Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

IL LEMMA DI SCHWARZ
E
LA DISTANZA DI KOBAYASHI

Tesi di Laurea in Analisi Complessa

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Salvatore Bacca

I Sessione
Anno Accademico 2016/2017

There is pleasure in recognising old things from a new viewpoint

Richard Feynman

Introduzione

La teoria geometrica delle funzioni è lo studio delle proprietà geometriche delle famiglie di funzioni analitiche complesse. Il lemma di Schwarz, 1880, ed in seguito le generalizzazioni di Pick e soprattutto di Ahlfors (che per primo si rende conto del ruolo cruciale giocato dalla metrica naturale di curvatura -1 sul disco) diedero un forte impulso a questo campo di ricerca, che costruisce un ponte tra lo studio delle funzioni olomorfe e la geometria differenziale. Ahlfors infatti cominciò a studiare funzioni analitiche dal disco in una superficie di Riemann dotata di metrica Hermitiana con curvatura minore o uguale ad una costante negativa $-A^2$. Ottenne cosí una stima dall'alto del pull-back del tensore metrico Hermitiano, tramite una funzione olomorfa f dal disco nella superficie, maggiorandolo con il tensore metrico di Poincaré sul disco, moltiplicato per una costante. Tale costante è il quoziente tra la curvatura della metrica di Poincaré del disco e la costante $-A^2$. In questa tesi si partirà proprio da tale versione metrica del lemma di Schwarz: verrà introdotta successivamente la distanza di Kobayashi, una (pseudo)distanza su varietà complesse, cercando di evidenziarne le proprietà più semplici e immediate, che utilizzeremo infine per derivare i classici teoremi di Picard in chiave geometrico differenziale. Più in generale questa tesi vuole fungere da spunto per avvicinarsi al mondo della teoria geometrica delle funzioni, un campo che a partire dalla sua nascita con i lavori di Poincaré, che per primo utilizzò degli invarianti geometrici per studiare funzioni complesse, non ha mai smesso di evolversi e ha trovato applicazione in svariati ambiti della matematica e della fisica.

Indice

Capitolo 1

Le Origini

1.1 Concetti Introduttivi

Definizione 1.1
Dato un dominio Ω in $\mathbb{C}$, i.e. un insieme aperto e connesso in $\mathbb{C}$, una metrica (conforme) su Ω è una funzione C^2,

$$\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$$

Il termine conforme si usa in differenti ambiti. In questo caso si intende che gli angoli misurati in una metrica conforme coincidono con quelli della metrica euclidea. La palla di norma unitaria nello spazio tangente a z è invariante per rotazioni euclidee. Se $z \in \Omega$ e $v \in \mathbb{C}$ è un vettore, che immaginiamo nello spazio tangente $T_z\Omega$ a Ω in z, definiamo la lunghezza di v come

$$|| \text{ v } ||_{\ \rho,z} \equiv \rho(z) \cdot |\text{v}|,$$

dove |v| è l'usuale norma euclidea in $\mathbb{C}$.

In realtà la metrica è definita sul fibrato tangente di Ω (l'unione disgiunta di tutti gli spazi tangenti ai punti di Ω), quindi ρ potrebbe essere pensata come una funzione delle due variabili (z, v). Ponendo $\rho(z) = 1$ otteniamo la metrica Euclidea.

Definizione 1.2

La ρ-lunghezza di una curva γ in $\mathbb{D}$ è

$$\mathcal{L}_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz|$$

In altri termini, se $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ per $t \in [a, b]$, si ha

$$\mathcal{L}_\rho(\gamma) = \int_a^b \rho(x(t) + iy(t)) \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{1/2} dt.$$

Definizione 1.3
Se ρ_U è una metrica conforme su U e ρ_V è una metrica conforme su V con U e V domini in $\mathbb{C}$, allora un diffeomorfismo $f : U \to V$ è detta isometria se manda vettori tangenti della stessa lunghezza, ovvero:

$$\rho_V(f(z))|f'(z)| = \rho_U(z)$$

per ogni $z \in U, v \in \mathbb{C}$.
Definizione 1.4

Sia $\mathbb{D}$ il disco aperto unitario in $\mathbb{C}$. La metrica di Poincaré (a volte detta iperbolica) su $\mathbb{D}$ è la metrica conforme

$$\rho = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

quindi la lunghezza iperbolica di una curva γ in $\mathbb{D}$è

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

1.2 Il lemma di Schwarz (Versione originale)

Teorema 1.2.1. *Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione olomorfa dal disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ in se stesso. Se $f(0) = 0$, allora valgono i seguenti asserti:*

(i) $|f(z)| \leq |z|$ *per ogni* $z \in \mathbb{D}$.

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

(iii) Se vale l'uguaglianza stretta in (i) per qualche $z_0 \neq 0$, *o se vale l'uguaglianza nella (ii), allora* $f(z) = cz$ *per una costante* $c \in \mathbb{C}$ *con* $|c| = 1$.

