ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

SISTEMI EQUIVALENTI DI FORZE, RIDUZIONE AI SISTEMI SEMPLICI E CENTRO DELLE FORZE PARALLELE

Tesi di Laurea
in
Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Emanuela Caliceti

Presentata da:
Sara Miccichè

Sessione II
Anno Accademico 2009-2010

"La natura, per essere comandata, deve essere obbedita."

Francesco Bacone (1561, 1626)

Introduzione

La tesi tratta della riduzione di qualsiasi tipo di sistema di forze a un sistema semplice, cioè la singola forza o la coppia, o a una combinazione di questi. L'analisi di questo studio parte, nel primo capitolo, con un un'introduzione relativa alle nozioni della statica in cui vengono definiti i concetti principali, tra i quali quello di forza, reazione vincolare e momento di una forza, per passare poi allo studio dei sistemi di forze e del loro equilibrio, espresso in termini di vettore risultante e momento risultante.
Il secondo capitolo costituisce il nucleo centrale della tesi. Attraverso lo studio dell'equivalenza dei sistemi di forze si è potuto dimostrare innanzitutto che ogni sistema di forze è equivalente a un sistema costituito da una singola forza e da una coppia, con vettore della forza parallelo al momento della coppia. Successivamente si sono distinti il caso particolare in cui un sistema è equivalente solamente ad una coppia e quello in cui è equivalente solamente ad una forza. Alla fine del capitolo viene poi trattata una parte della statica grafica, il poligono funicolare, che permette di costruire quella forza, o coppia, alla quale un sistema è equivalente.
Il terzo capitolo si concentra sul caso particolare delle forze parallele. Si comincia definendo il centro delle forze parallele come il punto in cui applicare la risultante di un sistema per poi tornare alla riduzione di questi sistemi di forze parallele ai sistemi semplici. Si va poi ancora più nello specifico, trattando sistemi di forze paralleli alla verticale, per arrivare al concetto di baricentro, che è proprio il centro di questi particolari sistemi.
Per concludere si è voluto far notare una stretta analogia tra la composizione

delle forze e la composizione degli stati cinetici di un corpo rigido. Infatti si può definire uno stato cinetico di rotazione tramite un vettore applicato, analogo ad una sola forza, e uno stato cinetico di traslazione attraverso un sistema di vettori applicati, analogo ad una coppia. Inoltre dall'analisi del Teorema di Mozzi, che nell'analisi della cinematica del corpo rigido afferma che ogni sistema di stati cinetici è equivalente alla somma di uno stato cinetico di rotazione e uno di traslazione, con asse di rotazione parallelo alla velocità di traslazione, si esamina la completa analogia col risultato sopra richiamato sulla riduzione dei sistemi di forze.

Per la stesura di questa tesi si è fatto riferimento a più testi, indicati nella bibliografia [1, 3, 4], ma in particolar modo al trattato di Dario Graffi [2], al quale si rimanda il lettore per ogni ulteriore approfondimento e per ogni dettaglio che si è dovuto omettere per necessità di sintesi.

Indice

Capitolo 1

Nozioni e principi generali della statica

1.1 Forze attive e reazioni vincolari

Se nella cinematica ci possiamo accontentare di utilizzare solamente i concetti di spazio e tempo, nel momento in cui vogliamo prevedere l'andamento dei corpi dobbiamo necessariamente introdurre la nozione di ***forza***.
A livello intuitivo, chiamando *effetto meccanico* il passaggio dalla quiete al moto (o viceversa), la variazione di un moto o la deformazione di un corpo, possiamo arrivare a definire la *forza* come uno sforzo muscolare che può produrre effetti meccanici. Matematicamete possiamo definire la forza nel modo seguente:

Definizione 1.1. *Una forza è una grandezza determinata da un numero (detto intensità della forza), da una direzione, da un verso e da un punto (detto punto di applicazione). Una forza è quindi determinata da un vettore* $\overrightarrow{F}$ *e da un punto* A*: essa è perciò un vettore applicato, rappresentato attraverso il simbolo* $(\overrightarrow{F}, A)$*.*
Chiamiamo inoltre linea d'azione della forza la retta passante per il punto di applicazione e parallela al vettore $\overrightarrow{F}$*.*

Oggetto della statica è quello di determinare sotto quali condizioni un corpo, o un sistema di corpi, è in quiete. Non potendo tralasciare la materia di cui sono fatti i corpi, si introduce il *punto materiale*, che è un corpo, o una sua porzione, di estensione così piccola da poter essere considerata, nei calcoli, come un punto, senza però prescindere dalla materia di cui è formato. I corpi e i sistemi di corpi si distinguono in:

- liberi: quando possono passare dalla posizione in cui si trovano a tutte le altre vicine geometricamente possibili;
- vincolati: quando ci sono dei vincoli che vietano degli spostamenti che sarebbero geometricamente possibili.

Questi vincoli possono essere interni al sistema meccanico in esame, se limitano gli spostamenti di uno generico dei suoi punti rispetto agli altri e che sono dovuti ai punti del sistema stesso; oppure esterni al sistema se, viceversa, sono dovuti a punti o corpi esterni al sistema. Se consideriamo un corpo vincolato, molto importante è il seguente postulato, detto delle reazioni vincolari:

Postulato 1.2 (**Postulato delle reazioni vincolari**). *Senza alterare la quiete o il moto di un corpo, di un sistema di corpi o di un punto materiale, si possono sopprimere alcuni o tutti i vincoli che agiscono sul corpo purchè vengano applicate sul corpo stesso delle opportune forze, dette reazioni vincolari.*

Quindi possiamo in questo modo considerare ogni corpo o punto materiale vincolato come libero, purchè vengano applicate tutte le reazioni vincolari del caso. Definiamo totalmente proibito uno spostamento virtuale infinitesimo di un punto quando non è consentito a causa della presenza di vincoli e porterebbe il punto in una posizione a cui il punto non può avvicinarsi in alcun modo con spostamenti consentiti dai vincoli. Allora è abbastanza intuitivo che, in assenza di attrito, la reazione vincolare applicata in un certo punto ha direzione e verso opposto rispetto a uno spostamento totalmente proibito in quel punto. Questa osservazione consente di formalizzare la definizione di vincolo liscio.

Definizione 1.3. *Un vincolo si dice liscio o privo di attrito quando è in grado di esplicare l'azione di una sola reazione vincolare avente la stessa direzione di uno spostamnto totalmente proibito del punto di applicazione.*

Le forze si classificano poi in

- reazioni vincolari: dovute all'azione dei vincoli
- forze attive: tutte le altre, non dovute quindi all'azione dei vincoli.

Un altro postulato molto significativo è il *principio di azione e reazione*, poichè vale per tutte le forze, sia attive che vincolari. Lo ricordiamo qui per le reazioni vincolari.

Teorema 1.4 (principio di azione e reazione per le reazioni vincolari). *Se una certa reazione vincolare è esercitata su A per effetto di un vincolo che lo lega a B, allora su B agisce una reazione vincolare dovuta ad A, uguale e contraria a quella considerata in partenza e con la stessa linea d'azione.*

Da questo abbiamo che le reazioni interne si possono sempre scindere in un certo numero di sistemi di due reazioni uguali e opposte con la stessa linea d'azione e che i punti di un corpo che costituisce vincolo esterno ad un altro sono soggetti a reazioni vincolari uguali e contrarie alle reazioni vincolari che il secondo corpo esercita sul primo.

1.2 Equilibrio delle forze applicate in un punto materiale

Per alterare lo stato di quiete o di moto di un punto materiale è necessarario applicare, o rimuovore, su di esso almeno una forza non nulla. Introduciamo ora il seguente postulato, confermato da tutte le esperienze più comuni:

Postulato 1.5. *Le variazioni dello stato di quiete o di moto prodotte da un sistema di forze che vengano tutte contemporaneamente applicate sullo stesso punto materiale P, libero o vincolato, si possono ottenere considerando un'unica forza: la risultante delle forze considerate, avente P come punto di applicazione e come vettore la somma vettoriale dei vettori delle singole forze componenti.*

Definizione 1.6. *Un sistema di forze si dice in equilibrio su un punto materiale libero P quando, applicato su P, non ne altera lo stato di quiete o di moto, indipendentemente da qualunque altro sistema di forze agenti su P.*

Per l'equilibrio dei sistemi di forze vale il seguente

Teorema 1.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di forze applicate ad un punto materiale libero sia in equilibrio è che la loro risultante sia nulla.*

Attraverso i risultati finora illustrati riusciamo a trovare le condizioni affinchè un punto materiale, che è in quiete in un certo istante, rimanga sempre in quiete.
Possiamo intuire che, oltre alla risultante delle forze attive, dobbiamo considerare anche tutte le reazioni vincolari applicate al punto. Poichè il punto materiale si può sempre ritenere libero sostituendo ai vincoli le loro reazioni, se il punto rimane sempre in quiete, deve essere sempre in equilibrio il sistema delle forze attive e delle reazioni vincolari. Viceversa se quest'ultimo sistema è sempre in equilibrio e il punto in un certo istante è in quiete, esso rimane, per definizione di sistema in equilibrio, sempre in quiete. Possiamo pertanto enunciare il seguente

Teorema 1.8. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto rimanga in quiete è che*

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\Phi} = 0 \ ,$$

essendo $\overrightarrow{F}$ *la risultante delle forze attive e* $\overrightarrow{\Phi}$ *la risultante delle reazioni vincolari.*

Per l'equilibrio di un punto deve quindi essere nulla la risultante di tutte le forze in gioco. Se poi il punto materiale è libero, non sono cioè presenti reazioni vincolari ($\overrightarrow{\Phi} = 0$), la condizione si riduce solamente a $\overrightarrow{F} = 0$.

