2}\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.89)$$

La volatilità implicita si troverà perciò ponendo $\tau_B = \tilde{\tau}$ e risolvendo rispetto a σ_B .

Si pone però il problema che l'equazione in questione è di quarto grado. Perciò operiamo un'ulteriore approssimazione che ci porterà ad un'equazione di terzo grado.

Come in [1], utilizzeremo al posto di $\tilde{\tau}$ un'approssimazione di $\sqrt{\tilde{\tau}}$.

Proposizione 2.2.2. *Risulta*

$$\sqrt{\tilde{\tau}(\tau, x)} = \epsilon\sqrt{\tau} \left[1 + \frac{1}{2}\nu_1\epsilon x + \epsilon^2 \left(\frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12}x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{24}\tau \right) + O(\epsilon^3) \right], \text{ per } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.90)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$\tilde{\tau}(\tau, x) = \epsilon^2\tau \left[1 + \epsilon\nu_1x + \epsilon^2 \left(\frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12}x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12}\tau \right) \right]. \quad (2.91)$$

Allora, utilizzando lo sviluppo

$$y^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2 + O(y-1)^3, \quad (2.92)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{\tau}(\tau, x)} = \epsilon\sqrt{\tau} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\epsilon\nu_1x + \epsilon^2 \left(\frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12}x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12}\tau \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \left[\epsilon\nu_1x + \epsilon^2 \left(\frac{4\nu_2 + \nu_1^2}{12}x^2 + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12}\tau \right) \right]^2 + O(\epsilon^3) \right\}, \text{ per } \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.93)$$

e quindi, la tesi. \square

Quindi, con un piccolo abuso di notazione scriveremo

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{\tau}(\tau, x(t, s))} = A(K)\sqrt{\tau} \left[1 + \frac{1}{2}\nu_1(e^{r(T-t)}s - K) + \frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{12}(e^{r(T-t)}s - K)^2 + \right. \\ \left. + A^2(K)\frac{2\nu_2 - \nu_1^2}{24}\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Ricordiamo che

$$\nu_1 = A'(K)/A(K), \quad \nu_2 = A''(K)/A(K), \quad (2.95)$$

perciò i primi due termini della (2.94) sono

$$\sqrt{\tau} \left[A(K) + \frac{1}{2} A'(K)(e^{r(T-t)}s - K) + \dots \right] \quad (2.96)$$

e questo suggerisce di espandere A attorno alla media

$$s_{av} = \frac{1}{2}(e^{r(T-t)}s + K) \quad (2.97)$$

anzichè attorno a K .

Definendo quindi

$$\gamma_1 = A'(s_{av})/A(s_{av}), \quad \gamma_2 = A''(s_{av})/A(s_{av}), \quad (2.98)$$

il prezzo dell'opzione sarà

$$V(t, s) \approx e^{-r(T-t)} G\left(\tilde{\tau}(\tau, x(t, s)), e^{r(T-t)}s - K\right), \quad (2.99)$$

dove:

$$\sqrt{\tilde{\tau}(\tau, x(t, s))} = A(s_{av})\sqrt{\tau} \left[1 + \frac{\gamma_2 - 2\gamma_1^2}{24}(e^{r(T-t)}s - K)^2 + A^2(s_{av})\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24}\tau \right]. \quad (2.100)$$

Dimostrazione. (Teorema 2.2.1) Per $\sigma(t) = \sigma_B$ e $A(s) = s$ il CEV diventa il modello di Black-Scholes. Quindi l'approssimazione del prezzo di Black-Scholes è

$$V_B(t, s) \approx e^{-r(T-t)} G\left(\tau_B(\tau, x(t, s)), e^{r(T-t)}s - K\right), \quad (2.101)$$

dove

$$\sqrt{\tau_B(\tau, x(t, s))} = \sigma_B s_{av} \sqrt{T-t} \left[1 - \frac{(e^{r(T-t)}s - K)^2}{12s_{av}^2} - \frac{\sigma_B^2(T-t)}{24} \right]. \quad (2.102)$$

