Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

RIVESTIMENTI
E
GRUPPO FONDAMENTALE

Tesi di Laurea in Geometria III

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Fioresi Rita

Presentata da:
Mambelli Francesco

Sessione II
Anno Accademico 2009/10

Introduzione

In questa tesi ci occuperemo di analizzare la teoria sui rivestimenti, mettendo in rilievo le loro principali proprietà e il loro legame con alcuni concetti di notevole importanza quali il gruppo fondamentale e i gruppi di Lie. Inoltre approfondiremo un esempio di rivestimento tra gli spazi $SU(2, \mathbb{C})$ e $SO(3, \mathbb{R})$, al quale dedicheremo un intero capitolo. La trattazione sarà comunque accompagnata da numerosi esempi, con scopo esplicativo e di non secondaria importanza in quanto parti integranti dell'approfondimento eseguito.

Il primo capitolo è diviso in tre sezioni, ognuna delle quali analizza un aspetto dei rivestimenti. Nella prima parte affronteremo il concetto di rivestimento dandone la definizione e alcuni esempi tangibili del suo significato concreto; passeremo poi all'analisi di alcune semplici proprietà, che utilizzeremo in seguito nel resto della trattazione per dimostrare enunciati ben più importanti. Nella seconda sezione affronteremo una delle parti principali della teoria dei rivestimenti, quella legata ai teoremi di sollevamento: dopo aver enunciato la definizione di sollevamento e aver provato che, se tale sollevamento esiste, è essenzialmente unico, analizzeremo i due teoremi di sollevamento dei cammini e delle omotopie e alcuni corollari. Nell'ultima parte tratteremo poi un caso particolare di rivestimento, quello in cui gli spazi presi in analisi sono G-spazi: alcuni dei risultati qui analizzati forniscono una caratterizzazione differente della definizione di rivestimento e saranno poi ripresi nella trattazione del rivestimento $SU(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(3, \mathbb{R})$.

Il secondo capitolo è dedicato interamente al legame tra i concetti di rivestimento e di gruppo fondamentale ed è diviso anch'esso in tre sezioni. La prima ha scopo introduttivo e vi affronteremo la definizione di gruppo fondamentale e la trattazione sulle proprietà dell'omomorfismo indotto tra i gruppi fondamentali di uno spazio topologico e del suo rivestimento. Nella seconda sezione tratteremo l'analisi dell'azione di monodromia di un rivestimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ sulla fibra preimmagine di un punto di X: la monodromia associa a ogni elemento del gruppo di X una biiezione della fibra in questione in se stessa; l'insieme delle biiezioni su tale fibra è detto gruppo di monodromia del rivestimento p. Affronteremo inoltre alcune proprietà riguardanti la cardinalità della fibra. Nell'ultima parte analizzeremo i rivestimenti universali: tra i risultati principali vi sono la corrispondenza biunivoca tra il gruppo fondamentale di X in un punto e la fibra preimmagine di quel punto, risultato che ci fornirà poi un metodo per determinare i gruppi fondamentali, la proprietà universale dei rivestimenti universali e un teorema di esistenza dei rivestimenti universali. Tutta questa sezione è accompagnata da alcuni esempi relativi agli argomenti trattati.

Il terzo capitolo è dedicato allo studio del rivestimento $SU(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(3, \mathbb{R})$. Nelle prime due sezioni analizzeremo le proprietà di $SU(2, \mathbb{C})$, tra cui la semplice connessione e il calcolo del centro, e la costruzione di tutte le funzioni necessarie per arrivare a definire il rivestimento cercato; dimostreremo che il rivestimento è tale attraverso la caratterizzazione data per i rivestimenti di G-spazi. Infine, nella terza sezione, analizzeremo l'aspetto differenziale delle due varietà $SU(2, \mathbb{C})$ e $SO(3, \mathbb{R})$, di cui vengono calcolati gli spazi tangenti nell'identità attraverso il teorema di submersione.

Nel quarto e ultimo capitolo affronteremo i rivestimenti universali di particolari spazi topologici, i gruppi di Lie. Dopo aver definito le nozioni di gruppo di Lie e di gruppo topologico ammissibile, introdurremo il concetto di rivestimento di un gruppo topologico e analizzeremo le condizioni sotto le quali si ha il rivestimento universale. Infine riprenderemo l'esempio del capitolo precedente alla luce di quanto appena visto: vedremo così che il gruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ ammette rivestimento universale, il gruppo $SU(2,\mathbb{C})$; determineremo poi un altro gruppo rivestimento universale di $SO(3,\mathbb{R})$, la sfera unitaria S^3 in $\mathbb{R}^4$, che risulta essere isomorfo a $SU(2,\mathbb{C})$.

Indice

Introduzione **i**

1 Rivestimenti **1**

1.1 Rivestimenti 1

1.2 Teorema di sollevamento dei cammini 6

1.3 Rivestimenti di G-spazi 11

2 Rivestimenti e gruppo fondamentale **15**

2.1 Il gruppo fondamentale 16

2.2 Monodromia di un rivestimento 18

2.3 Rivestimenti universali 20

3 Il rivestimento $SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$ **29**

3.1 Proprietà di $SU(2,\mathbb{C})$ 29

3.2 $SU(2,\mathbb{C})$ come rivestimento di $SO(3,\mathbb{R})$ 33

3.3 La mappa p da un punto di vista differenziale 43

4 Rivestimento universale di un gruppo di Lie **47**

Bibliografia **53**

Capitolo 1

Rivestimenti

In questo capitolo vogliamo soffermare la nostra attenzione sui rivestimenti. Dopo aver definito il concetto di rivestimento e aver analizzato alcuni semplici enunciati sulle loro proprietà di base, ci dedicheremo all'esposizione di una parte fondamentale della teoria dei rivestimenti, i cui risultati prendono il nome di teoremi di sollevamento. Infine analizzeremo un caso particolare di rivestimenti, ossia quelli in cui gli spazi considerati sono G-spazi. Tutta la trattazione sarà affiancata da numerosi esempi, nell'intento di far comprendere meglio i risultati raggiunti.

1.1 Rivestimenti

In questa prima sezione definiremo il concetto di rivestimento, chiarendolo attraverso alcuni esempi, e enunceremo alcuni risultati chiave con lo scopo di sottolineare le loro principali proprietà.

Definizione 1.1. Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un'applicazione continua. Diremo che un aperto $U \subseteq X$ è *uniformemente rivestito* da p se la preimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di $\widetilde{X}$ ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite l'applicazione p. Si dice che $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ è un *rivestimento* se ogni punto $x \in X$ ammette un intorno aperto uniformemente rivestito da p. In tal caso l'applicazione p è detta *proiezione*, X è detto *spazio ambiente* e

$\widetilde{X}$ *spazio totale.*

In altre parole, $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ è un *rivestimento* se:

(i) p è suriettiva;

(ii) per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x e una famiglia di aperti $\{U_j \mid j \in J\}$ di $\widetilde{X}$ tali che:

  (a) $p^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} U_j$;

  (b) $p\,|_{U_j}\colon U_j \longrightarrow U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$.

Analizziamo ora alcune semplici proprietà dei rivestimenti. Si tratta di risultati che ci torneranno utili nelle dimostrazioni dei risultati successivi.

Osservazione 1.2. Ogni rivestimento è un omeomorfismo locale.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \widetilde{X}$ esiste un suo intorno aperto U_j^x incluso in $\widetilde{X}$ che è omeomorfo a $U = p(U_j^x)$ mediante p. Infatti, essendo p un rivestimento per ipotesi, U_j^x è una delle componenti connesse di $p^{-1}(U)$. □

Il viceversa è ovviamente falso poiché un omeomorfismo locale non è in generale suriettivo.

Controesempio 1.3. Sia $A \subset X$ $(A \neq X)$ e sia $j : A \longrightarrow X$ un'immersione. Questa è un omeomorfismo locale (poiché $j\,|_A = id$) ma non è un rivestimento, poiché per ogni $x \in X \setminus A$ non esiste nessun punto di A che è preimmagine di x. Più concretamente, siano $X = \mathbb{R}$ e $A = (0, \pi)$. Sia $j : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ un'immersione. Sia $x \in (0, \pi)$ e sia U un suo intorno aperto connesso, con $U \subseteq (0, \pi)$. Restringendo opportunamente il codominio di $j\,|_U$, ossia all'intervallo U, si ottiene l'applicazione identica: $j\,|_U = id$. j è quindi un omeomorfismo locale per ogni $x \in (0, \pi)$ (poiché id è un omeomorfismo) e dunque è un omeomorfismo locale. j non è però un rivestimento. Consideriamo il punto $\frac{3\pi}{2}$. $\frac{3\pi}{2} \in \mathbb{R} - (0, \pi) \subset \mathbb{R}$. Per ogni U intorno aperto di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste alcuna famiglia $\{U_j \mid j \in J\}$ di aperti di $(0, \pi)$ tali che $j^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$ poiché non esiste $x \in (0, \pi)$ tale che $x = j^{-1}(\frac{3\pi}{2})$.

Affrontiamo ora un esempio di rivestimento: l'applicazione $e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ che proietta la retta reale sulla circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 1.4. L'applicazione $e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, e(x) = e^{2\pi i x}$ è un rivestimento. Infatti per ogni $y \in S^1$ esiste $x \in \mathbb{R}$ che è preimmagine di y mediante e. Di tali x ne esistono infiniti e sono del tipo $x = i(arg\ y + 2\pi k)$, con $k \in \mathbb{Z}$, dove $arg\ y$ è una qualsiasi accezione dell'argomento di y. Così e è suriettiva. Inoltre per ogni $y \in S^1$ esiste U intorno aperto di y, $U = (y-\epsilon, y+\epsilon)$, e esiste una famiglia $\{(i(arg\ (y-\epsilon) + 2\pi k), i(arg\ (y+\epsilon) + 2\pi k)) = U_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ di aperti di $\mathbb{R}$ tali che $e^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$, con $U_k \cap U_{k'} = \emptyset$ per ogni $k, k' \in \mathbb{Z} : k \neq k'$, e $e\mid_{U_k}: U_k \longrightarrow U$ è un omeomorfismo per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
La sua restrizione a un qualsiasi aperto proprio di $\mathbb{R}$, sia V, è un omeomorfismo locale ma non un rivestimento. Infatti, supposto $V = (0, \pi)$, $e\mid_V: V \longrightarrow S^1$ non è suriettiva, poiché considerando $y = -i \in S^1\ \nexists x \in V$ tale che $e(x) = y$.

Analizziamo un'importante proprietà: dato un rivestimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$, la proiezione p è aperta e lo spazio base X è lo spazio quoziente relativo alla proiezione.

Teorema 1.5. *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento. p è un'applicazione aperta e X ha la topologia quoziente relativa a p.*

Dimostrazione. Siano U un sottoinsieme aperto di $\widetilde{X}$, x un punto di $p(U)$ e $V \subset X$ un intorno aperto di x uniformemente rivestito da p. Sia $\widetilde{x}$ un punto di U tale che $x = p(\widetilde{x})$. Allora $\widetilde{x} \in p^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} V_j$. Così $\widetilde{x} \in V_{\bar{j}} \cup U$ con $\bar{j} \in J$. Poiché $V_j \cap U$ è aperto in V_j e $p\mid_{V_j}: V_j \longrightarrow V$ è un omeomorfismo (per l'osservazione 1.2), $p(V_j \cap U)$ è aperto in V e quindi in X. Inoltre $x = p(\widetilde{x}) \in p(V_j \cap U) \subseteq p(U)$. Abbiamo così trovato un intorno aperto di x contenuto interamente in $p(U)$, da cui segue che $p(U)$ è aperto. Ciò dimostra che p è aperta.
Poiché p è suriettiva, continua e aperta, un sottoinsieme V di X è aperto in X se e solo se $p^{-1}(V)$ è aperto in $\widetilde{X}$ e questa è proprio la topologia quoziente relativa a p. $\square$

Nei seguenti lemmi supporremo sempre che $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ sia un rivestimento. Notiamo dapprima che la restrizione di un rivestimento dalla preimmagine di un aperto all'aperto stesso è un rivestimento.

Lemma 1.6. *Per ogni aperto $U \subset X$, la restrizione $p\,|_U \colon p^{-1}(U) \longrightarrow U$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $p\,|_U \colon p^{-1}(U) \longrightarrow U$ soddisfa i punti (i) e (ii) della definizione di rivestimento. Evidentemente $p\,|_U$ è suriettiva poiché, su U, $(p\,|_U)^{-1}(U) = p^{-1}(U)$. Per ogni $x \in X$, U è un intorno aperto di x. Ora $(p\,|_U)^{-1}(U) = p^{-1}(U)$, che è uguale all'unione disgiunta di aperti U_j, ciascuno dei quali è omeomorfo a U mediante $p = p\,|_U$ su U. $\square$

Definiamo ora il concetto *connessione locale*, concetto che verrà poi utilizzato nel lemma seguente.

Definizione 1.7. X è *localmente connesso* se per ogni $x \in X$ e per ogni U_x intorno di x esiste $V_x \subset U_x$ intorno di x connesso.

Anche la restrizione di $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ a una componente connessa del dominio di definizione è un rivestimento. Soffermiamoci prima su un risultato che ci tornerà utile nella dimostrazione del lemma successivo.

Osservazione 1.8. Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento. Allora $\widetilde{X}$ è localmente connesso.

Dimostrazione. Sia $x \in \widetilde{X}$. Sia U un aperto di X tale che $p^{-1}(U) \ni x$. $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti. $p^{-1}(U)$ non è connesso, a meno che non sia formato da un solo aperto U_0. In tal caso, U_0 è l'aperto connesso contenente x cercato. Altrimenti esiste $U_{\bar{j}} \ni x, U_{\bar{j}} \subseteq p^{-1}(U)$ aperto. Se $U_{\bar{j}}$ è connesso, $\widetilde{X}$ è localmente connesso. Se $U_{\bar{j}}$ non lo è, $U_{\bar{j}} = A \cup B$, con A e B aperti non vuoti, $A \cap B = \emptyset$. Supponiamo che x appartenga a A. Se A è connesso, è l'aperto connesso contenente x cercato. Altrimenti A si spezza in due aperti e si ripete il ragionamento precedente finché non si trova un aperto connesso contenente x. $\square$

Lemma 1.9. *Sia $Y \subseteq \widetilde{X}$. Se Y è una componente connessa di $\widetilde{X}$ e X è connesso e localmente connesso, la restrizione $q : Y \longrightarrow X$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Per l'osservazione 1.8, anche $\widetilde{X}$ è localmente connesso.
Mostriamo ora che q è suriettiva provando che $p(Y) = X$. Y è aperto in $\widetilde{X}$ poiché è una componente connessa di $\widetilde{X}$ e p è aperta in quanto rivestimento (per il teorema 1.5), così $p(Y)$ è aperta in X. Sia $x \in \overline{p(Y)}$ e sia U_x un intorno connesso di x uniformemente rivestito. Evidentemente $U_x \cap p(Y) \neq \emptyset$. Così $p^{-1}(U_x) \cap Y \neq \emptyset$ in quanto preimmagine di un insieme non vuoto e quindi Y contiene qualche componente connessa $U_1, \ldots, U_n$ di $p^{-1}(U_x)$. Ognuno di questi U_j è omeomorfo a U_x mediante p. Allora per ogni j esiste $\bar{x}_j \in U_j \cap Y$ tale che $p(\bar{x}_j) = x$. Così $x \in p(Y)$ poiché $\bar{x}_j \in Y$. Ne segue che $p(Y)$ è chiuso. Dato che X è connesso e $p(Y)$ è aperto e chiuso, $p(Y) = X$ e dunque q è suriettiva.
Per provare che q è un rivestimento non ci resta che provare l'esistenza di intorni uniformemente rivestiti di ogni punto di X. Sia $x \in X$ e sia U_x un suo intorno aperto. Poiché p è un rivestimento, $p^{-1}(U_x)$ è unione disgiunta di aperti U_j, ciascuno omeomorfo a U_x mediante p. Dato che q è suriettiva, esiste almeno un aperto $U_{\bar{j}}$ contenuto in Y omeomorfo a U_x mediante $q = p$ su Y. Se $U_1, \ldots, U_n$ sono gli aperti di Y ciascuno omeomorfo a U_x mediante q, questi sono disgiunti e sono proprio $q^{-1}(U_x) = (p\mid_Y)^{-1}(U_x)$. □

E' importante osservare che la preimmagine di un punto è un insieme discreto.