1.3 Sistemi di forze

Consideriamo un sistema di forze rappresentate dai vettori applicati

$$(\overrightarrow{F_1}, A_1), (\overrightarrow{F_2}, A_2), ..., (\overrightarrow{F_n}, A_n). \tag{1.1}$$

Definizione 1.9. *Il vettore risultante* $\overrightarrow{R}$ *del sistema (1.1) è il vettore somma dei vettori* $\overrightarrow{F_1}$, *...*, $\overrightarrow{F_n}$, *ossia*

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ... + \overrightarrow{F_n} = \sum_{s=1}^{n} \overrightarrow{F_s}$$

Definizione 1.10. *Il momento di una forza* $(\overrightarrow{F}, A)$ *rispetto a un punto* $O \in \mathbb{R}^3$ *è il vettore*

$$\overrightarrow{\Omega}(O) = \overrightarrow{F} \times (O - A)$$

.

Indicando con α l'angolo compreso tra $(O - A)$ e $\overrightarrow{F}$ e con $v = |\overrightarrow{v}|$ il modulo di un generico vettore $\overrightarrow{v}$, si ha per il modulo del momento:

$$\Omega(O) = F\overline{AO}\sin\alpha = Fd$$

dove d è il *braccio* della forza rispetto al punto O (geometricamente è la distanza di O dalla linea d'azione della forza), come illustrato in Figura 1.1. Quindi il momento ha come *modulo* il prodotto del modulo della forza per la distanza del punto dalla sua linea d'azione, *direzione* normale al piano della linea d'azione e del punto e *verso* tale che un osservatore posizionato in O nel senso del momento veda la forza andare da destra verso sinistra.

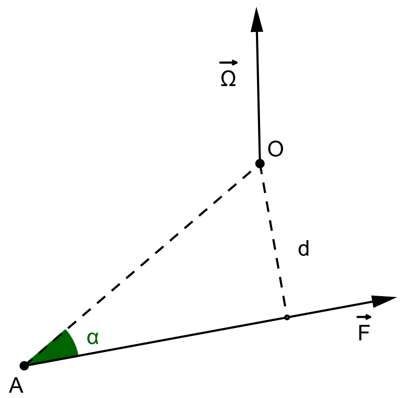

Figura 1.1: Braccio d di una forza rispetto ad O.

In generale il momento di una forza cambia al variare di O. Da notare quindi che il momento è nullo solo rispetto ai punti della linea d'azione della forza (poichè si ha $\sin\alpha = 0$).
Si supponga ora di far scorrere la forza lungo la sua linea d'azione, cioè di applicarla in un altro punto generico A' di questa stessa linea. Questa operazione, detta *scorrimento*, non altera il momento della forza calcolato rispetto allo stesso punto. Sia infatti $\overrightarrow{\Omega}'$ il momento rispetto ad O di $(\overrightarrow{F}, A)$. Si ha

$$\overrightarrow{\Omega}' = \overrightarrow{F} \times (O - A') = \overrightarrow{F} \times (O - A) + \overrightarrow{F} \times (A - A').$$

Ma l'ultimo vettore è nullo perchè prodotto vettoriale di due vettori paralleli; sarà quindi $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}'$, come volevasi dimostrare.

Definizione 1.11. *Chiamiamo momento risultate del sistema di forze (1.1) rispetto a un punto O la somma dei singoli momenti delle forze*

$$\overrightarrow{\Omega}(O) = \overrightarrow{\Omega_1}(O) + \overrightarrow{\Omega_2}(O) + ... + \overrightarrow{\Omega_n}(O) =$$

$$\overrightarrow{F_1} \times (O - A_1) + \overrightarrow{F_2} \times (O - A_2) + ... + \overrightarrow{F_n} \times (O - A_n) = \sum_{s=1}^{n} \overrightarrow{F_s} \times (O - A_s).$$

Il momento $\overrightarrow{\Omega}(O)$ del sistema (1.1) in generale dipende dal polo O. Se O_1 è un altro punto in $\mathbb{R}^3$ i momenti $\overrightarrow{\Omega}(O)$ e $\overrightarrow{\Omega}(O_1)$ rispetto ai due punti O

e O_1 sono legati dalla relazione

$$\vec{\Omega}(O_1) = \vec{\Omega}(O) + \vec{R} \times (O - O_1).$$

Si ha infatti

$$\vec{\Omega}(O_1) = \sum_{s=1}^{n} \vec{F_s} \times (O_1 - A_s) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \vec{F_s} \times (O_1 - O) + \sum_{s=1}^{n} \vec{F_s} \times (O - A_s) = \vec{R} \times (O_1 - O) + \vec{\Omega}(O).$$

Si parla di **momento risultante del sistema** quando il vettore risultante delle forze è nullo, poichè per questo si ha che un sistema di forze ha ugual momento rispetto a tutti i punti dello spazio.
Chiamiamo *operazioni elementari* su un sistema di forze le operazioni di scorrimento, composizione e decomposizione, che non alterano il vettore risultante di questo sistema. Infatti uno scorrimento delle forze non cambia il vettore risultante, perchè la somma dei vettori è indipendente dalla loro posizione nello spazio; composizione e decomposizione non cambiano il vettore risultante per la proprietà associativa dei vettori. Si può quindi dedurre che *le operazioni elementari non alterano il vettore risultante e il momento risultante di un sistema di forze.*
Nel caso specifico di un sistema di due forze si può enunciare il seguente teorema per la cui dimostrazione si veda [2].

Teorema 1.12. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due forze non nulle abbiano vettore risultante e momento risultante nulli è che siano uguali, opposte e con stessa linea d'azione.*

Semplice e fondamentale è la conseguenza di questo teorema, che ci dice che, se posso scindere un sistema in un certo numero di sistemi di due forze uguali e opposte con la stessa linea d'azione, allora il suo momento risultante e vettore risultante sono nulli. Sistemi di questo tipo sono formati dalle forze interne di un corpo. Quindi *il sistema delle forze interne di un corpo ha vettore risultante e momento risultante nullo.* Questo risultato vale poi separatamente per i sistemi delle forze attive interne e delle reazioni vincolari

interne.
Se tutte le forze considerate sono *complanari*, definiamo ora **momento statico di una forza** $(\overrightarrow{F}, A)$ **rispetto a** O l'espressione

$$N = \pm Fd.$$

Allora il momento della forza $(\overrightarrow{F}, A)$ e $N\overrightarrow{k}$, con $\overrightarrow{k}$ vettore unitario normale al piano e diretto verso l'osservatore, hanno uguale modulo, direzione e verso, cioè

$$\overrightarrow{\Omega}(O) = N\overrightarrow{k}.$$

In pratica N è il modulo, con segno, del momento di una forza. Se poi si considera un sistema di forze complanari si ha che

$$\overrightarrow{\Omega}(O) = (N_1 + N_2 + ... + N_n)\overrightarrow{k} \tag{1.2}$$

con N_1, ..., N_n momenti statici delle singole forze, il quale si annulla se e solo se è nulla la somma dei suoi momenti statici.

1.3.1 Equilibrio dei sistemi di forze

Consideriamo un corpo composto da N punti A_1, ..., A_N e sia A_s uno di questi. Come abbiamo visto in precedenza, la condizione affinchè il punto rimanga in quiete è che

$$\overrightarrow{F_s} + \overrightarrow{\Phi_s} = 0$$

con $\overrightarrow{F_s}$ risultante delle forze attive applicate e $\overrightarrow{\Phi_s}$ risultante delle reazioni vincolari agenti entrambe su A_s.
Per ogni punto possiamo scindere sia le forze che le reazioni vincolari in *interne* ed *esterne* ottenendo la relazione

$$\overrightarrow{F_{es}} + \overrightarrow{\Phi_{es}} + \overrightarrow{F_{is}} + \overrightarrow{\Phi_{is}} = 0 \tag{1.3}$$

ottenuta da

$$\overrightarrow{F_s} = \overrightarrow{F_{es}} + \overrightarrow{F_{is}} \quad , \quad \overrightarrow{\Phi_s} = \overrightarrow{\Phi_{es}} + \overrightarrow{\Phi_{is}} \quad , \quad \forall s = 1, ..., N$$

Sommiamo membro a membro la (1.3) (facendo variare l'indice s da 1 a N): siccome la somma del terzo e del quarto termine è nulla, poichè, come visto in precedenza, nulli entrambi, otteniamo

$$\overrightarrow{R_e} + \overrightarrow{\Phi_e} = 0 \tag{1.4}$$

di cui il primo membro è la risultante delle forze attive esterne e il secondo è la risultante delle reazioni esterne agenti sul corpo. Moltipichiamo ora vettorialmente la (1.3) per $(O - A_s)$, essendo O un punto fissato arbitrariamente, e sommiamo sempre rispetto l'indice s. D'ora in poi laddove non c'è più possibilità di confusione, sopprimeremo la dipendenza da O nella notazione del momento $\overrightarrow{\Omega}(O)$, che quindi verrà brevemente indicato con $\overrightarrow{\Omega}$.
Il risultato finale, tenendo sempre conto del fatto che il terzo e il quarto membro sono nulli, è

$$\overrightarrow{\Omega_e} + \overrightarrow{\Psi_e} = 0 \tag{1.5}$$

con $\overrightarrow{\Omega_e}$ e $\overrightarrow{\Psi_e}$ momento risultante rispettivamente delle forze attive esterne e delle reazioni esterne. Abbiamo quindi trovato le condizioni per la quiete di un corpo, che sono descritte dalle equazioni (1.4) e (1.5).
Quindi possiamo dire che *condizione necessaria per la quiete di un corpo è che siano nulle la somma dei vettori risultanti e la somma dei momenti risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne.*
Se poi il corpo è libero la condizione è semplificata: basta che siano nulli sia $\overrightarrow{R_e}$ che $\overrightarrow{\Omega_e}$.
Andiamo ora ad esaminare l'equilibrio di un sistema di forze.

