

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**SINGOLARITÀ DI CURVE PIANE:
PARAMETRIZZAZIONI E
RISOLUZIONI**

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA MIGLIORINI

Presentata da:
CLAUDIO GAMBELLA

II Sessione
Anno Accademico 2009/2010

*Per le piccole cose che abbiamo condiviso
insieme giorno dopo giorno.
A Diego, Enrico e Vale*

Indice

Introduzione	iii
1 Nozioni sulle curve piane	1
1.1 Definizione di curva piana	1
1.1.1 Equazione di una curva: richiami e definizioni	1
1.1.2 Parametrizzazione di una curva piana	2
1.2 Singolarità di una curva	3
1.3 Numero di intersezione tra una curva generica ed una retta . . .	3
1.4 Germe di due funzioni o di due sottoinsiemi in un punto . . .	5
1.5 Altri risultati utili	6
2 Il teorema di Puiseux	11
2.1 Il teorema di Puiseux	11
2.2 Serie di potenze convergenti	16
2.3 Curve, rami, molteplicità e tangenti	25
2.3.1 Puntualizzazioni sulla definizione di curva e ramo . . .	25
2.3.2 Molteplicità e retta tangente ad una curva in O	28
3 Risoluzioni	33
3.1 Caratteristica di Puiseux	33
3.2 Scoppiamento	35
3.3 Risoluzione di singolarità	39
3.4 Geometria della risoluzione	43
3.5 Punti infinitamente vicini	49

3.5.1 Relazione di prossimità 50

Bibliografia **57**

Introduzione

In questo elaborato si studiano particolari sottoinsiemi del piano complesso \mathbb{C}^2 , le *curve piane*: una curva piana $C := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$ è il luogo degli zeri di un polinomio o di una serie intera di potenze convergente in due indeterminate.

La prima questione che si solleva è quella di stabilire se data una curva piana sia sempre possibile trovarne una parametrizzazione: in altre parole, ci si chiede se esistano ϕ e ψ in $\mathbb{C}[t]$ o $\mathbb{C}\{t\}$ per cui i punti (x, y) di C siano descritti, nell'intorno di un punto prefissato, da $x = \phi(t), y = \psi(t)$.

La risposta affermativa viene data dal teorema di Puiseux. Esso afferma che ogni curva passante per l'origine ammette una parametrizzazione della forma $x = t^n, y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r$ e che la serie che definisce y è convergente.

Tale risultato si rivela utile anche nello studio dei *punti singolari* della curva. Se f è l'equazione della curva C , un punto P di C si dice punto singolare di C se $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

La seconda questione che si pone riguarda la desingularizzazione di una curva singolare. In questo problema gioca un ruolo fondamentale lo scoppimento di una superficie complessa in un punto: se si scoppia un numero finito di volte una superficie con centro un punto singolare di una curva, la *trasformata propria* della curva diventa non singolare. In tali condizioni, si dice che la singolarità è stata *risolta*.

Spostando l'attenzione su alcune curve notevoli che appaiono nello scoppimento, si dà la nozione di *buona risoluzione* di una singolarità. Il teorema 3.4.4. stabilisce che applicando un numero finito di scoppimenti si ottiene

sempre una buona risoluzione e da tali scoppiamenti si ricavano informazioni per descrivere il punto singolare di partenza. Un efficace modo per presentarle è la matrice di prossimità.

Capitolo 1

Nozioni sulle curve piane

1.1 Definizione di curva piana

In questo lavoro con il termine *curva piana* si indica un sottoinsieme del piano complesso \mathbb{C}^2 che soddisfa un'equazione $f(x, y) = 0$.

L'espressione f può essere un polinomio a coefficienti in \mathbb{C} oppure una serie intera di potenze formali in \mathbb{C} .

Si considereranno sempre curve passanti per $O = (0, 0)$.

La definizione di curva piana verrà in seguito resa più precisa: intanto è bene concentrare l'attenzione sull'espressione f .

1.1.1 Equazione di una curva: richiami e definizioni

Se $f = \sum_{0 \leq i, j; i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j$ è un polinomio, il *grado* di f , d , è il più grande intero per cui $a_{\bar{i}\bar{j}} \neq 0$ con $\bar{i} + \bar{j} = d$.

Nel caso in cui $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$, $f = \sum_{r, s=0}^{\infty} a_{rs} x^r y^s$ con $a_{rs} \in \mathbb{C}$, si definisce *ordine di f* , indicato con $\omega(f)$, il più piccolo intero n per cui $a_{\bar{r}\bar{s}} \neq 0$ con $\bar{r} + \bar{s} = n$.

Nell'anello delle serie di potenze formali in due variabili hanno particolare importanza le serie convergenti: se esistono due numeri reali positivi R, S per cui la serie $\sum_{r, s=0}^{\infty} |a_{rs}| |x|^r |y|^s$, $x, y \in \mathbb{C}$, $|x| < R$, $|y| < S$ è convergen-

te allora la serie $\sum_{r,s=0}^{\infty} a_{rs}x^r y^s$ si dice *convergente* nella regione di piano $|x| < R, |y| < S$ e la funzione f è *analitica* in tale insieme. La condizione si realizza se e solo se $|a_{rs}|R^r S^s$ è limitato $\forall r, s$.

Si osserva che la convergenza è una condizione necessaria affinché la serie possa definire una curva: infatti, se f non fosse convergente, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{C}^2$ si avrebbe che $f(\bar{x}, \bar{y})$ non è un numero complesso, quindi in particolare non può essere 0.

Tali serie costituiscono il sottoanello $\mathbb{C}\{x, y\}$ di $C[[x, y]]$; gli elementi invertibili di tali anelli sono le serie di ordine nullo.

Per funzioni definite su aperti connessi la sviuppabilità in serie è equivalente alla nozione di olomorfia, cioè la derivabilità nel senso del campo considerato.

Nel seguito si avrà l'esigenza di costruire una serie di potenze formali termine a termine: ci si chiede dunque in quali condizioni una successione di polinomi definisce una serie intera di potenze formali.

Definizione 1.1.

Sia $\{f_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di polinomi per cui $\forall n \exists k_n$ tale che il coefficiente a_{kn} di t^n in $f_k(t)$ è costante per $k > k_n$.

Tali coefficienti definiscono una serie di potenze formali $f_{\infty}(t)$: si dice che f_k converge a $f_{\infty}(t)$ in senso m_t -adico.

1.1.2 Parametrizzazione di una curva piana

Fornire un'equazione non è l'unico modo per presentare una curva piana. Dato un parametro $t \in C$, i punti (x, y) di una curva C si possono ottenere tramite opportune $\phi, \psi \in \mathbb{C}[t]$ o $\mathbb{C}\{t\}$ per cui $x = \phi(t), y = \psi(t)$.

Con una notazione più sintetica, si può pensare alla parametrizzazione come ad un'unica mappa $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tale che $\gamma(t) = (\phi(t), \psi(t))$ e $\gamma(0) = O$.

Una curva ammette diverse parametrizzazioni e ci sono ragioni per cui preferirne alcune rispetto ad altre.

Si consideri ad esempio la curva $y^2 - x = 0$: essa ammette le parametrizzazioni $x = t^2, y = t$ e, per $t = u^2, x = u^4, y = u^2$.

Visto che nella seconda parametrizzazione ogni punto viene descritto da due valori di u , si ritiene la prima migliore.

Definizione 1.2.

Una parametrizzazione $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ si dice *buona* se la mappa $\gamma : t \mapsto (\phi(t), \psi(t))$ è iniettiva per $|t| < \epsilon$ per un ϵ opportuno.

In altre parole, le buone parametrizzazioni sono tali per cui i punti della curva abbastanza vicini a O sono individuati da un unico valore del parametro.

1.2 Singolarità di una curva

Sia C una curva piana di equazione F .

Definizione 1.3.

Sia $P = (x_0, y_0) \in C$.

Se $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ allora P si dice un *punto singolare*. In caso contrario P è *liscio* o *non singolare*.

La curva C si dice *singolare* se è dotata di punti singolari, altrimenti è *liscia*.

Nel caso in cui il punto sia liscio si dice che la *retta tangente* a C in P è quella di equazione $(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Nel capitolo seguente si vedrà come sia possibile dare una nozione di tangenza anche per punti singolari, che sarà poi quella usata nello studio delle singolarità.

1.3 Numero di intersezione tra una curva generica ed una retta

Si consideri una retta L per P e un punto $Q = (x_1, y_1)$ su di essa.

Allora L ammette una parametrizzazione $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$.

Si consideri il polinomio in t $F(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0))$.

Si può ora definire il *numero di intersezione* $(L.C)_P$: se $P \in C$ esso è la molteplicità di $t = 0$ in f , mentre in caso contrario si pone $(L.C)_P = 0$.

Esempio 1.1.

Sia C la curva piana di equazione $y^2 - x^2 - x^3 = 0$.

Sia L la retta per $P = (0, 0)$ e $Q = (1, 2)$ descritta dalla parametrizzazione $x = t, y = 2t$.

Si ha allora che $F(t) = 4t^2 - t^2 - t^3 = t^2(3 - t)$.

Pertanto $(L.C)_P = 2$.

Definizione 1.4.

Siano L una retta, C una curva e un punto $P \in L \cap C$.

Se $(L.C)_P = 1$ si dice che L è *trasversale* a C nel punto P .

Osservazione 1.

Se L è trasversale a C in P allora P è un punto non singolare di C .

Dimostrazione.

Con le notazioni precedenti, se $(L.C)_P = 1$ allora la molteplicità di t in $F(t)$ è 1.

Ciò significa che nell'espressione F compare almeno un termine di primo grado in x o y : pertanto, in una delle due derivate $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ dev'essere presente un termine costante e da questo si ha che $(\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)) \neq (0, 0)$. \square

Il numero di intersezione tra una curva e una retta che non sia tangente ad essa può essere visto geometricamente: si cerca di deformare la curva in modo che intersechi la retta in punti distinti non singolari in cui curva e retta ammettono tangenti diverse.

Esempio 1.2.

Si consideri la curva $C : y = x^2$; la retta $L : y = 0$ è tangente a C in $O = (0, 0)$.

Traslando la parabola in basso si ottiene la curva $y = x^2 - \epsilon^2$ che interseca la retta nei due punti $(\epsilon, 0)$ e $(-\epsilon, 0)$, in accordo con il fatto che $(L.C)_O = 2$.

Osservazione 2.

Il numero di intersezione è simmetrico rispetto alle curve di cui si calcola, per cui si può determinare anche come ordine della serie ottenuta sostituendo la parametrizzazione della curva nell'equazione della retta.

1.4 Germe di due funzioni o di due sottoinsiemi in un punto

Nello studio delle singolarità di una curva ci si concentra su un intorno piccolo a piacere del punto singolare. A tale scopo è utile introdurre la nozione di germe di due funzioni o di due sottoinsiemi in un punto.

Definizione 1.5.

Sia $x_0 \in \mathbb{C}^2$.

Due funzioni $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ed $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definite su intorni aperti U_1 ed U_2 di x_0 *definiscono lo stesso germe in x_0* se $\exists U \subset U_1 \cap U_2$, $U \ni x_0$ per cui $f_1|_U = f_2|_U$.

Il *germe di funzioni in x_0* è la classe di equivalenza delle funzioni definenti lo stesso germe in x_0 .

In maniera analoga due sottoinsiemi $X_1 \subset U_1$ e $X_2 \subset U_2$, $X_1, X_2 \ni x_0$ *definiscono lo stesso germe in x_0* se $\exists U \subset U_1 \cap U_2$, $U \ni x_0$ per cui $X_1 \cap U = X_2 \cap U$.

Si ha infine che il *germe di sottoinsiemi in x_0* è la classe di equivalenza dei sottoinsiemi definenti lo stesso germe in x_0 .

Si userà il termine germe per assimilare funzioni o curve che presentano lo stesso comportamento vicino al punto da studiare.

Per funzioni olomorfe si riporta il seguente risultato.

Proposizione 1.4.1.

Siano f_1 ed f_2 funzioni oloedriche su U_1 ed U_2 intorno aperti connessi di O in \mathbb{C}^2 .

Allora f_1 ed f_2 definiscono lo stesso germe in O se e solo se lo sviluppo in serie di potenze di f_1 ed f_2 è lo stesso.

Dimostrazione.

\Leftarrow) Vero per $U = U_1 \cap U_2$.

\Rightarrow) Per ipotesi $\exists U \subset U_1 \cap U_2$, $U \ni x_0$ per cui $f_1|_U = f_2|_U$. Inoltre poichè f_1 ed f_2 sono oloedriche $\exists R_1, S_1 > 0$, $R_2, S_2 > 0$ tali che :

$$f_1(x, y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} a_{rs} x^r y^s \quad \text{per } |x| < R_1, |y| < S_1$$

$$f_2(x, y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} b_{rs} x^r y^s \quad \text{per } |x| < R_2, |y| < S_2$$

Sia R tale che $D(0, R) \subset U$, $R < R_1$, $R < S_1$, $R < R_2$, $R < S_2$.

Dunque per $|x| < R$, $|y| < S$ si ha $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ e quindi

$\sum_{r,s=0}^{\infty} (a_{rs} - b_{rs}) x^r y^s = 0$ su $D(0, R)$: pertanto essa è la serie nulla per il principio del prolungamento analitico.

In conclusione $a_{rs} = b_{rs} \forall r, s$.

□

1.5 Altri risultati utili

Prima di procedere allo studio delle singolarità di una curva piana è bene puntualizzare alcuni risultati importanti.

Teorema 1.5.1 (della funzione inversa).

Sia U un intorno di $O = (0, 0) \in \mathbb{C}^n$; sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa e con matrice jacobiana invertibile in O .

Allora esiste un intorno $U_1 \subset U$ di O per cui $f|_{U_1}$ è una biezione di U_1 con un intorno V_1 di $f(O)$ e la sua inversa $f^{-1} : V_1 \rightarrow U_1$ è ancora olomorfa.

Teorema 1.5.2 (della funzione implicita).

Siano f_1, \dots, f_n funzioni nelle variabili $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ olomorfe attorno ad O tali che $f_j(O) = 0 \forall j$ e la matrice $J_y f := \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(O) \right)$ sia invertibile.