Lemma 1.10. *Per ogni $x \in X$, $p^{-1}(x)$ è un sottospazio discreto di $\widetilde{X}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia $U \subseteq X, U \ni x$, un aperto uniformemente rivestito. Dato che p è un rivestimento, $p^{-1}(U)$ è l'unione disgiunta di aperti U_j, ciascuno omeomorfo a U mediante p. Consideriamone uno, sia $U_{\bar{j}}$. Poiché $p : U_{\bar{j}} \longrightarrow U$ è iniettiva e suriettiva, esiste ed è unico $\bar{x} \in U_{\bar{j}}$ tale che $\bar{x} = p^{-1}(x)$. Questo è vero per ogni $\bar{j}$. Così per ogni$j$ $U_j \cap p^{-1}(x)$ ha uno e un solo elemento e gli U_j sono disgiunti. Ne segue che $p^{-1}(x)$ è discreto. □

Cerchiamo ora stabilire una relazione tra le preimmagini di due punti distinti qualsiasi. Tali insieme sono formati dallo stesso numero di elementi, numero che viene detto *grado del rivestimento.*

Lemma 1.11. *Se X è connesso e localmente connesso e se esiste $x_0 \in X$ per cui $p^{-1}(x_0)$ è un insieme finito costituito da n punti, allora $p^{-1}(x)$ è un insieme finito costituito da n punti per ogni $x \in X$. Il numero n si dice grado del rivestimento p.*

Dimostrazione. Sia $Z \subseteq X$ l'insieme costituito dai punti $z \in X$ tali che $p^{-1}(z)$ consiste di n punti. Ovviamente $Z \neq \emptyset$ poiché $x_0 \in Z$. Sia $z \in Z$ e sia U_z un suo intorno connesso uniformemente rivestito. Poiché $p^{-1}(z)$ consiste di n punti, $p^{-1}(U_z)$ è formato da n componenti connesse U_j. Infatti ognuna di queste è omeomorfa a U_z mediate p e dunque esiste e è unico $x \in \widetilde{X} \cap U_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Così $p^{-1}(z')$ consiste di n punti per ogni $z' \in U_z$, cioè $U_z \subseteq Z$. Pertanto Z è aperto.
Sia $t \in \overline{Z}$ e sia U_t un suo intorno connesso uniformemente rivestito. Evidentemente $U_t \cap Z \neq \emptyset$ e sia $t' \in U_t \cap Z$. U_t è intorno anche di t'. Analogamente a prima, $p^{-1}(t')$ consiste di n punti e così $p^{-1}(U_t)$ è formato da n componenti connesse U_j. Infatti ognuna di queste è omeomorfa a U_t mediate p e dunque esiste e è unico $x \in \widetilde{X} \cap U_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Così $p^{-1}(t')$ consiste di n punti per ogni $t' \in U_t$, cioè $U_t \subseteq Z$. In particolare $t \in Z$ e quindi Z è anche chiuso.
Poiché X è connesso, $Z = X$, cioè per ogni $x \in X$ $p^{-1}(x)$ è un insieme costituito da n punti. □

1.2 Teorema di sollevamento dei cammini

Siamo giunti ora alla parte centrale del primo capitolo, dove enunceremo alcuni dei risultati più importanti sui rivestimenti: i teoremi di sollevamento. Prima di fare questo introduciamo il concetto di sollevamento di un cammino.

Definizione 1.12. Se $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ è un rivestimento e $f : Y \longrightarrow X$ è una funzione continua, un *sollevamento* di f è una funzione continua $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$

tale che $p \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Il lemma seguente mostra che, se un sollevamento esiste, esso è essenzialmente unico.

Lemma 1.13. *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento e siano $\widetilde{f}, \widetilde{f'} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ due sollevamenti di una funzione continua $f : Y \longrightarrow X$. Se Y è uno spazio connesso e se $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{f'}(y_0)$ per qualche $y_0 \in Y$, allora $\widetilde{f} = \widetilde{f'}$.*

Dimostrazione. Sia Y' l'insieme dei punti sui quali $\widetilde{f}$ e $\widetilde{f'}$ coincidono, cioè $Y' = \{y \in Y \mid \widetilde{f}(y) = \widetilde{f'}(y)\}$. Per ipotesi $Y' \neq \emptyset$ poiché contiene y_0. Dimostriamo ora che Y' è simultaneamente aperto e chiuso; poiché Y è connesso, ne dedurremo che $Y' = Y$ e che quindi $\widetilde{f} = \widetilde{f'}$.
Sia $y \in Y$ e sia V un intorno aperto di $f(y)$ uniformemente rivestito da p: $p^{-1}(V)$ è cioè unione disgiunta di aperti V_j di $\widetilde{X}$ con $p\mid_{V_j}: V_j \longrightarrow V$ omeomorfismo. Se $y \in Y'$, $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f'}(y) (= \widetilde{x})$ e risulta $\widetilde{x} \in V_k$ per qualche $k \in J$ (poiché deve essere $p(\widetilde{x}) = f(y) \in V$). Ne segue che $\widetilde{f}^{-1}(V_k)$ e $\widetilde{f'}^{-1}(V_k)$ sono aperti di Y e quindi che $\widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_k)$ è un intorno aperto di y. Per vedere che Y' è aperto dobbiamo provare che tale intorno è interamente contenuto in Y'. Sia $z \in \widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_k)$; $\widetilde{f}(z)$ e $\widetilde{f'}(z)$ sono due punti di V_k, entrambi mandati in $f(y)$ da p. Poiché $p\mid_{V_k}$ è iniettiva, ne segue che $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f'}(z)$, ossia che $z \in Y'$. Dunque Y' è aperto.
Se $y \notin Y'$, ossia se $y \in Y \setminus Y'$, si deduce che $\widetilde{f}(y) \in V_k$ e $\widetilde{f'}(y) \in V_l$ con $k \neq l$ (se così non fosse, sarebbe $\widetilde{f}(y), \widetilde{f'}(y) \in V_k$ e risulterebbe $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f'}(y)$ essendo $p(\widetilde{f}(y)) = p(\widetilde{f'}(y)) = f(y)$ e $p\mid_{V_k}$ iniettiva, ma questo è assurdo poiché per ipotesi $y \notin Y'$). Ora $\widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_l)$ è un intorno aperto di y interamente contenuto in $Y \setminus Y'$. Infatti, se esistesse $z \in \widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_l) \cap Y'$, si avrebbe $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f'}(z)$, con $\widetilde{f}(z) \in V_k$ e $\widetilde{f'}(z) \in V_l$, da cui seguirebbe che

$V_k \cap V_l \neq \emptyset$, che è assurdo per la definizione di rivestimento. Così $Y \setminus Y'$ è aperto e quindi Y' è chiuso. $\square$

Di seguito verrà utilizzato come insieme di definizione di alcune funzioni un intervallo chiuso I; supporremo, e non è restrittivo farlo, $I = [0, 1]$.

Corollario 1.14. *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi e sia $\varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ una funzione continua con $p \circ \varphi = p$. Se φ ha un punto fisso (ossia se $\varphi(x_0) = x_0$ per qualche $x_0 \in \widetilde{X}$), φ è l'applicazione identica, ossia $\varphi(x) = x$ per ogni $x \in \widetilde{X}$.*

Dimostrazione. Sia x un punto qualsiasi di $\widetilde{X}$ e sia $\alpha : I \longrightarrow \widetilde{X}$ un arco dal punto fisso x_0 a x. Poiché per ipotesi $p = p\circ\varphi$, $p\circ\alpha = p\circ\varphi\circ\alpha$, da cui si ottiene che gli archi α e $\varphi\circ\alpha$ sono due sollevamenti dell'arco $p\circ\alpha : I \longrightarrow X$. Essendo $\varphi(x_0) = x_0$ dove $x_0 = \alpha(0)$, i due sollevamenti iniziano entrambi in x_0. Per il lemma precedente risulta così che i due archi coincidono, cioè $\alpha = \varphi \circ \alpha$, e che in particolare coincidono i loro punti finali, cioè che $\varphi(\alpha(1)) = \alpha(1)$, dove $\alpha(1) = x$, da cui $\varphi(x) = x$. $\square$

Teorema 1.15. ***(Teorema di sollevamento dei cammini.)*** *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento. Per ogni arco $f : I \longrightarrow X$ e per ogni punto $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{x}_0) = f(0)$, esiste un unico arco $\widetilde{f} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{f} = f$ e $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x}_0$.*

Dimostrazione. Esistenza. Supponiamo dapprima che X sia uniformemente rivestito. Sia $V \subset \widetilde{X}$ un aperto contenente $\widetilde{x}_0$ mandato da p omeomorficamente su X e sia $q : X \longrightarrow V$ l'omeomorfismo inverso. Allora $\widetilde{f} = q \circ f$ è un sollevamento di f.

Passiamo al caso generale. Poiché I è compatto e f è continua, possiamo suddividere l'intervallo I in sottointervalli $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, con $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, tali che $f([t_{i-1}, t_i])$ sia contenuto in un intorno uniformemente rivestito di $f(t_{i-1})$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Indichiamo con V_i tale intorno di $f(t_{i-1})$ e con U_i^j gli aperti di $\widetilde{X}$ tali che $p^{-1}(V_i)$ sia data dalla loro unione disgiunta e ognuno di essi sia omeomorfo mediante p a V_i;

sia U_i quell'aperto U_i^j che contiene $\widetilde{x}_0$. Così $p\mid_{U_i}: U_i \longrightarrow V_i$ è un omeomorfismo e sia $q_i : V_i \longrightarrow U_i$ l'omeomorfismo inverso. Ora esiste $f_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow \widetilde{X}$ continua tale che $f_1(0) = \widetilde{x}_0$ e $p \circ f_1 = f\mid_{[0,t_1]}$. Tale f_1 è data dalla composizione di f con q_1: $f_1 = \sigma_1 = q_1 \circ f$. Procediamo per induzione su i: supponiamo di aver definito $f_i : [0, t_i] \longrightarrow \widetilde{X}$ continua tale che $f_i(0) = \widetilde{x}_0$ e $p \circ f_i = f\mid_{[0,t_i]}$. Possiamo ora sollevare $f\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$ a un'applicazione continua $\sigma_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che $\sigma_i(t_i) = f_i(t_i)$ e $p \circ \sigma_i = f\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$. Tale σ_i è data dalla composizione di f con q_i: $\sigma_i = q_i \circ f$. Incollando f_i con σ_i otteniamo $f_{i+1} : [0, t_{i+1}] \longrightarrow \widetilde{X}$ continua tale che $f_{i+1}(0) = \widetilde{x}_0$ e $p \circ f_{i+1} = f\mid_{[0,t_{i+1}]}$. Così l'arco $\widetilde{f} = f_n$ è un sollevamento di f.
Unicità. Siano $\widetilde{f}, \widetilde{f}' : I \longrightarrow \widetilde{X}$ due sollevamenti di f. Poiché I è connesso e $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}'(0) = \widetilde{x}_0$, per il lemma 1.13 risulta $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$. □

Un corollario del teorema di sollevamento dei cammini è il teorema di sollevamento delle omotopie.

Corollario 1.16. ***(Teorema di sollevamento delle omotopie.)*** *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento. Per ogni funzione continua $F : I \times I \longrightarrow X$ e per ogni punto $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{x}_0) = F(0,0)$, esiste un'unica funzione continua $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{F} = F$ e $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0$.*

Dimostrazione. Sia f un arco in X di punto iniziale x_0 e sia $\widetilde{f}$ il sollevamento di f di punto iniziale $\widetilde{x}_0$. Per ogni $s \in I$ sia $F_s : I \longrightarrow X$ l'arco di punto iniziale $f(s)$ definito da $F_s(t) = F(s,t)$. Per il teorema 1.15, esiste un unico sollevamento $\widetilde{F}_s : I \longrightarrow \widetilde{X}$ di F_s tale che $\widetilde{F}_s(0) = \widetilde{f}(s)$. Definiamo $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow \widetilde{X}$ ponendo $\widetilde{F}(s,t) = \widetilde{F}_s(t)$ per ogni $(s,t) \in I \times I$. L'applicazione $\widetilde{F}$ soddisfa per costruzione $p \circ \widetilde{F} = F$ e $\widetilde{F}(s,0) = \widetilde{f}(s)$ per ogni $s \in I$, in particolare per $s = 0$: $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{f}(0) = \widetilde{x}_0$; inoltre $\widetilde{F}$ è l'unica con queste proprietà, per l'unicità dei sollevamenti $\widetilde{F}_s$. Resta soltanto da verificare che $\widetilde{F}$ è continua.
Poiché $I \times I$ è compatto e F è continua, anche $F(I \times I)$ è compatto; gli aperti uniformemente rivestiti di X ne costituiscono una base e quindi esiste una famiglia finita di aperti uniformemente rivestiti $\{U_1, \ldots, U_N\}$ che ricopre

$F(I \times I)$. Così gli aperti $F^{-1}(U_1), \ldots, F^{-1}(U_N)$ ricoprono $I \times I$. Siano ora $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tali che per ogni $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$ si abbia $[s_{j-1}, s_j] \times [t_{i-1}, t_i] \subset F^{-1}(U_k)$ per qualche k.