Siccome $G(\tau, x)$ è una funzione crescente in τ , il prezzo di Black-Scholes sarà uguale al prezzo del CEV se e soltanto se

$$\sqrt{\tau_B(\tau, x(t, s))} = \sqrt{\tilde{\tau}(\tau, x(t, s))}. \quad (2.103)$$

Eguagliando la (2.102) alla (2.100) e risolvendo secondo σ_B si ottiene la tesi. \square

Corollario 2.2.3. *Dato il modello CEV con parametri $\sigma(t)$ e $A(s) = s^\beta$, con $0 < \beta < 1$, la volatilità implicita di Black-Scholes vale:*

$$\sigma_B(t, T, s, K) \approx \frac{a}{s_{av}^{1-\beta}} \left[1 + \frac{(1-\beta)(2+\beta)}{24} \left(\frac{e^{r(T-t)}s - K}{s_{av}} \right)^2 + \frac{(1-\beta^2)a^2(T-t)^2}{24 s_{av}^{2-2\beta}} \right], \quad (2.104)$$

dove

$$s_{av} = \frac{1}{2}(e^{r(T-t)}s + K) \quad (2.105)$$

e

$$a = \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T e^{2r(T-t')(1-\beta)} \sigma^2(t') dt' \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.106)$$

2.3 Calcolo del prezzo per il modello SABR

In questo paragrafo vogliamo trovare un'approssimazione asintotica del prezzo di un'opzione *call* europea secondo il modello SABR statico.

Se ad un istante t il prezzo del titolo sottostante è s e la volatilità iniziale è σ , un'opzione con scadenza T e strike K vale:

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} E[(\hat{F}_T^{t,f} - K)^+], \quad (2.107)$$

dove $\hat{F}^{t,f}$ è la prima componente del processo bidimensionale $(\hat{F}, \hat{\sigma})^{t,(f,\sigma)}$ soluzione di

$$\begin{cases} d\hat{F}_{t'} = \hat{\sigma}_{t'} C(\hat{F}_{t'}) dW_{t'}^1 \\ d\hat{\sigma}_{t'} = \alpha \hat{\sigma}_{t'} dW_{t'}^2 \\ \hat{F}_t = f \\ \hat{\sigma}_t = \sigma \end{cases}, \quad (2.108)$$

con

$$f = e^{r(T-t)}s \quad (2.109)$$

e $(W^1, W^2)_{t'}$ moto Browniano correlato (vedi paragrafo) tale che

$$d\langle W^1, W^2 \rangle_{t'} = \rho dt'. \quad (2.110)$$

Il risultato principale di questo paragrafo è il seguente

Teorema 2.3.1. *Sotto le ipotesi precedenti un'approssimazione del prezzo $V(t, s, \sigma)$ è data da*

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} s \left[(e^{r(T-t)} s - K)^+ + \frac{|e^{r(T-t)} s - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2}{2(T-t)} - \theta}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq \right], \quad (2.111)$$

dove

$$\theta = \log \left(\frac{\sigma z}{e^{r(T-t)} s - K} \sqrt{C(K)C(e^{r(T-t)} s)} \right) + \log \left(\frac{xI^{1/2}(\alpha z)}{z} \right) + \frac{1}{4} \rho \alpha \sigma b_1 z^2, \quad (2.112)$$

$$z = \frac{1}{\sigma} \int_K^{e^{r(T-t)} s} \frac{ds'}{C(s')}, \quad (2.113)$$

$$x = \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{I(\alpha z) - \rho + \alpha z}{1 - \rho} \right), \quad (2.114)$$

$$I(\zeta) = \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}, \quad (2.115)$$

$$b_1 = C'(e^{r(T-t)} s_0), \quad (2.116)$$

con $s_0 > 0$ fissato a piacere.

L'analisi che segue ([2]) è basata sull'ipotesi che σ e α siano piccole. Perciò, definiamo:

$$\hat{\sigma}' := \hat{\sigma}/\epsilon, \quad e \quad \alpha' = \alpha/\epsilon, \quad (2.117)$$

dove $\epsilon \ll 1$.