Allora, in un opportuno intorno di O , esistono, uniche, n funzioni h_j in x_1, \dots, x_m con $h_j(0, \dots, 0) = 0$ tali che $f_j = 0$ per ogni j se e solo se $y_j = h_j(x)$ per ogni j .

In particolare, se $f(x, y)$ è tale che $f(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(0, 0) \neq 0$, c'è un'unica funzione h di x con $h(0) = 0$ per cui, in un intorno di $(0, 0)$, il luogo degli zeri di f è il grafico di h .

Lemma 1.5.3.

Sia $f \in \mathbb{C}\{x\}$, $\omega(f) = n$.

Allora $\exists g \in \mathbb{C}\{x\}$ tale che $g^n = f$.

Dimostrazione.

Poichè $f \in \mathbb{C}\{x\}$, $\exists N$ intorno di o tale che $\forall x \in N$ $f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$

Dunque si ha $f(x) = x^n l(x)$ con l serie convergente.

Visto che $l(0) = a_n \neq 0$, in un intorno H' di a_n è ben definita ed olomorfa r , una delle n funzioni radici n -esime in \mathbb{C} .

Si consideri ora $H = l^{-1}(H')$: esso è un intorno di 0 perchè l è continua e $H' \ni a_n = l(0)$.

La funzione $g(x) := xr(l(x))$ è quindi olomorfa su H e $g^n = f$. □

Altre nozioni utili che serviranno in seguito sono quelle di risultante e discriminante per polinomi: esse vengono presentate in $A[x]$, con A dominio a fattorizzazione unica.

Definizione 1.6.

Dati $f, g \in A[x]$ polinomi di grado rispettivamente m ed n , si considerano gli $m + n$ polinomi di grado $m + n - 1$

$$x^{n-s-1}f(x) \quad (0 \leq s < n), \quad x^{m-r-1}g(x) \quad (0 \leq r < m).$$

Il determinante della matrice dei loro coefficienti si dice il *risultante* di f e g e si denota con $R(f, g)$.

Definizione 1.7.

Dato $f \in A[x]$ con coefficiente direttore a_n , $\frac{1}{a_n}R(f, f')$ si dice il *discriminante* di f e si denota con $D(f)$.

Lemma 1.5.4.

$D(f) = 0$ se e solo se f presenta un fattore ripetuto nella sua scomposizione.

Esempio 1.3.

Sia $a(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \in \mathbb{C}\{x\}$ e si considera il polinomio in $\mathbb{C}\{x\}[y]$

$f(x, y) = y^3 - 2a(x)y^2 + a^2(x)y$ e se ne calcola il suo discriminante.

Poichè $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 4a(x)y + a^2(x)$ si ha

$$D(f) = R\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2a(x) & a^2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a(x) & a^2(x) & 0 \\ 3 & -4a(x) & a^2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4a(x) & a^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4a(x) & a^2(x) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a^2(x) \begin{vmatrix} 1 & -2a(x) & a^2(x) & 0 \\ 0 & 1 & -2a(x) & a^2(x) \\ 3 & -4a(x) & a^2(x) & 0 \\ 0 & 3 & -4a(x) & a^2(x) \end{vmatrix} = \\ &= a^4(x) \left(\begin{vmatrix} -4a(x) & a^2(x) \\ 3 & -4a(x) \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} -2a(x) & a^2(x) \\ 3 & -4a(x) \end{vmatrix} \right) + \\ &+ a^4(x) \left(\begin{vmatrix} 1 & -2a(x) \\ -4a(x) & a^2(x) \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2a(x) & a^2(x) \\ 1 & -2a(x) \end{vmatrix} \right) = \\ &= a^4(x) (16a^2(x) + 9a^2(x) - 24a^2(x) - 3a^2(x) + a^2(x) - 8a^2(x) + 12a^2(x) - 3a^2(x)) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Infatti:

$$f(x, y) = y(y - a(x))^2.$$

Capitolo 2

Il teorema di Puiseux

Il teorema stabilisce la possibilità di trovare una soluzione di un'equazione in x e y dove la y sia espressa come serie di potenze frazionarie della x . Questo è il primo passo per studiare le singolarità di una curva piana.

2.1 Il teorema di Puiseux

Teorema 2.1.1 (Puiseux).

Sia $f \in \mathbb{C}[x, y]$ con $f(O) = 0$ oppure $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con $\omega(f) > 0$.

Allora l'equazione $f(x, y) = 0$ ammette almeno una soluzione in serie di potenze formali della forma

$$x = t^n, \quad y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 3.

Tale risultato si enuncia spesso dicendo che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce una soluzione in serie di potenze frazionarie $y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^{\frac{r}{n}}$.

Dimostrazione.

Si suppone f serie intera di potenze formali in \mathbb{C} di ordine strettamente positivo; l'eventualità che f sia un polinomio senza termine noto è un caso particolare di questa situazione. La serie f si scrive quindi come $\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s} x^r y^s$.

Ai fini del teorema si può pensare ad f non divisibile per x o per y : se x fosse un fattore di f allora una soluzione dell'equazione sarebbe parametrizzata come $(x, y) = (0, t)$; se invece fosse $f = yg$, con $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ allora una soluzione sarebbe $(x, y) = (t, 0)$.

Si costruisce la serie che dà y un termine per volta, facendo in modo che tale serie di potenze frazionarie in x sostituita ad y in f cancelli i termini dell'equazione in cui compare x elevata a gradi via via maggiori.

Nel piano reale di coordinate (r, s) si contrassegnano con un punto le coppie (r, s) per cui $a_{r,s} \neq 0$. Si configura quindi un insieme di punti nel primo quadrante del piano. Si dice *diagramma di Newton* di f l'involuppo convesso di questi punti; l'unione dei segmenti del bordo del diagramma che non giacciono sugli assi coordinati costituisce invece il *poligono di Newton* di f .

Per quanto detto all'inizio della dimostrazione esistono almeno un punto sull'asse delle r e uno sull'asse delle s tra quelli marcati e si considerano i due punti che costituiscono gli estremi del poligono di Newton di f : essi appartengono alla retta $r + s\alpha = D$, per $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $D \in \mathbb{Z}$.

Detti m_0 l'ordinata del punto sull'asse delle s , cioè l'ordine di $f(0, y)$, a e b i due naturali primi tra loro per cui $\alpha = \frac{a}{b}$, si mostra ora che è possibile determinare $k \in \mathbb{N}$ per cui i punti sulla retta a coordinate intere sono $(la, m_0 - lb)$ con $0 \leq l \leq k$.

Innanzitutto si nota che sfruttando il passaggio della retta per $(0, m_0)$, D si esprime come $\frac{a}{b}m_0$. Inoltre si sa che il punto della retta con $s = 0$ ha ascissa r intera, cioè $m_0 \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$; ciò implica $b \mid am_0 \stackrel{(a,b)=1}{\implies} b \mid m_0 \implies \exists k \in \mathbb{N}$ tale che $m_0 = kb$ e quindi l'estremo del poligono di Newton sull'asse delle r è $(ka, 0)$. I punti a coordinate intere sulla retta sono effettivamente quelli del tipo indicato prima perchè dalla relazione $r + s\frac{a}{b} = m_0 \frac{a}{b}$ si deve avere $a \mid r$ e $b \mid s$.

Si pone ora $y = c_0 x^\alpha (1 + y_1)$, con $c_0 \in \mathbb{C}$ da determinare in seguito. Sostituendo alla y questa espressione nella f , non compaiono potenze di x più basse di $x^{r+s\alpha} = x^D$, che ha per coefficiente $\sum_{l=0}^k a_{la, m_0 - lb} c_0^{m_0 - lb}$. Si pongono infine $u_l = a_{la, m_0 - lb}$ per $0 \leq l \leq k$ e $\Phi(T) = \sum_{l=0}^k u_l T^{k-l}$; si nota in partico-

lare che $a_{la, m_0} = u_0 \neq 0$.

Si procede ora alla determinazione effettiva di y : il problema è trovare un c_0 per cui il coefficiente di x^D scompaia.

Si sceglie una soluzione T_0 dell'equazione $\Phi(T) = 0$ e si pone $c_0 = T_0^{\frac{1}{b}}$: poichè $u_0 \neq 0$, T_0 e di conseguenza c_0 sono diversi da 0. Il motivo per cui interessarsi alle soluzioni di Φ è che il coefficiente di x^C è $c_0^{m_0 - kb} \Phi(c_0^b)$ ed esso è nullo se e solo se $\Phi(T_0) = 0$.

La prima approssimazione per y è quindi $c_0 x^{\frac{a}{b}}$, per cui si pongono $x = x_1^b$ e $y = x_1^a (c_0 + y_1)$ e si sostituiscono in f , che è così divisibile per $x_1^{am_0}$. Dividendo f per questo fattore si ha $f_1(x_1, y_1)$.

Notando che $f_1(0, y_1)$ è $(c_0 + y_1)^{m_0 - kb} \Phi((c_0 + y_1)^b)$, per il suo ordine m_1 vale la relazione $m_1 \leq m_0$: infatti, poichè Φ ha grado k , il primo fattore di $f_1(0, y_1)$ viene moltiplicato per almeno un termine di grado bk producendo un termine di grado m_0 e questo esponente risulta pertanto maggiore o uguale all'ordine m_1 .

All' r -esimo passo si ha che la y è della forma:

$$Y_r = x^{\frac{a_0}{b_0}} (c_0 + x^{\frac{a_2}{b_0 b_1 b_2}} (c_2 + \dots (c_r + y_{r+1}) \dots))$$

Si vuole ora provare che la successione delle Y_r converge in senso m_t -adico alla serie Y_∞ . L'elemento Y_r differisce da Y_{r-1} solo per i coefficienti dei monomi da $x^{\frac{a_r}{b_0 b_1 \dots b_r}}$ in poi quindi l'unica cosa da dimostrare è che esiste un intero n per cui le Y_r sono serie di potenze intere in $x_n = x^{\frac{1}{n}}$. Questo è assicurato se si mostra che $b_r = 1$ da un certo r in poi, ovvero si prova il lemma:

Lemma 2.1.2. *Se $b_r > 1$, allora $m_r > m_{r+1}$.*

Dimostrazione.

Visto che il modo in cui si determinano i b_r non cambia al variare di r è sufficiente dimostrare il lemma nell'unico caso $r = 1$. Procedendo per assurdo si suppone $m_1 = m_0$.

La più piccola potenza di y_1 che compare in $f_1(0, y_1) = (c_0 + y_1)^{m_0 - kb} \Phi((c_0 + y_1)^b)$ è quindi quella di grado m_0 ma, d'altra parte, poichè Φ ha grado k non possono comparire potenze di y_1 maggiori di m_0 . Risulta quindi $f_1(0, y_1) = Ay_1^{m_0}$,

dove A è una costante ed è stato provato che $m_0 = kb$.

Se si pone $z = y_1 + c_0$ si ha l'uguaglianza:

$$\Phi(z^b) = A(z - c_0)^{bk}$$

Visto che $c_0 \neq 0$ il coefficiente di z in $(z - c_0)^{bk}$ è diverso da zero. Se fosse $b > 1$, in Φ comparirebbero termini di grado strettamente più grande di 1, per cui si deve avere $b = 1$. \square

Visto che quanto detto per giustificare che $m_1 \leq m_0$ si può generalizzare nel confronto della generica coppia $(m_r, m_r - 1)$, $(m_r)_{r \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona decrescente, dunque $\exists \bar{r} \in \mathbb{N}$ dal quale la successione è costante e per il lemma ciò significa che $b_r \leq 1 \quad \forall r \geq \bar{r}$; d'altra parte $b_r \geq 1 \quad \forall r$ e quindi $b_r = 1 \quad \forall r \geq \bar{r}$.

La serie Y_∞ così ottenuta è effettivamente la parametrizzazione di y cercata per provare il teorema: infatti al crescere di r la più bassa potenza M_r a cui compare la x in f necessariamente aumenta, per cui la successione M_r tende all'infinito.

Ecco quindi che $f(x, Y_\infty) = 0$. \square

Osservazione 4.

L'ultimo passaggio logico del lemma non si può ripetere in campi di caratteristica prima p . In effetti in questi campi il teorema non è valido.

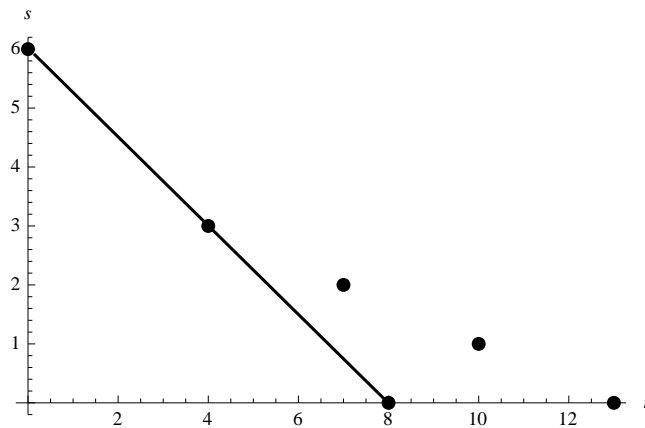
Esempio 2.1.

Si considera l'equazione $f(x, y) = 0$ con

$$f(x, y) = y^6 + x^8 - 9x^7y^2 - 2x^4y^3 - 6x^{10}y - x^{13}$$

Si trova ora una parametrizzazione per la curva luogo degli zeri di f secondo quanto indicato nella dimostrazione del teorema di Puiseux.

Come si può notare dalla figura 2.1, i vertici del poligono di Newton sono i punti $(0, 6)$ e $(8, 0)$ e giacciono sulla retta $r + \frac{4}{3}s - 8 = 0$. Pertanto $\alpha_0 = \frac{4}{3}$, $a_0 = 4$, $b_0 = 3$, $m_0 = 6$ e da $m_0 = k_0 b_0$ si deduce $k_0 = 2$.

Figura 2.1: Il poligono di Newton di f

La retta contiene anche il punto a coordinate intere $(4, 3)$, per cui:

$$\phi(T) = \sum_{l=0}^k u_l T^{k-l} = T^2 - 2T + 1$$

Come T_0 si sceglie 1 e conseguentemente si pone anche $c_0 = 1$.