Per ogni $j = 1, \ldots, m$, $\widetilde{F}([s_{j-1}, s_j] \times [0, t_1])$ è un sottoinsieme connesso di $\widetilde{X}$ perché gli insiemi $\widetilde{F}(s \times [0, t_1]) = \widetilde{F}_s([0, t_1])$ con $s \in [s_{j-1}, s_j]$ sono connessi e intersecano l'insieme connesso $\widetilde{F}([s_{j-1}, s_j] \times 0) = \widetilde{f}([s_{j-1}, s_j])$. Quindi, avendosi $p(\widetilde{F}([s_{j-1}, s_j] \times [0, t_1])) = F([s_{j-1}, s_j] \times [0, t_1]) \subset U_k$ per qualche k, $\widetilde{F}([s_{j-1}, s_j] \times [0, t_1])$ è contenuto in un aperto V_k mandato da p omeomorficamente su U_k; pertanto $\widetilde{F} \mid_{[s_{j-1}, s_j] \times [0, t_1]} = (p \mid_{V_k})^{-1} \circ F \mid_{[s_{j-1}, s_j] \times [0, t_1]}$ è continua. Per incollamento segue che $\widetilde{F} \mid_{I \times [0, t_1]}$ è continua. Per induzione supponiamo di aver dimostrato che $\widetilde{F} \mid_{I \times [0, t_i]}$ è continua per qualche i, $1 \leq i \leq n-1$. Per ogni $j = 1, \ldots, m$, $\widetilde{F}([s_{j-1}, s_j] \times [t_i, t_{i+1}])$ è un sottoinsieme connesso di $\widetilde{X}$ perché i sottoinsiemi $\widetilde{F}(s \times [t_i, t_{i+1}]) = \widetilde{F}_s([t_i, t_{i+1}])$ con $s \in [s_{j-1}, s_j]$ sono connessi e intersecano $\widetilde{F}([s_{j-1}, s_j] \times t_i)$, anch'esso connesso per l'ipotesi induttiva. Da ciò segue come prima che $\widetilde{F} \mid_{[s_{j-1}, s_j] \times [t_i, t_{i+1}]}$ è continua e per incollamento anche $\widetilde{F} \mid_{I \times [t_i, t_{i+1}]}$ lo è. Di nuovo per incollamento deduciamo che $\widetilde{F} \mid_{I \times [0, t_{i+1}]}$ è continua e quindi $\widetilde{F}$ è continua. $\square$

Un corollario dei teoremi di sollevamento è il teorema di monodromia, per cui, se i sollevamenti di due archi omotopicamente equivalenti hanno lo stesso punto iniziale, hanno anche lo stesso punto finale.

Definizione 1.17. Siano f e f' due archi in X. f e f' sono omotopicamente equivalenti se f e f' sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$.

Corollario 1.18. *Siano f_0 e f_1 due archi omotopicamente equivalenti in X e siano $\widetilde{f}_0$ e $\widetilde{f}_1$ due sollevamenti rispettivamente di f_0 e f_1. Se $\widetilde{f}_0(0) = \widetilde{f}_1(0)$, allora $\widetilde{f}_0(1) = \widetilde{f}_1(1)$.*

Dimostrazione. Sia $F : f_0 \sim f_1$ un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$; possiamo sollevarla in modo unico ad un'applicazione $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che $\widetilde{F}(0, 0) = \widetilde{f}_0(0) = \widetilde{f}_1(0)$. Per l'unicità del sollevamento si avrà $\widetilde{F}(t, 0) = \widetilde{f}_0(t)$ e $\widetilde{F}(t, 1) = \widetilde{f}_1(t)$. Inoltre per ogni $s \in I$ $p(\widetilde{F}(1, s)) = F(1, s) = f_0(1)$, quindi $\widetilde{F}(1,s) \in p^{-1}(f_0(1))$. Ma allora $\widetilde{F}(1,s)$ è costante e, in particolare, $\widetilde{f_0}(1) = \widetilde{F}(1,0) = \widetilde{F}(1,1) = \widetilde{f_1}(1)$. $\widetilde{F}$ è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra $\widetilde{f_0}$ e $\widetilde{f_1}$. $\square$

1.3 Rivestimenti di G-spazi

Alcuni esempi di rivestimenti si ottengono a partire da alcuni G-spazi; richiamiamo alcune nozioni su tali spazi.

Definizione 1.19. Sia X uno spazio topologico e sia G un gruppo. X si dice *G-spazio* se G agisce su X e se per ogni $g \in G$ la funzione $x \longmapsto g \cdot x$ risulta continua. Se X è un G-spazio, diremo che l'azione di G su X è *propriamente discontinua* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno V di x tale che, per ogni coppia g, g' di elementi distinti di G, $g \cdot V \cap g' \cdot V = \emptyset$.
Si noti che un'azione propriamente discontinua è *libera*, cioè per ogni $x \in X$ e per ogni $g \neq 1 \in G$ si ha $g \cdot x \neq x$.

Per meglio comprendere i concetti appena enunciati mostriamo un esempio, dove considereremo $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}$.

Esempio 1.20. Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ definita da $x \longmapsto x + n$; questa azione è propriamente discontinua: infatti, preso $\varepsilon < \frac{1}{2}$, l'intervallo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ è un intorno aperto di x per cui per ogni $n, n' \in \mathbb{Z}$ con $n \neq n'$ si ha $V + n \cap V + n' = \emptyset$, qualsiasi sia $x \in \mathbb{R}$. Dunque $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{Z}$-spazio.

E' utile osservare che la proiezione canonica di un G-spazio è un'applicazione aperta.

Lemma 1.21. *Se X è un G-spazio, la proiezione canonica $\pi : X \longrightarrow X/G$ è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Sia U un aperto di X e consideriamo $\pi^{-1}(\pi(U))$; si ha:

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} = \{x \in X \mid \exists y \in U : \pi(x) = \pi(y)\} =$$

$$= \{x \in X \mid \exists y \in U : x = g \cdot y, g \in G\} = \{x \in X \mid x \in g \cdot U, g \in G\} = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

Poiché la mappa $x \longmapsto g \cdot x$ è un omeomorfismo e U è aperto, $g \cdot U$ è aperto per ogni $g \in G$; ne segue che $\pi^{-1}(\pi(U))$ è aperto in X e quindi che $\pi(U)$ è aperto in X/G. $\square$

Il teorema seguente spiega l'importanza della nozione di azione propriamente discontinua in questo contesto.

Teorema 1.22. *Sia X un G-spazio; se l'azione di G su X è propriamente discontinua, allora $p : X \longrightarrow X/G$ è un rivestimento, dove p è la proiezione naturale.*

Dimostrazione. Si osservi anzitutto che p è un applicazione continua e suriettiva (in quanto proiezione) e aperta (per il lemma 1.21). Se U è un intorno aperto di x che verifica la condizione di discontinuità propria, $p(U)$ è un intorno aperto di $p(x)$ uniformemente rivestito da p: infatti risulta $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ (per quanto visto nella dimostrazione del lemma 1.21), dove $\{g \cdot U \mid g \in G\}$ è una famiglia di aperti disgiunti di X, e la restrizione $p\,|_{g \cdot U} \colon g \cdot U \longrightarrow p(U)$ è una biiezione continua e aperta e, come tale, è un omeomorfismo. $\square$

Mostriamo ora alcuni esempi che sono applicazioni del teorema appena enunciato.

Esempio 1.23. Consideriamo nuovamente l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ definita da $x \longmapsto x + n$. Sappiamo dall'esempio 1.20 che tale azione è propriamente discontinua. Poiché con questa azione $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{Z}$-spazio, per il teorema precedente $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è un rivestimento.

Esempio 1.24. In questo esempio vogliamo provare che la proiezione naturale $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ è un rivestimento, dove definiamo $\mathbb{RP}^n$ come lo spazio quoziente $S^n/\mathbb{Z}_2$ con la seguente azione di $\mathbb{Z}_2$ su S^n: $\pm 1 \cdot x = \pm x$. Per ogni $x \in S^n$ il disco aperto $D = \{y \in S^n \mid \|y - x\| < \frac{1}{2}\}$ è un intorno aperto di x e dunque si verifica la condizione di discontinuità propria: $0 \cdot D \cap 1 \cdot D = \emptyset$. Così $p : S^n \longrightarrow S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^n$ è un rivestimento.

Generalizzando quest'ultimo esempio si ottiene il seguente risultato.

Teorema 1.25. *Se G è un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff X, allora l'azione di G su X è propriamente discontinua.*

Dimostrazione. Siano $1 = g_0, g_1, g_2, \dots, g_n$ gli elementi di G e sia x un punto di X. I punti $g_1 \cdot x, g_2 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ sono tutti distinti da $g_0 \cdot x = x$ (per ipotesi) e, essendo X uno spazio di Hausdorff, esistono degli intorni aperti $U_0, U_1, \dots, U_n$ rispettivamente di $g_0 \cdot x, g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ tali che $U_0 \cap U_j = \emptyset$ per ogni $j = 1, 2, \dots, n$. L'insieme $U = \bigcap_{j=0}^{n} g_j^{-1} \cdot U_j$ è un intorno aperto di x; inoltre se $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ con $i \neq j$ si ha:

$$g_i \cdot U \cap g_j \cdot U = g_j((g_j^{-1} g_i \cdot U) \cap U) = g_j(g_k \cdot U \cap U)$$

per qualche $k \neq 0$. Ma $g_k \cdot U = \bigcap_{j=0}^{n} g_k g_j^{-1} \cdot U_j \subseteq U_k$ e $U \subseteq U_0$, quindi $g_k \cdot U \cap U = \emptyset$. Pertanto $g_i \cdot U \cap g_j \cdot U = \emptyset$ e quindi l'azione di G è propriamente discontinua. □

Analizziamo infine un ultimo caso di rivestimento di un G-spazio: lo *spazio lenticolare*.

Esempio 1.26. Un altro esempio interessante si ottiene considerando la sfera $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ e l'applicazione $h : S^3 \longrightarrow S^3$ definita da $h(z_0, z_1) = (\exp(\frac{2\pi i}{p})z_0, \exp(\frac{2\pi i q}{p})z_1)$,dove p e q sono due interi primi tra loro. Poiché h è un omeomorfismo e $h^p = 1$, possiamo definire un'azione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_p$ su S^3 mediante $n \cdot (z_0, z_1) = h^n(z_0, z_1)$, dove $n \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Allora $S^3 \longrightarrow S^3/\mathbb{Z}_p$ è un rivestimento, in quanto l'azione è libera e S^3 è uno spazio di Hausdorff. Lo spazio quoziente $S^3/\mathbb{Z}_p$, denotato con $L(p, q)$, è chiamato *spazio lenticolare*.
Per quanto visto nell'esempio 1.24, $L(2, 1) = S^3/\mathbb{Z}_2$ è omeomorfo a $\mathbb{RP}^3$.

Capitolo 2

Rivestimenti e gruppo fondamentale

In questo capitolo vogliamo studiare l'importante relazione tra rivestimento e gruppo fondamentale di uno stesso spazio topologico. Dopo aver analizzato il concetto di gruppo fondamentale e alcuni enunciati riguardo l'omomorfismo indotto da un rivestimento di spazi topologici tra i loro gruppi fondamentali, vedremo due concetti di importanza capitale: la monodromia di un rivestimento e i rivestimenti universali. In questo capitolo tutti gli spazi che considereremo si supporranno connessi per archi e localmente connessi per archi.

Definizione 2.1. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso per archi* se per ogni $x \in X$ ogni intorno aperto di x contiene un intorno aperto di x che sia connesso per archi.

Tale supposizione non è strettamente necessaria per definire il concetto di gruppo fondamentale, ma assume rilevante importanza per dimostrare risultati in seguito.

2.1 Il gruppo fondamentale

In questa sezione studieremo le relazioni tra i gruppi fondamentali di uno spazio topologico e del suo rivestimento. Diamo brevemente la definizione di gruppo fondamentale.

Definizione 2.2. Un arco f è detto *chiuso* se $f(0) = f(1)$; in particolare il punto $x = f(0) = f(1)$ si dice *base* dell'arco f. Si dice *gruppo fondamentale* di X con punto base x l'insieme $\pi(X, x)$ delle classi di equivalenza di archi chiusi di base il punto $x \in X$ con l'operazione $[f][g] = [f * g]$, dove $*$ indica il prodotto di archi: se f e g sono due archi in uno spazio topologico X con $f(1) = g(0)$, il loro *prodotto* è l'arco $f * g$ definito da:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Facciamo presente che con il termine *laccio* si indicherà un un arco chiuso. In generale, considerato $x' \in X, x' \neq x$, si ha $\pi(X, x') \neq \pi(X, x)$, ma se X è connesso per archi $\pi(X, x') = \pi(X, x)$. Così le condizioni iniziali sugli spazi considerati ci permettono di poter assumere che il gruppo fondamentale $\pi(X, x)$ di uno spazio topologico X non dipende dal punto x. Nel primo capitolo abbiamo visto i teoremi di sollevamento; una conseguenza immediata di tali teoremi è il seguente risultato.

Teorema 2.3. *Siano $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$, $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora l'omomorfismo indotto $p_* : \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow \pi(X, x_0)$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Sia f' un laccio in $\widetilde{X}$ di base $\widetilde{x}_0$ tale che $p \circ f' \sim c_{x_0}$, dove $c_{x_0} : I \longrightarrow X$ è il cappio costante di base x_0 e $\sim$ è un omotopia relativa a $\{0, 1\}$. $p \circ f' \sim c_{x_0}$ equivale a dire che $p_*([f']) = [c_{x_0}]$. Allora, per il corollario del teorema di sollevamento, si ha che $f' \sim c_{\widetilde{x}_0}$, cioè $[f'] = [c_{\widetilde{x}_0}]$. E' così provata l'iniettività di p_*. $\square$

Scegliendo un diverso punto base $x_1 \in p^{-1}(x_0)$ si ottiene in generale un diverso sottogruppo $p_* \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$.

Soffermiamoci un istante sul fatto che il gruppo fondamentale debba essere quello banale per qualche x e questo valga poi necessariamente per ogni x. Notiamo innanzitutto che un'importante ipotesi per la validità della semplice connessione è la connessione per archi di X. Sotto tale ipotesi assume una certa rilevanza un teorema sui gruppi fondamentali.

Teorema 2.4. *Se esiste un arco in X dal punto $x \in X$ al punto $y \in X$, allora i gruppi $\pi(X, x)$ e $\pi(X, y)$ sono isomorfi.*

La dimostrazione di questo risultato non è stata riportata e la si può trovare nel libro "C. Kosniowski - Introduzione alla topologia algebrica" nelle pagine 140-141.
Nel nostro caso, presi due punti qualsiasi in X, esiste sempre un arco interamente contenuto in X che li congiunge. Così per ogni $x, y \in X$ i gruppi $\pi(X, x)$ e $\pi(X, y)$ sono isomorfi.
Tornando all'omomorfismo indotto, ci chiediamo ora che relazione sussiste fra $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ e $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

Teorema 2.5. *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Per ogni coppia $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1$ di punti di $\widetilde{X}$ esiste un arco f in X da $p(\widetilde{x}_0)$ a $p(\widetilde{x}_1)$ tale che $u_f p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$, dove $u_f : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(X, x_1)$ è definito come $u_f[g] = [\bar{f} * g * f]$, con $[\bar{f}] = [f]^{-1}$.*

Quindi u_f è un isomorfismo e $\pi(X, x_0)$ e $\pi(X, x_1)$ sono isomorfi.

Dimostrazione. Ogni arco g in $\widetilde{X}$ da $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}_1$ individua un isomorfismo u_g tra i gruppi fondamentali $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ e $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$; pertanto $u_g\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$. Applicando l'omomorfismo p_* si ottiene $p_*u_g\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$. Essendo $p_*u_g = u_{pg}p_*$, l'arco $f = p \circ g$ soddisfa le condizioni richieste. □

Applicando quest'ultimo teorema nel caso in cui $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1) = x_0$ si ottiene un arco chiuso f di base x_0 e quindi un elemento $[f]$ di $\pi(X, x_0)$ per il quale vale la relazione $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) = [f]^{-1}(p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))[f]$. Di conseguenza $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ e $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ sono sottogruppi coniugati di $\pi(X, x_0)$. Vale inoltre il seguente risultato.

