

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**INTRODUZIONE
AI MODELLI
A JUMP-DIFFUSION**

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PASCUCCI ANDREA

Presentata da:
BOIARDI SARA

Seconda Sessione
Anno Accademico 2009/2010

La cosa più importante che insegna la scienza è dire non lo so.

Luigi Luca Cavalli-Sforza

Introduzione

In questo breve trattato si vuole introdurre il concetto di modello a jump-diffusion, utilizzato nel campo della finanza per lo studio dell'andamento dei titoli di mercato, ma anche in altri ambiti, quali la statistica applicata alla biologia, od alla pubblicità.

Il primo capitolo tratta del primo passo per capire questo importante modello: il processo di Poisson. Questo è un processo stocastico definito riguardo il manifestarsi di eventi. Dato come una funzione del tempo $N(t)$, rappresenta il numero di eventi a partire dal tempo $t = 0$; inoltre il numero di eventi tra il tempo a e il tempo b è dato come $N(b) - N(a)$ ed ha una distribuzione di Poisson.

Il processo di Poisson è un processo tempo continuo: la sua controparte tempo discreta è il processo di Bernoulli; è uno dei più famosi processi di Lévy. I processi di Poisson sono anche esempi di processo markoviano tempo continuo.

Viene analizzato poi un particolare tipo di processo di Poisson, il processo di Poisson composto, o *compound Poisson*, che studia i tempi d'arrivo di gruppi, e non di singoli elementi (come accadeva nel processo di Poisson).

Nel secondo capitolo viene introdotta un'ulteriore importante componente del modello a jump-diffusion: il moto browniano.

Si analizzano perciò le fasi di arrivo a questo moto: il cammino casuale simmetrico, descritto esemplificamente dal lancio di una moneta non truccata; il cammino casuale simmetrico a scala, una prima approssimazione del moto browniano; infine, da quest'ultimo, il moto browniano vero e proprio. Anche in questo caso, il moto browniano risulta utile in diversi campi, dalla fisica alla biologia, allo studio in generale di moti non prevedibili esattamente, ma sui quali è possibile fare una stima.

Nel terzo ed ultimo capitolo viene analizzato il modello a jump-diffusion vero e proprio, come somma dei moti descritti precedentemente elencati; vengono inoltre enunciate alcune sue caratteristiche.

Per ogni moto è stata fatta una simulazione a computer, utilizzando i programmi MatLab o Mathematica.

Indice

Introduzione	i
1 Il processo di Poisson	1
1.1 Introduzione	1
1.1.1 La funzione caratteristica	3
1.1.2 Simulazione del processo di Poisson	4
1.2 Processo di Poisson composto (<i>compound Poisson process</i>)	5
1.2.1 Funzione caratteristica del processo di Poisson composto	6
1.2.2 Simulazione del processo composto di Poisson	6
2 Moto Browniano	9
2.1 Cammino casuale simmetrico	9
2.1.1 Alcune proprietà	10
2.2 Cammino casuale simmetrico a scala	11
2.2.1 Proprietà	11
2.2.2 Il moto browniano	12
2.2.3 Caratterizzazione del moto browniano	13
2.2.4 Simulazione del moto browniano	14
3 Processi a jump-diffusion	16
3.1 Modello di Black-Scholes-Merton	16
3.2 Simulazione di un processo a jump-diffusion	18
Bibliografia	20

Capitolo 1

Il processo di Poisson

1.1 Introduzione

Prendiamo una sequenza $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ e densità $P[\tau_i \geq y] = e^{-\lambda y}$; sia $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. Data la distribuzione dei τ_i :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

osserviamo che le variabili T_n hanno distribuzione gamma:

$$g_n(s) = \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda s} \quad s \geq 0.$$

Dimostrazione. (per induzione)

$$T_1 \rightarrow g_1(s) = \lambda e^{-\lambda s} \quad s \geq 0$$

$$T_n \rightarrow g_n(s) = \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda s} \quad s \geq 0$$

Vediamo che questo è vero per T_{n+1} . Tale quantità può essere riscritta come: $T_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \tau_i = T_n + \tau_{n+1}$. Poiché i τ_i sono indipendenti, saranno indipendenti anche T_n e τ_{n+1} ; così la densità di T_n è (utilizzando la convoluzione):

$$\int_0^s g(k) f(s-k) dk = \int_0^s \frac{(\lambda k)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda k} \cdot \lambda e^{-\lambda(s-k)} dk =$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!} \cdot \frac{k^n}{n} \right\|_{k=0}^{k=s} &= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda s}}{n!} \cdot \|k^n\|_{k=0}^{k=s} = \\ \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda s} s^n}{n!} &= \frac{(\lambda s)^n}{n!} \cdot \lambda e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

□

Definita $\chi_{t \geq T_n}$ come la *funzione generatrice* di T_n , il processo:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \chi_{t \geq T_n}$$

è chiamato **processo di Poisson** di parametro λ , ed è la controparte continua del processo di Bernoulli.