Dimostrazione Consideriamo la funzione:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se} z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

per il teorema di Riemann sulle singolarità rimovibili. questa funzione è olomorfa su $\mathbb{D}$. Sia r una costante arbitraria con $0 < r < 1$. Definiamo $g_r(z) := g(rz)$. Allora dal principio del massimo modulo per funzioni olomorfe segue che:

$$\max_{|z|\leq 1}|g_r(z)| = \max_{|z|=1}|g_r(z)| = \max_{|z|=1}\frac{|f(rz)|}{|rz|} = \frac{1}{r}\max_{|z|=1}|f(rz)| \leq \frac{1}{r}$$

Per ogni $z \in \mathbb{D}$, facciamo convergere r ad 1. Quindi $|g(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Poiché $f(0) = 0$, si deduce immediatamente che $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$, il che prova (i). Per la (ii),essendo $f'(0) = g(0)$, allora $|f'(0)| \leq 1$. Per il punto (iii), assumiamo $|f'(0)| = 1$. Allora $|g(0)| = 1$. Dal principio del massimo modulo segue che g(z)è una funzione costante. Ma allora questa costante deve avere valore assoluto uguale ad uno. Ciò implica, dalla definizione di g, che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ con $|c| = 1$.

Infine assumiamo $|f(z_0)| = |z_0|$ per un qualche $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Allora $|g(z_0)| = 1$.

Ancora una volta, il principio del massimo modulo implica che $f(z) = cz$ per ogni $z \in \mathbb{D}$, con $|c| = 1$. Questo termina la dimostrazione. ■

Una conseguenza immediata, che non dimostreremo, del lemma di Schwarz, è la caratterizzazione delle funzioni biolomorfe dal disco in se stesso, i.e. gli automorfismi del disco. Infatti:

Teorema 1.2.2. *Per il disco unitario $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$ il gruppo degli automorfismi Aut $\mathbb{D}$ è dato da*

$$Aut\ \mathbb{D} = \{z \mapsto e^{i\theta}\tfrac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}} : \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in D\}.$$

In particolare

$$f_{\theta,\alpha} = e^{i\theta}\tfrac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}} \ \textit{con}\ \alpha, z \in \mathbb{D}$$

viene detta trasformazione di Möbius.

1.3 Conseguenze del lemma di Schwarz sulla geometria del disco

Riprendendo le notazioni introdotte nella prima sezione, isometria e metrica di Poincaré dimostriamo

Teorema 1.3.1. *A meno di un fattore scalare, $\rho_{\mathbb{D}}$è l'unica metrica conforme su $\mathbb{D}$ invariante rispetto all'azione di Aut($\mathbb{D}$).*

Dimostrazione

Ricordando che il lemma di Schwarz implica che tutti gli automorfismi in $\mathbb{D}$ sono della forma:
$f_{\theta,\alpha} = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}}$ con $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{D}$ (Teorema 1.2.2), prendiamo ρ metrica conforme su $\mathbb{D}$ invariante rispetto all'azione di Aut($\mathbb{D}$). Se $z \in \mathbb{D}$, e $\xi \in T_z(\mathbb{D})$ è un qualsiasi vettore tangente, allora $f_{o,z} : w \mapsto \frac{w-z}{1-\bar{z}w}$ manda z in 0, e $f'_{0,z}$ manda $\xi \mapsto f'_{0,z}(z)\xi = \frac{\xi}{1-|z|^2} \in T_0(\mathbb{D})$. Per l'invarianza di ρ dovremo quindi avere:

$$\rho(z)|\xi| = \rho(0)\left|f'_{0,z}(z)\xi\right| = \rho(0)\tfrac{|\xi|}{1-|z|^2}$$

Il che dimostra che ρ è un multiplo di $\rho_{\mathbb{D}}$. D'altra parte si è già visto che $\rho_{\mathbb{D}}$ è invariante per $f_{0,a}$ per un generico $a \in \mathbb{D}$ e lo è anche per la moltiplicazione per $e^{i\theta}$ quindiè invariante per tutto Aut($\mathbb{D}$). ■

Corollario 3.2: Il gruppo delle isometrie di $\rho_{\mathbb{D}}$ (che conservano l'orientazione) è proprio Aut($\mathbb{D}$).

Osservazione: il corollario sopra risulta di fondamentale importanza per i nostri scopi. Essendo gli automorfismi di $\mathbb{D}$, per definizione, delle funzioni biolomorfe, esiste quindi il famoso "ponte" citato nell'introduzione tra l'analisi complessa sul disco e la geometria iperbolica sul disco.

Come esempio fondante di questa connessione tra l'analisi complessa e la geometria del disco $\mathbb{D}$, proponiamo di seguito una versione "iperbolica" del lemma di Schwarz.

Lemma di Schwarz-Pick, Versione Iperbolica, 1916

Teorema 1.3.2. *Se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ è analitica , allora:*

$$d(f(z), f(w)) \leq d(z, w) \text{ per ogni } z, w \in \mathbb{D},$$

con:

$$d(z, w) := \inf_{\gamma} \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = arctanh\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$$

Osservazione: La distanza sopra definita è relativa alla metrica di Poincaré sul disco:

Un rapido calcolo della geodesica mostra che la lunghezza che minimizza localmente la curva rispetto a $\rho(z)$ è appunto $arctanh\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$.