Allora il processo $(\hat{F}, \hat{\sigma}')^{t, (f, \sigma')}$ risolve

$$\begin{cases} d\hat{F}_{t'} = \epsilon \hat{\sigma}'_{t'} C(\hat{F}_{t'}) dW_{t'}^1 \\ d\hat{\sigma}'_{t'} = \epsilon \alpha' \hat{\sigma}'_{t'} dW_{t'}^2 \\ \hat{F}_t = f \\ \hat{\sigma}'_t = \sigma' \end{cases}, \quad (2.118)$$

con

$$\sigma' = \sigma/\epsilon. \quad (2.119)$$

Teorema 2.3.2. Sia $P(\tau, f, \sigma')$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} P_\tau = \frac{1}{2}\epsilon^2\sigma'^2 C^2(f)P_{ff} + \epsilon^2\rho\alpha'\sigma'^2 C(f)P_{f\sigma'} + \frac{1}{2}\epsilon^2\alpha'^2\sigma'^2 P_{\sigma'\sigma'}, & \tau > 0 \\ P(0, f, \sigma') = \sigma'^2\delta(f - K) \end{cases} . \quad (2.120)$$

Allora:

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 C^2(K) \int_0^{T-t} P(\tau, f, \sigma') d\tau \right]. \quad (2.121)$$

Osservazione 2.3.3. Il dato iniziale $P(0, f, \sigma') = \sigma'^2\delta(f - K)$ nel problema (2.137) è inteso nel senso delle distribuzioni di probabilità, ovvero:

per ogni $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^2)$ vale

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(f, \sigma') P(\tau, f, \sigma') df d\sigma' = \int_{\mathbb{R}} \varphi(K, \sigma') \sigma'^2 d\sigma'. \quad (2.122)$$

Dimostrazione. (Teorema 2.3.1)

Sia $p(t, f, \sigma'; t', \cdot, \cdot)$ la densità di distribuzione di $(\hat{F}, \hat{\sigma}')_{t'}^{t, (f, \sigma')}$, ovvero:

per ogni B boreliano di \mathbb{R}^2 vale

$$P((\hat{F}, \hat{\sigma}')_{t'}^{t, (f, \sigma')} \in B) = \int_B p(t, f, \sigma'; t', F, A) dF dA. \quad (2.123)$$

Per il teorema ??, la densità p risolve

$$\begin{cases} p_{t'} = \frac{1}{2}\epsilon^2 A^2 [C^2(F)p]_{FF} + \epsilon^2 \rho \alpha' [A^2 C(F)p]_{FA} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \alpha'^2 [A^2 p]_{AA}, & t' > t \\ p = \delta(F - K)\delta(A - \sigma'), & t' = t \end{cases} . \quad (2.124)$$

Anche in questo caso il dato iniziale è inteso nel senso delle distribuzioni di probabilità.

Ora, ricordiamo che

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} E[(\hat{F}_T^{t, f} - K)^+], \quad (2.125)$$

e quindi risulta:

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_K^{+\infty} (F - K) p(t, f, \sigma'; T, F, A) dF dA. \quad (2.126)$$

Con un piccolo abuso di notazione possiamo scrivere

$$p(t, f, \sigma'; T, F, A) = \delta(F - K)\delta(A - \sigma') + \int_t^T p_{t'}(t, f, \sigma', t', F, A)dt', \quad (2.127)$$

e sostituendo nella (2.136), $V(t, s, \sigma)$ diventa

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_K^{+\infty} (F - K)p_{t'}(t, f, \sigma', t', F, A)dFdAdt' \right]. \quad (2.128)$$

Sostituiamo ora $p_{t'}$ utilizzando la (2.124), e siccome

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^2 \rho \alpha' [A^2 C(F)p]_{FA} dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon^2 \alpha'^2 [A^2 p]_{AA} dA = 0, \quad (2.129)$$

il prezzo dell'opzione si riduce a

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon^2 \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_K^{+\infty} A^2 (F - K) [C^2(F)p]_{FF} dFdAdt' \right]. \quad (2.130)$$

Integrando per parti due volte rispetto ad F si ottiene

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon^2 C^2(K) \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 p(t, f, \sigma'; t', K, A) dAdt' \right]. \quad (2.131)$$