Definizione 1.13. *Un sistema di forze è in equilibrio quando la loro applicazione o rimozione su un corpo libero non ne altera il suo stato, indipendentemente da qualunque altro sistema di forze agenti sul corpo.*

Per quello che abbiamo, risulta stabilito il seguente

Teorema 1.14. *Condizione* ***necessaria*** *per l'equilibrio di un sistema di forze è che siano soddisatte le seguenti equazioni*

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = 0 \\ \overrightarrow{\Omega} = 0 \end{cases}$$

con $\overrightarrow{R}$ *vettore risultante e* $\overrightarrow{\Omega}$ *momento risultante del sistema.*

1.3.2 Equilibrio di un sistema di forze su un corpo rigido

Per completezza riportiamo in questo paragrafo alcuni importanti risultati riguardanti l'equilibrio dei corpi rigidi, omettendo per brevità i dettagli e le dimostrazioni per i quali si rinvia al trattato [2]. Quello che abbiamo visto finora vale per tutti i corpi, rigidi e non. Vogliamo limitare il nostro ragionamento ai corpi rigidi ottenendo condizioni non solo necessarie, ma anche sufficienti per l'equilibrio di un sistema di forze.
Partendo dal sistema più semplice, cioè formato da due forze, possiamo affermare che *due forze uguali e opposte con la stessa linea d'azione costituiscono un sistema in equilibrio.*
Una proprietà importante è che un'operazione elementare (scorrimento, composizione, decomposizione) non altera lo stato di quiete o di moto di un corpo rigido. Detto questo possiamo enunciare il seguente

Teorema 1.15. *Un sistema di tre forze si può sempre ridurre, mediante operazioni elementari, a un sistema di due.*

Questo teorema può essere esteso al caso di n forze. Infatti n forze, mediante operazioni elementari, si possono ridurre a $n - 1$; analogamente un sistema di $n - 1$ forze si riduce a un sistema di $n - 2$, e così via. Procedendo per induzione si ottiene dunque che *un sistema di n forze si può ridurre a un sistema di due* mediante operazioni elementari.
Con semplici considerazioni basate sui risultati finora illustrati si può dimostrare (si veda [2] per i dettagli) che *condizione **sufficiente** per l'equilibrio di un sistema di forze su un corpo rigido consiste nell'annullarsi del suo vettore risultante* $\overrightarrow{R}$ *e del suo momento risultante* $\overrightarrow{\Omega}$. Infatti posso sempre

ridurre questo sistema a due forze che, avendo vettore risultante e momento risultante nulli, devono essere uguali, opposte e con stessa linea d'azione. Possiamo quindi concludere che

Teorema 1.16. ***Condizione necessaria e sufficiente*** *per l'equilibrio di un sistema di forze su un corpo rigido è l'annullarsi del vettore risultante e del momento risultante.*

Capitolo 2

Equivalenza dei sistemi di forze e riduzione ai sistemi semplici

2.1 Sistemi equivalenti di forze

Siano

$$(\overrightarrow{F_1}, A_1), ..., (\overrightarrow{F_n}, A_n) \quad e \quad (\overrightarrow{F_1}', A_1'), ..., (\overrightarrow{F_n}', A_n')$$

due sistemi di forze che denoteremo per brevità con (S) e (S') rispettivamente. Sia O un generico punto di $\mathbb{R}^2$. Indichiamo con $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{\Omega}$ il vettore risultante e il momento risultante rispetto ad O di (S) e con $\overrightarrow{R}'$ e $\overrightarrow{\Omega}'$ gli analoghi vettori del sistema (S').

Definizione 2.1. *I sistemi di forze (S) ed (S') si dicono equivalenti se si ha*

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}' \\ \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}'. \end{cases} \tag{2.1}$$

Notiamo subito che due sistemi equivalenti hanno momenti risultanti uguali per ogni punto dello spazio. Infatti sia $O_1 \in \mathbb{R}^3$, $O_1 \neq O$. Detti $\overrightarrow{\Omega_1}$ e $\overrightarrow{\Omega_1}'$ rispettivamente i momenti di (S) ed (S') ripetto ad O_1 si ha

$$\overrightarrow{\Omega_1} = \overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{R} \times (O_1 - O)$$

$$\overrightarrow{\Omega_1}' = \overrightarrow{\Omega}' + \overrightarrow{R}' \times (O_1 - O) \ .$$

Dalle (2.1) segue immediatamente che $\overrightarrow{\Omega_1} = \overrightarrow{\Omega_1}'$. Ma una proprietà ancora più importante è che *l'insieme delle forze di un sistema e quelle di un altro equivalente a questo, invertite di senso, costituiscono un sistema in equilibrio*, in quanto il suo vettore risultante vale la differenza dei due vettori risultanti dei due sistemi equivalenti, che è nullo, e per la stessa ragione sono nulli i momenti risultanti rispetto a un punto. Da ciò segue che, se ad un sistema di forze applicate a un corpo rigido si sostituisce un sistema equaivalente, non si altera lo stato di quiete o di moto del corpo.

I sistemi di forze più semplici sono

- quelli formati da *una sola forza* di vettore $\overrightarrow{F}$, applicata in un generico punto A ben definito,

- la *coppia*, che definiremo fra un momento

Il sistema a **una sola forza** $(\overrightarrow{F}, A)$ è il più semplice sistema di forze che possiamo considerare. Abbiamo come *vettore risultante* $\overrightarrow{F}$ e come *momento risultante* rispetto a un generico punto $O \in \mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{F} \times (O - A)$$

che è nullo solo se O sta sulla linea d'azione della forza.
Da notare che i sistemi formati da una sola forza equivalenti ad una forza $(\overrightarrow{F}, A)$ sono quelli che, cambiati di senso, la matengono in equilibrio, cioè sistemi ottenuti facendo scorrere $\overrightarrow{F}$ lungo la sua linea d'azione. Possiamo quindi dire che

Teorema 2.2. *Un sistema di due forze con le linee d'azione sghembe non può essere equivalente a una forza sola.*

L'altro sistema semplice di forze è **la coppia**, formata da due forze $(\overrightarrow{F}, A)$, $(-\overrightarrow{F}, B)$, uguali, opposte e con diversa linea d'azione, come in Figura 2.1.

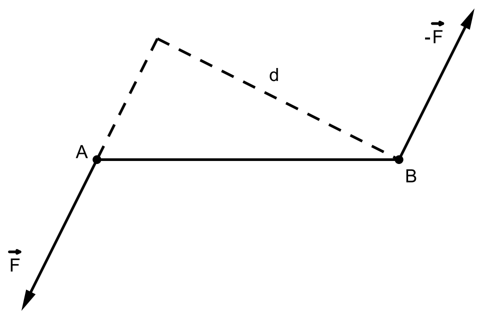

Figura 2.1: una coppia

Ovviamente il *vettore risultante* è nullo, quindi il momento risultante, detto *momento della coppia* e indicato con $\overrightarrow{\Omega}$, è uguale in tutti i punti dello spazio. $\overrightarrow{\Omega}$ può essere calcolato rispetto al punto di applicazione di una delle due forze e quindi vale il momento di una delle due forze rispeto al punto di applicazione dell'altro. Si ha quindi

$$\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{F} \times (A - B)$$

e per il modulo di $\overrightarrow{\Omega}$ si ha

$$\Omega = Fd$$

con d braccio della coppia, che è la distanza tra le due forze. Per la (1.2) possiamo dire che il momento della forza è normale al piano passante per una forza e la linea d'azione dell'altra, cioè normale al piano delle due forze, detto piano della coppia, mentre il verso è tale che un osservatore posto nel punto di applicazione di una forza e diretta secondo il momento vede l'altra forza andare da destra verso sinistra.