La prima approssimazione per x e y è dunque

$$\begin{cases} x = x_1^3 \\ y = x_1^4(1 + y_1) \end{cases}$$

Sostituendo in f si ha:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) = & x_1^{24}(1 + y_1)^6 + x_1^2 4_1 - 9x_1^{21} x_1^8 (1 + y_1)^2 - 2x_1^{12} x_1^{12} (1 + y_1)^3 - \\ & - 6x_1^{30} x_1^4 (1 + y_1) - x_1^{39} \end{aligned}$$

Rimuovendo il fattore x_1^{24} si giunge a

$$y_1^6 + 6y_1^5 + 15y_1^4 + 18y_1^3 + 9y_1^2 - 9x_1^5 - 9x_1^5 y_1^2 - 18x_1^5 - 6x_1^1 0_1 - 6x_1^1 0_1 y_1 - x_1^{15}$$

La retta che congiunge i nuovi vertici $(0, 2)$ e $(5, 0)$ del poligono di Newton è

$r + \frac{5}{2}s = 5$. Si ha quindi $\alpha_1 = \frac{5}{2}$, $a_1 = 5$, $b_1 = 2$, $m_1 = 2$, $k_1 = 1$.

$\phi(T) = \sum_{l=0}^1 u_l T^{1-l} = 9T - 9$; $T_1 = 1$, $c_1 = 1$.

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ y_1 = x_2^5(1 + y_2) \end{cases}$$

L'espressione f_2 che si ottiene presenta sia il fattore x_2^{10} che y_2 . Pertanto si deduce $y_2 = 0$ e da $x_1 = x_2^2, y_1 = x_2^5$ si giunge alla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x_2^6 \\ y = x_2^8 + x_2^{13} \end{cases}$$

2.2 Serie di potenze convergenti

Si vuole ora mostrare la convergenza in senso complesso delle soluzioni di $f(x, y) = 0$ ottenute del teorema di Puiseux quando f è olomorfa.

Nel caso particolare in cui $f(0, y)$ abbia ordine 1, cioè $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, il teorema della funzione implicita assicura che le soluzioni siano funzioni olomorfe e quindi analitiche.

Per studiare il caso generale è necessario presentare alcuni risultati che consentono di dedurre informazioni sulle funzioni olomorfe studiando polinomi a loro correlati.

Definizione 2.1.

Sia $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tale che $f(0, y) \neq 0$.

Allora $\exists m \in \mathbb{Z}$ tale che $f(0, y) = y^m A(y)$ dove $A(0) \neq 0$.

In tal caso f si dice *regolare* in y di ordine m .

Teorema 2.2.1 (di preparazione di Weierstrass).

Sia $G \in \mathbb{C}\{x, y\}$ regolare in y di ordine s .

Allora $\exists ! U \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $U(0, 0) \neq 0$ ed esistono, uniche, $A_0, \dots, A_{s-1} \in \mathbb{C}\{x\}$ tali che

$$G(x, y) = U(x, y) \left(y^s + \sum_{r=0}^{s-1} A_r(x) y^r \right)$$

Il polinomio che divide G così ottenuto si dice *polinomio di Weierstrass*. La dimostrazione necessita di un tipo di algoritmo di divisione per serie di potenze convergenti.

Teorema 2.2.2 (di divisione).

Sia $F \in \mathbb{C}\{x, y, \lambda\}$ con $\lambda \in \mathbb{C}^s$ ed F olomorfa in un intorno di $(0, 0, 0)$.

Allora esistono, uniche, $Q \in \mathbb{C}\{x, y, \lambda\}$, $A_i \in \mathbb{C}\{x, \lambda\}$ per $1 \leq i \leq s$ tali che

$$F(x, y, \lambda) = P_s(y, \lambda)Q(x, y, \lambda) + R(x, y, \lambda),$$

dove $P_s(y, \lambda) = y^s + \sum_{i=1}^s \lambda_i y^{s-i}$ ed $R(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^s A_i(x, \lambda)y^{s-i}$.

Dimostrazione.

∃) Da un calcolo diretto si deduce che:

$$P_s(z, \lambda) - P_s(y, \lambda) = (z - y) \left(\sum_{i=1}^s P_{i-1}(z, \lambda) y^{s-i} \right),$$

dunque

$$P_s(z, \lambda) = P_s(y, \lambda) + (z - y) \left(\sum_{i=1}^s P_{i-1}(z, \lambda) y^{s-i} \right),$$

da cui

$$\frac{1}{z - y} = \frac{P_s(y, \lambda)}{(z - y)P_s(y, \lambda)} + \sum_{i=1}^s \frac{P_{i-1}(z, \lambda)}{P_s(z, \lambda)} y^{s-i}$$

Per λ sufficientemente piccolo, anche le radici di $P_s(z, \lambda)$ sono piccole, per cui è possibile scegliere un cammino chiuso C contenente nella regione interna O e su cui non giacciono gli zeri dei denominatori che compaiono nell'ultima espressione.

Di conseguenza, per il teorema della rappresentazione integrale di Cauchy applicato ad F , vista come funzione solamente di y , si ha:

$$F(x, y, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(x, z, \lambda)}{z - y} dz$$

per cui la tesi si ottiene per

$$Q(x, y, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(x, z, \lambda)}{(z - y)P_s(z, \lambda)} dz$$

$$A_i(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{P_{i-1}(z, \lambda)F(x, z, \lambda)}{(P_s(z, \lambda))} dz$$

!) Si suppone che esistano $\tilde{Q} \in \mathbb{C}\{x, y, \lambda\}$, $\tilde{A}_i \in \mathbb{C}\{x, \lambda\}$ per $1 \leq i \leq s$ diversi da Q e dagli A_i .

Di conseguenza si ha un nuovo resto $\tilde{R} \in \mathbb{C}\{x, y, \lambda\}$, $\tilde{R} \neq R$.

Si deve avere: $P_s \mid F - R$, $P_s \mid F - \tilde{R}$. Dunque $P_s \mid R - \tilde{R}$ ma $R - \tilde{R}$ è un polinomio non nullo di grado strettamente minore di s .

□

Dimostrazione del teorema di preparazione di Weierstrass.

Per ipotesi G è regolare di ordine s , per cui il coefficiente di y^s è una costante c non nulla.

Si applica il teorema di divisione a G e ponendo $x = 0$ si ottiene:

$$G(0, y) = P_s(y, \lambda)Q(0, y, \lambda) + \sum_{i=1}^s A_i(0, \lambda)y^{s-i}$$

Per $\lambda = 0$ si ha:

$$G(0, y) = y^s Q(0, y, 0) + \sum_{i=1}^s A_i(0, 0)y^{s-i}$$

Confrontando ora in queste due espressioni di $G(0, y)$ le potenze di y si ha in particolare che $Q(0, 0, 0)$ dev'essere il coefficiente di y^s , cioè c , e dal fatto che G è regolare di ordine s deve risultare $A_i(0, 0) = 0 \forall i$.

Differenziando la prima relazione e ponendo $\lambda = 0$ si ottiene:

$$0 = y^{s-j}Q(0, y, 0) + y^s \frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}(0, y, 0) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j}(0, 0)y^{s-i}$$

Confrontando le potenze di y si deduce che $\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j}(0, 0) = 0$ se $j \neq i$ ed è uguale a $-Q(0, 0, 0) = -c$ per $j = i$.

La matrice $(\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j}(0, 0))_{1 \leq i, j \leq n}$ è dunque invertibile, per cui il teorema della funzione implicita consente di determinare intorno a $(0, 0)$ in modo unico delle funzioni olomorfe $H_j(x)$ tali che $A_i(x, H_1(x), \dots, H_s(x)) = 0$.

Sostituendo $\lambda_j = H_j(x)$ nella relazione espressa dal teorema di divisione si ha:

$$G(x, y) = Q(x, y, H(x))P_s(y, \lambda).$$

Essa è la scomposizione cercata perchè

$$P_s(y, \lambda) = y^s + \sum_{i=1}^s H_i(x)y^{s-i} \text{ con } H_i \in \mathbb{C}\{x\}$$

e $Q(0, 0, 0) = c \neq 0$ □

Questi due risultati consentono di compiere una divisione con resto per serie di potenze formali convergenti.

Corollario 2.2.3.

Siano $F, G \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con G regolare di ordine s in y .

Allora $\exists D \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $C_i \in \mathbb{C}\{y\}$ per $1 \leq i \leq s$ tali che

$$F(x, y) = G(x, y)D(x, y) + \sum_{i=1}^s C_i(y)x^{s-i}$$

Dimostrazione.

Dal teorema di preparazione applicato a G si ha

$$G(x, y) = U(x, y)\left(y^s + \sum_{r=0}^{s-1} A_r(x)y^r\right)$$

con $U(0, 0) \neq 0$.

Dal teorema di divisione applicato ad F con il ruolo di x ed y scambiato si ha invece

$$F(x, y) = P_s(x, \lambda)Q(x, y, \lambda) + \sum_{i=1}^s B_i(y, \lambda)x^{s-i}.$$

Ora, ponendo $\lambda_i = A_{s-i}(x)$ si ottiene

$$P_s(x, A_0(x), \dots, A_s(x)) = U(x, y)^{-1}G(x, y)$$

e quindi si ha l'espressione cercata con $D(x, y) = U(x, y)^{-1}Q(x, y, A(x))$ e $C_i(y) = D_i(y, A(x))$. □

E' ora possibile dare un'importante caratterizzazione dell'anello delle serie di potenze formali convergenti.

Teorema 2.2.4.

L'anello $\mathbb{C}\{x, y\}$ è un dominio a fattorizzazione unica.

Dimostrazione.

E' necessario e sufficiente provare che ogni serie di potenze formali convergente può essere espressa come prodotto di fattori irriducibili e che gli elementi irriducibili che dividono un prodotto dividono almeno uno dei fattori. La seconda condizione è quella che stabilisce l'unicità della fattorizzazione.

Si nota dapprima che $\mathbb{C}\{x\}$ è un dominio a fattorizzazione unica perchè i suoi elementi irriducibili sono x per un invertibile: in maniera diretta si deduce l'unicità della scomposizione.

Il lemma di Gauss, che afferma che l'insieme dei polinomi in un'indeterminata a coefficienti in un anello a fattorizzazione unica è anch'esso a fattorizzazione unica, assicura che $\mathbb{C}\{x\}[y]$ lo sia.

Ora, per mostrare la validità della prima asserzione, si considera $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ regolare in y di ordine s . Per il teorema di preparazione di Weierstrass $\exists U \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $U(0, 0) \neq 0$ ed $\exists g \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ tali che $f = Ug$. g si esprime in modo unico a meno di unità nel prodotto di fattori irriducibili g_i , ciascuno regolare in y di grado s_i con $\sum s_i = s$. Basta ora provare che i g_i sono irriducibili in $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Se fosse possibile scrivere $g_i = hk$, allora per il teorema 2.2.1 applicato ad h e k risulterebbe $g_i = (U_h h')(U_k k') = (U_h U_k) h' k'$ con U_h, U_k unità di $\mathbb{C}\{x, y\}$ e h', k' polinomi monici in $\mathbb{C}\{x\}[y]$. Però g_i è un polinomio di Weierstrass poichè divide g , quindi l'unicità della scomposizione stabilita dal teorema impone che $g_i = h' k'$; g_i è irriducibile in $\mathbb{C}\{x\}[y]$ quindi h' o k' è una costante. Si prova ora che si verifica anche la seconda condizione.

Sia g irriducibile in $\mathbb{C}\{x, y\}$ che divide un prodotto $h_1 h_2$. Grazie al teorema di preparazione di Weierstrass è possibile pensare g come ad un polinomio di Weierstrass di grado s .

Il corollario 2.2.4 fornisce le relazioni:

$$h_1 = gQ_1 + R_1, \quad h_2 = gQ_2 + R_2$$

dove R_1 e R_2 sono polinomi di grado strettamente minore di s .

Poichè $h_1 h_2 = (gQ_1 + R_1)(gQ_2 + R_2) = g(gQ_1 Q_2 + Q_1 R_2 + R_1 Q_2) + R_1 R_2$ si ha che $g \mid h_1 h_2 - R_1 R_2$ e per quanto detto si deduce che g divide $R_1 R_2 \in \mathbb{C}\{x\}[y]$. Visto che g è irriducibile in $\mathbb{C}\{x\}[y]$, dominio a fattorizzazione unica, deve dividere R_1 o R_2 , ma $g \mid h_i - R_i$, dunque $g \mid h_1$ o $g \mid h_2$. \square

Esempio 2.2.

Si prova che il polinomio $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ non è riducibile in $\mathbb{C}[x, y]$ ma si spezza in $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Se fosse riducibile come polinomio dovrebbe risultare $f = g_1 g_2$ con g_1 e $g_2 \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$, $\omega(g_1) = \omega(g_2) = 1$ e $\deg(g_1) + \deg(g_2) = 3$. Per fissare le idee si suppone $\deg(g_1) = 1$.

Poichè il termine di grado 2 in f è $y^2 - x^2$, si deve avere:

$$g_1(x, y) = y - x, \quad g_2(x, y) = y + x + p(x, y)$$

con $p \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$.

Il prodotto $g_1 g_2$ è $y^2 - x^2 + p(x, y)y - p(x, y)x$ e deve risultare uguale ad f . Osservando che p si può scrivere in modo unico come $p_1(x) + yp_2(x, y)$ si impone la relazione:

$$\begin{aligned} (p_1(x) + yp_2(x, y))y - (p_1(x) + yp_2(x, y))x &= -x^3, \text{ cioè} \\ (p_1(x) + yp_2(x, y) - p_2(x, y)x)y - p_1(x)x &= -x^3, \text{ da cui:} \\ p_1(x) + yp_2(x, y) - p_2(x, y)x &= 0 \quad \text{e} \quad p_1(x) = x^2, \text{ quindi:} \\ x^2 + yp_2(x, y) - p_2(x, y)x &= 0 \Rightarrow x^2 = p_2(x, y)(x - y) \end{aligned}$$

Ciò è assurdo perchè non esiste alcun polinomio di grado strettamente positivo diverso da x che divide x^2 .