Ad esempio, se i tempi d'attesa alla fermata di un autobus hanno distribuzione esponenziale, il numero totale di autobus passati al tempo t è un processo di Poisson.

Il parametro λ si dice *parametro di frequenza* del processo, e corrisponde al valore atteso del numero di eventi che si manifestano per unità di tempo; N_t conta il numero di salti incontrati fino all'istante t .

Le traiettorie del suddetto processo sono costanti a tratti e continue a destra con limite da sinistra (RCLL, acronimo di Right Continuous Left Limited) con salti di altezza costante 1.

Ad ogni istante $t > 0$, N_t ha distribuzione di Poisson di parametro λt , e vale:

$$P[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Dimostrazione. Dire che $N_t > n$ significa che vi sono almeno n salti dopo l'istante t : in altre parole, all'istante t vi sono stati *al più* n salti:

$$P(N_t \geq n) = P(T_n \leq n) = \int_0^t \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda s} ds$$

e quindi:

$$P(N_t \geq n+1) = P(T_n \leq n+1) = - \int_0^t \frac{(\lambda s)^n}{n!} \cdot (-\lambda e^{-\lambda s}) ds$$

e, integrando per parti:

$$\begin{aligned} &= \left\| -\frac{(\lambda s)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda s} \right\|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t e^{-\lambda s} \cdot \frac{n(\lambda s)^{n-1} \cdot \lambda}{n!} ds \\ &= -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda s} ds = -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + P(N_t \geq n) \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \rightarrow P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

□

In tale processo gli incrementi sono indipendenti e stazionari; in altre parole, $\forall t < s$ l'incremento $N_t - N_s$ è indipendente da ciò che è accaduto prima dell'istante s , e ha la stessa legge di N_{t-s} . Tale fatto è dovuto alla proprietà di **assenza di memoria** della distribuzione esponenziale: per $t < s$ vale

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \chi_{t \geq T_n} \quad N_s = \sum_{n \geq 1} \chi_{s \geq T_n} \quad \rightarrow \quad N_t - N_s = \sum_{n \geq 1} (\chi_{t \geq T_n} - \chi_{s \geq T_n}) = \sum_{n \geq 1} \chi_{t-s \geq T_n}$$

che è il numero di salti tra t e s , cioè N_{t-s} .

1.1.1 La funzione caratteristica

Lo studio della funzione caratteristica gioca un ruolo fondamentale nello studio dei processi a *jump-diffusion*: spesso infatti non si conosce la funzione di distribuzione di tali processi, ma la funzione caratteristica è nota in forma esplicita. La funzione caratteristica di una variabile aleatoria X è definita da:

$$\Phi_X(u) = E[e^{iuX}]$$

Nel caso continuo questa è uguale a: $\int e^{iux} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot e^{iux} dx$ mentre, nel caso discreto, vale: $\sum_{n \geq 0} e^{iun} P(N_t = n)$. Nel nostro caso:

$$\sum_{n \geq 0} e^{iun} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t e^{iu})^n}{n!} = \exp[\lambda t \cdot (e^{iu} - 1)].$$

1.1.2 Simulazione del processo di Poisson

Utilizzando il programma Mathematica è possibile simulare il processo appena descritto.

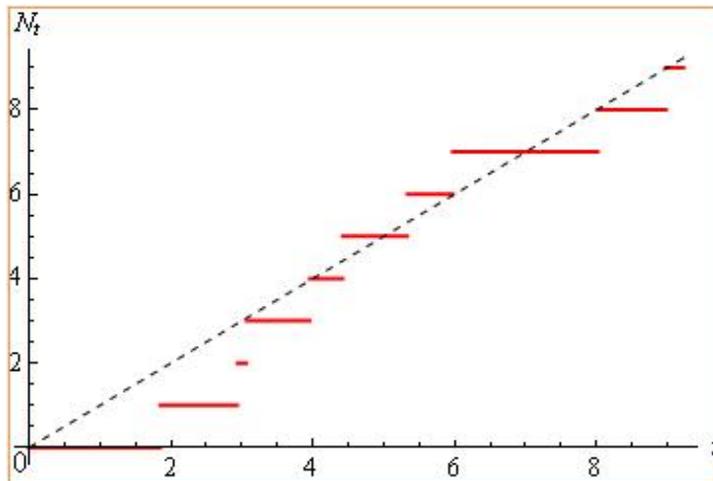
Un metodo è il seguente:

```

NN = 10;
λ = 1;
μ = 0;
σ = 1;
τ = RandomReal[ExponentialDistribution[λ], NN];
ZZ = RandomReal[NormalDistribution[μ, σ, NN];
TT[nn_] := Sum[τ[[i]], i, nn];
char[t_, nn_] := Piecewise [{{0, t < TT[nn] },
                             {1, TT[nn] ≤ t < TT[nn + 1]}, {0, t ≥ TT[nn+1]}}];
Poisson[t_] := Sum[i char[t, i], i, NN - 1];
Plot[{Poisson[t], λ t}, {t, 0, TT[NN]}, AxesLabel → {t, Nt}, LabelStyle →
Directive[Black, 14], PlotStyle → {Directive[Red, Thick], Directive[Black, Dashed]}]