Teorema 2.6. *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento con $\widetilde{X}$ connesso per archi. Se $x_0 \in X$, l'insieme $\{p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \mid \widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$ è una classe di coniugio (vale a dire una classe di equivalenza per l'azione di coniugio) di sottogruppi di $\pi(X, x_0)$.*

Dimostrazione. Per il teorema 2.5, due elementi qualunque dell'insieme dato sono coniugati. Sia ora H un sottogruppo di $\pi(X, x_0)$ coniugato ad uno dei sottogruppi $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, cioè $H = \alpha^{-1}(p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))\alpha$ per qualche arco $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Se $\alpha = [f]$, denotiamo con $\widetilde{f}$ un sollevamento di f che ha inizio in $\widetilde{x}_0$, cioè tale che $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x}_0$. Per il teorema 2.5 avremo allora la relazione $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{f}(1)) = u_f p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{f}(0)) = u_f p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = H$ e quindi H appartiene all'insieme dato. □

2.2 Monodromia di un rivestimento

In questa sezione definiremo un'azione detta *monodromia* del rivestimento p sulla fibra $p^{-1}(x_0)$. La monodromia associa ad ogni $[\alpha] \in \pi(X, x_0)$ una biiezione dell'insieme $p^{-1}(x_0)$ in se stesso, cioè una permutazione dell'insieme $p^{-1}(x_0)$. L'insieme delle permutazioni di $p^{-1}(x_0)$ così ottenute costituisce un sottogruppo del gruppo di tutte le permutazioni di $p^{-1}(x_0)$, che si chiama *gruppo di monodromia del rivestimento* p nel punto x_0.
Consideriamo un rivestimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ e un laccio $\alpha : I \longrightarrow X$ di base un punto $x_0 \in X$. Per ogni $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ il sollevamento $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ è un arco di punto iniziale $\widetilde{x}$ il cui punto finale $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}}(1)$ dipende solo da $\widetilde{x}$ e da $[\alpha] \in \pi(X, x_0)$ (per quanto visto nel corollario ai teoremi di sollevamento) e appartiene a $p^{-1}(x_0)$. Si ottiene in questo modo un'applicazione:

$$p^{-1}(x_0) \times \pi(X, x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0) \tag{2.1}$$

$$(\widetilde{x}, [\alpha]) \longmapsto \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}}(1).$$

Proposizione 2.7. *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento e sia $x_0 \in X$. L'applicazione 2.1 definisce un'azione di $\pi(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$ in cui lo stabilizzatore* *di un punto* $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ *coincide con il sottogruppo* $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ *di* $\pi(X, x_0)$. *L'azione è transitiva.*

Dimostrazione. La proprietà $(\widetilde{x}, [c_{x_0}]) \longmapsto \widetilde{x}$ per ogni $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ risulta evidente dal fatto che un qualsiasi sollevamento di un cammino costante è un laccio. Per provare che la 2.1 è un'azione rimane da vedere che $(\widetilde{x}, [\alpha] * [\beta])$ e $((\widetilde{x}, [\alpha]), [\beta])$ sono portati nello stesso punto per ogni $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ e per ogni $[\alpha], [\beta] \in \pi(X, x_0)$, ossia che il punto finale del sollevamento del cammino $\alpha * \beta$ di punto iniziale $\widetilde{x}$ è uguale al punto finale del sollevamento del cammino β di punto iniziale $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}}(1)$. Questa proprietà segue direttamente dalla definizione di prodotto di cammini enunciata nella sezione precedente.
Affinché $[\alpha] \in \pi(X, x_0)$ stabilizzi il punto $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ è necessario e sufficiente che si abbia, per la definizione di stabilizzatore, $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}(1) = \widetilde{x}_0$, cioè che $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}$ sia un laccio di base $\widetilde{x}_0$; poiché $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}$, si ha che $[\alpha] \in p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.
L'ultima asserzione è conseguenza del fatto che ogni arco di estremi due punti $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ è della forma $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}$ per qualche laccio $\alpha : I \longrightarrow X$ di base x_0 (la sua proiezione). □

Corollario 2.8. *Sia* $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *un rivestimento con* $\widetilde{X}$ *connesso per archi. C'è una corrispondenza biunivoca naturale tra l'insieme* $p^{-1}(x_0)$ *e l'insieme delle classi laterali destre di* $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ *in* $\pi(X, x_0)$. *Quindi se* $p^{-1}(x_0)$ *è finito la sua cardinalità è uguale all'indice di* $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ *in* $\pi(X, x_0)$.

Dimostrazione. La corrispondenza è indotta dall'azione 2.1 e associa a una classe laterale $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))[\alpha]$ l'elemento $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}(1)$. La biunivocità segue dalla proposizione 2.7. □

Corollario 2.9. *Sia* $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *un rivestimento tale che* $\widetilde{X}$ *sia connesso per archi. Allora tutte le fibre* $p^{-1}(x)$ *hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Siano $x_0, x_1 \in X$, $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$; sia inoltre $\widetilde{\alpha} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ un arco tale che $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}_0$ e $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{x}_1$, e sia $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha} : I \longrightarrow X$.

Poiché il diagramma

$$\begin{array}{rccc} f_{\widetilde{\alpha}}: & \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) & \longrightarrow & \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) \\ & p_* \downarrow & & p_* \downarrow \\ f_\alpha: & \pi(X, x_0) & \longrightarrow & \pi(X, x_1) \end{array}$$

è commutativo, l'isomorfismo f_α manda il sottogruppo $p_*(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ sul sottogruppo $p_*(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ e quindi induce una biiezione dell'insieme delle classi laterali destre di $p_*(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ su quello delle classi laterali destre di $p_*(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$. Il risultato segue dal corollario precedente. $\square$

Esempio 2.10. Riprendiamo il rivestimento analizzato nel capitolo precedente $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, che associa a ogni numero reale la sua parte decimale. Sia $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; $p^{-1}(x)$ è del tipo $\mathbb{Z} + x$ e ha la cardinalità di $\mathbb{Z}$. Così tutte le fibre hanno la stessa cardinalità.

2.3 Rivestimenti universali

In questa sezione analizzeremo un caso particolare di rivestimenti, cioè i rivestimenti universali. Come vedremo, di rivestimenti semplicemente connessi. Prima di proseguire nella trattazione ricordiamo cosa significa la nozione di semplice connessione.

Definizione 2.11. Uno spazio topologico X si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e se $\pi(X, x) = \{1\}$ per qualche (e quindi, necessariamente, per ogni) $x \in X$.

Dato che X è connesso per archi, per quanto visto precedentemente è sufficiente che il gruppo fondamentale sia banale in un solo punto.

Definizione 2.12. Un rivestimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ in cui $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso è detto *rivestimento universale* di X.

Abbiamo già visto un esempio di rivestimento universale, è il caso dell'applicazione $e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $e(x) = e^{2\pi i x}$ che abbiamo studiato nel primo capitolo. Infatti lo spazio topologico dei numeri reali è semplicemente connesso.

Nel caso in cui il rivestimento p sia universale esiste un'altra importante relazione tra il gruppo fondamentale e il rivestimento stesso, e cioè si ha una corrispondenza biunivoca tra gli elementi del gruppo fondamentale in un punto e la preimmagine mediante p di quel punto.

Teorema 2.13. *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento universale. Per ogni punto $x_0 \in X$ c'è una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi $\pi(X, x_0)$ e $p^{-1}(x_0)$.*

Dimostrazione. Questo risultato è ovvio per il corollario 2.8. Infatti:

$$p^{-1}(x_0) \longleftrightarrow \{p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}))\} = \{p_*(\{1\})\} = \pi(X, x).$$

□

Il teorema precedente suggerisce un metodo per determinare il gruppo fondamentale $\pi(X, x_0)$: innanzitutto si trova un rivestimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ con $\widetilde{X}$ semplicemente connesso, poi si studia $p^{-1}(x_0)$. In generale questo metodo però non è sempre di facile applicazione. Vediamo ora un esempio.

Esempio 2.14. Sia $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione $n \geq 2$ e sia $\tau : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ la proiezione naturale, ove S^n è la sfera unitaria di $\mathbb{R}^{n+1}$. Identificando $\mathbb{P}^n$ come l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$ passanti per l'origine, a ogni punto x della sfera viene fatta corrispondere la classe che contiene i punti di intersezione tra la sfera e la retta passante per l'origine e per x. Ogni classe contiene così due punti, x e il suo antipodale. τ è un rivestimento: infatti risulta suriettiva e per ogni punto di $\mathbb{P}^n$ esiste un intorno U in $\mathbb{P}^n$ la cui preimmagine è unione disgiunta di aperti di S^n, ognuno omeomorfo a U. Dimostriamolo. Per ogni classe $[(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})] \in \mathbb{P}^n$ il punto $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ di S^n appartiene alla preimmagine della classe $[(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})]$ e dunque τ è suriettiva. Consideriamo nuovamente l'elemento $[(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})]$ di $\mathbb{P}^n$. La preimmagine mediante τ di tale classe è formata dai punti $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ e $(-x_1, \ldots, -x_n, -x_{n+1})$. Sia U un intorno abbastanza piccolo di $[(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})]$ in $\mathbb{P}^n$. La preimmagine mediante τ di U è formata da due aperti V_1 e V_2 di S^n, rispettivamente intorni di $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ e $(-x_1, \ldots, -x_n, -x_{n+1})$. Inoltre V_1 e V_2 risultano essere antipodali (per come è definita τ) e, scegliendo U abbastanza piccolo, restano confinati ognuno in una della due calotte della sfera, risultando così disgiunti. Consideriamo ora $\tau\ |_{V_j}\colon V_j \longrightarrow U$, con $j = 1, 2$. Dobbiamo provare che questo è un omeomorfismo: la suriettività segue dal fatto che $V_1 = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mid [(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})] \in U\}$ mentre $V_2 = \{(-x_1, \ldots, -x_n, -x_{n+1}) \mid [(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})] \in U\}$ e dunque ogni punto di U ha preimmagine sia in V_1 che in V_2, l'iniettività è dovuta al fatto che ogni calotta è mappata interamente e iniettivamente in $\mathbb{P}^n$ e ciascun V_j è confinato in una calotta per costruzione e contiene, per ogni $p \in U$, un punto della preimmagine mediante τ di p, la continuità di $\tau\ |_{V_j}$ e della sua inversa sono immediata conseguenza della continuità di τ e della sua inversa. Poiché S^n è semplicemente connesso, τ è un rivestimento universale. Per quanto appena visto, per ogni $p \in \mathbb{P}^n$ la fibra $\tau^{-1}(p)$ consiste di due elementi; segue dal teorema 2.13 che $\pi(\mathbb{P}^n)$ è un gruppo costituito da due elementi. Quindi $\pi(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$. Invece $\mathbb{P}^1$, che è omeomorfo a S^1, ha gruppo fondamentale $\pi(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$. In particolare $\mathbb{P}^n$ non è semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$.

Il teorema 2.13 mette in evidenza una proprietà importante dei rivestimenti universali. Anche il prossimo risultato ha conseguenze importanti nel caso particolare dei rivestimenti universali.

Teorema 2.15. *Sia*

$$\begin{array}{cccc} & & & \widetilde{X} \\ & & & \downarrow p \\ f: & Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

un diagramma di applicazioni continue tra spazi topologici, con p rivestimento. Siano $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, $y_0 \in Y$ e $x_0 \in X$, con $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ e $f(y_0) = x_0$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) esiste un sollevamento $g : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ di f con $g(y_0) = \widetilde{x}_0$;

(b) $f_*(\pi(Y, y_0)) \subset p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.

Dimostrazione. $(a) \Rightarrow (b)$ Se esiste $g : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ sollevamento di f, allora $f_* = (p \circ g)_* = p_* \circ g_* : \pi(Y, y_0) \longrightarrow \pi(X, (p \circ g)(y_0)) = \pi(X, x_0)$. Ora $f_*(\pi(Y, y_0)) = (p_* \circ g_*)(\pi(Y, y_0)) \subset p_*(\pi(\widetilde{X}, (g)(y_0)) = p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$. Tale inclusione è conseguenza del fatto che, poiché $g : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ è un'applicazione continua, g_* manda $\pi(Y, y_0)$ su $\pi(\widetilde{X}, g(y_0))$; così $g_*(\pi(Y, y_0)) \subset \pi(\widetilde{X}, g(y_0))$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Per prima cosa è necessario definire g come segue. Per ogni $y \in Y$ sia $\alpha : I \longrightarrow Y$ un arco tale che $\alpha(0) = y_0$, $\alpha(1) = y$; l'arco $f \circ \alpha : I \longrightarrow X$ soddisfa $(f \circ \alpha)(0) = x_0$, $(f \circ \alpha)(1) = f(y)$; sia $\widetilde{(f \circ \alpha)}_{\widetilde{x}_0} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ il suo sollevamento di punto iniziale $\widetilde{x}_0$, che esiste per il teorema di sollevamento dei cammini. Poniamo così $g(y) = \widetilde{(f \circ \alpha)}_{\widetilde{x}_0}(1)$.
Verifichiamo dapprima che g è ben definita. Se $\beta : I \longrightarrow Y$ è un altro arco tale che $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y$, allora, posto $\bar{\beta}$ l'arco β percorso a ritroso, $\alpha * \bar{\beta}$ è un laccio di base y_0 e $f(\alpha * \bar{\beta})$ si solleva a un laccio di base $\widetilde{x}_0$ (per la proposizione 2.7). Ciò significa che i sollevamenti di $f \circ \alpha$ e di $f \circ \beta$ hanno lo stesso punto finale, cioè che $\widetilde{(f \circ \alpha)}_{\widetilde{x}_0}(1) = \widetilde{(f \circ \beta)}_{\widetilde{x}_0}(1)$, e quindi g è ben definita.
g è continua. Sia infatti $y \in Y$ e sia, come prima, $\alpha : I \longrightarrow Y$ un arco tale che $\alpha(0) = y_0$, $\alpha(1) = y$; sia $U \subset \widetilde{X}$ un intorno aperto di $g(y)$, che possiamo supporre essere mandato da p omeomorficamente sull'aperto $p(U)$, e sia $V \subset Y$ un intorno aperto di y connesso per archi tale che $f(V) \subset p(U)$. Per ogni $y' \in V$ esiste un arco $\sigma : I \longrightarrow V$ tale che $\sigma(0) = y$, $\sigma(1) = y'$: poiché $\alpha * \sigma$ è un arco di punto iniziale y_0 e finale y', si ha $g(y') = (f\widetilde{(\alpha * \sigma)})_{\widetilde{x}_0}(1) =$ $= \widetilde{(f \circ \sigma)}_{g(y)}(1)$ e questo punto appartiene a U perché $f \circ \sigma$ è contenuto in $p(U)$ e $\widetilde{(f \circ \sigma)}_{g(y)}(0) \in U$. Quindi $g(V) \subset U$ e pertanto g è continua in y; per l'arbitrarietà di $y \in Y$ ciò dimostra che g è continua. □

Questi due corollari seguenti sono un'immediata conseguenza di questo teorema, risultati che verranno poi utilizzati per enunciare la proprietà universale dei rivestimenti universali.