Se invece si vede $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, poichè $\omega(f) = 2$, risulta:

$$f(x, y) = y^2 - x^2(1 + x) = \left(y + x \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) x^k\right) \left(y - x \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) x^k\right)$$

Grazie al teorema di preparazione di Weierstrass è possibile descrivere in modo esauriente il più semplice tipo di singolarità.

Teorema 2.2.5.

Sia C un curva di equazione $f(x, y) = 0$ con f di ordine 2.

Allora, in un opportuno sistema di coordinate locali in \mathbb{C}^2 , C è data dall'equazione $y = 0$ oppure $y^2 + x^k = 0$ con $k \geq 2$.

Dimostrazione.

Compiendo eventualmente un cambiamento di coordinate lineare, si può supporre f regolare in y di ordine 2.

Per il teorema di preparazione f si scrive come $U(x, y)(y^2 + a(x)y + b(x))$ con $U(0, 0) \neq 0$ per cui l'equazione di C è $y^2 + a(x)y + b(x)$; il cambio di coordinate $x' = x, y' = y + \frac{1}{2}a(x)$ la trasforma in $(y')^2 + b'(x) = 0$.

Ora, se $b' = 0$ allora C è data da $y' = 0$, altrimenti b' ha ordine k per $k \geq 2$: per il lemma 1.5.3 c' è una serie convergente x'' in x per cui $b' = (x'')^k$ e quindi la tesi si ottiene considerando le coordinate (x'', y') . \square

Definizione 2.2.

Il punto $(0, 0)$ di una curva $y^2 + x^{k+1} = 0$ con $k \geq 1$ si dice una *singolarità di tipo A_k* .

Si può ora dimostrare la convergenza delle soluzioni fornite dal teorema di Puiseux.

Teorema 2.2.6.

Sia $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $f(0, 0) = 0$ e regolare in y di ordine m .

(i) L'equazione $f(x, y) = 0$ ammette almeno una soluzione della forma $y = g(x^{\frac{1}{m_1}})$ con $g \in \mathbb{C}\{z\}$ ed $m_1 \leq m$ opportuno.

(ii) E' possibile esprimere f come UF dove U è un'unità ed F è un polinomio monico di grado m in y a coefficienti nell'anello delle serie formali convergenti in potenze frazionarie di x .

Ci sono m soluzioni del tipo descritto in (i), distinte se il discriminante di F è non nullo, e

$$F(y) = \prod_{j=1}^m (y - g_j(x^{\frac{1}{n_j}}))$$

dove $n_j = m_i$ per $i \in \{1, \dots, k\}$ opportuno.

Dimostrazione.

Poichè f regolare in y di ordine m , il teorema 2.2.1 dà

$$f(x, y) = U(x, y)A(x, y)$$

con U unità e A polinomio di Weierstrass.

Si ha $U(0, 0) \neq 0$ e quindi, per continuità, esiste un intorno di O in cui U si mantiene non nulla. Sull'intersezione di tale intorno con i dischi di convergenza degli A_r , il luogo degli zeri di f è lo stesso di quelli di A . Si fissa $\epsilon > 0$ in modo che all'interno di questo insieme sia compresa la regione $|x| < \epsilon, |y| < \epsilon$.

Poichè $A(x, y)$ è un polinomio in y a coefficienti in $\mathbb{C}\{x\}$, se ne calcola il discriminante $D(A) = R(A, \frac{\partial A}{\partial y})$ in $\mathbb{C}\{x\}$. Se $D(A)(x) = 0$ allora A ha un fattore ripetuto nella sua scomposizione; con l'algoritmo euclideo si trova l'MCD, h , tra A e $\frac{\partial A}{\partial y}$. Ora, A ed $\frac{A}{h}$ hanno gli stessi zeri con la differenza che $D(\frac{A}{h}) \neq 0$: si rinomina $\frac{A}{h}$ come A e per un δ eventualmente più piccolo di ϵ si ha $D(A)(x) \neq 0$ nella regione $0 < |x| < 2\delta$.

Su tale insieme l'equazione polinomiale in y $A(x, y) = 0$ ha m radici distinte $(\bar{x}, y_1(\bar{x})), \dots, (\bar{x}, y_m(\bar{x}))$. Per definizione di discriminante, in ciascuno dei punti $(\bar{x}, y_i(\bar{x}))$ si ha $\frac{\partial A}{\partial y} \neq 0$: ciò consente di applicare il teorema della funzione implicita per costruire una funzione olomorfa y_i in un intorno del punto considerato tale che $y = y_i(x)$ se e solo se $A(x, y) = 0$.

Nella corona circolare $C(0, 0, 2\delta)$ si sceglie un cammino chiuso che racchiuda l'origine con punto iniziale e finale \bar{x} e su tale curva si definisce la y_i in modo che risulti una funzione continua. Si osserva che i valori $(\bar{x}, y_i(\bar{x}))$ dove \bar{x} è punto iniziale del cammino e dove \bar{x} è punto finale sono entrambi radici di $A(x, y) = 0$ ma non sono necessariamente uguali. Ripetendo questa costruzione per i da 1 ad m si costruisce di fatto un permutazione $\sigma \in S_m$: la sua suriettività si può dedurre partendo da \bar{x} come punto finale e ripercorrendo il cammino a ritroso.

Pertanto σ ammette una decomposizione in cicli disgiunti di lunghezza m_1, \dots, m_k

con $\sum_{i=1}^k m_i = m$. Per semplicità si suppone $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(m_1 - 1) = m_1, \sigma(m_1) = 1$ e così per gli altri cicli. In particolare, la funzione $y_1(x)$ torna al suo valore originale se si compie il cammino m_1 volte.

Si sfrutta ora il comportamento della funzione radice m_1 -esima. Per fissare le idee si considera il punto iniziale $x = \delta$ e si considera la radice reale $z = \delta^{\frac{1}{m_1}}$: quando x varia sul cammino scelto si pretende che la radice m_1 -esima vari con continuità. y_1 risulta quindi essere una funzione ben definita ed olomorfa di z in $0 < |z| < (2\delta)^{\frac{1}{m_1}}$.

Il teorema di Laurent consente di sviluppare y_1 in serie di Laurent di z , $y_1(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{1r} z^r$, dove

$$a_{1r} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\delta^{\frac{1}{m_1}}} \frac{y_1(z) dz}{z^{r+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{y_1(\delta^{\frac{1}{m_1}} e^{i\theta})}{\delta^{\frac{r+1}{m_1}} e^{i\theta(r+1)}} \delta^{\frac{1}{m_1}} i e^{i\theta} d\theta,$$

da cui

$$|a_{1r}| \leq \delta^{-\frac{r}{m_1}} \sup(y_1)$$

Visto che y_1 è limitata per costruzione, per $r < 0$ quando $\delta \rightarrow 0$ si deduce che $a_{1r} = 0$, dunque la serie ottenuta è una serie di potenze convergente.

Per ottenere lo sviluppo di $y_{\sigma^j(1)}$ con $j \in \{1, \dots, m_1\}$ basta sostituire a z nella serie $ze^{2\pi i j}$, che significa di fatto scegliere un'altra radice m_1 -esima di x .

In conclusione, dato l'intero m_1 si ottengono quindi m_1 soluzioni di $A(x, y)$ sviluppabili in serie di potenze intere di $x^{\frac{1}{m_1}}$. \square

Dalla dimostrazione si vede come le m soluzioni di $f(x, y) = 0$ si possano suddividere in k gruppi individuati dalle orbite della permutazione σ : in ogni gruppo le soluzioni differiscono per le diverse determinazioni della radice m_i -esima e quindi ammettono un'unica parametrizzazione

$$(x, y) = (t^{n_j}, \sum_{r=1}^{\infty} a_{jr} t^r).$$

Un tale gruppo di soluzione si dice un *ramo* della curva; nella sezione seguente si vedrà che esso è individuato da un fattore irriducibile di $f(x, y)$.

2.3 Curve, rami, molteplicità e tangenti

Grazie ai risultati visti nelle precedenti due sezioni, è possibile approfondire il concetto di curva, ramo, molteplicità di una curva nel punto O e tangente.

2.3.1 Puntualizzazioni sulla definizione di curva e ramo

Una curva C era stata definita come il luogo degli zeri di una funzione $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con $f(O) = 0$.

In realtà C è determinata vicino a O da una qualsiasi funzione $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ per cui esiste U unità del dominio a fattorizzazione unica $\mathbb{C}\{x, y\}$ tale che $g = Uf$. Questo perchè le unità U sono le serie con ordine nullo, che sono in particolare funzioni olomorfe intorno a 0 che quindi non si annullano in un suo intorno; localmente si ha dunque $g = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Si pensa ora a come si ricavano le equazioni dei rami della curva C nota una delle f che la definisce.

L'espressione f si fattorizza, a meno di elementi invertibili, in un unico prodotto finito $f = \prod_{j=1}^n g_j^{a_j}$ con i g_j non multipli tra loro e gli a_j interi positivi. I rami di C sono le curve B_j definite da $g_j = 0$. C si dice *ridotta* se $a_j = 1 \forall j$. Ci si chiede ora in quali casi due funzioni che non differiscono per un elemento invertibile possano determinare la stessa curva. Sicuramente f e f^k hanno questa proprietà. Questo è però l'unico caso che si presenta.

Infatti, dati g_1 e g_2 elementi irriducibili di $\mathbb{C}\{x, y\}$ non multipli l'uno dell'altro e tali che $\omega(g_1), \omega(g_2) > 0$, esiste un intorno di $(0, 0)$ per cui $(0, 0)$ è l'unico punto in comune fra le curve C_1 e C_2 definite da g_1 e g_2 . Per provarlo si intende mostrare che:

- (i) la parametrizzazione di un ramo data dal teorema 2.2.6 è buona;
- (ii) i punti di una curva abbastanza vicini ad O dati da una tale parametrizzazione sono gli zeri di un'unica equazione irriducibile.

Dimostrazione (i).

Sia $x = t^n$, $y = \psi(t)$ per un qualche $\psi \in \mathbb{C}\{t\}$ la soluzione dell'equazione $g(x, y)$ del ramo considerato. Se t_1 e t_2 sono tali da individuare tramite la parametrizzazione lo stesso punto, risulta in particolare:

$$t_1^m = t_2^m \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z}, m \nmid r \text{ tale che } t_2 = e^{\frac{2\pi ir}{m}} t_1$$

Le serie $\psi(t)$ e $\psi(e^{\frac{2\pi ir}{m}} t)$ non hanno però gli stessi coefficienti: infatti, per avere l'uguaglianza si dovrebbe avere $e^{\frac{2\pi irj}{m}} = 1 \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2\pi irj}{m} = 2\pi k_j$ per $k_j \in \mathbb{Z}$, ma visto che $m \nmid r$ la condizione non è verificata in quanto ad esempio $k_1 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Pertanto in un opportuno intorno di 0 la parametrizzazione del ramo individuato da g è buona. \square

Dimostrazione (ii).

Sia $x = t^n$, $y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r$ una parametrizzazione di B .

La serie che definisce y si può riscrivere raggruppando i termini delle serie con esponenti che appartengono alla stessa classe di equivalenza modulo n , ottenendo

$$y = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\infty} a_{nq+s} t^r = \sum_{s=0}^{n-1} t^s \sum_{q=0}^{\infty} a_{nq+s} t^n q$$

Si pongono poi $\phi_s(x) = \sum_{q=0}^{\infty} a_{nq+s} x^q$, che risultano essere serie convergenti. Per $0 \leq a \leq n-1$ si considerano le equazioni lineari con coefficienti in $\mathbb{C}\{x, y\}$:

$$t^a y = \sum_{s=0}^{n-a-1} t^{a+s} \phi_s(x) + \sum_{s=n-a}^{n-1} t^{a+s-n} x \phi_s(x)$$

ottenute dall'espressione di y moltiplicando per t^a ambo i membri e aggiungendo il fattore $t^{-n} t^n$ a ciascun termine della seconda sommatoria.

Poichè questo sistema di n equazioni nelle n incognite t^a è stato ottenuto da una relazione valida per i punti (x, y) sul ramo B , su tali punti esso ammetterà infinite soluzioni, in particolare non nulle.

Il determinante $D(x, y)$ del sistema è quindi nullo sui punti (x, y) di B . Per costruzione si ha che D è un polinomio monico in y di grado n e che

$y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r$ è un fattore del determinante, per cui si possono dedurre gli altri $n - 1$. Risulta quindi:

$$D(x, y) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(y - \sum_{r=1}^{\infty} a_r e^{\frac{2\pi i k r}{n}} x^{\frac{r}{n}} \right)$$

$D(x, y) = 0$ è quindi un'equazione per B : infatti l'annullamento di $D(x, y)$ comporta l'annullamento di uno dei suoi fattori, ciascuno dei quali rappresenta una parametrizzazione di B .

D è inoltre irriducibile in $\mathbb{C}\{x, y\}$. Se così non fosse dovrebbe ammettere un fattore $d \in \mathbb{C}\{x, y\}$ a sua volta diviso da uno dei fattori nell'anello $\mathbb{C}\{x^{\frac{1}{n}}, y\}$ mostrati sopra: ma per come sono fatti tali fattori d dev'essere diviso da ciascuno di essi. Dovrebbe quindi risultare $D \mid d$, ma ciò è assurdo se si sta supponendo D riducibile. \square

Esempio 2.3.

Si riprende la parametrizzazione dell'esempio 2.1, ovvero

$$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^8 + t^{13} \end{cases}$$

Si ricava ora l'equazione della curva secondo quanto descritto nella dimostrazione del punto (ii). Poichè $n = 6$ si imposta il seguente sistema nelle incognite t^0, \dots, t^5 :

$$\begin{cases} y = t^2 x + t x^2 \\ t y = t^3 x + t^2 x^2 \\ t^2 y = t^4 x + t^3 x^2 \\ t^3 y = t^5 x + t^4 x^2 \\ t^4 y = x^2 + t^5 x^2 \\ t^5 y = t x^2 + x^3 \end{cases}$$

La matrice del sistema è quindi

$$A = \begin{pmatrix} y & -x^2 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & -x^2 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & -x^2 & -x & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 & 0 & y & -x^2 \\ -x^3 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

avente per determinante

$$y^6 + x^8 - 9x^7y^2 - 2x^4y^3 - 6x^{10}y - x^{13}.$$

Ci si chiede ora che tipo di legame c'è tra due buone parametrizzazioni di uno stesso ramo B : il lemma seguente stabilisce l'unicità della buona parametrizzazione a meno di una condizione.