Dimostrazione Teorema 1.3.2

Sia $T(z) = \frac{z+w}{1+\bar{w}z}$, $S(\xi) = \frac{\xi - f(w)}{1-\overline{f(w)}\xi}$. Allora se $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ si ha:

$$S \circ f \circ T(0) = S(f(w)) = 0.$$

Dal lemma di Schwarz (versione originale) si deduce:

$$|S(f(T(z))| \leq |z| \rightarrow |S(f(z))| \leq |T^{-1}(z)|$$

Perció :

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\bar{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$$

Ma *arctanh* è una funzione crescente, quindi:

$$d(f(z), f(w)) = arctanh\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\bar{f(w)}f(z)}\right| \leq arctanh\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| = d(z, w).$$

E questo conclude la dimostrazione. ■

Corollario 1.3.3. *le funzioni analitiche dal disco in se stesso sono delle contrazioni (rispetto alla metrica iperbolica).*

Capitolo 2

Lemma di Schwarz: la versione di Ahlfors

In questo capitolo vogliamo esaminare la dimostrazione del lemma di Schwarz dovuta ad Ahlfors, dapprima in un caso speciale, ovvero il disco di raggio R. Lars Ahlfors, matematico finlandese, prima medaglia Fields della storia assieme a Jesse Douglas (1936), dette, ancora più di Pick, una interpretazione geometrica del lemma di Schwarz, utilizzando i concetti di metrica pull-back e curvatura che di seguito premettiamo al teorema.

Definizione 2.1
Sia ρ una metrica su un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sia $f : \mathbb{D} \to \Omega$ una mappa olomorfa. Il pull-back di ρ tramite f è

$$f^*\rho(z) := \rho \circ f(z)|f'(z)|$$

Esempio: Sia $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ e

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_R &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \tfrac{z}{R} \end{aligned}$$

il pullback della metrica iperbolica $\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ tramite f è

$$f^*\rho(z) = \rho(f(z))|f'(z)| = \frac{1/R}{1-|z/R|^2} = \frac{R}{R^2-|z|^2}$$

Definizione 2.2 Curvatura:
Sia D un dominio in $\mathbb{C}$. Sia $\rho(z) : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+$ una metrica conforme. La curvatura Gaussiana di ρ è :

$$K(z) = -\frac{1}{\rho^2(z)}\Delta log\rho(z)$$

dove Δ è il laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Osservazione: la curvatura è conservata dal pull-back.

Definizione 2.3
Una metrica conforme ρ su un dominio D è completa se l'associato spazio metrico (D, d_ρ) è completo.
Osserviamo che la completezza è preservata dal pull-back:
se $f : D \to \Omega$ è una funzione biiettiva, e ρ è una metrica completa su Ω, allora $f^*\rho$ è completa su D.

Teorema 2.0.1. ***Lemma di Ahlfors-Shwarz, caso speciale***
Sia $\mathbb{D}_R$ il disco di raggio R, con metrica iperbolica $\lambda_R(z) := \frac{R}{R^2-|z|^2}$. Per ogni metrica ρ su $\mathbb{D}_R$ tale che la curvatura $K_\rho(z) \leq -4$ per ogni z, allora $\rho(z) \leq \lambda_R(z)$ per ogni z.

Dimostrazione: Innanzi tutto notiamo che la definizione di metrica iperbolica su $\mathbb{D}_R$ è quella corretta essendo $\lambda_R(z)$ il pull-back della metrica di Poincaré , da ciò deduciamo che anche $\lambda_R(z)$, cosí come la metrica di Poincaré, è completa e ha curvatura uguale a -4 (basta applicare la formula della curvatura a quest'ultima). Perciò, ritornando al teorema, per r<R, abbiamo $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$. Sia:

$$V(z) = \frac{\rho}{\lambda_r}; z \in \mathbb{D}_r.$$

V è continua, positiva e $V \to 0$ quando $|z| \to r$, quindi V ha un massimo e conseguentemente anche logV ha un massimo. Chiamiamo tale punto di massimo $z_0 \in \mathbb{D}_r$.

$0 \geq \Delta log V(z_0) = \Delta log(\rho) - \Delta log \lambda_r = -\rho^2(z_0)K_\rho(z_0) + \lambda_r^2(z_0)K_{\lambda_r}(z_0) \geq 4\rho^2(z_0) - 4\lambda_r^2(z_0)$,
quindi, essendo z_0 il punto di massimo, allora vale $\rho(z) \leq \lambda_r(z)$ per ogni z.
Facendo tendere $r \to R$ concludiamo la dimostrazione. ■

Qualche osservazione:
La versione di Ahlfors mostra alcune proprietà geometriche legate alla metrica iperbolica sul disco, ovvero ci dice che tale metrica è massimale tra le metriche con curvatura maggiorata da -4, e più in generale da una costante negativa.
In particolare, sia $f : \mathbb{D}_R \to \Omega$, e λ_R metrica iperbolica su $\mathbb{D}_R$, e λ_Ω metrica iperbolica su Ω, allora $f^*\lambda_\Omega \leq \lambda_R$.
Inoltre la generalizzazione di Ahlfors, nel caso $R = 1$, si riduce alla versione originale del lemma di Schwarz, che assume la forma:

$$f^*\rho \leq \rho,$$

con ρ metrica di Poincarè su $\mathbb{D}$ e $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, e quindi:

$$\tfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \tfrac{1}{1-|z|^2}$$

In realtà , la versione di Ahlfors del lemma di Schwarz vale per le superfici di Riemann con metrica hermitiana. Proponiamo di seguito il testo originale del teorema (1938):