Due coppie, avendo vettore risultante nullo, saranno quindi equivalenti quando avranno ugual momento, quindi dovranno essere complanari, o al massimo appartenere a piani paralleli, dovranno avere stesso verso e uguale il prodotto del braccio per l'intensità di una forza. È facile vedere che, dato un vettore $\overrightarrow{\Omega}$, esistono sempre infinite coppie che hanno tale vettore per momento. Sia infatti $\overrightarrow{F}$ un vettore arbitrario normale a $\overrightarrow{\Omega}$. Sappiamo, dallo studio del calcolo vettoriale, che esiste un vettore $A_1 - A_2$ tale che

$$\overrightarrow{\Omega} = (A_1 - A_2) \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F} \times (A_1 - A_2).$$

Allora la coppia formata dalle forze $(\overrightarrow{F}, A_1)$ e $(-\overrightarrow{F}, A_2)$ ha come momento proprio $\overrightarrow{\Omega}$. Questa coppia e tutte quelle ad essa equivalenti costituiscono le coppie che hanno per momento il vettore dato.
È facile dimostrare il seguente

Teorema 2.3. *n coppie di momento $\overrightarrow{\Omega_1}, \overrightarrow{\Omega_2}, \ldots, \overrightarrow{\Omega_n}$ equivalgono a un'unica coppia (detta coppia risultante) di momento*

$$\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_n}\ .$$

Dimostrazione. Questa coppia ha uguale vettore risultante (nullo) e uguale momento risultante dell'insieme delle coppie date. Quindi le coppie si compongono sommando i loro momenti. □

Con l'uso delle coppie si può eseguire un' operazione, che possiamo chiamare il *trasporto di una forza parallelamente a se stessa.* Si consideri una forza $(\overrightarrow{F}, A)$ e la Figura 2.2. In A' si aggiungano due forze uguali e contrarie $\overrightarrow{F}$ e $-\overrightarrow{F}$. Si vede chiaramente che la forza $(\overrightarrow{F}, A')$ e la coppia formata dalle altre due forze è equivalente alla forza applicata in A. È facile quindi arrivare alla conclusione che, con l'opportuna aggiunta di una coppia, si può trasportare una forza parallelamente a se stessa.
Si può anche dimostrare che il sistema formato da una forza $(\overrightarrow{F}, A)$ e da una coppia con momento $\overrightarrow{\Omega}$ normale alla forza equivale ad una forza ancora di vettore $\overrightarrow{F}$, ma applicata in un altro punto dello spazio. Infatti la coppia deve giacere in un piano qualunque normale a $\overrightarrow{\Omega}$; possiamo quindi considerare il piano passante per la linea d'azione di $\overrightarrow{F}$. Inoltre la coppia può essere formata da due forze, $-\overrightarrow{F}$ e $\overrightarrow{F}$, con la forza $-\overrightarrow{F}$ applicata in A. Il sistema è allora quello descritto nella Figura 2.3, equivalente ad una sola forza applicata in A'. Ovviamente, poichè una forza si può far scorrere lungo la sua linea d'azione, esistono infiniti punti A' in cui si può applicare la forza equivalente al sistema.

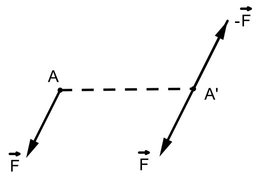

Figura 2.2: trasporto di una forza parallelamente a se stessa

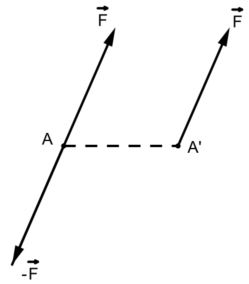

Figura 2.3: equivalenza tra il sistema e la sola forza in A'

2.2 Riduzione ai sistemi semplici

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema fondamentale che riguarda i sistemi di forze.

Teorema 2.4. *Ogni sistema di forze equivale sempre ad un sistema costituito da una forza e da una coppia.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\overrightarrow{R}$ il vettore risultante del sistema e con $\overrightarrow{\Omega}$ il momento risultante rispetto al punto O. Consideriamo quindi la forza $(\overrightarrow{F}, O)$, con $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{R}$, e una coppia di momento $\overrightarrow{\Omega}$, come in Figura 2.4.

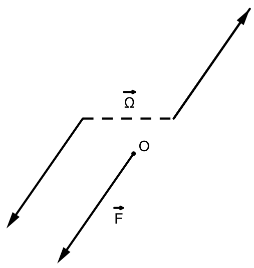

Figura 2.4: una forza e una coppia

Questo sistema ha come vettore risultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{R}$ e come momento risultante rispetto ad O il momento $\overrightarrow{\Omega}$ della coppia, poichè il momento di $(\overrightarrow{F}, O)$ rispetto ad O è nullo. □

Il punto O si chiama **centro di riduzione del sistema** ed è arbitrario; al variare di O non cambia l'intensità della forza, ma varia invece la coppia, poichè si sposta la forza parallelamete a se stessa. Si può quindi dimostrare che *si può scegliere il centro di riduzione in modo che la forza e il momento della coppia siano paralleli* (la coppia agisce così in un piano normale alla forza).
A questo scopo decomponiamo $\overrightarrow{\Omega}$ in due vettori, $\overrightarrow{\Omega_1}$ e $\overrightarrow{\Omega_2}$, uno parallelo e uno normale ad $\overrightarrow{F}$. Il sistema iniziale diventa equivalente ad uno costituito dalla forza $(\overrightarrow{F}, A)$ e da due coppie di momenti $\overrightarrow{\Omega_1}$ e $\overrightarrow{\Omega_2}$. Il sistema costituito dalla forza $(\overrightarrow{F}, O)$ e dalla coppia di modulo $\overrightarrow{\Omega_2}$ è equivalente ad una sola forza di vettore $\overrightarrow{F}$, applicata in un altro centro di riduzione O'. Il sistema si riduce allora ad una forza e ad una coppia, con momento parallelo alla forza. Da notare che esistono infiniti punti O', che sono quelli che giacciono sulla retta passante per uno di essi e parallela alla forza. Inoltre solo i punti di questa retta sono centri di riduzione che godono della suddetta proprietà. Consideriamo infatti O_1 esterno a questa retta, che chiamiamo r, e lo prendiamo come centro di riduzione (Figura 2.5).

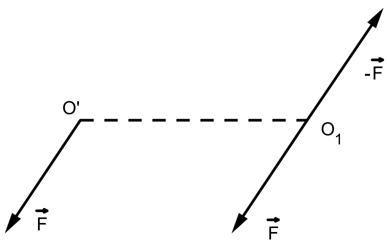

Figura 2.5: l'asse di riduzione è la retta O_1O'

Dobbiamo ora considerare la forza $(\overrightarrow{F}, O_1)$ e aggiungere alla coppia di momento $\overrightarrow{\Omega_1}$ l'altra di momento $\overrightarrow{\Omega}'$, normale a $\overrightarrow{F}$, formata da $(\overrightarrow{F}, O')$ e $(-\overrightarrow{F}, O_1)$. Abbiamo allora che quando il centro di riduzione è O_1, la coppia ha momento $\overrightarrow{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega}'$, che non è parallelo a $\overrightarrow{F}$.

Quindi *per ogni sistema di forze esiste una retta, detta* asse centrale, *tale che i soli suoi punti (e soltanto questi punti), presi come centro di riduzione, determinano come sistema equivalente al dato una forza e una coppia con momento parallelo alla forza.*

2.3 Invariante di un sistema di forze

Vediamo ora le condizioni per cui un sistema di forze equivale ad una sola coppia o ad una sola forza.

Teorema 2.5. *Il sistema equivale a una coppia quando il vettore risultante è nullo.*

Questo risultato segue banalmente dal fatto che manca la forza.
Ovviamente il sistema equivale invece a una sola forza quando, in qualche punto dello spazio, il momento del sistema è nullo. Ma serve un criterio per accertare l'esistenza di questi punti. Uno strumento utile a questo scopo è l'invariante del sistema che ora andiamo a definire.

Definizione 2.6. *Si chiama invariante I di un sistema di forze il prodotto scalare del momento risultante per il vettore risultante, cioè*

$$I = \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{R}$$

Ovviamente, dal nome stesso si capisce che, mentre $\overrightarrow{\Omega}$ in genere varia da punto a punto, I non varia. Infatti se cosideriamo $\overrightarrow{\Omega}$ e $\overrightarrow{\Omega_1}$ momenti rispetto a due punti O e O_1 abbiamo che vale $\overrightarrow{\Omega_1} = \overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{R} \times (O_1 - O)$ e , moltiplicando scalarmente per $\overrightarrow{R}$ si ha

$$\overrightarrow{\Omega_1} \cdot \overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{R}$$

e questo dimostra appunto che I non varia col variare del punto rispetto al quale si calcola il momento. Possiamo ora dimostrare il seguente importante criterio.

Teorema 2.7. *Il sistema equivale ad una forza sola se è nullo l'invariante e non lo è il vettore risultante.*

Dimostrazione. Prendendo come centro di riduzione un punto dell'asse centrale, $\overrightarrow{\Omega}$ deve essere parallelo a $\overrightarrow{R}$. Supponendo $I = 0$ e $\overrightarrow{R} \neq 0$, in quel punto avrò $\overrightarrow{\Omega} = 0$; quindi il sistema è equivalente a una sola forza, applicata ad un punto dell'asse centrale, detta *la risultante* del sistema. □

Ricordando la definizione di sistemi di forze equivalenti si ottiene il seguente *teorema di Varignon*[1], che dice

Teorema 2.8. *La somma dei momenti delle singole forze è uguale al momento della risultante, con i momenti calcolati rispetto alla stesso punto.*

Osservazione 2.9. Se consideriamo il caso di un sistema di forze in un piano, possiamo dire che, avendo il momento risultante normale al piano delle forze, ha l'invariante nullo. Questo sistema quindi sarà equivalente a una sola forza, se il vettore risultante non è nullo, ad una coppia in caso contrario.