Lemma 2.3.1.

Siano t ed u due parametri per due buone parametrizzazioni dello stesso ramo B .

Allora $\exists \sigma \in \mathbb{C}\{u\}$, $\omega(\sigma) = 1$ tale che $t = \sigma(u)$.

Dimostrazione.

Siano m la molteplicità di B , $f(x, y) = 0$ un'equazione per B , con f regolare in y di ordine m e $(x, y) = (\phi(t), \psi(t))$ una parametrizzazione per B .

Siano $n = \omega(\phi)$ ed a il coefficiente di t^n nello sviluppo di ϕ in serie, allora, per il lemma 1.5.3, $\exists \xi \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $\omega(\xi) = 1$ per cui $\phi(t) = a\xi(t)^n$.

Per il teorema 2.2.6 parte (ii) per B si trova un'altra buona parametrizzazione di parametro z per cui $x = z^m$. Entrambe le parametrizzazioni definiscono una biezione tra un intorno del dominio di definizione del parametro e un intorno di O in B , per cui deve risultare $m = n$. Si ha dunque $z^m = a\xi(t)^m$, ovvero $z = b\xi(t)$, con b radice m -esima di a . La serie ξ è invertibile, per cui vale che $t = \xi^{-1}(\frac{z}{b})$.

Ripetendo il ragionamento per la parametrizzazione in u si avrà che

$\exists \eta \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $\omega(\eta) = 1$ per cui $z = b'\eta(u)$. In definitiva si ha

$t = \xi^{-1}(\frac{b'}{b}\eta(u))$, cioè è stata ottenuta una $\sigma \in \mathbb{C}\{x, y\}$ per cui $t = \sigma(u)$. \square

2.3.2 Molteplicità e retta tangente ad una curva in O

Si formalizzano ora i concetti di molteplicità di una curva e retta tangente ad una curva in O .

Definizione 2.3.

Sia C una curva definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ con $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

L'ordine di f si chiama *molteplicità di C in O* e si indica con $m_O(C)$ (o, più semplicemente, m se non ci sono ambiguità).

Osservazione 5.

Una curva C è liscia in O se e solo se $m_O(C) = 1$.

Infatti, se fosse $m_O(C) > 1$, in $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ comparirebbero fattori omogenei in x ed y che farebbero quindi annullare entrambe le derivate in $(0, 0)$.

Osservazione 6.

Sia C la curva data dall'equazione $f(x, y) = \prod_j g_j^{a_j}(x, y) = 0$ e siano B_j i rami definiti dalle g_j .

Allora $m_O(C) = \sum_j a_j m_O(B_j)$.

Ciò perchè l'ordine di un prodotto è la somma degli ordini.

Prima di definire le rette tangenti in punti singolari di una curva, è bene osservare una caratteristica geometrica della molteplicità: essa è il minimo numero di intersezione che una generica retta per O può avere con la curva. Infatti, sia che la retta si parametrizzi con $(x, y) = (t, at)$ o con $(x, y) = (a't, t)$, la serie in t che si ottiene sostituendo all'equazione f della curva la parametrizzazione ha ordine maggiore o uguale a m visto che $\omega(f) = m$.

Definizione 2.4.

Sia C una curva definita dall'equazione $f(x, y) = 0$, con $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

Sia $m > 1$ la molteplicità di C in O . Si indichi con f_m la somma dei termini di grado m che compaiono in f .

Si chiamano *rette tangenti a C in O* le curve definite dai fattori lineari di f_m .

Non è detto che f_m ammetta una scomposizione in fattori lineari distinti tra loro, ma, nel caso esista, le rette tangenti a C in O sono al più m , visto che esso è il grado di f_m .

Il seguente lemma motiva l'importanza di tali rette attraverso il numero di intersezione e la molteplicità.

Lemma 2.3.2.

Una retta L è tangente a B in O se e solo se $(L.B)_O > m(B)$.

Dimostrazione.

Si supponga che la retta L sia esprimibile con l'equazione $y = ax$ e sia quindi data dalla parametrizzazione $(x, y) = (t, at)$. Sostituendo tale y nell'equazione $f(x, y) = 0$ di B si possono presentare due eventualità.

Se $y - ax$ non è un fattore di f_m , $f(t, at)$ è una serie in t di ordine m . Pertanto se L non è retta tangente, il numero di intersezione $(L.B)_O$ è uguale ad $m(B)$.

Nel caso in cui $y - ax$ sia un fattore di f_m , $f(t, at)$ ha ordine strettamente maggiore di m . Ecco quindi che se L non è una tangente allora $(L.B)_O > m(B)$. Se la retta L fosse $x = 0$ allora la dimostrazione si condurrebbe ponendo $x = 0$ e $y = t$ in $f(x, y) = 0$. \square

La molteplicità consente inoltre di avere maggiori informazioni sulla parametrizzazione del ramo.

Lemma 2.3.3.

Sia B un ramo di molteplicità m del germe in O di una curva olomorfa in \mathbb{C}^2 tale che la retta $x = 0$ non sia tangente di B .

Allora B ammette la buona parametrizzazione

$$x = t^m, \quad y = \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r$$

L'ipotesi sulla tangente al ramo non è così restrittiva: un cambiamento di coordinate consente infatti di ricondursi a questa situazione.

Dimostrazione.

Dall'ipotesi si deduce che l'equazione di B è regolare in y di ordine m , per

cui per il 2.2.6 parte (ii) si trova la buona parametrizzazione

$$x = t^m, y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r.$$

Si prova ora che $a_r = 0$ per $r < m$.

Il numero di intersezione di B con una retta $L : y = ax$ è maggiore o uguale ad m . Poichè esso si può calcolare sostituendo la parametrizzazione di B nell'equazione di L , la serie in t così ottenuta non ha ordine minore di m : da questo segue la tesi. \square

Esempio 2.4.

La curva $y^2 + x^2 - x - 2xy = 0$, che ha $x = 0$ come retta tangente, ammette $x = t^2, y = t + t^2$ come parametrizzazione.

Con considerazioni analoghe sulla molteplicità si deduce che vale in realtà un risultato più generale.

Osservazione 7.

Sia B un ramo con parametrizzazione $x = t^n, y = \psi(t)$ dove $s = \omega(\psi)$.

Allora la molteplicità di B in O è il minimo tra n ed s .

Capitolo 3

Risoluzioni

Il capitolo si propone l'obiettivo di eliminare un punto singolare producendo una nuova curva in cui il punto corrispondente sia liscio con lo strumento dello scoppimento; tale procedimento consente anche di ricavare alcune informazioni sulla singolarità di partenza.

3.1 Caratteristica di Puiseux

Un'importante informazione per lo studio delle singolarità è la caratteristica di Puiseux.

Sia B un ramo del germe in O di una curva olomorfa in \mathbb{C}^2 . È stato già mostrato nel lemma 2.3.3 che se $x = 0$ non è una tangente a B , si ha la buona parametrizzazione $x = t^m$, $y = \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r$.

Osservazione 8.

Nelle condizioni precedenti, il più grande fattore comune fra m e gli interi r tali che $a_r \neq 0$ è 1.

Dimostrazione.

Si procede per assurdo.

Sia $k > 1$ il più grande intero tale che $k \mid m$, $k \mid r \forall r$ con $a_r \neq 0$. Sia d il

più piccolo di tali r , cioè l'ordine della serie che definisce la y .

Risulta quindi che la parametrizzazione di B è:

$$\sigma(t) = \begin{cases} x = \phi(t) = t^{kh_m} = (t^k)^{h_m} \\ y = \psi(t) = \sum_{r=d}^{\infty} a_r t^{kh_r} = \sum_{r=d}^{\infty} a_r (t^k)^{h_r} \end{cases}$$

dove gli h_i sono interi opportuni.

Tale parametrizzazione non è però buona in un qualsiasi intorno di O della curva: preso $\bar{t} \in \mathbb{C}$ si trova $\bar{u} \neq \bar{t}$ per cui $\sigma(\bar{u}) = \sigma(\bar{t})$. Infatti, se \bar{t} è tale per cui $x = ((\bar{t})^k)^{h_m}$ basta considerare una radice k -esima di $(\bar{t})^k$ diversa da \bar{t} : questa è \bar{u} cercato perchè dal fatto che $(\bar{t})^k = (\bar{u})^k$ si deduce che anche $\psi(\bar{t}) = \psi(\bar{u})$. \square

A questo punto si pongono $\beta_1 = \min\{r \mid a_r \neq 0, m \nmid r\}$ ed $e_1 = \text{mcd}(m, \beta_1)$.

Induttivamente, $\beta_{i+1} = \min\{r \mid a_r \neq 0, e_i \nmid r\}$ ed $e_{i+1} = \text{mcd}(e_i, \beta_{i+1})$.

Dall'osservazione 8 $\exists g$ t. c. $e_g = 1$, per cui β_g è l'ultimo esponente che si produce.

Definizione 3.1.

La sequenza $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$ si dice caratteristica di Puiseux di B e i β_i si dicono esponenti della caratteristica; si pone inoltre $\beta_0 := e_0 = m$.

Esempio 3.1.

Si considera la curva esprimibile, tramite il teorema di Puiseux, con la serie di potenze frazionarie $y = x^{\frac{7}{6}} + x^{\frac{37}{24}} + x^{\frac{20}{9}}$.

Essa ammette come parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t^{72} \\ y = t^{84} + t^{111} + t^{160} \end{cases}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 72 \\ \beta_1 &= 84 \quad e_1 = \text{mcd}(72, 84) = 12 \\ \beta_2 &= 111 \quad e_1 = \text{mcd}(12, 111) = 1\end{aligned}$$

La caratteristica di Puiseux della curva è $(72; 84, 111)$.

Proposizione 3.1.1.

La caratteristica di Puiseux è indipendente dal sistema di coordinate scelto.

3.2 Scoppiamento

Definizione 3.2.

Una superficie complessa S è una varietà differenziabile con la scelta di un atlante $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{(\alpha \in A)}$ con: A insieme di indici, $\phi_\alpha(U_\alpha)$ aperto di $\mathbb{C}^2 \forall \alpha \in A$ e $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ olomorfa.

Definizione 3.3.

Dati una superficie complessa liscia S e un suo punto P , si dice che la mappa ϕ definita su una superficie T a valori in S è lo *scoppiamento* di S con centro P se:

- $\phi^{-1}(P)$ è una curva E ;
- ϕ induce un isomorfismo di superfici tra $T \setminus E$ e $S \setminus \{P\}$.

Si mostra ora come si conduce lo scoppiamento di \mathbb{C}^2 con centro O .

Per costruire la nuova superficie si prende come spazio ambiente $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; su \mathbb{C}^2 si considera il sistema di coordinate (x, y) , mentre su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ si prendono le coordinate omogenee $[\xi : \eta]$. Si definisce T il sottospazio di $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ costituito dai punti $((x, y), [\xi : \eta])$ per cui $x\eta = y\xi$.

La mappa di proiezione $\pi : T \rightarrow \mathbb{C}^2$ è lo scoppiamento cercato, infatti:

- preso $(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ con $\bar{y} \neq 0$ si ha che $((x, y), [\xi : \eta]) \in \pi^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\xi}{\eta}$ e poichè le coordinate omogenee su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono determinate a meno di

fattori di proporzionalità, tale condizione è soddisfatta solo dal punto $((\bar{x}, \bar{y}), [\bar{x} : \bar{y}])$.

- $\pi^{-1}(O) = \{((0, 0), [\xi : \eta]), \text{ con } (\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \setminus O\} = O \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, cioè una curva isomorfa a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Osservazione 9.

La mappa π è propria in quanto composizione dell'inclusione, applicazione chiusa, di T in $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con la proiezione, propria, $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$.

Definizione 3.4.

$\pi^{-1}(O)$ si dice *curva eccezionale* dello scoppimento.

La procedura descritta si può ripetere per una qualunque superficie complessa S . Si introducono le coordinate locali (x, y) vicino ad un punto P : queste inducono un biolomorfismo tra un intorno U di P in S e un intorno V di O in \mathbb{C}^2 . Si può quindi procedere allo scoppimento di S con centro P sfruttando il fatto che $U \setminus P$ e $\pi^{-1}(V \setminus \{O\})$ sono biolomorficamente equivalenti in quanto entrambi biolomorfi a $V \setminus \{0\}$.

Ci si interessa ora alle coordinate locali di cui dotare la superficie T ottenuta dallo scoppimento: si sfrutta il fatto che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è unione dei due aperti $U_0 = \{[\xi : \eta], \xi \neq 0\}$ e $U_1 = \{[\xi : \eta], \eta \neq 0\}$.

I punti di T con $\xi \neq 0$ soddisfano l'equazione $x \frac{\eta}{\xi} = y$: se si pone $Y = \frac{\eta}{\xi}$ tali punti vengono quindi determinati dalle coordinate (x, Y) , per cui esso si identificano con punti di un piano complesso. Analogamente i punti di T aventi $\eta \neq 0$ sono descritti dalle coordinate (X, y) con $X = \frac{\xi}{\eta}$.

La curva eccezionale E è data da $x = 0$ in coordinate (x, Y) oppure da $y = 0$ in coordinate (X, y) . Per descrivere gli altri punti di T basta introdurre la nuova coordinata $Y = \frac{y}{x}$ oppure $X = \frac{x}{y}$.

E' lecito ora chiedersi se lo scoppimento condotto fissando un sistema di coordinate locali sulla superficie sia in realtà una costruzione intrinsecamente ben definita. La risposta sta nel seguente lemma.

Lemma 3.2.1.

Il risultato dello scoppiamento di una superficie liscia S con centro P è indipendente dalla scelta delle coordinate locali su S intorno a P .

La dimostrazione necessita di questo risultato:

Lemma 3.2.2.

Sia f una funzione olomorfa definita in un intorno di $O \in \mathbb{C}^n$.

Sia $k \in \{1, \dots, n\}$ e si supponga che f si annulli su $x_1 = \dots = x_k = 0$.