Ponendo

$$P(t, f, \sigma'; t') = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 p(t, f, \sigma'; t', K, A) dFdA, \quad (2.132)$$

si ha che P soddisfa

$$\begin{cases} P_t + \frac{1}{2} \epsilon^2 \sigma'^2 C^2(f) P_{ff} + \epsilon^2 \rho \alpha' \sigma'^2 C(f) P_{f\sigma'} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \alpha'^2 \sigma'^2 P_{\sigma'\sigma'}, & t < t' \\ P = \sigma'^2 \delta(f - K), & t = t' \end{cases}, \quad (2.133)$$

e il prezzo dell'opzione diventa

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon^2 C^2(K) \int_t^T P(t, f, \sigma'; t') dt' \right]. \quad (2.134)$$

Con il cambio di variabili

$$\tau = t' - t \quad (2.135)$$

si ottiene

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon^2 C^2(K) \int_0^{T-t} P(\tau, f, \sigma') d\tau \right], \quad (2.136)$$

dove $P(\tau, f, \sigma')$ risolve

$$\begin{cases} P_\tau = \frac{1}{2} \epsilon^2 \sigma'^2 C^2(f) P_{ff} + \epsilon^2 \rho \alpha' \sigma'^2 C(f) P_{f\sigma'} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \alpha'^2 \sigma'^2 P_{\sigma'\sigma'}, & \tau > 0 \\ P(0, f, \sigma') = \sigma'^2 \delta(f - K) \end{cases}. \quad (2.137)$$

□

Il procedimento perturbativo che segue servirà per trovare un'approssimazione all'ordine $O(\epsilon^2)$ di $P(\tau, f, \sigma')$ e quindi di $V(t, s, \sigma)$.

Il seguente cambio di variabili ci permette di ottenere l'operatore del calore all'ordine ϵ^0 .

Teorema 2.3.4. *Sia dato il cambio di variabili*

$$z(f, \sigma') = \frac{1}{\epsilon \sigma'} \int_K^f \frac{df'}{C(f')}, \quad (2.138)$$

e sia posta la funzione

$$B(\epsilon \sigma' z) := C(f). \quad (2.139)$$

Sia poi $\bar{P}(\tau, z, \sigma')$ tale che

$$\begin{cases} \bar{P}_\tau = \frac{1}{2} (1 - 2\epsilon \rho \alpha' z + \epsilon^2 \alpha'^2 z^2) \bar{P}_{zz} - \frac{1}{2} \epsilon \sigma' \frac{B'(\epsilon \sigma' z)}{B(\epsilon \sigma' z)} \bar{P}_z + \\ \quad + (\epsilon \rho \alpha' - \epsilon^2 \alpha'^2 z) (\sigma' \bar{P}_{z\sigma'} - \bar{P}_z) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \alpha'^2 \sigma'^2 \bar{P}_{\sigma'\sigma'}, & \tau > 0 \\ \bar{P}(0, z, \sigma') = \frac{\sigma'}{\epsilon C(K)} \delta(z) \end{cases}. \quad (2.140)$$

Allora:

$$P(\tau, f, \sigma') = \bar{P}(\tau, z(f, \sigma'), \sigma'). \quad (2.141)$$

Dimostrazione. Per verifica diretta, risulta che $\bar{P}(\tau, z(f, \sigma'), \sigma')$ risolve il problema di Cauchy (2.137). □

Corollario 2.3.5. *Sostituendo $P(\tau, f, \sigma') = \bar{P}(\tau, z(f, \sigma'), \sigma')$ nella (2.136) il prezzo dell'opzione risulta:*

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon^2 C^2(K) \int_0^{T-t} \bar{P}(\tau, z(f, \sigma'), \sigma') d\tau \right]. \quad (2.142)$$

Con il teorema seguente otteniamo che la funzione al dato iniziale sia $\delta(z)$.