```

Mediante tale codice è possibile ottenere un grafico del tipo:



1.2 Processo di Poisson composto (*compound Poisson process*)

In finanza non è tanto importante studiare processi con salti di altezza fissa, poiché non modellizzano la realtà. Introduciamo così il **processo di Poisson composto**: questo è una generalizzazione del processo di Poisson semplice, dove i tempi d'attesa tra i salti hanno distribuzione esponenziale, ed i salti hanno altezza aleatoria. Prendiamo N processo di Poisson di parametro λ , e sia $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con legge f . Il processo:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

è detto *processo composto di Poisson*; anche in questo caso abbiamo traiettorie costanti a tratti.

Gli incrementi di tale processo sono stazionari ed indipendenti.

Dimostrazione. Sia $0 < s < t$: allora $X_t - X_s$ e X_s sono indipendenti.

$X_s = \sum_{i=1}^{N_s} Y_i$ è la somma dei primi N_s salti:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 \quad \text{se } T_1 \leq s < T_2 \\ Y_2 \quad \text{se } T_2 \leq s < T_3 \\ \dots \\ Y_m \quad \text{se } T_m \leq s < T_{m+1} \end{array} \right.$$

Mentre:

$$X_t - X_s = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i + \sum_{i=1}^{N_s} Y_i = \left\{ \begin{array}{l} Y_1 \quad \text{se } T_1 \leq t < T_2 \\ Y_2 \quad \text{se } T_2 \leq t < T_3 \\ \dots \\ Y_n \quad \text{se } T_n \leq t < T_{n+1} \end{array} \right. - \left\{ \begin{array}{l} Y_1 \quad \text{se } T_1 \leq s < T_2 \\ Y_2 \quad \text{se } T_2 \leq s < T_3 \\ \dots \\ Y_m \quad \text{se } T_m \leq s < T_{m+1} \end{array} \right.$$

è la somma dei salti tra N_s e N_t , e la loro indipendenza è stata dimostrata precedentemente. \square

A livello pratico, il processo di Poisson composto è utile per studiare alcuni sistemi reali, nei quali gli utenti possono arrivare in gruppi e non uno alla volta (come accadeva nel processo di Poisson). Per trattare questo caso è sufficiente definire $X(t)$ come il numero dei gruppi di utenti che arrivano fino al tempo t . Se i tempi di interarrivo dei gruppi sono variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite secondo la distribuzione esponenziale, si può utilizzare un modello di Poisson, cercando poi una distribuzione discreta che rappresenti la dimensione dei gruppi.

1.2.1 Funzione caratteristica del processo di Poisson composto

La legge del processo di Poisson composto non è nota esplicitamente al tempo t , ma è nota la sua funzione caratteristica:

$$E[e^{iuX_t}] = \exp\left[t\lambda \int_{\mathcal{R}} (e^{iux} - 1)f(dx)\right]$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \phi_Y(u) &= E[e^{iuY_i}] = E[e^{\sum Y_i}] = \\ &= P(N(t) = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} E[\exp[u \sum Y_i | N(t) = k] P(N(t) = k)] = \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{E[e^{uY_1}]}_{\phi_{Y_1}(u)} \underbrace{E[e^{uY_2}]}_{\phi_{Y_2}(u)} \dots \underbrace{E[e^{uY_k}]}_{\phi_{Y_k}(u)} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{Y_1}(u) \phi_{Y_2}(u) \dots \phi_{Y_k}(u) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\phi_Y(u))^k = \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \phi_Y(u))^k}{k!} = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} e^{\lambda t \phi_Y(u)} = e^{-\lambda t} (1 + e^{\lambda t \phi_Y(u)}) \end{aligned}$$

□

1.2.2 Simulazione del processo composto di Poisson

Subordinatamente alla condizione $N_T = n$, i tempi dei salti T_1, T_2, \dots, T_n di un processo di Poisson sull'intervallo $[0, T]$ sono distribuiti come elementi indipendenti ed ordinati su $[0, T]$.