2.4 Il poligono funicolare

Nel caso di un sistema di forze in un piano andiamo ad esaminare i procedimenti propri della *statica grafica*, per la costruzione delle singole forze o delle singole coppie, a cui il sistema è equivalente. Un primo procedimento è il ***metodo delle risultanti successive***: date n forze in un piano si costruisce la risultante tra la prima e la seconda (dopo un opportuno scorrimento applicandole così nello stesso punto per poi comporle con la regola del paral-lelogramma), poi si forma la risultante tra la forza così ottenuta e la terza, e così via.
Un metodo più pratico è invece il ***metodo del poligono funicolare***. Consideriamo per semplicità un sistema di quattro forze

$$(\overrightarrow{F_1}, A_1)\,,\ (\overrightarrow{F_2}, A_2)\,,\ (\overrightarrow{F_3}, A_3)\,,\ (\overrightarrow{F_4}, A_4).$$

[1]Pierre Varignon, nato a Caen nel 1664, morto a Parigi nel 1772. Il teorema è contenuto nell'opera postuma "Nouvelle mecanique ou statique"(Parigi, 1725).

Costruiamo il cosiddetto poligono dei vettori, ossia la poligonale, ottenuta sommando vettorialmente i vettori $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ e siano $B_0, B_1, ..., B_4$ i suoi vertici. Quindi si ha che

$$B_i - B_{i-1} = \overrightarrow{F_i} \qquad \forall i = 1, ..., 4$$

Ovviamente $B_n - B_0$ è il vettore risultante $\overrightarrow{R}$ del sistema, come evidenziato in Figura 2.6.

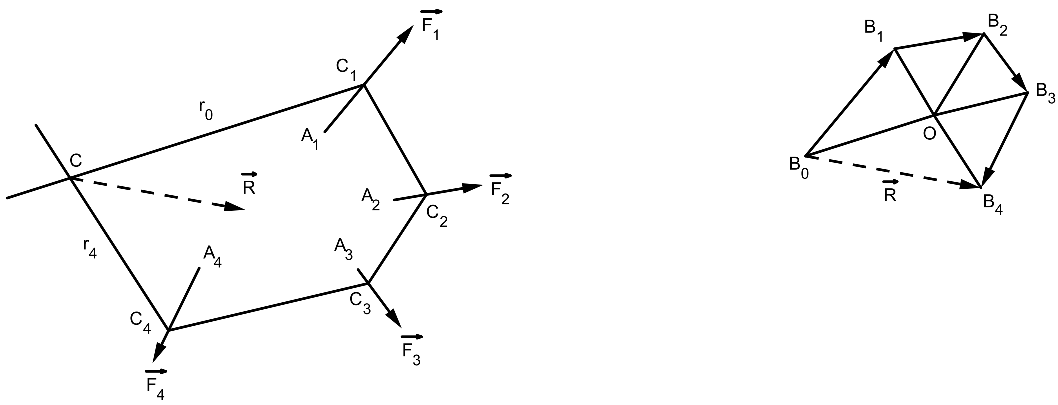

Figura 2.6: poligono dei vettori

Consideriamo un punto O, detto *polo*, esterno al poligono, e congiungiamolo con i vertici B_i. Sia poi C_1 un punto scelto arbitrariamente sulla retta d'azione di $\overrightarrow{F_1}$ e tracciamo la retta parallela a OB_1 per C_1 fino ad intersecare la linea d'azione di $\overrightarrow{F_2}$ in un punto C_2. Iterando questo procedimento nel caso più generico di n forze $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, ... , $\overrightarrow{F_n}$ si traccia da C_{n-1} una retta parallela a OB_{n-1}, intersecando così in C_n la linea d'azione di $\overrightarrow{F_n}$.
Costruiamo ora due rette, r_0 e r_4, a partire dai punti C_1 e C_4, parallele rispettivamente a OB_0 e a OB_4, che *non* sono *parallele* se il vettore risultante del sistema non è nullo. Chiamando C la loro intersezione, si ha che questo è il punto in cui si può applicare la risultante $\overrightarrow{F}$.
Andiamo a dimostrare questa affermazione.
Come evidenziato in Figura 2.7

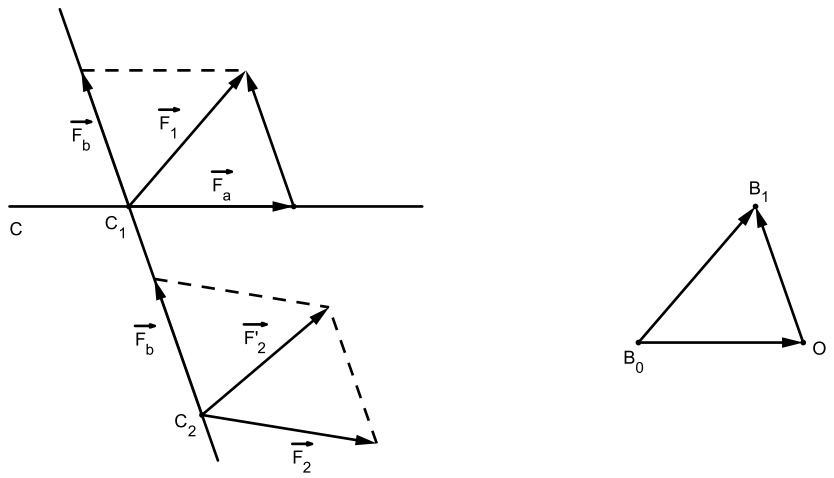

Figura 2.7: procedimento per la costruzione del poligono funicolare

si ha che $B_1 - B_0 = (O - B_0) + (B_1 - O) = \overrightarrow{F_1}$. Facciamo ora scorrere $\overrightarrow{F_1}$ fino a far coincidere il suo punto d'applicazione con C_1, e la decomponiamo in $\overrightarrow{F_a}$ e $\overrightarrow{F_b}$ secondo le rispettive direzioni CC_1, C_1C_2, ottenendo $\overrightarrow{F_a} = O - B_0$ e $\overrightarrow{F_b} = B_1 - O$. Facciamo poi scorrere sia F_b che $\overrightarrow{F_2}$ lungo le rispettive linee d'azione in modo da avere come punto d'applicazione di entrambe il punto C_2. Componendo le due forze se ne ottiene una nuova, $\overrightarrow{F_2}'$, applicata in C_2, che risulta essere uguale a $B_2 - O$ e che ha per linea d'azione la retta C_2C_3, quindi parallela a OB_2. Continuando questo procedimento il sistema si riduce a un sistema di due forze: $\overrightarrow{F_a}$ e $\overrightarrow{F_4}'$ corrispondenti una al vettore $O - B_0$ e l'altro a $B_4 - O$, le cui linee d'azione sono proprio r_0 e r_4. Queste due rette hanno in comune il punto C, che ora viene preso come punto di applicazione sia di $\overrightarrow{F_a}$ che di $\overrightarrow{F_4}'$. Componendo queste due forze si ottiene un vettore uguale a $B_4 - B_0$, che rappresenta perciò una forza equivalente al sistema dato.

Se invece il vettore risultante è nullo si avrà che B_0 coincide con B_4 e quindi il poligono dei vettori è chiuso e le rette r_0 e r_4 sono parallele. Come conseguenza immediata si ha che il punto C va all'infinito e quindi i vettori $\overrightarrow{F_a}$ e $\overrightarrow{F_4}'$, definiti come nel caso precedente, sono uguali, contrari e con linee d'azione diverse. Se si spostano queste forze sulle rette r_0 e r_4 esse costituiscono la coppia equivalente al sistema dato.

Definizione 2.10. *In generale viene chiamato poligono funicolare il poligono di vertici $CC_1...C_n$.*

Se il lato C_1C coincide col lato C_nC il poligono funicolare si dice *chiuso*: allora OB_0 coincide con OB_n e il vettore risultante del sistema è nullo. Inoltre le forze $\overrightarrow{F_a}$ e $\overrightarrow{F_n}'$ sono uguali e opposte, con stessa linea d'azione: quindi il sistema dato è in equilibrio. Possiamo quindi dire che *condizione grafica necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema di forze complanari è che sia chiuso il suo poligono funicolare.*

Capitolo 3

Forze parallele e baricentri

3.1 Centro delle forze parallele

Suddividiamo lo studio delle forze parallele in due casi: quelle con stesso verso e quelle con verso opposto.
Consideriamo due forze parallele $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$ e $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$ con **stesso verso** (cioè cospiranti). Esse equivalgono a una sola forza di vettore

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

che ha come modulo $F = F_1 + F_2$, poichè sono forze con ugual direzione e verso. Andiamo ora a determinare la linea d'azione di $\overrightarrow{F}$, che equivale a cercare il suo punto di intersezione A con la retta congiungente A_1 e A_2. Il momento di $\overrightarrow{F}$ rispetto ad A è nullo, quindì sarà nulla la somma dei momenti di $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ sempre rispetto ad A: si ottiene allora che questi due momenti sono uguali e contrari e, essendo in un piano, devono essere uguali e di segno contrario anche i momenti statici di $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ rispetto ad A. Pertanto A sarà sicuramente *interno* al segmento A_1A_2. Dalla Figura 3.1 vediamo che, dette d_1 e d_2 le distanze di A rispettivamente da $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, deve essere

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

e dividendo per $\cos\alpha$ si ottiene $F_1 AA_1 = F_2 AA_2$, da cui

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AA_2}{AA_1}$$

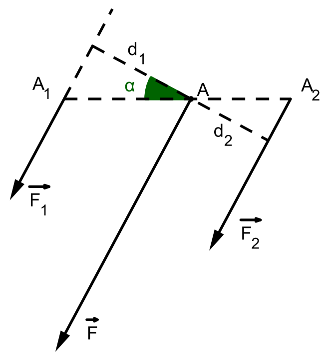

Figura 3.1: Due forze parallele con stesso verso applicate nel loro centro di riduzione A.