Teorema 2.3.6. *Sia $\hat{P}(\tau, z, \sigma')$ che verifica*

$$\begin{cases} \hat{P}_\tau = \frac{1}{2}(1 - 2\epsilon\rho\alpha'z + \epsilon^2\alpha'^2z^2)\hat{P}_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon\sigma' \frac{B'(\epsilon\sigma'z)}{B(\epsilon\sigma'z)}\hat{P}_z + \\ \quad + (\epsilon\rho\alpha' - \epsilon^2\alpha'^2z)\sigma'\hat{P}_{z\sigma'} + \frac{1}{2}\epsilon^2\alpha'^2(\sigma'^2\hat{P}_{\sigma'\sigma'} + 2\sigma'\hat{P}_{\sigma'}), \quad \tau > 0 \quad . \\ \hat{P}(0, z, \sigma') = \delta(z) \end{cases} \quad (2.143)$$

Allora

$$\bar{P}(\tau, z, \sigma') = \frac{\sigma'}{\epsilon C(K)} \hat{P}(\tau, z, \sigma'). \quad (2.144)$$

Dimostrazione. Verifica diretta. \square

Corollario 2.3.7. *Sostituendo $\bar{P}(\tau, z, \sigma') = \frac{\sigma'}{\epsilon C(K)} \hat{P}(\tau, z, \sigma')$ nella (2.142) il prezzo dell'opzione risulta:*

$$V(t, s, \sigma) = e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon \sigma' C(K) \int_0^{T-t} \hat{P}(\tau, z(f, \sigma'), \sigma') d\tau \right]. \quad (2.145)$$

Osservando il problema (2.143) si nota che, all'ordine ϵ^0 , \hat{P} è soluzione dell'operatore del calore standard $\partial_\tau - \frac{1}{2}\partial_{zz}$, con $\hat{P}(0, z, \sigma) = \delta(z)$. Segue che, all'ordine ϵ^0 , \hat{P} è una gaussiana.

Il prossimo passaggio è trasformare il problema (2.143) in un operatore del calore anche all'ordine ϵ , e poi all'ordine ϵ^2 .

Questo è il metodo di trasformazione che si è dimostrato molto potente nei sistemi quasi-Hamiltoniani [3].

Osservazione 2.3.8. Nel problema (2.143), la variabile σ' non entra nel problema fino all'ordine ϵ , ovvero, \hat{P} è del tipo:

$$\hat{P}(\tau, z, \sigma') = \hat{P}_0(\tau, z) + \epsilon \hat{P}_1(\tau, z, \sigma') + \dots \quad (2.146)$$

Di conseguenza le derivate $\hat{P}_{z\sigma'}$, $\hat{P}_{\sigma'\sigma'}$ e $\hat{P}_{\sigma'}$ sono del tipo $O(\epsilon)$, per $\epsilon \rightarrow 0$. Perciò, approssimando all'ordine ϵ^2 , sostituiamo \hat{P} con \tilde{P} che risolve:

$$\begin{cases} \tilde{P}_\tau = \frac{1}{2}(1 - 2\epsilon\rho\alpha'z + \epsilon^2\alpha'^2z^2)\tilde{P}_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon\sigma'\frac{B'(\epsilon\sigma'z)}{B(\epsilon\sigma'z)}\tilde{P}_z + \epsilon\rho\alpha'\sigma'\tilde{P}_{z\sigma'}, & \tau > 0 \\ \tilde{P}(0, z, \sigma') = \delta(z) \end{cases} \quad (2.147)$$

Approssimando \hat{P} con \tilde{P} nella (2.145) il prezzo approssimato dell'opzione risulta:

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2}\epsilon\sigma'C(K) \int_0^{T-t} \tilde{P}(\tau, z(f, \sigma'), \sigma') d\tau \right]. \quad (2.148)$$

Con i prossimi passaggi vogliamo eliminare il termine le derivate in σ' .

Teorema 2.3.9. *Sia $H(\tau, z, \sigma')$ tale che*

$$\begin{cases} H_\tau = \frac{1}{2}(1 - 2\epsilon\rho\alpha'z + \epsilon^2\alpha'^2z^2)H_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon^2\rho\alpha'\sigma'\frac{B'}{B}(zH_z - H) + \\ \quad + \epsilon^2\sigma'^2 \left(\frac{1}{4}\frac{B''}{B} - \frac{3}{8}\frac{B'^2}{B^2} \right) H + \epsilon\rho\alpha'\sigma'(H_{z\sigma'} + \frac{1}{2}\epsilon\sigma'\frac{B'}{B}H_{\sigma'}), & \tau > 0 \\ H(0, z, \sigma') = \delta(z) \end{cases} \quad (2.149)$$