Teorema 2.0.2. *Sia $f : D \to M$ una funzione olomorfa; Se M è una superficie di Riemann dotata di metrica hermitiana ds_M^2 con curvatura maggiorata da un numero negativo $-K$, allora*

$$f^*ds_M^2 \leq \tfrac{4}{K}\rho_{P,B}$$

dove $\rho_{P,B}$ è la metrica di Poincaré Bergman nel disco unitario $\mathbb{D}$ definita come:

$$\rho_{P,B} \equiv \tfrac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

Dimostrazione: essendo f olomorfa f^*ds_M

$$f^*ds_M = A(z)|dz|$$

Per una qualche funzione liscia $A : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$
Sia $B(z) = \frac{1}{(1-|z|^2)^2}$, ci basterà dimostrare: $\frac{A(z)}{B(z)} \leq \frac{4}{K}$, per ogni z in $\mathbb{D}$.
Seguendo la dimostrazione dello stesso Ahlfors, dividiamo il resto della dimostrazione in due sottocasi:
CASO SPECIALE: poniamo $u(z) \equiv \frac{A(z)}{B(z)}$ ammetta un massimo in z_0.
Ovviamente se tale massimo dovesse essere 0 non c'è nulla da dimostrare. Possiamo quindi assumere $u(z_0)$ maggiore di zero, e quindi in un intorno abbastanza piccolo di z_0 u è definita positiva. Avendo u un massimo in z_0, possiamo allora affermare:

$$\nabla logu|_{z_0} = 0, \; \triangle logu|_{z_0} \leq 0$$

dove ∇ rappresenta l'operatore gradiente (nabla) e $\triangle$ l'Operatore di Laplace, già visto in precedenza.
Svolgiamo i calcoli :
In z_0 abbiamo:

$$0 \geq \triangle logA - \triangle logB.$$

Essendo la curvatura Gaussiana della metrica di Poincaré uguale a -4, si ha:

$$-\frac{1}{2B}\triangle logB = -4.$$

Dalla maggiorazione superiore della curvatura della metrica ds_M^2 (per ipotesi) otteniamo ancora:

$$-\frac{1}{2A}\triangle logA \leq -K$$

e ricaviamo quindi:

$$0 \geq 2AK \ -8\text{B}$$

da cui

$$u \leq \tfrac{4}{K}$$

CASO GENERALE: Nel caso in cui u(z) non abbia un massimo, procediamo nel seguente modo: Sappiamo soltanto che $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa che non ha punti di massimo nel dominio. Fissiamo ξ, scelto arbitrariamente in $\mathbb{D}$. Vorremmo quindi provare $u(\xi) \leq \frac{4}{K}$. Scegliamo allora una costante r tale che $|\xi| < r < 1$ r e preso il disco aperto di raggio r dotiamolo di una metrica:

$$ds_r^2 = B_r dz = \tfrac{r^2 dz}{(r^2-|z|^2)^2}$$

definiamo $f_r = f \mid_{\mathbb{D}_r}: \mathbb{D}_r \to$ M. Allora $f_r^* ds_M^2 = u_r(z) ds_2^2$ con

$$u_r(z) = r^{-2}(r^2 - |z|^2)^2 A(z)$$

dove A è una funzione non negativa sull'intero disco $\mathbb{D}$. Perció u_r è anch'essa una funzione non negativa che si annulla su $\{z : |z| = r\}$, quindi ammette massimo in $\mathbb{D}_r$. Ora possiamo svolgere lo stesso calcolo nel punto di massimo di u_r e otteniamo:

$$f^* ds_M^2 \mid_\xi \leq \tfrac{4 ds_r^2|_\xi}{K}$$

facendo tendere r a 1, concludiamo la dimostrazione.■

Concludiamo il capitolo due importanti implicazioni del lemma di Ahlfors-Schwarz.

Il teorema di Schottky

Teorema 2.0.3. *Sia a un numero complesso con* $a \neq$ *0,1 e r un numero reale con* $0 \leq r < 1$. *Esiste allora un numero positivo* $S = S(a, r)$ *con la seguente proprietà : se f è una funzione olomorfa dal disco* $\mathbb{D}$ *in* $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ *tale che* $f(0) = a$*, allora* $|f(z)| \leq S(a, r)$ *per* $|z| \leq r$.

Dimostrazione: sia $\rho_{P,B}$ la metrica di Poincaré Bergman sul disco, con curvatura uguale a -4. Poniamo $M = \mathbb{C} - \{0, 1\}$, e sia ds^2_M una metrica completa su M con curvatura ≤ -4 (una tale metrica su M esiste effettivamente, un possibile esempio é stato costruito per la prima volta da Grauert e Reckziegel, e il procedimento è descritto nel primo capitolo del libro di Kobayashi). Se poniamo $r' = \frac{1}{2} log(1+r)/(1-r)$, allora il disco aperto di raggio r, $\mathbb{D}_r$ in $\mathbb{C}$ coincide con l'insieme dei punti in $\mathbb{D}$ aventi distanza (di Poincaré Bergman) da 0 minore o uguale ad r'. Sia N(a,r') l'insieme dei punti in M con distanza da a minore o uguale ad $r\prime$ (distanza ds^2_M). Essendo la metrica su M completa per ipotesi, l'insieme N(a,r') è compatto e perció contenuto in $\{z$ in $\mathbb{C}$ t.c. $|z| \leq S\}$ per un adeguato numero positivo S. Sia f:$\mathbb{D} \longrightarrow$ M una funzione olomorfa tale che f(0)=a. Ora f, per il lemma di Ahlfors-Schwarz, sappiamo che diminuisce la distanza (in realtà sarebbe meglio dire non incrementa la distanza), ovvero $f^* ds^2_M \leq \rho_{P,B}$ e quindi manda $\{z \in \mathbb{D} | |z| \leq r\}$ in N(a,r').