Corollario 2.16. *Sia dato un diagramma*

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{X} \\ & & \downarrow p \\ f: & Y \longrightarrow & X \end{array}$$

di applicazioni continue tra spazi topologici, con p rivestimento. Siano inoltre $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, $y_0 \in Y$ e $x_0 \in X$, con $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ e $f(y_0) = x_0$. Se Y è semplicemente connesso allora esiste un sollevamento g di f.

Dimostrazione. Poiché Y è semplicemente connesso, $\pi(Y, y_0) = \{1\}$. Così la sua immagine mediante f_* è sicuramente inclusa in $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$, da cui, per il teorema precedente, esiste g sollevamento di f. □

Corollario 2.17. *Se $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ e $q : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ sono due rivestimenti universali di X, esiste un unico omeomorfismo $\Phi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ tale che valga $q \circ \Phi = p$.*

Dimostrazione. Il teorema 2.15 applicato prima al rivestimento q e poi al rivestimento p implica l'esistenza di $\Phi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ e di $\Psi : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{X}$ tali che $q \circ \Phi = p$ e $p \circ \Psi = q$, e quindi tali che $q \circ \Phi \circ \Psi = q$ e $p \circ \Psi \circ \Phi = p$. Per il teorema di sollevamento delle omotopie applicato ai diagrammi

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{X}' \\ & & \downarrow q \\ q: & \widetilde{X}' \longrightarrow & X \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{X} \\ & & \downarrow p \\ p: & \widetilde{X} \longrightarrow & X \end{array}$$

si ha rispettivamente che $\Phi \circ \Psi = 1_{\widetilde{X}'}$ e $\Psi \circ \Phi = 1_{\widetilde{X}}$, cioè Φ e Ψ sono omeomorfismi inversi l'uno dell'altro. L'unicità di Φ segue ancora dal teorema di sollevamento delle omotopie. □

Da quest'ultimo corollario segue dunque che un rivestimento universale di uno spazio X, se esiste, è unico a meno di omeomorfismi. Un caso particolare del corollario 2.16 è il seguente.

Proposizione 2.18. ***(Proprietà universale dei rivestimenti universali.)*** *Sia $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un rivestimento universale. Per ogni rivestimento $q : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ esiste un'unica applicazione continua $g : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ tale che $q \circ g = p$ e g è un rivestimento.*

Corollario 2.19. *Se $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ è un rivestimento con X semplicemente connesso, allora p è un omeomorfismo.*

Vogliamo ora occuparci del problema dell'esistenza del rivestimento universale di un dato spazio topologico X, in particolare di quali condizioni tale spazio X dovrà soddisfare affinché il rivestimento universale esista. Osserviamo innanzitutto che, se $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ è un rivestimento universale e $V \subset X$ è un aperto uniformemente rivestito, allora per ogni laccio $\alpha : I \longrightarrow V$ esiste un'omotopia (relativa a $\{0, 1\}$) in X tra α e un laccio costante: infatti α si solleva a un laccio α' in $\widetilde{X}$ il quale, per la semplice connessione di $\widetilde{X}$, è omotopo (relativamente a $\{0, 1\}$) a un laccio costante e l'omotopia induce un'omotopia in X tra α e un laccio costante. Pertanto X soddisfa la seguente condizione.

Osservazione 2.20. Ogni punto $x \in X$ è contenuto in un aperto V tale che ogni laccio di base x contenuto in V è omotopo (relativamente a $\{0, 1\}$) in X al laccio costante c_x.

Tale condizione ci permette così di definire una nuova proprietà di uno spazio X.

Definizione 2.21. Uno spazio X soddisfacente la condizione 2.20 si dice *localmente semplicemente connesso.*

La nozione di spazio localmente semplicemente connesso appena definita non implica quella di semplice connessione: infatti, se si considera uno spazio X formata da due punti isolati, questo risulta localmente semplicemente connesso, ma non semplicemente connesso.
Quindi una condizione necessaria affinché X possieda un rivestimento universale è che X sia localmente semplicemente connesso.

Esempio 2.22. Sia $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset \mathbb{R}^2$, dove $C_n \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza di centro il punto $(\frac{1}{n}, 0)$ e raggio $\frac{1}{n}$. Questo spazio è formato da aperti (le circonferenze C_n) che passano tutti per l'origine degli assi; così X è connesso per archi e localmente connesso per archi. X non è però localmente semplicemente connesso perché la condizione 2.20 non è soddisfatta nell'origine. Quindi X non possiede un rivestimento universale.

Enunciamo ora un teorema di esistenza per i rivestimenti universali.

Teorema 2.23. *Se X è uno spazio connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso, allora X possiede un rivestimento universale.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in X$. Sia $A(X; x_0)$ l'insieme degli archi in X aventi per punto iniziale x_0 e sia $\sim$ la seguente relazione di equivalenza: $\alpha \sim \beta$ se α e β sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$. In particolare, se $\alpha \sim \beta$, allora $\alpha(1) = \beta(1)$. Sia $R = \dfrac{A(X; x_0)}{\sim}$ l'insieme quoziente e per ogni $\alpha \in A(X; x_0)$ sia $[\alpha] \in R$ la classe di equivalenza di α. Definiamo $p : R \longrightarrow X$ ponendo $p([\alpha]) = \alpha(1)$. Introduciamo una topologia in R assegnandone una base nel modo seguente: per ogni $[\alpha] \in R$ e per ogni aperto $V \subset X$ contenente $p([\alpha])$ sia $[\alpha, V] = \{[\alpha * \beta] : \beta \text{ arco in } V \text{ di punto iniziale } \alpha(1)\} \subset R$. Ovviamente $\alpha \in [\alpha, V]$ e gli insiemi $[\alpha, V]$ ricoprono R (per costruzione). Inoltre, se $[\beta] \in [\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$, allora $[\beta] \in [\beta, V_1 \cap V_2] \subset [\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$; quindi $[\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$ è unione di insiemi $[\alpha, V]$. Pertanto la famiglia di insiemi $\{[\alpha, V]\}$ è base di un'unica topologia su R.
p è continua: sia $U \subset X$ un aperto e sia $\alpha \in p^{-1}(U)$. Allora $[\alpha, U]$ è un aperto di R contenente α e $p([\alpha, U]) \subset U$; dunque p è continua.
p è aperta: infatti $p([\alpha, V])$ è la componente connessa per archi di V contenente $p(\alpha)$, pertanto $p([\alpha, V])$ è aperto in V e quindi in X perché V, come X, è localmente connesso per archi.
p è un rivestimento: sia $x \in X$ e sia U un aperto contenente x, connesso per archi e tale che ogni laccio in U di base x sia omotopo (relativamente a $\{0, 1\}$) al laccio costante c_x. Per ogni $\alpha \in p^{-1}(U)$ si ha $p([\alpha, U]) = U$. Inoltre, se

$[\alpha * \beta], [\alpha * \beta'] \in [\alpha, U]$ sono tali che $p([\alpha * \beta]) = p([\alpha * \beta'])$, allora $\beta(1) = \beta'(1)$ e, per la scelta di U, $\beta \sim \beta'$; quindi $[\alpha * \beta] = [\alpha * \beta']$. Pertanto la restrizione di p a $[\alpha, U]$ è biunivoca su U oltre che continua ed aperta. Dunque p manda $[\alpha, U]$ omeomorficamente su U. Così, poiché $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta degli aperti $[\alpha, U]$, U è uniformemente rivestito e quindi p è un rivestimento.
R è connesso per archi: sia $[c_{x_0}] \in R$ la classe del laccio costante in x_0. E' sufficiente costruire, per ogni $[\alpha] \in R$, un arco in R di punto iniziale $[c_{x_0}]$ e punto finale $[\alpha]$. Poniamo $\alpha_s(t) = \alpha(st)$ per ogni $s, t \in I$. L'applicazione $\phi_\alpha : I \longrightarrow R$, $\phi_\alpha(s) = [\alpha_s]$, soddisfa $\phi_\alpha(0) = [c_{x_0}]$, $\phi_\alpha(1) = [\alpha]$, $p \circ \phi_\alpha = \alpha$. Inoltre ϕ_α è continua: per ogni $s \in I$ e per ogni intorno aperto V di $\alpha(s) = p(\phi_\alpha(s))$, sia $\varepsilon > 0$ tale che $\alpha((s - \varepsilon, s + \varepsilon)) \subset V$; risulta $\phi_\alpha((s - \varepsilon, s + \varepsilon)) \subset [\phi_\alpha(s), V] = [\alpha_s, V]$ e quindi ϕ_α è continua.
R è semplicemente connesso: sia $\phi : I \longrightarrow R$ un laccio di base $[c_{x_0}]$ e sia $\alpha = p \circ \phi$. Per l'unicità del sollevamento si ha $\phi = \phi_\alpha$. Quindi $[\alpha] = \phi(1) = [c_{x_0}]$ perché ϕ è un laccio. Ne segue che $\alpha \sim c_{x_0}$ e quindi anche ϕ è omotopicamente equivalente al laccio costante di base $[c_{x_0}]$ per l'iniettività di $p_* : \pi(R, [c_{x_0}]) \longrightarrow \pi(X, x_0)$. □

Le ipotesi di questo teorema sono in particolare soddisfatte dalle varietà topologiche connesse, cioè spazi topologici per i quali ogni punto ammette un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Enunciamo allora il seguente risultato.

Teorema 2.24. *Ogni varietà topologica connessa possiede un rivestimento universale.*

Esempi di tale risultato sono il toro $T^2 = S^1 \times S^1$, che ha rivestimento universale $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2$, $p(x, y) = (e(x), e(y)) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$, e la sfera S^n, con $n \geq 2$, che essendo semplicemente connessa è rivestimento universale di se stessa, cioè ha come rivestimento universale l'identità $S^n \longrightarrow S^n$.

Capitolo 3

Il rivestimento $SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$

In questa sezione vogliamo descrivere un esempio importante di rivestimento: $SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$. Tale mappa è in particolare un rivestimento universale. Definiamo innanzitutto il gruppo speciale unitario $SU(2,\mathbb{C})$, gruppo di importanza capitale in fisica, e il gruppo speciale ortogonale.

Definizione 3.1. Si dice *gruppo speciale unitario* il seguente sottogruppo chiuso di $GL(2,\mathbb{C})$:

$$SU(2,\mathbb{C}) = \left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = det\ x = 1 \right\}.$$

Si dice *gruppo speciale ortogonale* il seguente sottogruppo chiuso di $GL(3,\mathbb{R})$:

$$SO(3,\mathbb{R}) = \{x \in GL(3,\mathbb{R}) \mid x^t = x^{-1}\}.$$

Organizziamo la trattazione di questo esempio in vari passaggi, raccolti in varie sezioni.

3.1 Proprietà di $SU(2,\mathbb{C})$

Sia ora $f : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $(\cong \mathbb{C}^2)$, $f(x) = (Re\ \alpha, Im\ \alpha, Re\ \beta, Im\ \beta)$. Poiché $x \in SU(2,\mathbb{C})$, $(Re\ \alpha)^2 + (Im\ \alpha)^2 + (Re\ \beta)^2 + (Im\ \beta)^2 = 1$, da cui si deduce che $f(x) \in S^3$, sfera di $\mathbb{R}^4$. Così abbiamo che $f : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow S^3$. Vogliamo vedere che f è un omeomorfismo e per far ciò dobbiamo provare che f è continua e invertibile con inversa continua.

Lemma 3.2. *Sia $f : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow S^3$, $f(x) = (Re\ \alpha, Im\ \alpha, Re\ \beta, Im\ \beta)$ dove $x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ è il generico elemento di $SU(2,\mathbb{C})$. f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. f è iniettiva. A tal proposito siano $y, y' \in S^3$, con $y = f(x)$, $y' = f(x')$.

Allora $y = y' \Leftrightarrow \begin{cases} Re\ \alpha = Re\ \alpha',\ Im\ \alpha = Im\ \alpha' \\ Re\ \beta = Re\ \beta',\ Im\ \beta = Im\ \beta' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\bar{\beta}' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix} = x'$.

f è suriettiva. Sia infatti $y \in S^3$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ con $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$.

y_i è l'i-esima proiezione sugli assi di $\mathbb{R}^4$, da cui:

$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \Rightarrow$ tramite l'omeomorfismo $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ identifico (y_1, y_2) con $y_1 + iy_2 = \alpha \in \mathbb{C}$;

$(y_3, y_4) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \Rightarrow$ tramite l'omeomorfismo $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ identifico (y_3, y_4) con $y_3 + iy_4 = \beta \in \mathbb{C}$.

Considero quindi $x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. Affinché x sia preimmagine di y mediante f deve essere $x \in SU(2,\mathbb{C})$. Questo si ha se $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Ma $|\alpha|^2 = |y_1 + iy_2|^2 = y_1^2 + y_2^2$ e $|\beta|^2 = |y_3 + iy_4|^2 = y_3^2 + y_4^2$, così ciò è vero poiché $y \in S^3$. f risulta quindi essere invertibile.

Questa dimostrazione fornisce anche il metodo per trovare f^{-1}:

$f^{-1} : S^3 \longrightarrow SU(2,\mathbb{C})$, $(a,b,c,d) \longmapsto \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}$ $(= x)$.

Dobbiamo ora provare che f e f^{-1} sono continue: la continuità di f deriva dal fatto che ciascuna sua componente è una proiezione e la funzione proiezione $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto x_i$ è continua, dove si è identificata, mediante l'omeomorfismo $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, una coppia di numeri complessi (α, β) con l'elemento di $\mathbb{R}^4$ $(Re\ \alpha, Im\ \alpha, Re\ \beta, Im\ \beta)$. Analogamente la continuità di f^{-1} si ottiene osservando che, una volta identificata le coppie (a,b) e (c,d) di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente con i numeri complessi $\alpha = a+ib$ e $\beta = c+id$ (sempre attraverso l'omeomorfismo $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$), le funzioni identità $id : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \longmapsto \alpha$, $\beta \longmapsto \beta$, coniugio $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \longmapsto \bar{\alpha}$ e $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta \longmapsto -\bar{\beta}$ che individuano i quattro elementi della matrice x immagine mediante f^{-1} dell'elemento (a,b,c,d) di S^3 sono continue. □

Grazia a questo lemma, poiché gli omeomorfismi conservano la semplica connessione, riusciamo a provare che $SU(2)$ è semplicemente connesso.

Teorema 3.3. *$SU(2,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Gli omeomorfismi conservano la semplice connessione e abbiamo appena dimostrato nel lemma 3.2 che $SU(2,\mathbb{C})$ è omeomorfo a S^3, che è semplicemente connesso essendo omotopo a $D^3 \setminus \{0\}$ e avendo quindi gruppo fondamentale banale: $\pi(S^3) = \pi(D^3 \setminus \{0\}) = 1$. □

Calcoliamo ora il centro di $SU(2,\mathbb{C})$, che indicheremo notazionalmente con C; ricordiamo la definizione di centro, esprimendola proprio nel caso che ci riguarda:

$$C = Z(SU(2,\mathbb{C})) = \{z \in SU(2,\mathbb{C}) / zx = xz \ \forall x \in SU(2,\mathbb{C})\}.$$

Per trovare quale sia il centro cercato considereremo una generica matrice x di $SU(2,\mathbb{C})$ e andremo a cercare quelle matrice z di $SU(2,\mathbb{C})$ che commutano con x. Otterremo che ciò avviene soltanto per la matrice identica e per la sua opposta.