Allora:

$$\tilde{P} = \sqrt{B(\epsilon\sigma'z)/B(0)}H \equiv \sqrt{C(f)/C(K)}H. \quad (2.150)$$

Dimostrazione. Si verifica direttamente che $\sqrt{B(\epsilon\sigma'z)/B(0)}H$ verifica il problema di Cauchy (2.147). \square

Corollario 2.3.10. *Sostituendo $\tilde{P} = \sqrt{B(\epsilon\sigma'z)/B(0)}H$ nella formula (2.148) l'approssimazione del prezzo diventa*

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2}\epsilon\sigma'\sqrt{C(K)C(f)} \int_0^{T-t} H(\tau, z(f, \sigma'), \sigma') d\tau \right]. \quad (2.151)$$

Osservazione 2.3.11. Le equazioni del problema (2.149) sono indipendenti da σ' fino all'ordine ϵ . Come sopra, possiamo perciò concludere che le derivate parziali $H_{\sigma'}$ e $H_{z\sigma'}$ sono del tipo $O(\epsilon)$, per $\epsilon \rightarrow 0$, e quindi:

$$\epsilon\rho\alpha'\sigma'(H_{z\sigma'} + \frac{1}{2}\epsilon\sigma'\frac{B'}{B}H_{\sigma'}) = O(\epsilon^2), \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.152)$$

Quindi H è indipendente da σ' fino all'ordine ϵ^2 , e le sue derivate rispetto a σ' sono in realtà $O(\epsilon^2)$, per $\epsilon \rightarrow 0$. Perciò l'ultimo termine risulta

$$\epsilon\rho\alpha'\sigma'(H_{z\sigma'} + \frac{1}{2}\epsilon\sigma'\frac{B'}{B}H_{\sigma'}) = O(\epsilon^3), \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.153)$$

e siccome stiamo approssimando all'ordine ϵ^2 , possiamo eliminarlo.

Così non ci sono più derivate rispetto a σ' e possiamo trattare σ' come un parametro, riducendo di fatto il problema da bidimensionale a unidimensionale.

Inoltre sostituiamo $B'(\epsilon\sigma'z)/B(\epsilon\sigma'z)$ e $B''(\epsilon\sigma'z)/B(\epsilon\sigma'z)$ con

$$b_1 = B'(\epsilon\sigma'z_0)/B(\epsilon\sigma'z_0), \quad b_2 = B''(\epsilon\sigma'z_0)/B(\epsilon\sigma'z_0), \quad (2.154)$$

con z_0 costante scelta a piacere, commettendo un errore pari a $O(\epsilon)$.

Come risultato, approssimiamo H con \tilde{H} tale che

$$\begin{cases} \tilde{H}_\tau = \frac{1}{2}(1 - 2\epsilon\rho\alpha'z + \epsilon^2\alpha'^2z^2)\tilde{H}_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon^2\rho\alpha'\sigma'b_1(z\tilde{H}_z - \tilde{H}) + \\ \quad + \epsilon^2\sigma'^2\left(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right)\tilde{H}, \quad \tau > 0 \\ \tilde{H}(0, z, \sigma') = \delta(z) \end{cases}, \quad (2.155)$$

e il prezzo dell'opzione diventa

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2}\epsilon\sigma'\sqrt{C(K)C(f)} \int_0^{T-t} \tilde{H}(\tau, z(f, \sigma'), \sigma') d\tau \right]. \quad (2.156)$$

Gli ultimi passaggi sono finalizzati a eliminare i termini in H_z .