Diamo infine una dimostrazione alternativa di un classico risultato in Analisi Complessa, il teorema di Liouville, che dedurremo sfruttando ancora una volta il lemma di Ahlfors-Schwarz. Tale dimostrazione fu trovata da Minda e Schober nel 1983.

Teorema 2.0.4. *(Liouville,Minda,Schober): sia f:* $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione analitica tale che esiste* $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $|f(z)| \leq M$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$. *Allora f è una funzione costante .*

Dimostrazione: definiamo la metrica sul disco aperto $\mathbb{D}_R$ di raggio R,

$$\lambda_R(z) = \frac{R}{R^2 - |z|^2}$$

per ogni R, la funzione f manda $\mathbb{D}_R$ in $\mathbb{D}_M$. Per il lemma di Ahlfors-Schwarz (caso speciale), per ogni R abbiamo:

$$f^*\lambda_M \leq \lambda_R$$

e quindi:

$$\frac{M|f'(z)|}{M^2-|f(z)^2|} \leq \frac{R}{R^2-|z|^2}$$

per ogni z fissato. Facendo tendere $z \longrightarrow \infty$ otteniamo $|f'(z)| = 0$ per ogni z, Perció $f \equiv c$ c e f è costante.

Capitolo 3

La distanza di Kobayashi

Premessa

Le distanze e le metriche invarianti sono uno strumento molto utilizzato nello studio delle funzioni olomorfe in una o più variabili. In realtà sarebbe più corretto parlare di pseudo-distanze o pseudo-metriche, poiché nonostante la proprietà Hermitiana e la disuguaglianza triangolare vengano soddisfatte, tali metriche non sono in generale definite positive, possono cioè esistere punti distinti a distanza nulla. Si potrebbe chiedere in quali casi questa pseudo-distanza sia una distanza vera e propria. Ancora una volta il lemma di Ahlfors-Schwarz fornirà un criterio geometrico per la definizione positiva. In questo paragrafo, come del resto nell'intera tesi, la trattazione si limiterà a funzioni in una variabile complessa su domini nel piano complesso: i libri di Kobayashi forniscono una trattazione esauriente e rigorosa anche del caso di più variabili complesse.

3.1 Definizioni ed esempi

Ricordiamo che la metrica di Poincaré Bergman sul disco unitario $\mathbb{D}$ è definita come:

$$\rho_{P,B}(z) = \tfrac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

Sia M una varietà complessa, e siano $x, y \in M$. Definiamo allora una catena di dischi di Kobayashi da x a y come una terna $\{f_i, p_i, q_i\}_{i\in I}$ di tre famiglie finite (I $= \{1, 2, ..., m\}$) tale che per ogni $i \in I$, si ha

1. $f_i : \mathbb{D} \to M$ è un'applicazione olomorfa,
2. p_i e qi sono dei punti in $\mathbb{D}$
3. $f_1(p_1) = x, f_m(q_m) = y$ e $f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1})$ per ogni $i \in$ I

Chiamiamo $\sum_{i=0}^{m} d_{\rho_{P,B}}(p_i, q_i)$ lunghezza della catena di Kobayashi, dove

$$d_{\rho_{P,B}}(p_i, q_i) = \log \frac{|1-\overline{p_i}qi|+|p_i-qi|}{\sqrt{1-|p_i|^2}\sqrt{1-|q_i|^2}}$$

rappresenta la distanza geodesica tra i punti p_i, q_i nel disco $\mathbb{D}$.

Definiamo allora la pseudodistanza di Kobayashi su M come:

$$d_{kob,M}(x, y) \equiv d_M(x, y) \equiv Inf_{f_i,p_i,q_i}\Big\{\sum_{i=0}^{m} d_{\rho_{P,B}}(p_i, q_i)\Big\}.$$

dove l'estremo inferiore è preso tra tutte le catene che congiungono x a y. Questa pseudodistanza soddisfa le seguenti tre proprietà
1) $d_M(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in M$,
2) $d_M(x, y) = d_M(y, x) \ \forall x, y \in M$,
3) $d_M(x, z) \leq d_M(x, y) + d_M(y, z) \ \forall x, y, z \in M$

Definizione 3.1: una varietà complessa M si dice iperbolica (nel senso di Kobayashi) se tale pseudodistanza è definita positiva, ovvero $d_M(x, y) > 0$ se $x \neq y$.
Dalla definizione segue:
Sia $f : M \to N$ una funzione olomorfa tra due varietà complesse M, N. Allora:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y) \ \forall x, y \in M.$$

Inoltre, la pseudodistanza di Kobayashi d_M su M è la più grande pseudo distanza che verifica tale proprietà di decrescenza per le funzione olomorfe da $\mathbb{D}$ in M. In particolare se la funzione f è biolomorfa allora è un'isometria. Ovviamente questa proprietà altro non è che una generalizzazione del lemma di Schwarz affrontato nei precedenti capitoli.