Trovando A da quest'ultima equazione possiamo trovare la *linea d'azione* di $\overrightarrow{F}$, che passa per A ed è parallela alle due forze. Essa divide A_1A_2 in parti inversamente proporzionali all'intensità delle due forze stesse.
Il punto **A** è detto **centro delle forze parallele** ed è indipendente dalla direzione delle forze; gli si può quindi sempre applicare la risultante comunque si ruotino le forze, purchè rimangano parallele, con la stessa intensità e con gli stessi punti di applicazione.
Consideriamo ora due forze parallele $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$ e $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$ di **verso opposto** (non cospiranti) e con vettore risultante $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \neq 0$, in modo da non costituire una coppia.
Anche questo sistema equivale ad una sola forza di vettore

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

parallela alle due forze, con verso della maggiore e d'intensità uguale alla differenza delle intensità delle due forze, come in Figura 3.2.
Sia A sempre l'intersezione della linea d'azione di $\overrightarrow{F}$ con A_1A_2; si ha allora che i momenti statici delle forze rispetto ad A devono essere uguali e contrari. In questo caso A deve essere esterno al segmento A_1A_2 e ragionando allo stesso modo del caso precedente, si ha nuovamente

$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{F_2}{F_1}$$

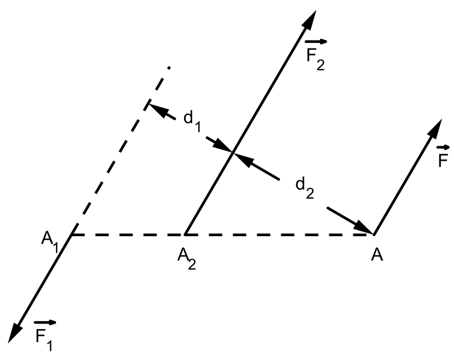

Figura 3.2: due forze parallele con verso opposto applicate nel loro centro di riduzione

Da questa ottengo che la linea d'azione di $\overrightarrow{F}$ per A divide esternamente il segmento A_1A_2 in parti inversamente proporzionali alle intensità delle forze e A risulta esterno al segmento, dalla parte della forza maggiore. Anche in questo caso A è detto **centro delle forze parallele** e non dipende dalla direzione delle forze.

Estendiamo ora il ragionamento a un sistema di **n forze** parallele:

- se esse sono *cospiranti* equivalgono sempre ad un'unica forza;
- se queste forze sono invece *parte in un verso e parte in quello opposto*, si ottengono due forze parallele di verso opposto: sarà una coppia se il vettore risultante è nullo, altrimenti le posso nuovamente comporre in una sola forza.

Si ottiene dunque il seguente

Teorema 3.1. *Un sistema di forze parallele equivale ad una coppia se il vettore risultante è nullo, ad una sola forza se è invece diverso da zero.*

Consideriamo il caso in cui il vettore risultante sia diverso da zero: allora il sistema ammette un **centro** C in cui si può applicare la risultante delle

forze e che è indipendente dalla loro direzione. L'asse centrale del sistema sarà quindi la retta passante per il centro e parallela alla direzione delle forze.
Cerchiamo ora le coordinate del centro C in un sistema di n forze parallele $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$, $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$, ..., $(\overrightarrow{F_n}, A_n)$ che abbia vettore risultante non nullo.
Sia $\overrightarrow{a}$ vettore unitario parallelo alle forze, cioè sia

$$\overrightarrow{F_1} = F_1 \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{F_2} = F_2 \overrightarrow{a}, \, ..., \, \overrightarrow{F_n} = F_n \overrightarrow{a}. \tag{3.1}$$

Il momento della forza equivalente al sistema rispetto a C è nullo, quindi sarà nullo il momento risultante del sistema dato (sempre rispetto a C):

$$\overrightarrow{F_1} \times (C - A_1) + \overrightarrow{F_2} \times (C - A_2) + ... + \overrightarrow{F_n} \times (C - A_n) = 0 \tag{3.2}$$

e, sostituendo le (3.1) nella (3.2) si ha:

$$F_1 \overrightarrow{a} \times (C - A_1) + F_2 \overrightarrow{a} \times (C - A_2) + ... + F_n \overrightarrow{a} \times (C - A_n) =$$

$$= \overrightarrow{a} \times [F_1(C - A_1) + F_2(C - A_2) + ... + F_n(C - A_n)] = 0 \; ,$$

da cui si ottiene

$$F_1(C - A_1) + F_2(C - A_2) + ... + F_n(C - A_n) = 0. \tag{3.3}$$

Introduciamo ora un sistema di riferimento $(Oxyz)$ e andiamo a trovare il vettore $C - O$. Operiamo sulla (3.3) sommando e sottraendo dentro ogni parentesi il punto O:

$$F_1(C - O + O - A_1) + F_2(C - O + O - A_2) + ... + F_n(C - O + O - A_n) = 0.$$

Lavorando su questa equazione otteniamo

$$(F_1 + F_2 + ... + F_n)(C - O) = F_1(A_1 - O) + F_2(A_2 - O) + .. + F_n(A_n - O) \; ,$$

da cui

$$C - O = \frac{\sum_{s=1}^{n} F_s(A_s - O)}{\sum_{s=1}^{n} F_s} \tag{3.4}$$

Possiamo così determinare le coordinate x_c, y_c, z_c del centro C indicando con x_s, y_s, z_s le coordinate di A_s:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{s=1}^{n} F_s x_s}{\sum_{s=1}^{n} F_s} \\ \\ y_c = \dfrac{\sum_{s=1}^{n} F_s y_s}{\sum_{s=1}^{n} F_s} \\ \\ z_c = \dfrac{\sum_{s=1}^{n} F_s z_s}{\sum_{s=1}^{n} F_s} \quad . \end{cases}$$

3.2 Decomposizione di una forza in un sistema di forze parallele

Vogliamo ora fare il ragionamento inverso, cioè da una forza costruirne due, o tre, parallele che abbiano come risultante la forza data inizialmente.

- *Decomposizione in due forze* .
  Sia $(\overrightarrow{F}, A)$ la forza data che vogliamo decomporre in due forze parallele $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$ e $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$, con A_1 e A_2 complanari con la linea d'azione di $\overrightarrow{F}$ e allineati con A.

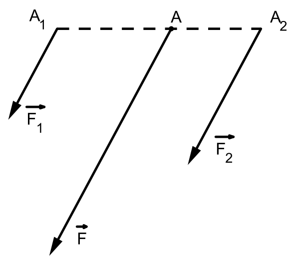

Figura 3.3: decomposizione in due forze

Se A è *interno* ad A_1A_2 otteniamo due forze con lo stesso verso di $\overrightarrow{F}$ per cui valgono le relazioni

$$F = F_1 + F_2 \ , \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{AA_2}{AA_1} \, .$$

Da queste, con semplici passaggi algebrici si ottiene

$$F_1 = \frac{AA_2}{A_1A_2}F, \quad F_2 = \frac{AA_1}{A_1A_2}F\,.$$

Se invece A è *esterno* si ragiona in modo analogo.

- *Decomposizione in tre forze.*
  Andiamo a decomporre la forza $(\overrightarrow{F}, A)$ in tre forze parallele applicate ai punti non allineati A_1, A_2, A_3 e complanari con A, ma non con $\overrightarrow{F}$, per avere così le linee d'azione parallele alla forza data. Sia A' l'intersezione di AA_1 con A_2A_3, come possiamo vedere in Figura 3.4; decomponiamo allora $\overrightarrow{F}$ in due forze $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F}'$ applicate rispettivamente in A_1 e A'.