Teorema 3.4. *Il centro di $SU(2,\mathbb{C})$ è il gruppo $\mathbb{Z}_2$*

Dimostrazione. Sia $x \in SU(2,\mathbb{C})$, $x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.

Sia $z \in SU(2,\mathbb{C})$, $z = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$.

$$zx = \begin{pmatrix} a\alpha - b\bar{\beta} & a\beta + b\bar{\alpha} \\ -\bar{b}\alpha - \bar{a}\bar{\beta} & -\bar{b}\beta + \bar{a}\bar{\alpha} \end{pmatrix},\ xz = \begin{pmatrix} a\alpha - \bar{b}\beta & b\alpha + \bar{a}\beta \\ -a\bar{\beta} - \bar{b}\bar{\alpha} & -b\bar{\beta} + \bar{a}\bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

$$zx = xz \Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha - b\bar{\beta} = a\alpha - \bar{b}\beta \\ a\beta + b\bar{\alpha} = b\alpha + \bar{a}\beta \\ -\bar{b}\alpha - \bar{a}\bar{\beta} = -a\bar{\beta} - \bar{b}\bar{\alpha} \\ -\bar{b}\beta + \bar{a}\bar{\alpha} = -b\bar{\beta} + \bar{a}\bar{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\bar{\beta} = \bar{b}\beta \\ a\beta + b\bar{\alpha} = b\alpha + \bar{a}\beta \\ -\bar{b}\alpha - \bar{a}\bar{\beta} = -a\bar{\beta} - \bar{b}\bar{\alpha} \\ \bar{b}\beta = b\bar{\beta} \end{cases}.$$

Studiamo queste quattro condizioni supponendo $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $a = a_1 + ia_2$ e $b = b_1 + ib_2$.

$\bar{b}\beta = b\bar{\beta} \Leftrightarrow (b_1 - ib_2)(\beta_1 + i\beta_2) = (b_1 + ib_2)(\beta_1 - i\beta_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_1\beta_1 - ib_2\beta_1 + ib_1\beta_2 + b_2\beta_2 = b_1\beta_1 + ib_2\beta_1 - ib_1\beta_2 + b_2\beta_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_1\beta_2 - b_2\beta_1 = -(b_1\beta_2 - b_2\beta_1) \Leftrightarrow b_1\beta_2 - b_2\beta_1 = 0 \Leftrightarrow b_1\beta_2 = b_2\beta_1.$

$a\beta + b\bar{\alpha} = b\alpha + \bar{a}\beta \Leftrightarrow (a - \bar{a})\beta = (\alpha - \bar{\alpha})b \Leftrightarrow 2a_2\beta = 2\alpha_2 b \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_2(\beta_1 + i\beta_2) = \alpha_2(b_1 + ib_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_2\beta_1 = \alpha_2 b_1 \\ a_2\beta_2 = \alpha_2 b_2 \end{cases}.$$

$-\bar{b}\alpha - \bar{a}\bar{\beta} = -a\bar{\beta} - \bar{b}\bar{\alpha} \Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha})\bar{b} = (a - \bar{a})\bar{\beta} \Leftrightarrow 2\alpha_2\bar{b} = 2a_2\bar{\beta} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha_2(b_1 - ib_2) = a_2(\beta_1 - i\beta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 b_1 = a_2\beta_1 \\ \alpha_2 b_2 = a_2\beta_2 \end{cases}.$$

Così $zx = xz \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\beta_2 = b_2\beta_1 \\ a_2\beta_1 = \alpha_2 b_1 \\ a_2\beta_2 = \alpha_2 b_2 \end{cases}$. Ciò deve valere per ogni $x \in SU(2,\mathbb{C})$, cioè per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. In particolare deve valere anche per matrici con $\beta = 0$. Il sistema diventa così $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = \alpha_2 b_1 \\ 0 = \alpha_2 b_2 \end{cases}$ con α_2 qualsiasi $\Rightarrow b_1, b_2 = 0$.

Così $zx = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta \\ -\bar{a}\bar{\beta} & \bar{a}\bar{\alpha} \end{pmatrix}$ e $xz = \begin{pmatrix} a\alpha & \bar{a}\beta \\ -a\bar{\beta} & \bar{a}\bar{\alpha} \end{pmatrix}$, che risultano uguali $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \bar{a} \Leftrightarrow a_2 = 0$. Così $z = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$. Ma $z \in SU(2,\mathbb{C}) \Rightarrow det\ z = 1$.

Ne segue che $a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \pm 1$. $\square$

3.2 $SU(2,\mathbb{C})$ come rivestimento di $SO(3,\mathbb{R})$

Ottenuti questi risultati possiamo iniziare a costruire il rivestimento cercato $SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$. Per prima cosa è necessario definire una mappa che ci permetta di identificare le terne di $\mathbb{R}^3$ con delle matrici.

Proposizione 3.5. *Sia* $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$, $(x_1,x_2,x_3) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$, *dove* V *(*$\subseteq M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$*) è lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane* 2×2 *di traccia 0.* v *è un isomorfismo lineare.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima iniettività e suriettività di v.
v è iniettiva: siano $\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' & x_2'+ix_3' \\ x_2'-ix_3' & -x_1' \end{pmatrix} \in V$;

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2'+ix_3' \\ x_2'-ix_3' & -x_1' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2+ix_3 = x_2'+ix_3' \\ x_2-ix_3 = x_2'-ix_3' \\ -x_1 = -x_1' \end{cases}$$

da cui si ottiene, considerando le due equazioni $\begin{cases} x_2+ix_3 = x_2'+ix_3' \\ x_2-ix_3 = x_2'-ix_3' \end{cases}$ e facendone somma e differenza, $\begin{cases} 2x_2 = 2x_2' \\ 2ix_3 = 2ix_3' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$.

v è suriettiva: per ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix} \in V$ (con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$) esiste una terna $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x = v^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix}$. Infatti la preimmagine di $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix}$ mediante v è $v^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix} = (a, \frac{b+\bar{b}}{2}, \frac{b-\bar{b}}{2i}) = x \in \mathbb{R}^3$.
v è anche lineare: siano $(x_1,x_2,x_3),(x_1',x_2',x_3') \in \mathbb{R}^3$, siano $k,k' \in \mathbb{R}$.
$v(k(x_1,x_2,x_3)+k'(x_1',x_2',x_3')) = v((kx_1+k'x_1', kx_2+k'x_2', kx_3+k'x_3')) =$

$$= \begin{pmatrix} kx_1+k'x_1' & kx_2+k'x_2'+i(kx_3+k'x_3') \\ kx_2+k'x_2'-i(kx_3+k'x_3') & -kx_1-k'x_1' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 & kx_2 + ikx_3 \\ kx_2 - ikx_3 & -kx_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k'x'_1 & k'x'_2 + ik'x'_3 \\ k'x'_2 - ik'x'_3 & -k'x'_1 \end{pmatrix} =$$
$$= k \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 + ix'_3 \\ x'_2 - ix'_3 & -x'_1 \end{pmatrix} =$$
$$= kv((x_1, x_2, x_3)) + k'v((x'_1, x'_2, x'_3)).$$ □

Lemma 3.6. *Sia* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$. *Sia* $p'(g) : V \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $v \longmapsto gvg^{-1}$. $p'(g)v \in V$.

Dimostrazione. Sia $v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in V$. Calcoliamo $p'(g)v$.

$$p'(g)v = gvg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ax_1 + b(x_2 - ix_3) & a(x_2 + ix_3) - bx_1 \\ -\bar{b}x_1 + \bar{a}(x_2 - ix_3) & -\bar{b}(x_2 + ix_3) - \bar{a}x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix},$$

dove
$$\begin{cases} e_{11} = \bar{a}(ax_1 + b(x_2 - ix_3)) + \bar{b}(a(x_2 + ix_3) - bx_1) \\ e_{12} = -b(ax_1 + b(x_2 - ix_3)) + a(a(x_2 + ix_3) - bx_1) \\ e_{21} = \bar{a}(-\bar{b}x_1 + \bar{a}(x_2 - ix_3)) + \bar{b}(-\bar{b}(x_2 + ix_3) - \bar{a}x_1) \\ e_{22} = -b(-\bar{b}x_1 + \bar{a}(x_2 - ix_3)) + a(-\bar{b}(x_2 + ix_3) - \bar{a}x_1) \end{cases}.$$

Per provare che $p'(g)v \in V$ dobbiamo verificare che:

- $e_{11}, e_{22} \in \mathbb{R}$ con $e_{22} = -e_{11}$;
- $e_{12}, e_{21} \in \mathbb{C}$ con $e_{21} = \bar{e}_{12}$.

Raccogliamo allora le x_i negli elementi e_{11} e e_{22}:
$e_{11} = x_1(a\bar{a} - b\bar{b}) + x_2(b\bar{a} + a\bar{b}) + ix_3(a\bar{b} - b\bar{a})$;
$e_{22} = x_1(b\bar{b} - a\bar{a}) + x_2(-b\bar{a} - a\bar{b}) + ix_3(b\bar{a} - a\bar{b})$.
Risulta evidente che $e_{22} = -e_{11}$; per provare che $e_{11}, e_{22} \in \mathbb{R}$ dobbiamo verificare che $a\bar{a} - b\bar{b}, b\bar{a} + a\bar{b}, i(a\bar{b} - b\bar{a}) \in \mathbb{R}$.
$a\bar{a} - b\bar{b} = a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 \in \mathbb{R}$ poiché somma con segno di numeri reali al quadrato.
$b\bar{a} + a\bar{b} = (b_1 + ib_2)(a_1 - ia_2) + (b_1 - ib_2)(a_1 + ia_2) =$
$= a_1b_1 - ib_1a_2 + ib_2a_1 + a_2b_2 + a_1b_1 - ib_2a_1 + ib_1a_2 + a_2b_2 = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 \in \mathbb{R}$

poiché somma di prodotti di numeri reali.
$i(a\bar{b} - b\bar{a}) = i((a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) - (b_1 + ib_2)(a_1 - ia_2)) =$
$= i(a_1b_1 + ia_2b_1 - ia_1b_2 + a_2b_2 - a_1b_1 - ia_1b_2 + ia_2b_1 - a_2b_2) =$
$= i(2ia_2b_1 - 2ia_1b_2) = -2a_2b_1 + 2a_1b_2 \in \mathbb{R}$ poiché somma di prodotti di numeri reali.
Raccogliamo ora le x_i negli elementi e_{12} e e_{21}:
$e_{12} = x_1(-2ab) + x_2(a^2 - b^2) + ix_3(a^2 + b^2)$;
$e_{21} = x_1(-2\bar{a}\bar{b}) + x_2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) + ix_3(-\bar{a}^2 - \bar{b}^2)$.
Ovviamente $e_{12}, e_{21} \in \mathbb{C}$ poiché somme di prodotti di numeri complessi. Rimane da vedere che e_{12} e e_{21} sono coniugati; per fare ciò si deve verificare che sono coniugate le coppie di numeri complessi $-2ab$ e $-2\bar{a}\bar{b}$, $a^2 - b^2$ e $\bar{a}^2 - \bar{b}^2$ e $i(a^2 + b^2)$ e $i(-\bar{a}^2 - \bar{b}^2)$.
Esplicitiamo gli elementi delle coppie:

- $-2ab = -2(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2) = -2a_1b_1 + 2a_2b_2 + i(-2a_2b_1 - 2a_1b_2)$;
- $-2\bar{a}\bar{b} = -2(a_1 - ia_2)(b_1 - ib_2) = -2a_1b_1 + 2a_2b_2 + i(2a_2b_1 + 2a_1b_2)$;
- $a^2 - b^2 = a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2 + i(2a_1a_2 - 2b_1b_2)$;
- $\bar{a}^2 - \bar{b}^2 = a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2 + i(-2a_1a_2 + 2b_1b_2)$;
- $i(a^2 + b^2) = i(a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + i(2a_1a_2 + 2b_1b_2)) =$
  $= -2a_1a_2 - 2b_1b_2 + i(a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2)$;
- $i(-\bar{a}^2 - \bar{b}^2) = i(-a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2 + i(2a_1a_2 + 2b_1b_2)) =$
  $= -2a_1a_2 - 2b_1b_2 + i(-a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2)$

e questi sono evidentemente coniugati a due a due. □

Così l'applicazione $p'(g)$ precedentemente definita ha immagine contenuta in V: $p'(g)V \subseteq V$. Mostreremo ora che $p'(g)$ è anche biiettiva e lineare, ottenendo che $p'(g)V = V$, dunque $p'(g)$ è un automorfismo lineare.

Teorema 3.7. *Sia $p'(g) : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto gvg^{-1}$. $p'(g)$ è un automorfismo lineare.*

Mostreremo ora che $p'(g)$ è anche ortogonale, dimostrando che preserva la forma $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Proposizione 3.8. *$p'(g)$ è ortogonale.*

Dimostrazione. $det(p'(g)v) = det(gvg^{-1}) = det(g)det(v)det(g^{-1}) =$
$$= det(g)det(v)\frac{1}{det(g)} = det(v) = det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} =$$
$= -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. □

Teorema 3.9. *Sia $p(g) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione che corrisponde a $p'(g)$ identificando (x_1, x_2, x_3) con $v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in V$, con $g \in SU(2,\mathbb{C})$: $p(g) = v^{-1} \circ p'(g) \circ v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $p(g) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un automorfismo lineare ortogonale.*

Dimostrazione. $p(g) = v^{-1} \circ p'(g) \circ v$ è iniettiva, suriettiva e lineare in quanto composizione di funzioni tali. Inoltre $p(g)$ è ortogonale: sappiamo infatti che $det\ v(x_1, x_2, x_3) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ e che $det\ v = det(p'(g)v)$ per ogni $v \in V$, da cui segue che anche $p(g)$ preserva la forma $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. □

Dall'ortogonalità di $p(g)$ segue che $p(SU(2,\mathbb{C})) \subseteq O(3,\mathbb{R})$. Allora ne segue che $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow O(3,\mathbb{R})$, $g \longmapsto \{v \longmapsto gvg^{-1}\}$. Poiché $SU(2,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso, risulta anche connesso e così $p(SU(2,\mathbb{C}))$ è connesso (poiché p è un omeomorfismo). Ne segue che $p(SU(2,\mathbb{C}))$ è incluso in una delle due componenti connesse di $O(3,\mathbb{R})$. Per provare che $p(SU(2,\mathbb{C}))$ è incluso in $SO(3,\mathbb{C})$ basta vedere che la matrice di passaggio di una qualsiasi trasformazione lineare $p(g)$ ha determinante 1 ed è antisimmetrica.