Allora esistono k funzioni olomorfe g_1, \dots, g_k definite in un intorno di $O \in \mathbb{C}^n$, tali che $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$.

Dimostrazione lemma 3.2.1.

Si considerino (x, y) e (x', y') coordinate su S intorno a P ; siano poi $\pi : T \rightarrow S$ e $\pi' : T' \rightarrow S$ gli scoppiamenti costruiti usando questi sistemi locali.

Sfruttando la definizione di sistema di coordinate è possibile trovare un'espressione di x' e y' come funzioni ϕ e ψ , rispettivamente di x e y : in breve $(x', y') = \gamma(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$.

Si supponga che siano:

$$x' = \phi(x, y) = ax + by + \dots \quad \text{e} \quad y' = \psi(x, y) = cx + dy + \dots$$

Tali relazioni si possono invertire.

Ora, visto che gli scoppiamenti sono degli isomorfismi al di fuori delle curve eccezionali, la tesi è provata in tali regioni: l'interesse si rivolge nel mostrare l'equivalenza biolomorfa delle preimmagini dell'origine. Si mostra cioè che esistono due mappe olomorfe $\theta : T \rightarrow T'$ e $\theta' : T' \rightarrow T$ ben definite almeno vicino alle curve eccezionali e tali per cui $\pi' \circ \theta = \gamma \circ \pi$ e $\pi \circ \theta' = \gamma^{-1} \circ \pi'$. Ne verranno le relazioni $\gamma \circ \pi \circ \theta' \circ \theta = \gamma \circ \pi$ e $\gamma^{-1} \circ \pi' \circ \theta \circ \theta' = \gamma^{-1} \circ \pi'$, da cui si deduce che $\theta' \circ \theta$ e $\theta \circ \theta'$ sono le mappe identiche dove gli scoppiamenti sono invertibili e per la loro continuità devono esserlo anche sulle curve eccezionali. Se si mostra che $(X, y) \mapsto \left(\frac{\phi(Xy, y)}{\psi(Xy, y)}, \psi(Xy, y) \right)$ è ben definita e olomorfa si può poi affermare che essa è la θ cercata. Infatti: se si scrivono i punti

$(\frac{\phi(Xy, y)}{\psi(Xy, y)}, \psi(Xy, y))$ in T' con le coordinate $(x', y', [\xi' : \eta'])$ e i punti (X, y) in T con le coordinate $(x, y, [\xi : \eta])$, allora risulta

$$\begin{aligned} \pi'(\theta(X, y)) &= \pi'(\phi(Xy, y), \psi(Xy, y), [\phi(Xy, y) : \psi(Xy, y)]) = \\ &= (\phi(Xy, y), \psi(Xy, y)) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) = (x', y') = \gamma(\pi(X, y)). \end{aligned}$$

Si considera un punto di coordinate (X, y) in T tale che $cX + d \neq 0$: questa condizione si mantiene anche in un intorno di tale punto. E' sempre possibile compiere tale scelta: infatti, se $c = 0$ ogni coordinata X soddisfa tale condizione, mentre se $c \neq 0$ allora basta prendere $X \neq -\frac{d}{c}$.

Il corrispondente punto nell'altro sistema di coordinate è $(x', y') = (\phi(Xy, y), \psi(Xy, y))$. Poichè $\phi(Xy, y)$ e $\psi(Xy, y)$ si annullano sul luogo $y = 0$ ad entrambe si applica il lemma 3.2.2, per cui esistono due funzioni olomorfe α e β tali che $\phi(Xy, y) = y\alpha(X, y)$ e $\psi(Xy, y) = y\beta(X, y)$: il loro sviluppo in serie sarà $\alpha(X, y) = aX + b + \dots$ e $\beta(X, y) = cX + d + \dots$ e quindi $\alpha(X, 0) = aX + b$ e $\beta(X, 0) = cX + d$.

In conclusione in un intorno di un punto (X, y) tale che $cX + d \neq 0$ ed $y = 0$, la funzione $(X, y) \rightarrow (\frac{\alpha(X, y)}{\beta(X, y)}, y\beta(X, y))$ è ben definita e olomorfa. \square

E' bene ora presentare alcune curve notevoli dello scoppimento.

Definizione 3.5.

Sia $\phi : T \rightarrow S$ lo scoppimento con centro $P \in S$ ed $E = \phi^{-1}(P)$ la sua curva eccezionale.

Data C curva per P , $\phi^{-1}(C)$ si dice la *trasformata totale* di C .

La chiusura di $\phi^{-1}(C) \setminus E$ è chiamata la *trasformata stretta o propria* di C .

Osservazione 10.

Se $C \ni \{P\}$ allora $\phi^{-1}(C)$ contiene E .

Invece la preimmagine tramite ϕ di una curva γ che non passa per P è una curva isomorfa a γ per la biettività dello scoppimento fuori dalla curva eccezionale.

Osservazione 11.

Per gli insiemi considerati sulle superfici descritte in precedenza, la chiusura di Zariski coincide con quella nella topologia naturale di \mathbb{C}^2 .

Osservazione 12.

Significato del punto di intersezione tra la trasformata stretta e la curva eccezionale

Si consideri un ramo B per O in \mathbb{C}^2 definito dalla parametrizzazione $x = t^n$, $y = \sum_{r=n}^{\infty} a_r t^r$ e si effettui lo scoppimento di \mathbb{C}^2 in O .

Per quanto detto prima del lemma, la trasformata propria di tale ramo è $x = t^n$, $Y = \frac{y}{x} = \sum_{r=n}^{\infty} a_r t^{r-n}$, mentre la curva eccezionale è $x = 0$, ovvero $t=0$; pertanto la loro intersezione è l'unico punto $(0, a_n)$ in coordinate (x, Y) . Si nota che $Y = a_n$ è la retta tangente al ramo B in O .

3.3 Risoluzione di singolarità

In questa sezione si mostra che l'effetto di ripetuti scoppimenti permette di costruire una curva liscia a partire da una curva dotata di singolarità.

Si illustra ora come si svolge questo procedimento in modo induttivo.

La superficie iniziale è $T_0 = \mathbb{C}^2$, su cui giace una curva olomorfa γ : se ne considera un ramo C passante per $O_0 = O$. Si esegue lo scoppimento di T_0 con centro O_0 ottenendo una superficie liscia T_1 , una curva eccezionale E_0 e una trasformata propria $C^{(1)}$. Per l'osservazione 12, $\exists ! O_1 = E_0 \cap C^{(1)}$ su cui si conduce un nuovo scoppimento.

All' i -esimo scoppimento ci si trova in presenza di una superficie T_i contenente $C^{(i)}$ ed E_{i-1} che si incontrano nell'unico punto O_i . Su T_i si trovano anche le trasformate proprie di E_j , per $j < i - 1$: esse si denotano ancora con E_j .

Si esegue lo scoppimento di T_i con centro O_i che produce: una superficie liscia T_{i+1} ; una mappa $\pi_i : T_{i+1} \rightarrow T_i$; le trasformate proprie E_j per $j < i$; la curva eccezionale $E_i = \pi_i^{-1}(O_i)$ e la trasformata propria di $C^{(i)}$, $C^{(i+1)}$, che

si incontrano in un unico punto O_{i+1} .

E' possibile ora provare il seguente teorema.

Teorema 3.3.1.

Nelle condizioni appena descritte $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $C^{(N)}$ è liscia.

Risulta inoltre che $C^{(N)}$ è liscia per $n > N$.

Dimostrazione.

Si procede mostrando che gli scoppiamenti riducono la molteplicità $m \geq 1$ di C .

La curva C è data dalla parametrizzazione $x = t^m$, $y = \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r$.

Se si considera $q = \lfloor \frac{\beta_1}{m} \rfloor$ è possibile scrivere y in questo modo:

$$y = b_1 t^m + b_2 t^{2m} + \dots + b_q t^{qm} + ct^{\beta_1} + \dots$$

Dopo il primo scoppiamento si ottiene $C^{(1)}$ con parametrizzazione

$$x = t^m, Y = b_1 + b_2 t^m + \dots + b_q t^{(q-1)m} + ct^{\beta_1 - m} + \dots$$

Se $q \geq 2$ si compie il cambiamento di coordinate $y_1 = Y_1 - b_1$, per cui è chiaro che la curva $C^{(1)}$ ha molteplicità m .

Dopo aver condotto q scoppiamenti e cambiamenti di coordinate che spostano l'origine, se necessari, si ha che il primo termine della serie che dà Y_q è $ct^{\beta_1 - qm}$.

Risulta $\beta_1 - qm < m$ dal fatto che $\frac{\beta_1}{m} < q + 1$ e quindi $C^{(q)}$ ha molteplicità $\beta_1 - qm$.

Continuando questo procedimento la molteplicità delle trasformate strette scende, per cui $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $m(C^{(N)}) = 1$.

Per lo stesso motivo segue la seconda parte della tesi. □

Definizione 3.6.

La proiezione $\pi : T_N \rightarrow T_0$ si dice una *risoluzione* di C .

Esempio 3.2.

Sia C la curva $y^3 = x^5$.

Il primo scoppiamento in $(0, 0)$ si realizza con il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_1 y_1 \end{cases}$$

La trasformata totale di C è $x_1^3(y_1^3 - x_1^2) = 0$; la curva eccezionale E_0 è $x_1 = 0$ contata 3 volte, in accordo con il fatto che la molteplicità della curva in O è 3. La trasformata propria $C^{(1)}$ di C è quindi $y_1^3 = x_1^2$.

Poichè la curva non è liscia è necessario un ulteriore scoppimento nella nuova origine:

$$\begin{cases} x = x_2 y_2 \\ y = y_2 \end{cases}$$

Si ha che $y_2^2(y_2 - x_2^2) = 0$ è la trasformata totale, E_0 è data da $x_2 = 0$, mentre E_1 è $y_2 = 0$. Pertanto, la trasformata propria $C^{(2)}$ è $y_2 = x_2^2$, la curva liscia cercata.

Ecco i risultati dei due scoppimenti:

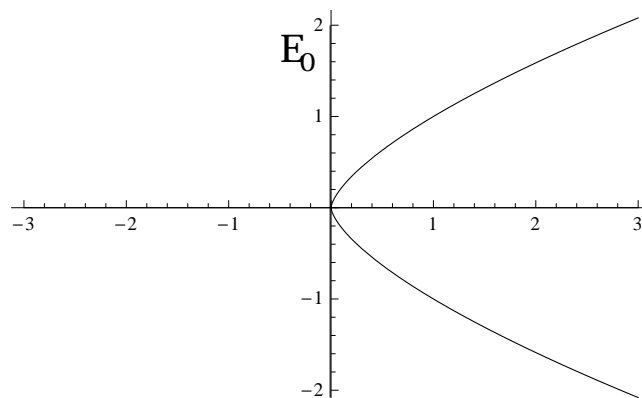


Figura 3.1: Il risultato del primo scoppimento sulla superficie T_1

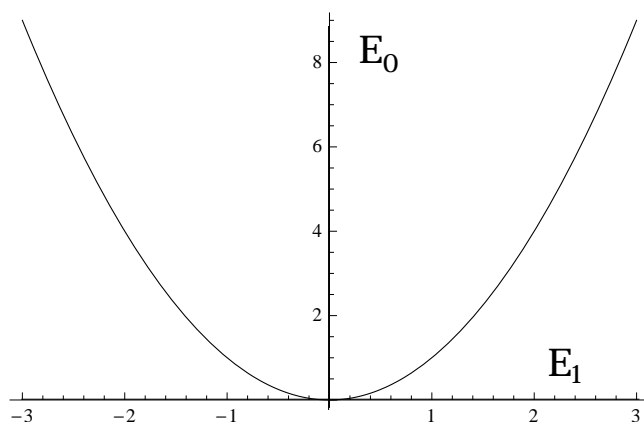


Figura 3.2: Il secondo scoppiamento sulla superficie T_2

A titolo di esempio si analizza la trasformazione che il poligono di Newton subisce con lo scoppiamento.

Il poligono ha vertici (r_i, s_i) , con $0 \leq i \leq k$, $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k$ e $s_0 > \dots > s_k = 0$. Le pendenze delle rette contenenti i segmenti che costituiscono il poligono di Newton sono negative data la convessità della figura. Le frazioni $\sigma_i = \frac{s_{i-1} - s_i}{r_i - r_{i-1}}$ per $0 < i \leq k$ sono quindi positive e si suppone che decrescano al crescere di i .

Osservazione 13.

Conoscendo il poligono di Newton è possibile stabilire l'ordine dell'equazione f della curva, cioè la sua molteplicità.

Dimostrazione.

Si suppone dapprima che $\exists p \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq k$ tale che:

- 1) $\sigma_p \geq 1$.
- 2) $\sigma_{p+1} < 1$.

Dalla 1) si ricava:

$$\frac{s_{p-1} - s_p}{r_p - r_{p-1}} \geq 1 \Leftrightarrow s_{p-1} - s_p \geq r_p - r_{p-1} \Leftrightarrow s_{p-1} + r_{p-1} \geq r_p + s_p$$

Dalla 2) si ha:

$$\frac{s_p - s_{p+1}}{r_{p+1} - r_p} < 1 \Leftrightarrow s_p - s_{p+1} < r_{p+1} - r_p \Leftrightarrow s_p + r_p < r_{p+1} + s_{p+1}$$

Consideriamo ora le altre coppie (r_i, s_i) . Data la decrescenza delle σ_i si ha per $0 < i < p$ che $s_{i-1} + r_{i-1} \geq r_i + s_i$ e per $p+1 < i < k$ $s_{i-1} + r_{i-1} > r_i + s_i$. Pertanto $m = r_p + s_p$ è l'ordine di f .

Se invece non esistesse p che soddisfi la richiesta iniziale, allora si presenterebbe una delle due eventualità:

- $\sigma_i \geq 1 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad m = r_k + s_k.$

Per comodità di notazioni poniamo $p = k$.

- $\sigma_i < 1 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad m = r_0 + s_0.$

In questo caso $p = 0$.

In ogni caso $m = r_p + s_p$ è l'ordine di f . □

Lo scoppimento consiste nella sostituzione $(x, y) = (x_1, x_1 y_1)$, per cui in $f(x_1, y_1)$ compare il fattore $x_1^{r_p+s_p}$.