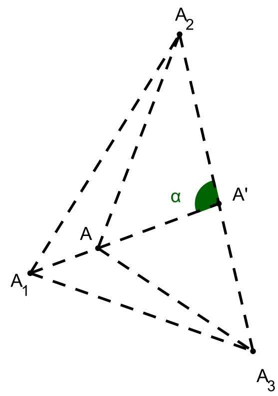

Figura 3.4: decomposizione in tre forze

Decomponiamo poi $\overrightarrow{F}'$ in $\overrightarrow{F_2}$ e $\overrightarrow{F_3}$ applicate in A_2 e A_3. Ecco che abbiamo costruito tre forze $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$, $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$, $(\overrightarrow{F_3}, A_3)$ equivalenti a $\overrightarrow{F}$, che sono univocamente determinate. Se A è interno al triangolo $A_1A_2A_3$ le tre forze avranno lo stesso verso.
Per quanto riguarda i moduli possiamo dire, per quanto visto prima, che

$$F_1 = \frac{AA'}{A_1A'}F\,.$$

Indicando ora con T_1 e T_2 le aree rispettivamente dei triangoli AA_2A_3 e $A_1A_2A_3$, h e h_1 le loro altezze relative a A_2A_3, $\alpha = \widehat{A_1A'A_2}$, si ha

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{AA'A_2A_3 \sin\alpha}{A_1A'A_2A_3 \sin\alpha}\, F = \frac{A_2A_3h_1}{A_2A_3h}\, F = \frac{T_1}{T}\, F$$

e analogamente

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{T_2}{T}\, F \qquad \overrightarrow{F_3} = \frac{T_3}{T}\, F\,,$$

essendo T_2 e T_3 rispettivamente le aree dei triangoli AA_1A_3 e AA_1A_2.

3.3 Baricentri

I pesi dei singoli punti materiali di cui è formato un corpo costituiscono un sistema di forze parallele alla verticale, applicate ai punti stessi, il cui centro è detto **baricentro** del corpo, che indichiamo con la lettera **G**. Il peso del corpo è una forza che si immagina, di solito, applicata nel baricentro, però può essere applicata in qualunque altro punto della sua linea d'azione, che è la verticale passante per il baricentro stesso. Perciò non è esatto dire che il baricentro è il punto in cui si può applicare il peso di un corpo, perchè i punti che godono di questa proprietà sono infiniti. Il baricentro va quindi definito come centro delle forze parallele, così da non avere alcuna ambiguità.
Sia P_s un punto generico del corpo, π_s il suo peso e N il numero di punti che compongono il corpo. Dall'equazione (3.4), sostituendo π_s ad F_s e P_s al posto di A_s, si ottiene

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^{N} \pi_s (P_s - O)}{\sum_{s=1}^{N} \pi_s}\,.$$

Ora, ricordando che il peso di un corpo è dato dal prodotto della sua massa per l'accelerazione di gravità g, indicando con m_s la massa di un punto P_s e $m = \sum_{s=1}^{N} m_s$ la massa totale del corpo, si ha

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s g (P_s - O)}{\sum_{s=1}^{N} m_s g} = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s (P_s - O)}{m}\,.$$

Considerando le singole componenti arriviamo alle **coordinate del baricentro**

$$x_G = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s x_s}{m}, \quad y_G = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s y_s}{m}, \quad z_G = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s z_s}{m}.$$

Supponiamo ora di avere un corpo formato da *infiniti punti*. Conviene fare un ragionamento diverso, considerando la materia non concentrata in punti materiali, ma distribuita con continuità nello spazio occupato dal corpo.
Indichiamo con dv un elemento infinitesimo del corpo e dm la massa contenuta in dv. Si ha che

$$dm = \rho\, dv$$

dove ρ è la *densità* del corpo nel punto P, centro dell'elemento dv.
La massa m del corpo vale poi la somma delle masse infinitesime dm e, indicando con V la regione dello spazio $\mathbb{R}^3$ occupata dal corpo, si ha quindi

$$m = \int_V \rho\, dv.$$

La formula del baricentro diventa perciò

$$G - O = \frac{\int_V \rho(P-O)dv}{\int_V \rho\, dv} = \frac{\int_V \rho(P-O)dv}{m}$$

e, per componenti, troviamo le coordinate del baricentro di un corpo costituito da infiniti punti con distribuzione continua di materia:

$$x_G = \frac{\int_V \rho\, x\, dv}{\int_V \rho\, dv}, \qquad y_G = \frac{\int_V \rho\, y\, dv}{\int_V \rho\, dv}, \qquad z_G = \frac{\int_V \rho\, z\, dv}{\int_V \rho\, dv} \tag{3.5}$$

Se consideriamo il caso particolare di un corpo *omogeneo*, cioè con densità costante, indicando con v il volume della regione V, si ha innanzitutto $m = \rho \int_V dv = \rho\, v$. L'espressione del baricentro diventa allora

$$G - O = \frac{\int_V (P-O)dv}{v}$$

e per le sue coordinate

$$G := \begin{cases} x_G = \dfrac{\int_V x\,dv}{v} \\ \\ y_G = \dfrac{\int_V y\,dv}{v} \\ \\ z_G = \dfrac{\int_V z\,dv}{v} \end{cases} \tag{3.6}$$

È interessante notare come il baricentro di un corpo omogeneo non dipenda dalla sua densità, ma solo dalla forma e dimensioni o, più brevemente, dal suo volume.

Consideriamo ora il caso particolare di un corpo (come per esempio un filo o un tubicino molto sottile) che abbia due dimensioni molto piccole rispetto alla terza, in modo da poterlo assimilare a una linea l. Lo chiameremo, per brevità, *corpo filiforme*. Dividiamo la linea l in elementi ds, ognuno dei quali ha massa dm e *densità lineare* ρ_1, definita come rapporto tra la massa dm e ds, cioè

$$dm = \rho_1 ds\,.$$

Quindi la massa complessiva della linea è

$$m = \int_l \rho_1 ds\,,$$

e per il baricentro si ottiene l'espressione

$$G - O = \frac{\int_l \rho_1 (P-O) ds}{\int_l \rho_1 ds} = \frac{\int_l \rho_1 (P-O)}{m}\,. \tag{3.7}$$

Le coordinate del baricentro sono analoghe alle (3.6), con la sostituzione di ρ_1 al posto di ρ e dell'integrale di linea al posto dell'integrale di volume.

Nel caso di un corpo filiforme *omogeneo* nella (3.7) scompare ρ_1 e si ottiene il **baricentro della linea** l:

$$G - O = \frac{\int_l (P-O) ds}{l}. \tag{3.8}$$

Consideriamo infine un corpo (come per esempio un foglio di carta o una lamina sottile) in cui una dimensione è trascurabile rispetto alle altre due, così da poter essere cosiderata una superficie σ che, per semplicità, supporremo piana, a cui diamo il nome di *corpo laminare*. Dividiamo σ in elementi $d\sigma$, e indichiamo con ρ_2 la *densità superficiale*, definita dal rapporto tra dm e $d\sigma$. Ragionando come nei casi precedenti si ricava

$$m = \int_\sigma \rho_2 d\sigma$$

e per quanto riguarda il baricenro

$$G - O = \frac{\int_\sigma \rho_2 (P-O) d\sigma}{\int_\sigma \rho_2 d\sigma} = \frac{\int_\sigma \rho_2 (P-O) d\sigma}{m}$$

Le coordinate di G sono analoghe alle (3.6) con l'integrale di volume sostituito dall'integrale di superficie.
Se la superficie è *omogenea* in quest'ultima scompare ρ_2 e si ottiene il **baricentro della superficie** σ:

$$G - O = \frac{\int_\sigma (P-O) d\sigma}{\sigma} . \tag{3.9}$$

Se poi il calcolo di alcuni integrali risultasse troppo complicato ci sono delle proprietà del baricentro che ci permettono di determinarlo con altri metodi. Vale intanto il seguente

Teorema 3.2. *Se un corpo di volume V è suddiviso in due parti rispettivamente di volumi V_1 e V_2, di masse m_1 e m_2 e di baricentri G_1 e G_2, allora il baricentro del corpo G è il baricentro delle due masse m_1 e m_2 concentrate nei punti G_1 e G_2.*

Dimostrazione. Supponendo i punti del volume V_1 quelli per cui s varia da 1 a $r-1$ e quelli del volume V_2 per cui s varia da r a N, si ha allora

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s (P_s - O)}{m} = \frac{\sum_{s=1}^{r-1} m_s (P_s - O) + \sum_{s=r}^{N} m_s (P_s - O)}{m} =$$

$$= \frac{m_1 \frac{\sum_{s=1}^{r-1} m_s (P_s - O)}{m_1} + m_2 \frac{\sum_{s=r}^{N} m_s (P_s - O)}{m_2}}{m} = \frac{m_1 (G_1 - O) + m_2 (G_2 - O)}{m} \tag{3.10}$$

□

Una conseguenza immediata di questo teorema è che *se il corpo ha un piano di simmetria geometrico e materiale h, allora il baricentro giace in questo piano.*

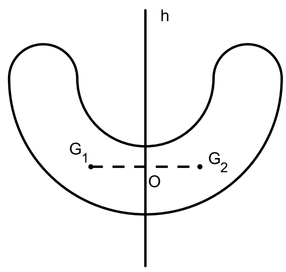

Figura 3.5: corpo con baricentro O sul piano di simmetria h

Si ottengono infatti due volumi V_1 e V_2 simmetrici, quindi di uguale massa $m/2$, e con baricentri G_1 e G_2, anch'essi simmetrici. Chiamando O l' intersezione del segmento G_1G_2 con h, si avrà $G_1 - O = -(G_2 - O)$ quindi, per la (3.10) si ha

$$G - O = 0$$

che ci dice che il baricentro coincide con il punto O, ed è quindi sul piano di simmetria.

3.3.1 Alcune applicazioni

Come applicazione di questi ultimi teoremi vediamo qual è il baricentro di alcuni corpi omogenei.