Teorema 3.10. *$p(SU(2,\mathbb{C})) \subseteq SO(3,\mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Sia $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Consideriamo inoltre una base di $\mathbb{R}^3$, sia $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.
$$gv(e_1)g^{-1} = I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$gv(e_2)g^{-1} = I_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$gv(e_3)g^{-1} = I_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$

Così $p(I_2) : (1,0,0) \longmapsto (1,0,0), (0,1,0) \longmapsto (0,1,0), (0,0,1) \longmapsto (0,0,1)$, cioè $p(I_2) = I_3$. Ne segue che $det\ p(I_2) = det\ I_3 = 1$ e che $p(I_2)$ è antisimmetrica, ossia che $p(I_2) \in SO(3,\mathbb{R})$. □

Abbiamo così ottenuto $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$; dobbiamo ora mostrare che è un rivestimento. Mostriamo innanzitutto che p è suriettiva.

Proposizione 3.11. $p(SU(2,\mathbb{C})) = SO(3,\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sappiamo che una base di $SO(3,\mathbb{R})$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per provare la tesi è sufficiente trovare tre elementi di $SU(2,\mathbb{C})$ che sono portati da p in $SO(3,\mathbb{R})$.

Ricordiamo dapprima che, poste $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$, abbiamo già visto nella dimostrazione del lemma 3.6 che $gvg^{-1} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$

dove $\begin{cases} e_{11} = \bar{a}(ax_1 + b(x_2 - ix_3)) + \bar{b}(a(x_2 + ix_3) - bx_1) \\ e_{12} = -b(ax_1 + b(x_2 - ix_3)) + a(a(x_2 + ix_3) - bx_1) \\ e_{21} = \bar{a}(-\bar{b}x_1 + \bar{a}(x_2 - ix_3)) + \bar{b}(-\bar{b}(x_2 + ix_3) - \bar{a}x_1) \\ e_{22} = -b(-\bar{b}x_1 + \bar{a}(x_2 - ix_3)) + a(-\bar{b}(x_2 + ix_3) - \bar{a}x_1) \end{cases}.$

$p(g_1)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$= (x_1, x_2\cos\theta - x_3\sin\theta, x_2\sin\theta + x_3\cos\theta)$, terna che è portata dal morfismo v

in $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = f$, dove $\begin{cases} f_{11} = x_1 \\ f_{12} = x_2(\cos\theta + i\sin\theta) + x_3(-\sin\theta + i\cos\theta) \\ f_{21} = x_2(\cos\theta - i\sin\theta) + x_3(-\sin\theta - i\cos\theta) \\ f_{22} = -x_1 \end{cases}$.

Dobbiamo determinare g_1 tale che $g_1 v g_1^{-1} = f$, ossia tale che $e_{ij} = f_{ij}$ con $i,j \in \{1,2\}$. Notiamo che, per la costruzione fatta, le condizioni $e_{11} = f_{11}$ e $e_{22} = f_{22}$ sono equivalenti, come le condizioni $e_{12} = f_{12}$ e $e_{21} = f_{21}$. Considereremo allora soltanto le condizioni $e_{11} = f_{11}$ e $e_{12} = f_{12}$, che si traducono nelle seguenti condizioni: $\begin{cases} a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \\ a\bar{b} + b\bar{a} = 0 \\ a\bar{b} - b\bar{a} = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2ab = 0 \\ a^2 - b^2 = \cos\theta + i\sin\theta \\ i(a^2 + b^2) = i\cos\theta - \sin\theta \end{cases}$.

Ricordando che $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ e considerando le ultime due equazioni del secondo sistema si ottiene: $\begin{cases} a^2 - b^2 = e^{i\theta} \\ i(a^2 + b^2) = ie^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = e^{i\theta} \\ a^2 + b^2 = e^{i\theta} \end{cases}$, da cui si ottiene, sommando e sottraendo tra di loro le due relazioni, $\begin{cases} a^2 = e^{i\theta} \\ b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} a = e^{i\frac{\theta}{2}} \\ b = 0 \end{cases}$. Ponendo $\frac{\theta}{2} = t$, si ottiene che $a = e^{it}$ e $b = 0$, da cui $\bar{a} = e^{-it}$ e $\bar{b} = 0$. Si può verificare che tali valori soddisfano le altre relazioni dei due sistemi. Dunque $g_1 = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$.

$$p(g_2)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$= (x_1\cos\theta + x_3\sin\theta, x_2, -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta)$, terna che è portata dal morfismo v in $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = f$, dove $\begin{cases} f_{11} = x_1\cos\theta + x_3\sin\theta \\ f_{12} = -ix_1\sin\theta + x_2 + ix_3\cos\theta \\ f_{21} = ix_1\sin\theta + x_2 - ix_3\cos\theta \\ f_{22} = -x_1\cos\theta - x_3\sin\theta \end{cases}$.

Dobbiamo determinare g_2 tale che $g_2 v g_2^{-1} = f$, ossia tale che $e_{ij} = f_{ij}$ con $i,j \in \{1,2\}$. Notiamo nuovamente che, per la costruzione fatta, le condizioni $e_{11} = f_{11}$ e $e_{22} = f_{22}$ sono equivalenti, come lo sono le condizioni

$e_{12} = f_{12}$ e $e_{21} = f_{21}$. Considereremo allora soltanto le condizioni $e_{11} = f_{11}$ e $e_{12} = f_{12}$, che si traducono nelle seguenti condizioni: $\begin{cases} a\bar{a} - b\bar{b} = \cos\theta \\ a\bar{b} + b\bar{a} = 0 \\ ia\bar{b} - ib\bar{a} = \sin\theta \end{cases}$ e $\begin{cases} -2ab = -isen\theta \\ a^2 - b^2 = 1 \\ i(a^2 + b^2) = i\cos\theta \end{cases}$. Considerando le ultime due equazioni del secondo sistema si ottiene: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \cos\theta \end{cases}$, da cui si ottiene, sommando e sottraendo tra di loro le due relazioni, $\begin{cases} 2a^2 = 1 + \cos\theta \\ 2b^2 = -1 + \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ b = \sqrt{\frac{-1+\cos\theta}{2}} \end{cases}$.

Ora $a = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$
e $b = \sqrt{\dfrac{-1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{-\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{2}} = \sqrt{-\sin^2\frac{\theta}{2}} =$
$= i\sin\frac{\theta}{2}$. Ponendo $\dfrac{\theta}{2} = t$, si ottiene che $a = \cos t$ e $b = i\sin t$, da cui $\bar{a} = \cos t$ e $\bar{b} = -i\sin t$. Si può verificare che tali valori soddisfano le altre relazioni dei due sistemi. Dunque $g_2 = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

$$p(g_3)(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$= (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cos\theta, x_3)$, terna che è portata dal morfismo v in $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = f$, dove $\begin{cases} f_{11} = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ f_{12} = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + ix_3 \\ f_{21} = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta - ix_3 \\ f_{22} = -x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \end{cases}$.

Dobbiamo determinare g_3 tale che $g_3 v g_3^{-1} = f$, ossia tale che $e_{ij} = f_{ij}$ con $i,j \in \{1,2\}$. Notiamo nuovamente che, per la costruzione fatta, le condizioni $e_{11} = f_{11}$ e $e_{22} = f_{22}$ sono equivalenti, come lo sono le condizioni $e_{12} = f_{12}$ e $e_{21} = f_{21}$. Considereremo allora soltanto le condizioni $e_{11} = f_{11}$ e

$e_{12} = f_{12}$, che si traducono nelle seguenti condizioni: $\begin{cases} a\bar{a} - b\bar{b} = \cos\theta \\ a\bar{b} + b\bar{a} = -\sin\theta \\ ia\bar{b} - ib\bar{a} = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} -2ab = sen\theta \\ a^2 - b^2 = \cos\theta \\ i(a^2+b^2) = i \end{cases}$. Considerando le ultime due equazioni del secondo sistema si ottiene: $\begin{cases} a^2 - b^2 = \cos\theta \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, da cui si ottiene, sommando e sottraendo tra di loro le due relazioni, $\begin{cases} 2a^2 = 1 + \cos\theta \\ 2b^2 = 1 - \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ b = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \end{cases}$.

Ora $a = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$

e $b = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{2}} = \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sin\frac{\theta}{2}$.

Ponendo $\dfrac{\theta}{2} = t$, si ottiene che $a = \cos t$ e $b = \sin t$, da cui $\bar{a} = \cos t$ e $\bar{b} = \sin t$. Si può verificare che tali valori soddisfano le altre relazioni dei due sistemi. Dunque $g_3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. □

Così possiamo concludere che $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$ è suriettiva. Calcoliamo ora il $\ker p$. Vedremo che questo coincide proprio con il centro di p, risultato di notevole importanza. Infatti si può dimostrare che, a meno di isomorfismi, $SU(2,\mathbb{C})$ e $SU(2,\mathbb{C})/C$ sono gli unici gruppi localmente isomorfi a $SU(2,\mathbb{C})$ e, dato che $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$ è un morfismo suriettivo avente come nucleo proprio C, per il teorema di isomorfismo $SU(2,\mathbb{C})/C$ è isomorfo a $SO(3,\mathbb{R})$. Così possiamo concludere che $SU(2,\mathbb{C})$ e $SO(3,\mathbb{R})$ sono localmente isomorfi.

Lemma 3.12. *Sia la notazione come sopra.* $\ker p = \{\pm I\}$.

Dimostrazione. Per determinare il nucleo di $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$ dobbiamo trovare quelle matrici $g \in SU(2,\mathbb{C})$ la cui immagine mediante p è $\{v \longmapsto v\}$, cioè quelle trasformazioni che hanno come matrice di passaggio

la matrice identica.
Sia $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $p'(g)(x_1, x_2, x_3) = I(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1, x_2, x_3)$, che è portato da v in $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$. Come nella dimostrazione della proposizione 3.11, vogliamo trovare g tale che $gvg^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}$, ossia tale che $e_{11} = x_1$ e $e_{12} = x_2 + ix_3$, da cui si ottengono le condizioni $\begin{cases} a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \\ a\bar{b} + b\bar{a} = 0 \\ ia\bar{b} - ib\bar{a} = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} -2ab = 0 \\ a^2 - b^2 = 1 \\ i(a^2 + b^2) = i \end{cases}$. Considerando le ultime due equazioni del secondo sistema si ottiene: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, da cui si ottiene, sommando e sottraendo tra di loro le due relazioni, $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 0 \end{cases}$. Così $a = \pm 1$ e $b = 0$, i cui coniugati sono $\bar{a} = \pm 1$ e $\bar{b} = 0$. Si può verificare che tali valori soddisfano le altre relazioni dei due sistemi. Dunque $g = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \{\pm I\}$. □

Come precedentemente detto, una immediata conseguenza di questo lemma è il seguente risultato.

Teorema 3.13. *$SU(2,\mathbb{C})$ e $SO(3,\mathbb{R})$ sono localmente isomorfi.*

Per mostrare che $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$ è un rivestimento ci avvaleremo dei risultati appena dimostrati e di alcuni risultati del capitolo 1 sui G-spazi. Consideriamo come gruppo G il centro C di $SU(2,\mathbb{C})$. Vediamo ora che $SU(2,\mathbb{C})$ è un G-spazio di Hausdorff, dove $G = C$, e che l'azione di G su $SU(2,\mathbb{C})$ è libera. Per quanto visto nel capitolo 1, poiché G è un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff, l'azione di G su $SU(2,\mathbb{C})$ risulta propriamente discontinua.

Teorema 3.14. *$SU(2,\mathbb{C})$ è un G-spazio.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che G agisce su $SU(2,\mathbb{C})$ e che per ogni $g \in G$ la funzione $x \longmapsto g \times x$ è continua. Definiamo allora la funzione

$G \times SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SU(2,\mathbb{C})$, $(g,x) \longmapsto g \times x$; allora $I \times x = x$ per ogni $x \in SU(2,\mathbb{C})$ e $g \times (h \times x) = (g \times h) \times x$ per ogni $x \in SU(2,\mathbb{C})$ e per ogni $g, h \in G$. Infatti, dato che $g, h \in \{\pm I\}$, i casi possibili sono i seguenti quattro: $I \times (I \times x) = I \times x = x = I \times x = (I \times I) \times x$, $I \times (-I \times x) = I \times -x = -x =$ $= -I \times x = (I \times -I) \times x$, $-I \times (I \times x) = -I \times x = -x = -I \times x = (-I \times I) \times x$ e $-I \times (-I \times x) = I \times x = x = I \times x = (-I \times -I) \times x$.
Consideriamo ora l'applicazione $SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SU(2,\mathbb{C})$, $x \longmapsto g \times x$ per ogni $g \in G$. g può essere soltanto la matrice identica o la sua opposta. Quindi dobbiamo verificare che sono continue le funzioni $x \longmapsto I \times x = x$ e $x \longmapsto -I \times x = -x$. La prima è l'identità, che è ovviamente continua poiché la preimmagine di ogni aperto è l'aperto stesso. Consideriamo ora l'applicazione $x \longmapsto -x$. Allora la preimmagine di un aperto U è tutto e solo $-U$ (poiché $x \longmapsto -x$ è biiettiva). Sia x una matrice tale che $x \in -U$. Allora $-x \in U$ e, poiché U è aperto, esiste un intorno N di $-x$ interamente contenuto in U. Così $-N$ è interamente contenuto in $-U$ e è intorno di x, dunque x possiede un intorno in $-U$, che risulta quindi aperto. □

Sappiamo inoltre che un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff, da cui si ottiene che $SU(2,\mathbb{C})$, sottospazio di $M(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4$, è di Hausdorff. Resta da vedere che l'azione di G su $SU(2,\mathbb{C})$ è libera.

Osservazione 3.15. L'azione di G su $SU(2,\mathbb{C})$ è libera.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni $x \in SU(2,\mathbb{C})$ e per ogni $g \neq I \in G$ si ha $g \times x \neq x$. Se $g \neq I$, $g = -I$. Così risulta evidentemente $-I \times x = -x \neq x$. □

Possiamo allora concludere che l'azione di G su $SU(2,\mathbb{C})$ è propriamente discontinua. Nel primo capitolo abbiamo inoltre visto che, se l'azione di un gruppo G su un G-spazio X è propriamente discontinua, l'applicazione $X \longrightarrow X/G$ è un rivestimento. Per quanto appena visto possiamo allora concludere che $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SU(2,\mathbb{C})/C = SO(3,\mathbb{R})$ è un rivestimento. Poiché $SU(2,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso, p è un rivestimento universale.

3.3 La mappa p da un punto di vista differenziale

La mappa $p : SU(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$ che abbiamo analizzato è anche differenziabile ed inoltre si verifica che $SU(2,\mathbb{C})$ e $SO(3,\mathbb{R})$ risultano essere varietà localmente diffeomorfe; di conseguenza i loro spazi tangenti risultano isomorfi. Calcoliamo allora lo spazio tangente a $SO(3,\mathbb{R})$. Richiamiamo prima un importante teorema per il calcolo degli spazi tangenti, il teorema di submersione.