Si guardano ora i vertici del poligono di Newton di $f_1(x_1, y_1)$. Il monomio in f corrispondente alla coppia (r_i, s_i) nella sostituzione si vede aggiungere il fattore $x_1^{s_i}$: quando poi si divide per x_1^m i punti del poligono di Newton saranno $(r_i + s_i - m, s_i)$.

L'estremo del nuovo poligono di Newton sull'asse delle s si ha per $i = p$ e quindi i punti con $i < p$ non contribuiscono ad esso.

3.4 Geometria della risoluzione

Si analizza ora lo schema delle intersezioni delle curve E_j delle superfici T_i costruite dallo scoppimento di una superficie S in un suo punto P . Questo studio è in grado di dare informazioni sul centro dello scoppimento.

Si procede con due lemmi.

Lemma 3.4.1.

Sia C una curva non singolare sulla superficie liscia S e sia P un punto di S . Si realizzi lo scoppimento di S con centro P : si creano una superficie T , una curva eccezionale E e la trasformata propria C' di C .

Allora risulta che:

- 1) C' è liscia.
- 2) $C' \cap E$ consiste di un unico punto P' .
- 3) $(C'.E)_{P'} = 1$, ovvero l'intersezione delle due curve è trasversa.
- 4) C' è isomorfa a C .

Dimostrazione.

Poichè C è liscia è possibile descriverla con la parametrizzazione

$x = t$, $y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r$. Si realizza lo scoppiamento introducendo la nuova coordinata $Y = \frac{y}{x}$: E è data da $x = 0$ e C' da $F(x, Y) : Y = \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^{r-1}$.

Poichè $\frac{\partial F}{\partial Y} = 1$ si ha la tesi 1), che d'altra parte si poteva ottenere anche applicando il teorema 3.3.1.

$C' \cap E = (0, a_1)$ per cui si ottengono in maniera diretta 2) e 3).

La proiezione $(x, Y) \mapsto x$ è biettiva da C' a C perchè lo scoppiamento è biiettivo su $C' \setminus E$ e $C' \cap E$ è un unico punto. Considerata la regolarità di tale applicazione, si può affermare che è l'isomorfismo cercato per provare la 4). \square

Si nota in particolare che le curve eccezionali e le loro trasformate proprie sono curve lisce, per cui il lemma si può applicare ad $S = T_1$ e $C = E_0$: dunque E_1 è liscia e interseca trasversalmente E_0 in un unico punto in T_2 .

Lemma 3.4.2.

Sia S una superficie liscia.

Siano γ_1 e γ_2 due curve lisce su S per cui $\gamma_1 \cap \gamma_2 = P$ e $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)_P = 1$.

Allora le trasformate proprie di γ_1 e γ_2 relative allo scoppiamento di S in P intersecano la curva eccezionale in due punti distinti.

Ciò riflette il fatto che la curva eccezionale tiene conto delle diverse direzioni in cui le due curve attraversano il centro dello scoppiamento.

Dimostrazione.

Scegliendo un opportuno sistema di coordinate locali (x, y) intorno a P , si

suppone che le curve γ_1 e γ_2 siano date rispettivamente dalle equazioni $x = y$ e $x = -y$.

Lo scoppiamento cambia le coordinate in questo modo: $x = x_1$ e $y = x_1 y_1$. La curva eccezionale è $x_1 = 0$, mentre le trasformate totali sono $x_1(1 - y_1) = 0$ e $x_1(1 + y_1) = 0$.

Di conseguenza le trasformate strette sono $y_1 = 1$ e $y_1 = -1$, che intersecano la curva eccezionale nei punti distinti $(0, 1)$ e $(0, -1)$. \square

La disposizione delle curve eccezionali e delle loro trasformate proprie diventa più chiara con la seguente proposizione. Si ricorda che con E_j si indicano la curva eccezionale in T_{j+1} ed anche le sue trasformate proprie negli scoppiamenti successivi.

Proposizione 3.4.3.

La curva eccezionale E_i in T_{i+1} interseca E_{i-1} e al più una delle curve E_j con $j < i - 1$.

Inoltre tali intersezioni sono trasverse e distinte.

Dimostrazione.

Si procede per induzione su i .

Quanto evidenziato dopo il lemma garantisce il risultato nel caso $i = 1$.

Per ipotesi induttiva, si sa che la proposizione è valida riguardo alla curva $E_i \subset T_{i+1}$. Si pone, se esiste, \bar{j} come l'indice diverso da $i - 1$ per cui $E_{\bar{j}}$ interseca E_i .

L' $i + 2$ -esimo scoppiamento è realizzato su T_{i+1} con centro un punto O_{i+1} di E_i e produce la superficie T_{i+2} .

Le curve E_j che non passano per O_{i+1} avranno la trasformata propria interamente contenuta in $T_{i+2} \setminus E_{i+1}$, perciò non intersecano la nuova curva eccezionale E_{i+1} : quindi se E_i è l'unica di tali curve a contenere O_{i+1} si ottiene la tesi applicando il lemma 3.4.1., perchè risulta che E_{i+1} incontra solamente E_i trasversalmente in T_{i+2} .

In ogni caso, dall'ipotesi induttiva si deduce in particolare che le uniche trasformate di curve eccezionali che possono contenere O_{i+1} sono $E_{\bar{j}}$ e E_i perchè

intersecano E_i : se ciò accade, O_{i+1} giace solo su una delle due curve. Si denoti tale curva con E_k .

Visto che E_k interseca trasversalmente E_i si possono applicare i lemmi 3.4.1. e 3.4.2. per ottenere la tesi. \square

Definizione 3.7.

Un insieme di curve in una superficie liscia ha *incrocio normale* se ogni curva dell'insieme è liscia, ogni sottoinsieme di tre tali curve non ha punti di intersezione comuni e ogni intersezione tra coppie di curve è trasversa.

La proposizione appena provata stabilisce che la configurazione delle curve eccezionali è di questo tipo.

Definizione 3.8.

Dato un punto singolare P di una curva C contenuta in una superficie liscia S , una *buona risoluzione* è una mappa $\pi : T \rightarrow S$ tale che, se $E = \pi^{-1}(P)$, allora π induce un isomorfismo tra $T \setminus E$ ed $S \setminus P$ e l'insieme di curve ha incrocio normale.

Le curve di $\pi^{-1}(C)$ sono le curve eccezionali di π e le componenti della trasformata propria di C . Vale inoltre il seguente teorema.

Teorema 3.4.4.

Ogni singolarità di una curva piana ammette una buona risoluzione.

Dimostrazione.

Sia $C \subset \mathbb{C}^2 = T^0$ una curva dotata di k rami B_j .

Grazie al teorema 3.3.1, per B_1 esiste una composizione di scoppiamenti $\pi_{(1)} : T^1 \rightarrow T^0$ per cui la trasformata propria del ramo è globalmente liscia.

Lo stesso ragionamento applicato a B_2 consente di trovare $\pi_{(2)} : T^2 \rightarrow T^1$ che ne risolva le singolarità; il lemma 3.4.1 assicura che $\pi_{(2)}^{-1}(B_1)$ sia ancora una superficie liscia.

Ripetendo tale procedura fino al ramo B_k si determina una mappa π' in cui ogni B_j ha trasformata propria non singolare. π' è un isomorfismo al di fuori del luogo eccezionale per com'è costruito. Non è però detto che le curve in

$(\pi')^{-1}(C)$ siano in incrocio normale: la proposizione 3.4.3. indica solamente che le curve eccezionali di scoppamenti che risolvono una sola singolarità sono in tale disposizione.

Si supponga che due rami B e B' di $(\pi')^{-1}(C)$ abbiano numero di intersezione $s > 1$ in un punto P : è possibile fissare delle coordinate locali (x, y) intorno a P per cui B sia data da $y = 0$ e B' da $y = f(x)$ con f di ordine s . Lo scoppamento di centro P con coordinate $(x, y) = (x_1, x_1 y_1)$ produce come trasformate proprie $y_1 = 0$ e $y_1 = \frac{f(x_1)}{x_1}$, quindi il numero di intersezione è $s - 1$.

Di nuovo per il lemma 3.4.1., la nuova curva eccezionale è trasversa alle trasformate delle componenti di $(\pi')^{-1}(C)$; inoltre, visto che le molteplicità dei rami calano con gli scoppamenti, i numeri di intersezione decrescono, quindi la procedura descritta fa in modo di avere curve che si intersecano trasversalmente.

In questa situazione, se ci sono punti in cui si incontrano più di due curve, il lemma 3.4.2. assicura che lo scoppamento in tali punti crei una curva eccezionale che interseca le trasformate proprie di tali curve in punti distinti e ancora trasversalmente. \square

Esempio 3.3.

Nell' esempio 3.2 i due scoppamenti realizzati sulla curva $y^3 = x^5$ hanno prodotto sulla superficie T_2 la trasformata propria liscia $C^{(2)}$: $y_2 = x_2^2$. Le curve generate dallo scoppamento su tale superficie non sono nella disposizione di incrocio normale: anche se sono lisce, le intersezioni tra E_0 e $C^{(2)}$ e fra E_1 e $C^{(2)}$ non sono trasverse.

Si conduce quindi lo scoppamento in $(0, 0)$ con cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = x_3 y_3 \end{cases}$$

La trasformata propria è $x_3(y_3 - x_3) = 0$; E_1 è $y_3 = 0$ mentre E_0 non compare e la curva eccezionale E_2 è $x_3 = 0$. Poichè la trasformata stretta $C^{(3)}$ è $y_3 = x_3$, le condizioni di incrocio normale non sono verificate: sebbene

le intersezioni siano trasverse, $E_1 \cap E_2 \cap C^{(3)} = (0, 0)$.

Un ulteriore scoppimento è dato da:

$$\begin{cases} x_3 = x_4 y_4 \\ y_3 = y_4 \end{cases}$$

Risulta che: la trasformata propria è $y_4(1 - x_4) = 0$, E_1 non si vede, E_2 è $x_4 = 0$, E_3 è $y_4 = 0$ e $C^{(4)}$ è $x_4 = 1$. Si ha ora la configurazione di incrocio normale.

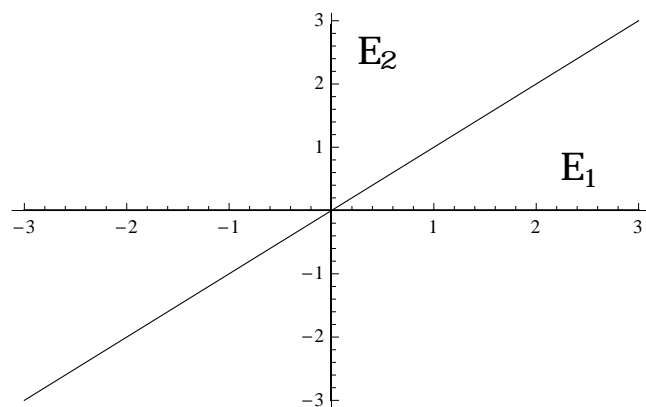


Figura 3.3: Il terzo scoppimento sulla superficie T_3

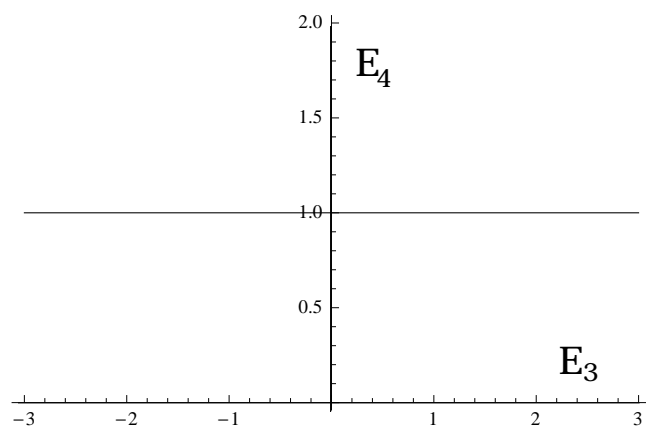


Figura 3.4: Il quarto scoppimento sulla superficie T_4

Una buona risoluzione ottenuta scoppiando i punti che non permettono che si verifichi la configurazione di incrocio normale come indicato dalla dimostrazione si dice *minimale*.

Si noti che l'ordine in cui si scelgono i centri non altera il risultato finale: lo scoppimento è una procedura che di fatto modifica solamente le curve che passano per il centro, lasciando indisturbata la situazione dei punti lontani da esso.

3.5 Punti infinitamente vicini

Si cerca ora di utilizzare le informazioni derivanti dalla disposizione delle curve prodotte da una buona risoluzione: i dati raccolti serviranno per descrivere la singolarità, centro dello scoppimento.

Si considera un ramo B su cui si conducono gli scoppimenti necessari per ottenere una buona risoluzione.

Definizione 3.9.

Un punto della curva E_0 in T_1 si dice un *punto infinitamente vicino del primo ordine* ad $O \in \mathbb{C}^2$.

Un punto di $E_{r-1} \subset T_r$ è un *punto infinitamente vicino dell' r -esimo ordine* ad O .

Osservazione 14.

Per ogni ordine r c'è un punto O_r infinitamente vicino ad O sulla trasformata propria di B .

Dimostrazione.

Dal lemma 3.4.1 $B^{(r)} \cap E_{r-1}$ è un punto: esso soddisfa la definizione di punto infinitamente vicino dell' r -esimo ordine. \square

3.5.1 Relazione di prossimità

La prossimità è la relazione fondamentale fra punti infinitamente vicini ad uno stesso punto di diverso ordine.

Definizione 3.10.

Siano $O_i \in E_{i-1} \subset T_i$ ed $O_j \in E_{j-1} \subset T_j$ due punti infinitamente vicini ad $O \in \mathbb{C}^2$ con $i > j$.

O_i si dice *prossimo* ad O_j se la curva E_j ha una trasformata propria in T_i su cui giace O_i , così E_i interseca E_j in T_{i+1} .

Osservazione 15.

O_i è sempre prossimo ad E_{i-1} in quanto $O_i \in E_{i-1}$ per costruzione.

D'ora in poi si indica con $m_i(B)$ la molteplicità in O_i della trasformata stretta $B^{(i)}$ di B in T_i .

Si considerano ora le proprietà basilari della relazione di prossimità.