Se N è una varietà complessa e $M \subset N$ è una sua sottovarietà , allora $d_N(x, y) \leq d_M(x, y)$ in M, ovvero $d_N \leq d_M$.
In particolare se M è una varietà iperbolica e $X = \{x_1, x_2, ...\}$, allora $M \setminus X$ è iperbolica nel senso di Kobayashi, poichè $d_M \leq d_{M \setminus X}$ e M è iperbolica per ipotesi.
Abbiamo così il seguente:
Corollario 3.3: ogni sottovarietà di una varietà complessa iperbolica è iperbolica.
Facciamo ora qualche esempio.
a) $\mathbb{C}$ non è iperbolico nel senso di Kobayashi.
Basta far vedere che $d_{\mathbb{C}}(0, 1) = 0$. Sia:

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto rz$$

allora $d_{\mathbb{C}}(0, 1)$ è il limite di $d_{\rho_{P,B}}(0, \frac{1}{r})$ quand r$\to \infty$. Quindi $d_{\mathbb{C}}(0, 1) = 0$.

b) il disco $\mathbb{D}$ è iperbolico nel senso di Kobayashi.
Per definizione abbiamo ;

$$d_{kob,\mathbb{D}}(x, y) = Inf_{f_i,p_i,q_i}\left\{\sum_{i=0}^{m} d_{\rho_{P,B}}(p_i, q_i)\right\}$$

utilizzando il lemma di Schwarz-Pick otteniamo:

$$d_{kob,\mathbb{D}}(x, y) \geq Inf_{f_i,p_i,q_i}\left\{\sum_{i=0}^{m} d_{\rho_{P,B}}(f(p_i), f(q_i))\right\} \geq d_{\rho_{P,B}}(x, y).$$

E l'estremo inferiore è ottenuto scegliendo come catena la terna { Id, x, y } con Id funzione Identità. E quindi:

$$d_{kob,\mathbb{D}} = d_{\rho_{P,B}}$$

Una proprietà che ci verrà utile a breve è la seguente:

Proposizione 3.1.1. *Sia $f : \mathbb{C} \to M$ una funzione olomorfa. $\forall$ x,y $\in f(\mathbb{C})$ si ha:*

$$d_M(x, y) \ = 0$$

Dimostrazione: siano p,q in $\mathbb{C}$ con f(p) = x e f(q) = y. Per la proprietà di decrescenza di d_M abbiamo

$$d_M(x, y) \leq d_{\mathbb{C}(p,q)}$$

e dall'esempio a) otteniamo la tesi. ■

Corollario 3.1.2. *Se M è iperbolico allora le applicazioni olomorfe $f : \mathbb{C} \to M$ sono costanti.*

Dimostrazione: dalla proposizione precedente otteniamo $0 = d_M(x, y) = d_M(f(p), f(q))$, e quindi $f(p) = f(q)$ poiché M è iperbolica.■

Un teorema molto utile, che utilizzeremo a breve, ma che non dimostriamo è:

Teorema 3.1.3. *: sia M una varietà complessa e $\pi : M^0 \to M$ un rivestimento olomorfo di M (non ramificato). Allora M^0 è iperbolico se e sole se M è iperbolico.*

Sfruttiamo il precedente teorema per fare qualche altro esempio (e controesempio) di iperbolicità alla Kobayashi.

a) $\mathbb{C}^*$ non è iperbolico, poiche è rivestito da $\mathbb{C}$ tramite $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Perciò avendo visto precedentemente che $\mathbb{C}$ non è iperbolico, di conseguenza neanche $\mathbb{C}^*$ lo è.

b) Tutte le superfici di Riemann compatte di genus ≥ 2 sono iperboliche. Più

generalmente, per il teorema di uniformizzazione, tutte le superfici di Riemann a eccezione di $\mathbb{C}^*, \mathbb{C}$ e delle curve ellittiche, sono iperboliche, avendo il disco com rivestimento universale olomorfo. Nei casi che considereremo è possibile mostrare l'iperbolicità in modo elementare senza ricorrere al teorema di uniformizzazione.
c) $\mathbb{D}^*$ è iperbolico, poiché il semipiano di Poincaré $\mathbb{H}$ è un suo rivestimento, tramite la mappa:

$$\mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$$

$$z \to e^{2\pi i z}$$

Definizione metrica (infinitesimale) della distanza di Kobayashi
Definizione 3.2 Metrica di Kobayashi-Royden
Sia M una varietà complessa, e sia TM il suo fibrato tangente (introdotto precedentemente), la metrica infinitesimale di Kobayashi-Royden

$$k_M(p, v) = \inf\{|\lambda| : \exists h \in Hol(\mathbb{D}, M) \text{ tale che } h(0) = p,\ dh_0(\lambda) = v\}$$

Teorema 3.1.4 (Royden 1970)**.** *La funzione k_M è semicontinua superiormente e*

$$d_{kob,M}(p, q) = inf_\gamma \int_0^1 k_M(\gamma(t), \gamma'(t))\ dt$$

dove l'inf è preso tra tutte le possibili curve $\gamma : [0, 1] \to M$ C^1 a tratti e tali che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Proviamo allora il seguente teorema che darà una caratterizzazione delle varietà iperboliche in base alla curvatura Gaussiana.