Teorema 3.16. ***(di submersione.)*** *Siano M, N due varietà di classe C^∞ e sia $f : M \longrightarrow N$ un morfismo. Sia $m_0 \in M$ e sia $(df)_{m_0}$ suriettivo. Allora $T_{m0}f^{-1}(n_0) = \ker(df)_{m_0}$, dove $n_0 = f(m_0)$.*

Cerchiamo ora lo spazio tangente a $SO(3,\mathbb{R})$. Consideriamo l'applicazione $f' : M(3,\mathbb{R}) \longrightarrow M(3,\mathbb{R})$, $x \longmapsto x \times x^t$. Notiamo innanzitutto che $f(SO(3,\mathbb{R})) = I$. Sia $x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Allora $f'(x) = x \times x^t = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ad+be+cf & ag+bh+ci \\ da+eb+fc & e^2+f^2+g^2 & dg+eh+fi \\ ga+hb+ic & gd+he+if & g^2+h^2+i^2 \end{pmatrix}.$$

Sia ora $f : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^9$ l'applicazione che corrisponde a f' sotto l'identificazione $\mathbb{R}^9 \longrightarrow M(3,\mathbb{R})$.

$f'(a,b,c,d,e,f,g,h,i) = (p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8,p_9)$ dove le coordinate p_i

sono definite nel modo seguente: $\begin{cases} p_1 = a^2+b^2+c^2 \\ p_2 = ad+be+cf \\ p_3 = ag+bh+ci \\ p_4 = da+eb+fc \\ p_5 = e^2+f^2+g^2 \\ p_6 = dg+eh+fi \\ p_7 = ga+hb+ic \\ p_8 = gd+he+if \\ p_9 = g^2+h^2+i^2 \end{cases}$.

Calcoliamo ora la matrice Jacobiana di f:

$$Jf = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ d & e & f & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2d & 2e & 2f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & h & i & d & e & f \\ g & h & i & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & g & h & i & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}.$$

Ci interessa conoscere quanto vale tale matrice calcolata in $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (avente cioè $a = e = i = 1$, $b = c = d = f = g = h = 0$) per poter applicare il teorema di submersione: $Jf(I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Così $(df)_I : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^9$, $x \longmapsto Jf(I)x$ che esplicitato vale:
$Jf(I)x = (2x_1, x_2 + x_4, x_3 + x_7, x_2 + x_4, 2x_5, x_6 + x_8, x_3 + x_7, x_6 + x_8, 2x_9)$.

Ci interessa trovare il nucleo di $(df)_I$: $Jf(I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_5 = x_9 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_7 = 0 \\ x_6 + x_8 = 0 \end{cases}$.

Ne segue $\ker(df)_I = \{(0, x_2, x_3, -x_2, 0, x_6, -x_3, -x_6, 0)\}$. Così $T_I SO(3, \mathbb{R}) =$
$= T_I f^{-1}(I) = \ker(df)_I = \{(0, x_2, x_3, -x_2, 0, x_6, -x_3, -x_6, 0) \in \mathbb{R}^9\} =$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_6 & 0 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R}) \right\}.$$
Allo stesso modo si può vedere che:
$$T_I SU(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq T_I SO(3, \mathbb{R}).$$

Capitolo 4

Rivestimento universale di un gruppo di Lie

In questo capitolo soffermeremo la nostra attenzione sul rivestimento universale di un gruppo di Lie, mettendo in relazione i risultati ottenuti con l'esercizio trattato nel capitolo 3. Innanzitutto vogliamo definire il concetto di gruppo di Lie.

Definizione 4.1. Sia G un gruppo topologico. Supponiamo che esista una struttura analitica sull'insieme G, compatibile con la sua topologia, che induce su di esso una struttura di varietà differenziabile analitica e per la quale le mappe

$$\begin{cases} (x,y) \longmapsto xy & (x,y \in G) \\ x \longmapsto x^{-1} & (x \in G) \end{cases} \tag{4.1}$$

di $G \times G$ in G e di G in G rispettivamente siano entrambe analitiche. Allora G, con questa struttura analitica, si dice *gruppo di Lie analitico* o, più sinteticamente, *gruppo di Lie.*

Con un abuso di notazione, faremo riferimento al solo G con il termine gruppo di Lie. Con tale convenzione, definiamo ora il concetto di gruppo analitico.

Definizione 4.2. Un gruppo di Lie connesso si dice *gruppo analitico*[1].

Prima di analizzare il caso particolare del rivestimento universale di un gruppo di Lie, studiamo alcuni risultati sui rivestimenti universali di gruppi topologici in generale; una delle premesse necessarie per fare questo sarà dare la definizione di insieme ammissibile e congiuntamente di gruppo topologico ammissibile.

Definizione 4.3. Uno spazio topologico si dice *ammissibile* se è connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso. Un gruppo topologico si dice *ammissibile* se è ammissibile (nel senso appena definito) come spazio topologico.

Supponiamo allora che G sia un gruppo topologico ammissibile e che $\omega : \widetilde{G} \longrightarrow G$ ne sia un rivestimento. Allora può essere introdotta un'operazione su $\widetilde{G}$ con la quale $\widetilde{G}$ diventa un gruppo topologico (necessariamente ammissibile) e ω un omomorfismo continuo con nucleo discreto. Tale struttura di gruppo è unica. Viceversa, siano $\widetilde{G}$ un gruppo topologico ammissibile, N un suo sottogruppo discreto e normale, $G = \widetilde{G}/N$ e ω l'omomorfismo naturale di $\widetilde{G}$ su G. Allora G è ammissibile, N è incluso nel centro di $\widetilde{G}$ e $\omega : \widetilde{G} \longrightarrow G$ è un rivestimento di G.[2]
Basandoci su tale risultato, introduciamo ora la seguente definizione.

Definizione 4.4. Sia G un gruppo ammissibile. Un gruppo ammissibile $\widetilde{G}$ si dice *gruppo rivestimento* di G se esiste un omomorfismo continuo ω con nucleo discreto che mappa $\widetilde{G}$ su G. ω è allora detto *omomorfismo rivestimento*.

Dato un qualsiasi gruppo ammissibile G esiste sempre un gruppo rivestimento di G semplicemente connesso. Esso è determinato a meno di isomorfismi ed è noto come il *gruppo universale rivestimento* di G. Per quanto visto

[1]Questa terminologia si discosta da quella più comunemente usata. Noi faremo riferimento al testo "V. S. Varadarajan - Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations"

[2]Tale risultato è stato tratto dal testo "V. S. Varadarajan - Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations". Fare riferimento ad esso per approfondimenti.

nei capitoli precedenti, un rivestimento universale di un tale G esiste sempre; il fatto straordinario è che tale rivestimento sia un gruppo di Lie con un'unica struttura di gruppo di Lie. Vediamo questo risultato più precisamente.

Teorema 4.5. *Siano G_j un gruppo rivestimento di G semplicemente connesso e ω_j il corrispondente omomorfismo rivestimento (con $j = 1, 2$); esiste allora un isomorfismo ω di G_1 su G_2 (visti come gruppi topologici) per cui $\omega_1 = \omega_2 \circ \omega$. Inoltre se G_j è un gruppo rivestimento di G con rivestimento ω_j $(j = 1, 2)$ e se G_1 è semplicemente connesso, esiste un omomorfismo continuo ω di G_1 su G_2 con nucleo discreto per cui $\omega_1 = \omega_2 \circ \omega$.*

Una delle proprietà più importanti e utili di un gruppo topologico semplicemente connesso è la possibilità di estendere omeomorfismi locali a omeomorfismi globali; tale proprietà è detta *principio di monodromia*. Per descrivere più precisamente questo risultato è necessario dapprima il concetto di omeomorfismo locale.

Definizione 4.6. Siano G_j (con $j = 1, 2$) gruppi con G_1 connesso per archi. Un *omeomorfismo locale* di G_1 su G_2 è una mappa φ di un intorno aperto U dell'identità di G_1 su G_2 tale che, se $a, b, ab \in U$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Si dice che un omeomorfismo ψ di G_1 su G_2 *estende* un omeomorfismo locale φ se $\psi(a) = \varphi(a)$ per ogni $a \in U$ intorno aperto dell'identità di G_1 su cui è definita φ.

Poiché G_1 è connesso, esso è generato da un qualsiasi intorno aperto della sua identità e così esiste almeno un omomorfismo di G_1 su G_2 che estende un omeomorfismo locale dato. Il principio di monodromia afferma che, se G_1 è ammissibile e semplicemente connesso, un qualsiasi omeomorfismo locale di G_1 su G_2 possiede un'unica estensione a un omeomorfismo globale di G_1 su G_2.
Il concetto di omeomorfismo locale può essere esteso naturalmente a quello di isomorfismo locale.

Definizione 4.7. Siano G_j (con $j = 1, 2$) gruppi ammissibili. Diremo che G_1 e G_2 sono *localmente isomorfi* se per ogni $j = 1, 2$ esiste un intorno aperto

U_j dell'identità di G_j e un omeomorfismo φ di U_1 su U_2 tale da soddisfare la seguente condizione: se $a, b \in U_1$, $ab \in U_1$ se e solo se $\varphi(a)\varphi(b) \in U_2$ e in tal caso $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Sia ora G un gruppo ammissibile e sia G_1 un gruppo rivestimento di G. Allora G e G_1 sono localmente isomorfi. Tale relazione di locale isomorfismo è riflessiva, simmetrica e transitiva.
Il risultato principale in questo contesto afferma che due gruppi ammissibili G_1 e G_2 sono localmente isomorfi se e solo se esiste un gruppo ammissibile che li ricopre entrambi. In particolare, sia G il gruppo ammissibile dato e sia $\widetilde{G}$ il gruppo rivestimento universale di G; allora i gruppi della forma $\widetilde{G}/N$, dove N è un sottogruppo discreto normale (e quindi centrale) di $\widetilde{G}$, sono ammissibili e localmente isomorfi a G. Inoltre un qualsiasi gruppo ammissibile localmente isomorfo a G è isomorfo a un gruppo di questa forma.
Consideriamo ora il caso in cui G sia un gruppo analitico, ossia un gruppo di Lie connesso. Poiché una varietà analitica connessa è necessariamente connessa per archi, localmente connessa per archi e localmente semplicemente connessa, ne segue che G è ammissibile. In tal caso si ottiene che tutti i gruppi ammissibili localmente isomorfi a G diventano gruppi analitici nella maniera naturale. Tale risultato è ottenuto a partire dal lemma seguente.

Lemma 4.8. *Sia G un gruppo topologico connesso che soddisfa il secondo assioma di contabilità. Supponiamo che U e V siano due intorni aperti dell'identità che soddisfano le seguenti proprietà:*

(a) esiste una struttura analitica su V con la quale V diventa una varietà analitica;

(b) $UU^{-1} \subseteq V$ e la mappa $(u, v) \longmapsto uv^{-1}$ da $U \times U$ in V è analitica.

Allora esiste un'unica struttura analitica su G tale che:

(i) qualche intorno aperto di 1 è una sottovarietà aperta sia di G che di V;

(ii) per ogni $a \in G$ la traslazione sinistra $l_a : G \longrightarrow G, g \longmapsto ag$ è un diffeomorfismo analitico di G su se stesso.

Inoltre G, con questa struttura analitica, è un gruppo analitico.

Un importante conseguenza di tutto ciò è il seguente risultato.

Corollario 4.9. *Siano G_1 e G_2 gruppi ammissibili che soddisfano il secondo assioma di contabilità. Sia poi $\pi : G_1 \longrightarrow G_2$ un omomorfismo continuo il cui nucleo D è un sottogruppo discreto di G_1 e che mappa G_1 su G_2. Supponiamo che G_1 (rispettivamente G_2) sia un gruppo analitico. Allora esiste esattamente una struttura analitica su G_2 (rispettivamente G_1) con la quale diventa un gruppo analitico per il quale π è un omomorfismo analitico.*

Le dimostrazioni di questi ultimi due enunciati possono essere trovate nel libro "V. S. Varadarajan - Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations" nelle pagine 63-65.
Consideriamo ora un gruppo analitico G. Sia $\widetilde{G}$ un gruppo rivestimento universale di G e sia ω un omeomorfismo rivestimento. Segue così dal corollario 4.9 che possiamo far diventare $\widetilde{G}$ un gruppo analitico in modo che ω sia una mappa analitica che è anche un diffeomorfismo locale. Poiché un qualsiasi gruppo ammissibile localmente isomorfo a G è isomorfo a un gruppo $\widetilde{G}/D$ dove D è un sottogruppo discreto normale di $\widetilde{G}$, applicando nuovamente il corollario 4.9 si ha che tutti i gruppi ammissibili possono essere trasformati in gruppi analitici in maniera naturale.
Vogliamo dare ora un'applicazione di questi risultati utilizzando l'esempio descritto nel capitolo 3.

Esempio 4.10. $SO(3,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie: infatti $SO(3,\mathbb{R})$ è un gruppo e una varietà differenziabile (ossia di classe C^∞) tale che l'operazione di gruppo $G \times G \longrightarrow G, (x,y) \longmapsto xy$ e l'applicazione $G \longrightarrow G, x \longmapsto x^{-1}$ sono mappe differenziabili; inoltre è ammissibile in quanto omeomorfo a $\mathbb{RP}^3$ che è il quoziente di S^3, che è ammissibile. Così esiste, ed è unico a meno di isomorfismi, un gruppo rivestimento universale di $SO(3,\mathbb{R})$, il gruppo

$SU(2,\mathbb{C})$ precedentemente individuato. Sotto tali condizioni si ha inoltre che $SO(3,\mathbb{R})$ e $SU(2,\mathbb{C})$ sono localmente isomorfi.
Consideriamo ora il gruppo dei quaternioni unitari, i quaternioni di norma 1; essi formano una ipersfera di $\mathbb{R}^4$:

$$S^3 = \{q = a + bi + cj + bk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} =$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

sotto l'identificazione di un quaternione q con le coordinate (a, b, c, d) come elemento di $\mathbb{R}^4$, dove i, j, k sono simboli letterali con $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. I quaternioni unitari formano un gruppo non abeliano con la moltiplicazione e con la struttura di varietà differenziabile data da S^3 formano un gruppo di Lie. Ogni quaternione unitario q_0 definisce una rotazione dello spazio $\mathbb{R}^3$. Assumendo la notazione scalare-vettore, $q = (a, v)$ con $v = (b, c, d)$ e così si identifica $\mathbb{R}^3$ attraverso i quaternioni $(0, v)$ con prima coordinata nulla. La rotazione determinata da q_0 è quindi $q \longmapsto q_0 q q_0^{-1}$ e, se q ha la prima coordinata nulla, anche $q_0 q q_0^{-1}$ ha la prima coordinata nulla. Ogni rotazione è in questo modo espressa da due quaternioni: o è determinata da q_0 o da $q_0' = -q_0$. Così, associando a ogni quaternione unitario una rotazione, si è definita la mappa $S^3 \longrightarrow SO(3,\mathbb{R})$ dal gruppo dei quaternioni unitari sul gruppo ortogonale speciale delle rotazioni dello spazio tridimensionale. Tale mappa è suriettiva ma non è iniettiva: la preimmagine di un elemento di $SO(3,\mathbb{R})$ è data da due quaternioni opposti $\{\pm q_0\}$. Tale mappa è in particolare un rivestimento e, poiché S^3 è semplicemente connesso, questo è un rivestimento universale di $SO(3,\mathbb{R})$. Abbiamo così trovato due gruppi ricoprenti universali di $SO(3,\mathbb{R})$: $SU(2,\mathbb{C})$ e S^3. Tali due gruppi risultano essere allora isomorfi.

Bibliografia

[1] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, 1985.

[2] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988.

[3] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1991.

[4] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, 1994.

[5] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer-Verlag, 1984.