- il baricentro di una *sfera omogenea* è il suo centro stesso.
- il baricentro di un'*ellissoide omogeneo* è il suo centro, intersezione dei tre piani diametrali ortogonali, che sono per l'ellissoide piani di simmetria.

- il baricentro di un *triangolo omogeneo* è l'intersezione delle tre mediane relative ai lati.

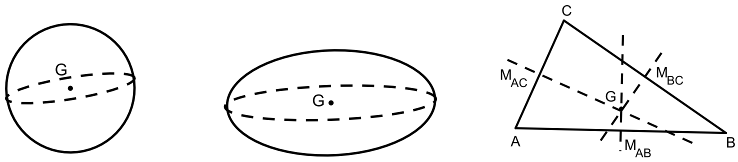

Figura 3.6: baricentri di una sfera, di un ellissoide e di un triangolo.

- il baricentro di un *arco di circonferenza omogeneo* di apertura α e di lunghezza l è un esempio un po' più complesso rispetto ai precedenti. Studiamolo in maniera più approfondita andando a calcolare le sue coordinate.

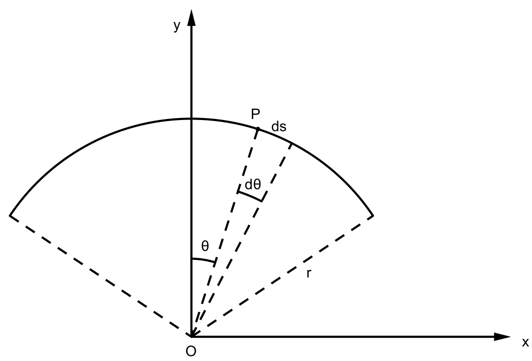

Figura 3.7: arco di circonferenza.

Scegliamo il sistema di assi in modo che la sua origine coincida con il centro del cerchio a cui l'arco appartiene, l'asse y sia la bisettrice dell'arco e l'asse x sia sul piano dell'arco stesso, come in Figura 3.7.
Il baricentro, essendo la *curva* considerata *piana*, giacerà anch'esso sul piano xy. Essendo inoltre l'asse y asse di simmetria sarà

$$x_G = 0\,.$$

Per la (3.8) abbiamo

$$y_G = \frac{\int_l y\,ds}{l} \tag{3.11}$$

Sia ora r il raggio dell'arco, ds un suo elemento infinitesimo, θ l'angolo formato dal raggio col generico PO con l'asse y, $d\theta$ l'angolo al centro di ds e α l'angolo al centro di l. Si ha quindi

$$l = r\alpha\,, \quad ds = rd\theta\,.$$

La componente y del punto P sarà data invece da

$$y = r\cos\theta\,.$$

Andando poi a sostituire nella (3.11) otteniamo

$$y_G = \frac{1}{r\alpha}\,r^2\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos\theta d\theta = \frac{r}{\alpha}[\sin\theta]_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{2r}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Nel caso particolare di una semicirconferenza, essendo $\alpha = \pi$, le coordinate di G diventano

$$x_G = 0\,, \quad y_G = \frac{2r}{\pi}\,.$$

3.4 Analogia tra composizione delle forze e composizione degli stati cinetici

Sistemi meccanici di particolare interesse sono i cosiddetti *corpi rigidi*, per i quali la distanza tra due qualunque punti è costante nel tempo. Nell'ambito della Cinematica vengono studiati gli stati cinetici di un corpo rigido e in questo paragrafo esaminiamo le strette analogie tra la composizione degli stati cinetici e la composizione delle forze (per approfondimenti si veda [2]).

Definizione 3.3. *Si dice che un corpo rigido passa, in un certo istante, per uno stato cinetico di traslazione se, in quell'istante, tutti i punti hanno la stessa velocità.*

Definizione 3.4. *Si dice che un corpo rigido passa, in un certo istante, per uno stato cinetico di rotazione se, in quell'istante, la distribuzione delle velocità per i punti del corpo avviene come se il corpo ruotasse intorno a un determinato asse (asse istantaneo di rotazione dello stato cinetico).*

Si ha che la velocità $\vec{v}(P)$ dei punti P di un corpo rigido nell'istante in cui passa per uno stato cinetico di rotazione è il momento rispetto al punto di un vettore applicato $(\vec{\omega}, O)$ indipendente da P, ossia

$$\vec{v}(P) = \frac{dP}{dt} = \vec{\omega} \times (P - O)$$

con $\vec{\omega}$ che è il vettore velocità angolare istantanea, mentre O è un punto dell'asse istantaneo di rotazione, che risulta essere una retta passante per O e parallela a $\vec{\omega}$.
Per quanto riguarda invece lo stato cinetico di traslazione si ha il seguente

Teorema 3.5. *Due stati cinetici di rotazione con assi istantanei paralleli e velocità angolari uguali e di senso opposto si compongono in uno stato cinetico di traslazione in direzione normale al piano degli assi.*

Dimostrazione. Siano $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$ e $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}$ le due velocità angolari e O_1 e O_2 i punti sugli assi istantanei paralleli di rotazione. Si ha

$$\vec{v}_1(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1) \ , \quad \vec{v}_2(P) = -\vec{\omega} \times (P - O_2)$$

così da avere

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1) - \vec{\omega} \times (P - O_2) = \vec{\omega} \times (O_2 - O_1) \ .$$

Quest'ultimo membro non dipende da P, quindi $\vec{v}(P)$ è uno stato cinetico di traslazione di direzione normale a $\vec{\omega}$ e quindi ai due assi. □

Detto questo si può definire uno stato cinetico di rotazione attraverso un vettore applicato analogo ad una forza, mentre quello di traslazione attraverso un sistema di vettori applicati analoghi a una coppia. Da questo si riesce a comprendere bene l'analogia che c'è tra la composizione degli stati cinetici

e quella delle forze.
Ovviamente, come per le forze, anche per i vettori applicati che rappresentano gli stati cinetici si possono definire vettore e momento risultante: basta infatti sostituire le forze con i vettori applicati all'interno delle due definizioni.
Si ha inoltre che, come per i sistemi di forze, due sistemi di stati cinetici rappresentati da vettori applicati si dicono equivalenti quando hanno uguale vettore e uguale momento risultante rispetto allo stesso punto. In questo caso la velocità in ogni punto di un corpo rigido, ottenuta componendo gli stati cinetici del primo sistema, è identica alla velocità che, nello stesso punto, si ottiene componendo gli stati cinetici del secondo. Questo perchè le due velocità non sono altro che il momento, rispetto allo stesso punto, di sistemi di vettori applicati equivalenti.
Per concludere l'analogia sui sistemi di forze è opportuno introdurre un terzo tipo di stato cinetico, ovvero lo *stato cinetico elicoidale*, dato dalla composizione di uno stato di traslazione con uno stato di rotazione, con velocità di traslazione parallela all'asse della rotazione. Inoltre, come un sistema di forze è equivalente ad una forza e ad una coppia con momento parallelo alla forza, ogni sistema di stati cinetici risulta equivalente alla somma tra uno stato cinetico di rotazione e uno stato cinetico di traslazione in direzione parallela all'asse istantaneo di rotazione ([1]), ovvero ad uno stato cinetico elicoidale (per la dimostrazione di questo importante risultato si veda di nuovo [2]).
Introducendo infine un invariante analogo a quello definito per i sistemi di forze (si veda Definizione 2.6)

$$I = \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{v}(P)\,,$$

si può dimostrare il Teorema di Mozzi: *componendo qualunque sistema di stati cinetici, si ottiene sempre uno stato cinetico elicoidale, che può ridursi a uno stato cinetico di traslazione se è nullo il vettore risultante, oppure a uno stato cinetico di rotazione se è nullo l'invariante, ma non lo è il vettore risultante.*

[1] L'asse di Mozzi (1763-1813) dello stato cinetico elicoidale che ne consegue corrisponde all'asse centrale di un sistema di forze.

Bibliografia

[1] C.Agostinelli, A.Pignedoli - *Meccanica Razionale* - Zanichelli, Bologna 1970.

[2] D.Graffi - *Elementi di Meccanica Razionale* - Patron, Bologna 1973.

[3] S.Graffi, Appunti dalle lezioni di Fisica Matematica II - http://www.dm.unibo.it/fismat/didattica/html.

[4] T.Levi Civita, U.Amaldi - *Lezioni di meccanica razionale* vol.I - Zanichelli, Bologna 1948.

Ringraziamenti

Comincio col ringraziare la professoressa Caliceti, per la sua disponibilità e per l'aiuto che mi ha dato durante questo lavoro.
Ringrazio la mia famiglia, mamma, babbo e Simone, che mi ha incoraggiato e sostenuto durante questo mio percorso universitario e che continuerà sicuramente ad appoggiarmi nelle scelte della mia vita.
Un ringraziamento particolare a Timmy che mi è sempre stato vicino, nei momenti belli e in quelli brutti, che mi ha dato modo di non lasciarmi mai abbattere dai piccoli problemi che si incontrano giorno dopo giorno, che ha sempre creduto in me e che, così facendo, mi ha fatto acquisire fiducia in me stessa.
Non mi scordo degli amici, tutti, pendolari e non, che hanno sopportato i miei sbalzi d'umore pre-esame e condiviso con me i traguardi che ho conquistato.
E infine un grazie ai miei compagni di corso, che mi hanno sostenuto durante questo percorso.