Teorema 3.1.5. *Se M è una superficie di Riemann che ammette una metrica Hermitiana con curvatura ≤ -4, allora la distanza di Kobayashi su M è definita positiva, e quindi M è iperbolica nel senso di Kobayashi.*

Dimostrazione Il precedente teorema di Royden riduce la dimostrazione a stabilire un limite inferiore per la metrica infinitesimale di Kobayashi-Royden k_M. Sia $\| \; \|_p$ la metrica Hermitiana su M come nelle ipotesi. Sia $f : \mathbb{D} \to M$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = p$ e $df_0(t) = v$. Allora dal lemma di Ahlfors-Schwarz si ottiene:

$$|t|^2 = \frac{|t|^2}{(1-|0|^2)^2} \geq \| \, df_0(t) \, \|_p^2 = \| \, v \, \|_p^2$$

Dalla definizione di metrica di Kobayashi-Royden data in precedenza si ha:

$$k_M(p, v)^2 \geq \| \, v \, \|_p^2$$

come volevasi dimostrare. ■

Ovviamente non occorre che la curvatura sia minore o uguale a -4 ma è sufficiente che sia minore o uguale ad una qualsiasi costante negativa.
Un ulteriore di varietà iperbolica è
$\equiv \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, Reckziegel e Grauert costruirono una metrica con curvatura ≤ -1. La costruzione è discussa nel libro di Kobayashi. Come detto l'esistenza di una metrica completa a curvatura costante negativa segue anche dal teorema di uniformizzazione.

Diamo ora un'elegante quanto rapida applicazione dei concetti introdotti in questo capitolo: Il piccolo teorema di Picard.

Proposizione 3.1.6. *Sia $f : \mathbb{C} \to M$ una funzione olomorfa, e M una varietà iperbolica. Allora f è una funzione costante.*

Dimostrazione: Già visto

Corollario 3.1.7. *Se M è una superficie di Riemann dotata di una metrica completa la cui curvatura è maggiorata da una costante negativa, allora ogni funzione da $\mathbb{C}$ in M è costante.*

Sfruttando infine il fatto che $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ è iperbolico (Grauert, Reckziegel) deduciamo immediatamente un classico risultato dell'analisi complessa.

Teorema 3.1.8. ***Il piccolo teorema di Picard***: *Ogni funzione intera che omette nella sua immagine più di un solo punto è costante.*

Nota storica: Il piccolo teorema di Picard, come affermato più volte da Kobayashi stesso durante un ciclo di seminari [1], fu il motivo che lo spinse ad introdurre una distanza che potesse valere da principio geometrico per la dimostrazione.

Capitolo 4

Immersioni iperboliche e grande Teorema di Picard

4.1 Introduzione al problema

Le singolarità isolate per una funzione olomorfa possono essere di tre tipi: rimovibili, se la funzione può essere estesa ad una funzione olomorfa nel punto singolare, poli di ordine n, se la funzione si comporta in prossimità della singolarità , diciamo come $\frac{1}{z^n}$, ed infine le singolarità essenziali, quelle per cui il comportamento nelle vicinanze è difficile da comprendere. Il teorema di Casorati-Weierstrass afferma che data una funzione olomorfa f, avente una singolarità essenziale in un punto c, $f(U \setminus \{c\})$ è denso in $\mathbb{C}$, dove U è un generico intorno di c contenuto nel dominio. Il grande teorema di Picard invece è un risultato assai più profondo, e afferma che l'immagine di un qualunque intorno di una singolarità essenziale di f, assume tutti i valori del piano complesso tranne al più uno. Il piccolo teorema di Picard forniva informazioni sull'immagine di una funzione intera, in particolare l'immagine di una funzione intera non costante manca al più di un punto in $\mathbb{C}$, il grande teorema dimostra che tale asserto continua a valere in ogni intorno di una singolarità essenziale, se la funzione ne ammette una.
Per un così importante risultato esistono svariate versioni, e altrettante dimo-

strazioni , partendo da quella di Picard stesso che fa uso di funzioni modulari, per arrivare a quella che invece sfrutta il teorema di uniformizzazione e la teoria dei rivestimenti. La strada che invece vogliamo percorrere, si lega saldamente ai concetti affrontati nei capitoli precedenti, ed è stata tracciata sul finire degli anni sessanta da studiosi come Kiernan, Huber, Kwack e Kobayashi stesso, che hanno poi generalizzato il teorema aumentando il numero di variabili e allargando il dominio di definizione.

Teorema 4.1.1. ***Teorema di Picard, versione classica:***
Se

$$f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$$

è olomorfa, allora f non può avere una singolarità essenziale nell'origine.