Dalla condizione $N_T = n$ segue che t è definito nell'intervallo $T_n \leq t < T_{n+1}$. È:
 $T_n = \sum_{j=1}^n \tau_j$, con $\tau_j =$ istante del j -esimo salto. Vale, per il processo di Poisson:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \chi_{t \geq T_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < T_1 \\ 1 & \text{se } T_1 \leq t < T_2 \\ 2 & \text{se } T_2 \leq t < T_3 \\ \dots & \\ n & \text{se } T_n \leq t < T_{n+1} \\ \dots & \end{cases}$$

che è la somma dei salti (con altezza 1).

Per il processo di Poisson composto si ha:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = \begin{cases} Y_1 & \text{se } N_t = 1 \rightarrow T_1 \leq t < T_2 \\ Y_2 & \text{se } N_t = 2 \rightarrow T_2 \leq t < T_3 \\ \dots & \\ Y_{N_t} & \end{cases}$$

che è la somma delle altezze aleatorie dei salti. Se siamo al tempo

$$T_n \leq t < T_{n+1}, N_T = n \implies Y_t = \sum_{i=1}^n Y_i = \begin{cases} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{cases}$$

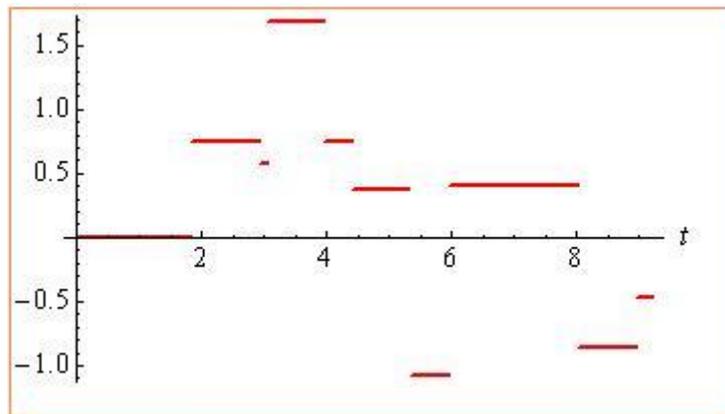
Mediante il programma Mathematica è possibile riprodurre il procedimento di cui sopra. Servendosi di alcuni dati già utilizzati nella simulazione del processo di Poisson, possiamo ottenere un grafico del processo di Poisson composto:

```

NN = 10;
λ = 1;
μ = 0;
σ = 1;
τ = RandomReal[ExponentialDistribution[λ], NN];
ZZ = RandomReal[NormalDistribution[μ, σ, NN];]
TT[nn_] := Sum[τ[[i]], i, nn];
char[t_, nn_] := Piecewise [{{0, t < TT[nn] },
                             {1, TT[nn] <= t < TT[nn + 1]}, {0, t >= TT[nn+1]}}];
Poisson[t_] := Sum[i char[t, i], i, NN - 1];
ComPoisson[t_] := Sum[ZZ[[i]], {i, Poisson[t]}]
Plot[ComPoisson[t], {t, 0, TT[NN]}, AxesLabel → {t, "Compound Poisson"}, Ex-
clusions → Table[TT[i], {i, 1, 10}], LabelStyle → Directive[Black, 14], PlotStyle →
Directive[Red, Thick]]

```

Ottenendo in questo modo:



Capitolo 2

Moto Browniano

Diamo ora qualche informazione sul moto browniano, utile nello studio dei modelli a jump-diffusion.

2.1 Cammino casuale simmetrico

Per definire il moto browniano, introduciamo prima un *cammino casuale simmetrico*. A tale fine, immaginiamo di avere una moneta non truccata, e di lanciarla un infinite volte: ad ogni lancio la probabilità di ottenere testa (p) o croce (q=1-p) sarà ugualmente $\frac{1}{2}$. Indichiamo i risultati successivi dei lanci con $\omega = \omega_1\omega_2\dots$; in altre parole, ω è l'infinita sequenza di lanci, e ω_n è il risultato dell'n-esimo lancio. Siano:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_j = \text{testa} \\ -1 & \text{se } \omega_j = \text{croce} \end{cases}$$

e, posto $M_0 = 0$,

$$M_k = \sum_{j=1}^k X_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Il processo M_k è un **cammino aleatorio simmetrico**; ad ogni lancio può salire di unità, o di scendere di uno, con uguale probabilità.