Proposizione 3.5.1.

- (i) $\forall i$ esiste al più un j , $j < i - 1$ tale che O_i è prossimo ad O_j .
- (ii) Se O_i è prossimo ad O_j allora O_k è prossimo ad O_j per $j < k < i$.
- (iii) La molteplicità $m_j(B)$ è la somma di tutte le $m_i(B)$ per cui O_i è prossimo ad O_j .

Dimostrazione.

- (i) Per la proposizione 3.4.3 esiste al più una curva E_j , $j < i - 1$ per cui $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.
- (ii) Dall'ipotesi si ha che $O_i \in E_j$, dunque $E_j \cap E_{i-1} \neq \emptyset$.
Per questo $\pi_{i-1}(E_j)$, cioè $E_j \subset T_{i-1}$, contiene O_{i-1} . Analogamente $\pi_{i-2}(E_j) \ni O_{i-2}$ e così si deducono le relazioni di prossimità della tesi.

(iii) Per fissare le idee si suppone $j = 0$.

Come già visto nella dimostrazione del teorema 3.3.1, il ramo B si parametrizza con $x = t^m$, $y = b_1 t^m + b_2 t^{2m} + \dots + b_q t^{qm} + ct^{\beta_1} + \dots$, dove $q = \lfloor \frac{\beta_1}{m} \rfloor$.

Il primo scoppiamento, con cambiamento di coordinate $(x, y) = (x_1, x_1 y_1)$ e curva eccezionale E_0 data da $x_1 = 0$, porge la trasformata propria $B^{(1)}$ parametrizzata da $x = t^m$, $y = b_1 + b_2 t^m + \dots + b_q t^{qm-1} + ct^{\beta_1-m} + \dots$. Il punto $O_1 = B^{(1)} \cap E_0$ è $(0, b_1)$; con la nuova coordinata $y'_1 = y_1 - b_1$ esso diventa $(0, 0)$.

E' necessario ora distinguere due casi.

Se $\beta_1 > 2m$ allora $m_1(B) = m$. Un ulteriore scoppiamento dato da $(x_1, y'_1) = (x_2, x_2 y_2)$ produce $B^{(2)}$ data da $x = t^m$, $y = b_2 + b_3 t^m + \dots + b_q t^{qm-2} + ct^{\beta_1-2m} + \dots$, per cui $O_2 \notin E_0$.

A questo punto è possibile affermare che solamente O_1 è prossimo ad O_0 , perchè se fosse O_k , $k > 2$, prossimo ad O_0 , allora per (ii) dovrebbe risultare che O_2 è prossimo ad O_0 , ma ciò è falso.

Se invece $\beta_1 < 2m$ allora $q = 1$ e l'espansione di y'_1 inizia da ct^{β_1-m} : la molteplicità $m_1(B)$ è dunque $\beta_1 - m$. Dividendo m per m_1 si ottengono Q ed R interi, $0 \leq R < m_1(B)$, per cui $m = Qm_1(B) + R$.

Poichè l'ordine della serie ψ che dà y'_1 è $m_1(B)$, esiste una serie convergente u per cui $u^{m_1(B)} = \psi(t)$ e la relazione si può invertire; tali considerazioni forniscono la nuova parametrizzazione per $B^{(1)}$

$$y'_1 = u^{m_1(B)}, \quad x_1 = du^m + \dots \quad \text{con } d \neq 0.$$

Si eseguono Q scoppiamenti: per $1 \leq i \leq Q$ le coordinate in T_{i+1} sono $x_{i+1} = y_1^{-i} x_1$ e $y_{i+1} = y_1$. Quindi la curva eccezionale E_i è $y_{i+1} = 0$, le curve E_k date da $y_{k+1} = 0$ con $k < i$ non compaiono, la trasformata propria di E_0 è $x_{i+1} = 0$ e la trasformata propria $B^{(i+1)}$ di B è $y_{i+1} = u^{m_1(B)}$, $x_{i+1} = du^{m-im_1(B)} + \dots$. Pertanto, quando $i < Q$, il punto $O_{i+1} = (0, 0)$ giace sulle trasformate proprie di E_0 ed E_i ed $m_{i+1}(B) = m_1(B)$.

Se $R = 0$, O_{Q+1} ha coordinate $(d, 0)$, per cui non giace su E_0 : i pun-

ti O_1, \dots, O_Q sono prossimi ad O_0 e $\sum_{i=1}^Q m_i(B) = \sum_{i=1}^Q m_1(B) = Qm_1(B) = m$.

Se invece $R \neq 0$, $O_{Q+1} = 0$ giace sulle trasformate proprie di E_0 ed E_Q ed $m_{Q+1}(B) = R$ perchè la serie che definisce x_{q+1} ha ordine R , che è strettamente minore dell'ordine $m_1(B)$ della serie che dà y_{q+1} . Pertanto $B^{(Q+1)}$ ammette come tangente E_Q data da $y_{Q+1} = 0$ e non E_0 data da $x_{Q+1} = 0$: ciò implica che O_{Q+2} giace su E_Q ma non su E_0 . I punti prossimi ad O_0 sono quindi O_1, \dots, O_{Q+1} con molteplicità $m_2(B) = \dots = m_Q(B) = m_1(B)$ ed $m_{Q+1}(B) = R$. La tesi è quindi provata perchè $Qm_1(B) + R = m$.

□

Grazie alla proposizione diventa relativamente semplice riconoscere le relazioni di prossimità guardando le $m_i(B)$: ad esempio si deduce che O_{i+2} è prossimo ad O_i sse $m_i(B) > m_{i+1}(B)$.

Corollario 3.5.2.

Si considerino due germi di curve irriducibili con successioni $\{O_i\}$, $\{O'_i\}$ di punti infinitamente vicini.

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

- (i) *Le due successioni hanno le stesse relazioni di prossimità, ovvero O_i è prossimo ad O_j sse O'_i è prossimo ad O'_j .*
- (ii) *La successione delle molteplicità $m_i(B)$ di O_i è uguale alla successione delle molteplicità $m'_i(B)$ di O'_i .*

Dimostrazione.

- (i) \Rightarrow (ii) Si ricorda che lo scoppimento fa in modo che l' s -esima trasformata propria del primo germe considerato sia liscia per s maggiore di un certo \bar{s} e che la t -esima trasformata propria del secondo sia liscia per t maggiore di \bar{t} .

Sia $\bar{v} = \max\{\bar{s}, \bar{t}\}$ e si considerino $m_{\bar{v}}$ ed $m'_{\bar{v}}$. Per la proposizione precedente punto (iii) e poichè $m_v = m'_v (= 1) \forall v > \bar{v}$ si ha $m_{\bar{v}} = m'_{\bar{v}}$. Lo stesso ragionamento si può ora ripetere per confrontare $m_{\bar{v}-1}$ e $m'_{\bar{v}-1}$: la tesi segue quindi per induzione.

(ii) \Rightarrow (i) Sia $j \in \mathbb{N}$.

Sia $i \in \mathbb{N}$, $i > j$ tale che O_k è prossimo ad O_j per i k per cui $j < k \leq i$.

Per la proposizione appena provata, ciò significa che $m_j(B) = \sum_{k=j+1}^i m_k(B)$.

Per l'ipotesi si ha che anche $m'_j(B) = \sum_{k=j+1}^i m'_k(B)$ e quindi O'_k è prossimo ad O'_j per i k per cui $j < k \leq i$.

□

Si descrive ora un modo per presentare le relazioni di prossimità.

Definizione 3.11.

Si denoti con $P(B)$ la matrice $(p_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$, dove:

$$p_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } j > i \text{ ed } O_i \text{ è prossimo ad } O_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed N è il numero di scoppiamenti necessari per ottenere una buona risoluzione.

La matrice $P(B)$ si dice la *matrice di prossimità* del ramo B .

Osservazione 16.

$P(B)$ è una matrice triangolare superiore con determinante 1.

Si può quindi considerare la matrice $Q(B) = P(B)^{(-1)}$ e indicare con q_{ij} le sue componenti.

Osservazione 17.

Le relazioni di prossimità possono essere rappresentate anche in maniera grafica disponendo gli O_k su un segmento e collegando O_i con O_j tramite un arco se O_j è prossimo ad O_i .

Visto il forte legame tra relazioni di prossimità e molteplicità, è utile scrivere $m_k(B)$ nel posto occupato da O_k .

Si cerca ora di dare un significato all'inversa della matrice di prossimità.

Lemma 3.5.3.

Con le notazioni specificate sopra, $m_r(B) = q_{rN}$.

Dimostrazione.

Dalla proposizione parte (iii) si ha:

$$m_j(B) = \sum_{k=j+1}^i m_k(B) \Rightarrow p_{jj}m_j(B) - \sum_{k=j+1}^i m_k(B) = 0$$

$$\Rightarrow p_{jj}m_j(B) - \sum_{k=j+1}^i p_{jk}m_k(B) = 0 \Rightarrow \sum_{k=j}^i p_{jk}m_k(B) = 0$$

La relazione è vera per $j < N$: l'esclusione di $j = N$ è dovuta al fatto che nella costruzione della matrice non si tiene conto dei punti prossimi ad O_N .

Si ha quindi $\sum_{k=j}^i p_{jk}m_k(B) = \delta_{jN}$.

Moltiplicando per q_{rj} e sommando in j si ha la tesi. \square

Esempio 3.4.

Riferendosi alla curva $y^3 = x^5$, già esaminata con i suoi 4 scoppamenti che consentono di raggiungere la configurazione di incrocio normale, si ha che la sequenza delle molteplicità è 3, 2, 1, 1, 1.

Per quanto riguarda le relazioni di prossimità, O_1 ed O_2 sono prossimi ad O_0 , O_2 ed O_3 sono prossimi ad O_1 , O_3 è prossimo ad O_2 ed O_4 è prossimo ad O_3 .

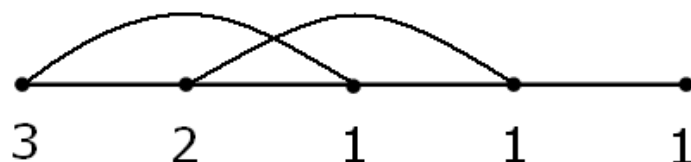


Figura 3.5: Diagramma delle molteplicità e delle relazioni di prossimità

La matrice di prossimità e la sua inversa sono matrici quadrate di ordine 5.

$$P(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si nota che l'ultima colonna di $Q(B)$ corrisponde alla sequenza delle molteplicità.

Bibliografia

- [1] Wall C.T.C., *Singular points of plane curves*, Cambridge : Cambridge university press, 2004. - XI, Collana London Mathematical Society student texts ; 63.
- [2] Manetti Marco, *Geometria Algebrica* - Versione preliminare 30 agosto 2008, da <http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/>.
- [3] Brieskorn Egbert e Knörrer Horst, *Plane algebraic Curves*, Birkhäuser, 1981.
- [4] Cartan Henri, *Elementary theory of analitic functions of one or several complex variables*, Dover, 1995.

Ringraziamenti

In queste ultime pagine vorrei ringraziare tutti quelli che nei tre anni appena trascorsi hanno contribuito alla mia formazione di piccolo matematico e mi hanno arricchito come persona.

Grazie al mio relatore Luca Migliorini per la sua disponibilità, per la sua capacità di coinvolgere e stupire con la matematica e per avermi sempre considerato un ragazzo prima di uno studente.

Grazie anche agli altri professori del dipartimento che ho avuto modo di conoscere: accomunati dalla stessa grande passione, tutti loro, in modalità personali e perciò spesso opposte l'una all'altra, sanno trasmettere la profondità e il fascino del pensiero matematico.

Grazie a mamma per volermi ascoltare sempre e comunque, per offrirmi la lucidità che non so di avere e... per farmi ingrassare un po' ogni volta che torno a casa!

Grazie a papà per infondermi tranquillità, per suggerirmi uno spirito pragmatico e per essere un grande punto di riferimento.

Grazie a Luca per la tua solarità e la tua intelligenza, per volere e riuscire a starmi vicino anche se ci vediamo pochissimo.

Grazie a Giulia, Elisabetta e Beatrice per la vostra premura nei miei confronti e per i pomeriggi trascorsi a chiacchierare e a confrontarsi.

Grazie a tutto il nutritissimo gruppo del "parchetto di Coppa"! A voi davanti tanti momenti di spensieratezza, di svago e di divertimento e voglio ringraziarvi per essere stati sempre presenti, anche in un'estate non esattamente facile per me.

Passando al versante bolognese, inizio dal gruppo di cui sono un componente a dispetto delle mie origini: i "bolo"!

Grazie a Vale: perchè mi dai sempre la possibilità di dire quello che penso e per questo tante volte ti sei beccata la mia acidità e sei comunque rimasta; per la tua fermezza che riesce a farmi ragionare nei periodi no; per rendermi partecipe dei tuoi tanti impegni; per i pomeriggi in cui guardavamo "One tree hill"; per il rigore brillante e dinamico che hai come matematica, che mi ha salvato tante volte da atroci dubbi.

Grazie a Diego: per la semplicità disarmante con cui mi hai accolto; perchè con il tuo entusiasmo regali serenità; per le serate da me a guardare qualche film, anche di dubbio gusto (vogliamo parlare di "Black Sheep"?); per essere sempre pronto ad organizzare qualche uscita; perchè, avendo passato tanti pomeriggi sui nostri appunti, ho potuto conoscere la freschezza e la genialità dei tuoi ragionamenti matematici.

Grazie ad Enrico: per la tua generosità e disponibilità; per aver visto i miei momenti di chiusura ed essere restato; per la tua ironia; per la tua pragmaticità che mi ispira fiducia; per la precisione e l'umiltà che impieghi nell'essere un matematico.

Ringrazio anche il gruppo di Rimini: per i piccoli pettegolezzi trash di Elisa, per le battute di Andre, per la bontà di Giova, per i consigli cinematografici di Ale e per la solarità di Michi.

L'ultimo ringraziamento va ai miei coinquilini storici. Grazie a Lorenzo per le nostre chiacchierate notturne su qualsiasi argomento, per aver voluto condividere tanto di te con me, per la tua lealtà e la tua sincerità. Grazie anche a Massimo per la tua allegria e la tua spensieratezza.