Teorema 2.3.12. *Sia dato il cambio di variabili:*

$$x(z) = \frac{1}{\epsilon\alpha'} \int_0^{\epsilon\alpha'z} \frac{d\zeta}{I(\zeta)} = \frac{1}{\epsilon\alpha'} \log \left(\frac{I(\epsilon\alpha'z) - \rho + \epsilon\alpha'z}{1 - \rho} \right), \quad (2.157)$$

dove

$$I(\zeta) = \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}, \quad (2.158)$$

che si può scrivere anche come

$$\epsilon\alpha'z = \sinh \epsilon\alpha'x - \rho(\cosh \epsilon\alpha'x - 1). \quad (2.159)$$

Sia poi $\hat{H}(\tau, x, \sigma')$ tale che

$$\begin{cases} \hat{H}_\tau = \frac{1}{2}\hat{H}xx - \frac{1}{2}\epsilon\alpha'I'(\epsilon\alpha'z)\hat{H}_x + \\ \quad + \epsilon^2\sigma'^2 \left(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right)\hat{H} + \frac{3}{4}\epsilon^2\rho\alpha'\sigma'b_1\hat{H}, \quad \tau > 0 \\ \hat{H}(0, x, \sigma') = \delta(x) \end{cases} \quad (2.160)$$

Allora:

$$\tilde{H}(\tau, z, \sigma') = e^{\epsilon^2\rho\alpha'\sigma'z^2/4}\hat{H}(\tau, x(z), \sigma'). \quad (2.161)$$

Dimostrazione. Verifica diretta. \square

Corollario 2.3.13. Sostituendo (2.161) nella formula (2.156), l'approssimazione del prezzo diventa

$$\begin{aligned} V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\epsilon\sigma'\sqrt{C(K)C(f)}e^{\epsilon^2\rho\alpha'\sigma'z^2/4} \int_0^{T-t} \hat{H}(\tau, x(z(f, \sigma')), \sigma')d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.162)$$

L'ultimo passaggio è il seguente

Teorema 2.3.14. Sia $Q(\tau, x, \sigma')$ tale che

$$\begin{cases} Q_\tau = \frac{1}{2}Q_{xx} + \epsilon^2\alpha'^2 \left(\frac{1}{4}I''I - \frac{1}{8}I'I'\right)Q + \\ \quad + \epsilon^2\sigma'^2 \left(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2\right)Q + \frac{3}{4}\epsilon^2\rho\alpha'\sigma'b_1Q, \quad \tau > 0 \\ Q(0, x, \sigma') = \delta(x) \end{cases} \quad (2.163)$$

Allora:

$$\hat{H}(\tau, x, \sigma') = I^{1/2}(\epsilon\alpha'z(x))Q(\tau, x, \sigma'). \quad (2.164)$$

Dimostrazione. Verifica diretta. \square

Corollario 2.3.15. *Sostituendo (2.164) nella formula (2.162), l'approssimazione del prezzo diventa*

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon \sigma' \sqrt{C(K)C(f)} I^{1/2} \cdot (\epsilon \alpha' z(f, \sigma')) e^{\epsilon^2 \rho \alpha' \sigma' z^2 / 4} \int_0^{T-t} Q(\tau, x(z(f, \sigma')), \sigma') d\tau \right]. \quad (2.165)$$

Osservazione 2.3.16. Come prima, possiamo rimpiazzare nel problema (2.163) i termini $I(\epsilon \alpha' z)$, $I'(\epsilon \alpha' z)$ e $I''(\epsilon \alpha' z)$ con le costanti $I(\epsilon \alpha' z_0)$, $I'(\epsilon \alpha' z_0)$ e $I''(\epsilon \alpha' z_0)$, commettendo un errore di ordine ϵ . Cioè, approssimiamo Q con \tilde{Q} tale che

$$\begin{cases} \tilde{Q}_\tau = \frac{1}{2} \tilde{Q}_{xx} + \epsilon^2 k \tilde{Q}, & \tau > 0 \\ \tilde{Q}(0, x, \sigma') = \delta(x) \end{cases}, \quad (2.166)$$

dove k è la seguente costante:

$$k = \alpha'^2 \left(\frac{1}{4} I''(\epsilon \alpha' z_0) I(\epsilon \alpha' z_0) - \frac{1}{8} I'^2(\epsilon \alpha' z_0) \right) + \sigma'^2 \left(\frac{1}{4} b_2 - \frac{3}{8} b_1^2 \right) Q + \frac{3}{4} \rho \alpha' \sigma' b_1 Q. \quad (2.167)$$

Il prezzo diventa perciò:

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon \sigma' \sqrt{C(K)C(f)} \cdot I^{1/2}(\epsilon \alpha' z(f, \sigma')) e^{\epsilon^2 \rho \alpha' \sigma' z^2 / 4} \int_0^{T-t} \tilde{Q}(\tau, x(z(f, \sigma')), \sigma') d\tau \right]. \quad (2.168)$$

Ci siamo perciò ridotti ad un operatore a coefficienti costanti, di cui sappiamo calcolare la soluzione.