2.1.1 Alcune proprietà

1. *Gli incrementi sono indipendenti tra loro.* Ciò significa che scegliendo k intero non negativo, $0 < k_0 < k_1 < \dots < k_m$, le variabili casuali:

$$M_{k_1} = (M_{k_1} - M_{k_0}), (M_{k_2} - M_{k_1}), \dots, (M_{k_m} - M_{k_{m-1}})$$

sono indipendenti. Ognuna di queste variabili:

$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$$

definita come il cambio di posizione del cammino casuale tra il tempo k_i ed il tempo k_{i+1} , è detta *incremento*.

2. *Valore atteso e varianza:* consideriamo l'incremento $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$. È facile verificare che il valore atteso di tale incremento è 0: infatti, il valore atteso di ogni X_j è 0. Inoltre, abbiamo $Var(X_j) = \mathbb{E}(X_j)^2 = 1$, e poiché i singoli X_j sono indipendenti, vale:

$$Var(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} Var(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i$$

3. *La varianza del cammino* su ogni intervallo di tempo $[k, l]$ è $l - k$, con l e k interi non negativi.
4. Il cammino casuale simmetrico è una *martingala*.
5. *La variazione quadratica*, calcolata tratto per tratto, vale:

$$Var(M_k) = [M, M]_k = \sum_{j=1}^k (M_j - M_{j-1})^2 = k.$$

Notiamo che, sebbene la varianza e la variazione quadratica sul tratto al tempo k siano uguali, i modi per calcolare le sua quantità sono differenti; inoltre, il calcolo della varianza può essere fatto solamente a livello teorico, dal momento che occorre conoscere la media su ogni tratto, effettivo e da effettuare. Una caratteristica del cammino casuale simmetrico è che la variazione quadratica *non* dipende dal tratto scelto.

2.2 Cammino casuale simmetrico a scala

Una buona approssimazione del moto browniano è ottenibile dividendo i passi del cammino casuale simmetrico, e velocizzandone i tempi. Più precisamente, fissiamo un intero non negativo n e definiamo il *cammino casuale simmetrico a scala*:

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt},$$

con nt intero. Nel caso in cui nt non sia intero, definiamo $W^{(n)}(t)$ come l'interpolazione lineare tra i suoi valori nei punti più vicini s e u , $s < t < u$, tali che ns e nu sono interi. Calcolando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(t)$$

otteniamo il moto browniano.

2.2.1 Proprietà

- Come il cammino casuale, gli *incrementi* sono *indipendenti*. Ciò significa che se $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ sono tali che nt_j è intero, allora

$$(W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0)), (W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)), \dots, (W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1}))$$

sono indipendenti, e dipendono dai vari lanci effettuati.

- Considerando $0 \leq s \leq t$ tali che ns e nt sono interi, vale:

$$\mathbb{E}((W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s))) = 0, \quad \text{Var}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) = t - s$$

Questo perchè $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ è la somma di $n(t - s)$ variabili indipendenti, ciascuna con valore atteso 0 e varianza $\frac{1}{n}$.

- È una *martingala*, per $0 \leq s \leq t$ tali che ns e nt sono interi.
- La *variazione quadratica*, per $t \geq 0$ tale che nt è intero, vale:

$$[W^{(n)}, W^{(n)}](t) = \sum_{j=1}^{nt} \left[W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{nt} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} X_j \right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t.$$

Tale quantità, benché non sia una media su tutto il cammino, ma calcolata su ogni tratto, risulta essere t lungo qualunque tratto considerato.

- All'istante t , il cammino $W^{(n)}(t)$ converge alla distribuzione normale di media 0 e varianza t . Tale proprietà deriva dal teorema del limite centrale.

2.2.2 Il moto browniano

Come detto, otteniamo il moto browniano calcolando il limite per $n \rightarrow \infty$ del cammino $W^{(n)}(t)$. Questo porta alla seguente:

Definizione

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Per ogni $\omega \in \Omega$, supponiamo che esista una funzione continua $W(t)$ di $t \geq 0$ che soddisfa $W(0) = 0$ e che dipende da ω . Allora $W(t)$, $t \geq 0$, è un *moto browniano* se $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ gli incrementi

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

sono indipendenti ed ognuno di essi ha distribuzione normale, con:

$$\mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0, \quad \text{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i.$$

Una differenza tra il moto browniano $W(t)$ ed il cammino aleatorio simmetrico a scala consiste nel fatto che quest'ultimo è lineare tra gli intervalli di tempo, mentre il moto browniano *non ha* parti lineari; inoltre, mentre il cammino a scala è approssimabile mediante una distribuzione normale per ogni t , il moto browniano è *esattamente* normale: questa è una conseguenza del teorema del limite centrale. Perciò, poiché gli incrementi:

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

sono indipendenti e con distribuzione normale, allora le variabili aleatorie $W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)$ hanno distribuzione normale congiunta; la distribuzione congiunta di tali variabili è data dalle loro medie e dalle loro covarianze. La media di ogni variabile $W(t_i)$ è 0; dato $0 \leq s < t$, la covarianza di $W(t)$ e $W(s)$ è:

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \mathbb{E}[W(s)(W(t) - W(s)) + W(s)^2] =$$

$$= \mathbb{E}[W(s)] \cdot \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + \mathbb{E}[W(s)^2] = 0 + \text{Var}[W(s)] = s$$

usando l'indipendenza di $W(s)$ e $W(t) - W(s)$ nella seconda uguaglianza. Perciò otteniamo la **matrice di covarianza** del moto browniano:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[W^2(t_1)] & \mathbb{E}[W(t_1)W(t_2)] & \dots & \mathbb{E}[W(t_1)W(t_m)] \\ \mathbb{E}[W(t_2)W(t_1)] & \mathbb{E}[W^2(t_2)] & \dots & \mathbb{E}[W(t_2)W(t_m)] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbb{E}[W(t_m)W(t_1)] & \mathbb{E}[W(t_m)W(t_2)] & \dots & \mathbb{E}[W^2(t_m)] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix}$$

2.2.3 Caratterizzazione del moto browniano

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Per ogni $\omega \in \Omega$, supponiamo esista una funzione continua $W(t)$ di $t \geq 0$ che soddisfa la condizione $W(0) = 0$, e che dipende da ω . Sono equivalenti:

1. $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$, gli incrementi:

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

sono indipendenti, ed ognuno di questi ha distribuzione normale, con media e varianza rispettivamente 0 e $t_{i+1} - t_i$.

2. $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ le variabili aleatorie $W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)$ sono congiuntamente distribuite con distribuzione normale, con media nulla e matrice di covarianza \mathcal{C} .

3. $B_0 = 0$ quasi ovunque

4. B ha traiettorie quasi sempre continue, cioè la funzione $t \rightarrow B_t$ è quasi sempre continua.

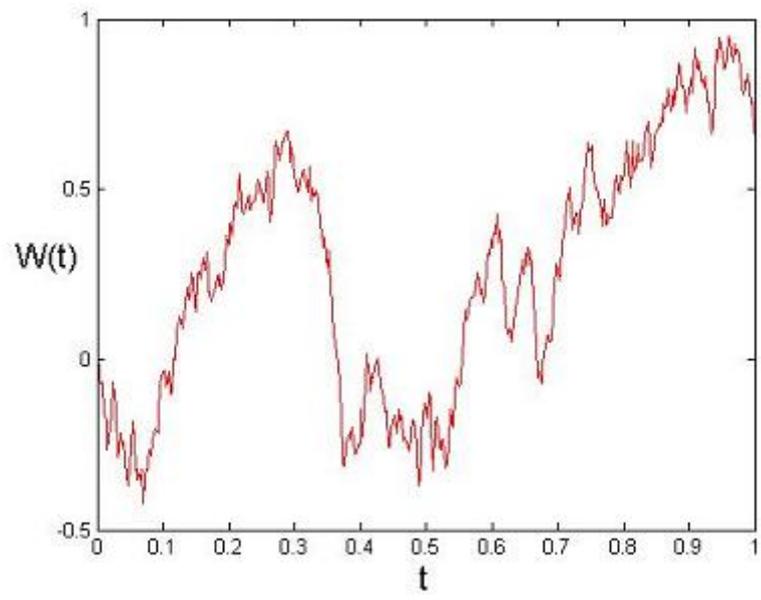
Se 1., 2., 3. o 4. sono verificate (e quindi sono verificate tutte), allora $W(t)$, $t \geq 0$, è un moto browniano.

2.2.4 Simulazione del moto browniano

Per lo studio di tali processi, oltre a Mathematica, è utile anche l'uso di MatLab: ad esempio, di seguito è riportata la simulazione del moto browniano realizzata con quest'ultimo.

<code>randn('state',100)</code>	imposta lo stato della funzione randn.
<code>T = 1; N = 500; dt = T/N;</code>	prealloca i vettori.
<code>dW = zeros(1,N);</code>	genera un vettore di zeri in modo che non sia variata la dimensione di dW durante il ciclo for.
<code>W = zeros(1,N);</code>	
<code>dW(1) = sqrt(dt)*randn;</code>	è l'approssimazione prima del ciclo.
<code>W(1) = dW(1);</code>	è un'istruzione necessaria, poiché il valore W(0) non è accettato.
<code>for j = 2:N</code>	
<code>dW(j) = sqrt(dt)*randn;</code>	è l'incremento generale.
<code>W(j) = W(j-1) + dW(j);</code>	
<code>end</code>	
<code>plot([0:dt:T],[0,W], 'r-')</code>	genera il grafico di W in funzione di t.
<code>xlabel('t', 'FontSize', 16)</code>	etichetta sull'asse x.
<code>ylabel('W(t)', 'FontSize', 16, 'Rotation', 0)</code>	etichetta sull'asse y.

Il grafico ottenuto è il seguente:



Capitolo 3

Processi a jump-diffusion

Un processo a *jump-diffusion* è un processo in cui viene presa in considerazione l'ipotesi che l'andamento dei titoli possa subire variazioni improvvise e che ammette la presenza di salti; tale tipo di processo è nato come estensione ai mercati del *moto geometrico browniano*. Il risultato è che andando ad osservare il grafico dell'andamento di un titolo qualunque non si avranno più traiettorie continue, bensì discontinue ed irregolari.

Il più semplice modello di processo a jump-diffusion si ottiene combinando un moto browniano, un moto lineare ed un processo di Poisson composto. In formule:

$$Z_t = \mu t + \sigma B_t + X_t,$$

dove μ indica lo spostamento, σ la volatilità, B_t è un moto browniano e $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ è un processo di Poisson composto.

Uno dei più famosi modelli è il **modello di Merton** (1976), che si basa sulla formula di Black e Scholes.

3.1 Modello di Black-Scholes-Merton

Conosciuto più comunemente come *modello di Black-Scholes*, tale modello è stato proposto in prima battuta nel 1973, e modella l'andamento nel tempo del prezzo di strumenti finanziari, in particolare delle azioni; l'intuizione fondamentale è che un titolo derivato è implicitamente prezzato se il sottostante è scambiato sul mercato.

Gli ideatori di tale modello fecero le seguenti ipotesi:

- Il prezzo del sottostante segue un moto browniano geometrico;
- È consentita la vendita allo scoperto del sottostante, come dello strumento derivato;
- Non sono ammesse opportunità d'arbitraggio non rischioso;
- Il sottostante e lo strumento derivato sono scambiati sul mercato in tempo continuo;
- Non sussistono costi di transazione, tassazione, né frizioni di altri tipo nel mercato;
- Vigge la perfetta divisibilità di tutte le attività finanziarie (è possibile scambiare frazioni arbitrariamente piccole di ogni titolo sul mercato);
- Il tasso d'interesse privo di rischio r è costante, e uguale per tutte le scadenze.

Da questo, deriva la *formula di Black-Scholes*, importante nello studio dell'espressione per il prezzo di non arbitraggio di un'opzione call (o di una put) di tipo europeo. Assumiamo che il comportamento di una quotazione $(S_t)_{t \geq 0}$ di un titolo rischioso al tempo t sia data dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dS}{S_t} = \mu dt + \sigma B_t \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{e} \quad T < \infty,$$

dove μ è la velocità media dell'incremento di un valore in un processo stocastico, B_t è un moto browniano standard, σ è detta *volatilità*, perché caratterizza il grado di variabilità.

Tale formula e tale modello presentarono però qualche lacuna; così nel 1976 Merton apportò alcune modifiche, tra cui:

- ammettere alle quotazioni di avere salti casuali;
- ammettere una volatilità stocastica;
- ammettere un tasso d'interesse stocastico;
- ammettere che il processo che descrive l'andamento del titolo possa influenzare prezzi futuri.

In tal modo Merton estese il modello di Black-Scholes, introducendo un *modello di Lévy esponenziale*:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t + X_t)$$