Teorema 2.3.17.

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \frac{f - K}{x(z)} \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2(z)/2\tau} e^{\epsilon^2 \theta(z, \sigma')} e^{\epsilon^2 k \tau} d\tau \right], \quad (2.169)$$

dove

$$\epsilon^2 \theta(z, \sigma') = \log \left(\frac{\epsilon \sigma' z}{f - K} \sqrt{B(0)B(\epsilon \sigma' z)} \right) + \log \left(\frac{x(z) I^{1/2}(\epsilon \alpha' z)}{z} \right) + \frac{1}{4} \epsilon^2 \rho \alpha' \sigma' b_1 z^2. \quad (2.170)$$

(Per z si intende sempre $z(f, \sigma')$.)

Dimostrazione. Risolvendo il problema di Cauchy (2.166) si ottiene

$$\tilde{Q}(\tau, x, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{x^2/2\tau} e^{\epsilon^2 k\tau}. \quad (2.171)$$

Perciò

$$\begin{aligned} V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} & \left[(f - K)^+ + \frac{1}{2} \epsilon \sigma' \sqrt{C(K)C(f)} \cdot \right. \\ & \left. \cdot I^{1/2}(\epsilon \alpha' z(f, \sigma')) e^{\epsilon^2 \rho \alpha' \sigma' z^2/4} \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{x^2/2\tau} e^{\epsilon^2 k\tau} d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.172)$$

e quindi la tesi. \square

Con una ulteriore approssimazione possiamo scrivere la formula del prezzo in modo più compatto e più funzionale al calcolo della volatilità implicita.

Osservazione 2.3.18. Risulta che

$$e^{\epsilon^2 k\tau} = \frac{1}{(1 - 2\epsilon^2 \tau \frac{\theta}{x^2})^{3/2}} + O(\epsilon^4). \quad (2.173)$$

Quindi, approssimando $e^{\epsilon^2 k\tau}$ all'ordine ϵ^2 e sostituendo nella formula (2.169) otteniamo:

$$\begin{aligned} V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} & \left[(f - K)^+ + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{f - K}{x(z)} \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2(z)/2\tau} e^{\epsilon^2 \theta(z, \sigma')} \frac{d\tau}{(1 - 2\epsilon^2 \tau \frac{\theta}{x^2})^{3/2}} \right], \end{aligned} \quad (2.174)$$

che con il cambio di variabili

$$q = \frac{x^2}{2\tau} \quad (2.175)$$

si riduce a

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2}{2(T-t)}}^{+\infty} \frac{e^{-q+\epsilon^2\theta}}{(q - \epsilon^2\theta)^{3/2}} dq \right], \quad (2.176)$$

ovvero:

$$V(t, s, \sigma) \approx e^{-r(T-t)} \left[(f - K)^+ + \frac{|f - K|}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2}{2(T-t)} - \epsilon^2 \theta}^{+\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq \right]. \quad (2.177)$$

Sostituendo:

$$f = e^{r(T-t)} s, \quad \sigma' = \sigma/\epsilon, \quad \alpha' = \alpha/\epsilon, \quad (2.178)$$

si ottiene il teorema 2.3.1.

Bibliografia

- [1] Schoutens, W. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- [2] Hagan, Patrick S.; Woodward, Diana E. Equivalent Black volatilities. *Applied Mathematical Finance*, 6 (1999): 3, 147-157.
- [3] Hagan, P.S.; Kumar, D.; Lesniewski, A.S.; Woodward, D.E. Managing smile risk. *Willmott Magazine*, 2002: 84-108.
- [4] Neu, J.C. Thesis. California Institute of Technology, 1978
- [5] Pascucci A. *Calcolo stocastico per la finanza* (2007), Springer.