3.2 Simulazione di un processo a jump-diffusion

Il seguente codice, inserito in Mathematica, dà vita ad una simulazione del modello sopra descritto.

```

JumpDiffusion[λ-, jm-, jh-, start-, μ-, σ-, jumps-, steps-, opts---] :=

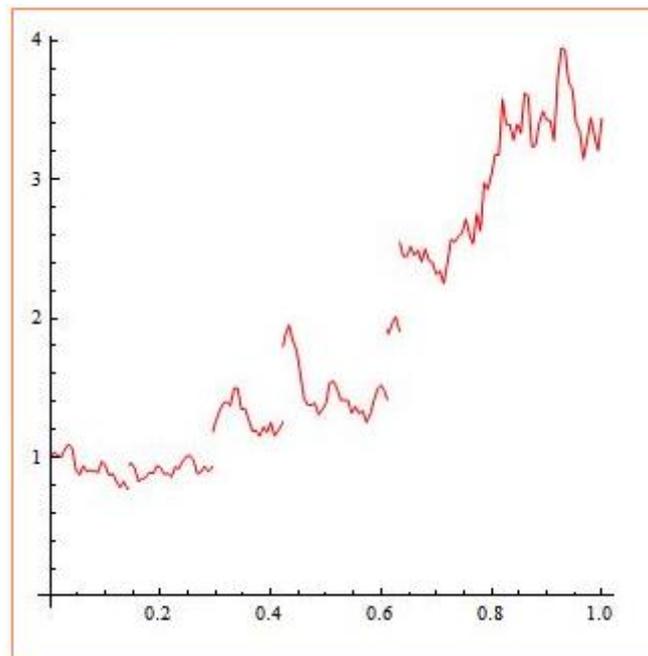
Module[{brownian, poisson, vals, time, jp},
BlockRandom[jp = Accumulate[RandomReal
[ExponentialDistribution[λ, {jumps}]]];
time = Ceiling[Last[jp]];
vals = If[jh! = 0, Accumulate[Join[{0, 0},
RandomReal[NormalDistribution[jm, jh],
{jumps}]]], Accumulate[Join[{0, 0}, ConstantArray[jm, {jumps}]]]];
poisson = Interpolation[Transpose[Flatten[{0, jp, time}], vals],
InterpolationOrder → 0];
brownian = Interpolation[Transpose[{Range[0, time, N[time/steps]],
Prepend[Accumulate[RandomReal[NormalDistribution[0, (σ√time)/√steps],
{steps}], 0]}], InterpolationOrder → 1];
Plot[starteμt+poisson[t]+brownian[t], {t, 0, time}, opts,
Exclusions → jp, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All,
AspectRatio → 1, PlotStyle → Red]

```

Da cui inserendo i seguenti dati:

numero di salti = 5;
intensità dei salti = 3;
media delle altezze dei salti = 0,18;
deviazione standard dei salti = 0,224;
valore iniziale = 1;
deviazione = 0,5;
volatilità = 0,73;
numero di passi = 150

si ottiene il grafico:



Bibliografia

- [1] **Calcolo stocastico per la finanza**, Andrea Pascucci, Springer, 2008, XV, 517 pagg., Brossura
- [2] **Stochastic calculus for finance II**, Steven E. Shreve, Springer, aprile 2008, 550 pagg.
- [3] **Jump-diffusion models: a practitioner's guide (with E. Voltchkova)**, Banque et Marchés, No. 99, March-April 2009

Ringraziamenti

È finalmente giunto il momento, anche per me, di scrivere i ringraziamenti; porterò allora via ancora qualche minuto a chiunque sia arrivato fino a qui.

Inizio ringraziando i miei familiari, che mi hanno sostenuto tra alti e bassi e momenti di sconforto, e mi hanno permesso di essere ed arrivare fino a qui: grazie per non avermi soppressa quando ero intrattabile e per aver sorriso quando ero felicissima.

Un grazie di cuore va a Gio, che più di tutti ha subito le conseguenze dei miei sbalzi d'umore universitari: per la pazienza, l'affetto e la presenza che pian pianino hanno riempito le mie giornate... per i litigi e le sgridate un po' meno.

Grazie agli amici con cui ho condiviso il mio percorso in questi anni: quelli autoctoni che si sono offerti di ospitarmi più di qualche volta, che mi hanno fatto da guida turistica e mi hanno accompagnato nell'esplorazione della vita universitaria bolognese; quelli fuori sede, con cui ho condiviso qualche sventura casalinga, a Saretta che è ritornata in isola a metà strada e dunque si merita una tirata d'orecchie pubblica!; e quelli piacentini, che non mi hanno abbandonata nonostante la lontananza e con cui si passano ancora belle serate in compagnia, ed ogni tanto ci scappa anche qualche telefonata come ai vecchi tempi.

Grazie alla sede di Piacenza del PoliMi, che mi ha adottata in questo ultimo anno, ai suoi quasi-abitanti ed alle sorelle Gheduzzi che con il Rendez-Vous mi hanno tenuto compagnia nelle giornate solitarie.

Grazie alla professoressa Bellomo, che mi ha sostenuto nel periodo forse peggiore; grazie al professor Pascucci che mi ha seguito durante il percorso tesi.

Se ho scordato qualcuno, e sicuramente sarà così, questi non si offenda: anche se non ti ho menzionato, sai di meritarti un grazie sincero.