La sfera di Riemann (l'analogo complesso della retta reale estesa) è definita come:

$$S = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Una tale struttura ammette però un ulteriore punto di vista, può essere cioè intesa come modello della retta proiettiva complessa $P_1(\mathbb{C})$ [2].
Possiamo così riscrivere il teorema di Picard come segue: se

$$f : \mathbb{D}^* \to P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$$

è una funzione olomorfa allora ha al più una singolarità rimovibile nell'origine.
$\mathbb{C}\setminus \{a, b\}$ e $\widehat{\mathbb{C}}\setminus \{a, b, \infty\}$ sono biolomorfi, quindi anche $\mathbb{C}\setminus \{a, b\}$ e $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{a, b, \infty\}$ sono biolomorfi, inoltre scegliere come punti a, b e c piuttosto che $0, 1$ e ∞, non influisce sulla dimostrazione. Esiste sempre una (unica) trasformazione di Möbius che manda tre generici punti in in $0, 1, \infty$.
Il nostro intento è quello di dimostrare questa seconda versione del teorema. Introdurremo dapprima il concetto di immersione iperbolica di uno spazio X in uno spazio M (prolungamento iperbolico), faremo vedere che $P_1(\mathbb{C}) \setminus$

$\{0, 1, \infty\}$ è immerso iperbolicamente (e quindi è iperbolico) in $P_1(\mathbb{C})$, ed infine dimostreremo che le funzioni olomorfe dal disco bucato in un sottospazio X immerso iperbolicamente in uno spazio complesso M, possono essere estese a funzioni dall'intero disco in M. Avremo così dimostrato che una funzione $f : \mathbb{D}^* \to P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ può essere estesa (prolungata) ad una funzione $f : \mathbb{D} \to P_1(\mathbb{C})$, quindi f non ammette una singolarità essenziale nell'origine come asserisce il grande teorema.

4.2 Immersioni Iperboliche

Precisazione Da ora in avanti, seguendo la notazione utilizzata da Kobayashi in [3], intenderemo un generico spazio complesso Y, come uno spazio topologico dotato di due topologie, la topologia canonica e la $d_Y - topologia$, ovvero la topologia indotta dalla pseudo-distanza di Kobayashi d_Y su Y.

Definizione: Sia Y uno spazio complesso e M un suo sottospazio iperbolico, munito della distanza di Kobayashi d_M, e relativamente compatto. Diremo che M è immerso iperbolicamente in Y se valgono le seguenti condizioni (equivalenti):

1. siano p, q punti della frontiera di M e p_n, q_n due successioni in M tali che $p_n \to p$ e $q_n \to q$. Se $d_M(p_n, q_n) \to 0$ allora $p = q$.

2. se p è un punto della frontiera di M e U è un intorno di p in Y, esiste allora un intorno V di p in Y tale che $\overline{V} \subset U$ e la distanza tra $M \cap (Y \setminus U)$ e $M \cap V$ rispetto a d_M è positiva (distanza tra insiemi definita tramite l'Inf) (in realtà per questa seconda condizione non serve che M sia relativamente compatto, ma nelle applicazioni M è quasi sempre un dominio aperto relativamente compatto in Y [3]).

Intuitivamente un sottospazio M, relativamente compatto, è immerso iperbolicamente in Y se M è iperbolico e se la distanza di Kobayashi su M, tra due sue punti del bordo è strettamente maggiore di zero.

Esempi di spazi immersi iperbolicamente sono:

- se M è una varietà iperbolica (nel senso di Kobayashi) compatta, allora M è immersa iperbolicamente in se stessa.

- Sia $Y = P_1(\mathbb{C})$ e $M = P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$. Essendo rivestito dal disco unitario, che è iperbolico (come visto nel capitolo 3) anche M è iperbolico. Essendo i punti di frontiera di M punti isolati, M è perciò immerso iperbolicamente in Y [3].

- se M_1 è immerso iperbolicamente in Y_1 e M_2 è immerso iperbolicamente in Y_2, allora $M_1 \times M_2$ è immerso iperbolicamente in $Y_1 \times Y_2$. (non lo dimostriamo)

Osservazione:

Il secondo esempio ci permetterà di concludere la dimostrazione del grande teorema che faremo in seguito.

4.3 Un teorema di Estensione e il grande Teorema di Picard

Dimostriamo infine un teorema di estensione per funzioni olomorfe dal disco bucato in uno sottospazio M immerso iperbolicamente in uno spazio complesso Y. La dimostrazione di questo teorema riprende quella originale proposta da M. H. Kwack nel 1969 [4] , l'utilizzo del winding number è dovuto essenzialmente a Grauert and Reckziegel.

Teorema 4.3.1. *Sia M immerso iperbolicamente in Y e sia $f_k : \mathbb{D}^* \to M$ una successione di funzioni olomorfe. Siano inoltre (z_k) e (z'_k) due successioni in $\mathbb{D}^*$ che convergono a 0 e tali che $f_k(z'_k) \to q \in Y$. Allora:*

1. *$f_k(z_k) \to q$*

2. *ogni funzione olomorfa $f : \mathbb{D}^* \to M$ può essere estesa ad una funzione $f : \mathbb{D} \to Y$*

3. *$f_k(0) \to q$.*

Dimostrazione:

1. Assumiamo $f_k(z_k) \to p \neq q$, e $|z_k| \leq |z'_k|$. Scegliamo allora un intorno coordinato U di p (parametrizzazione locale) tale che U sia un sottoinsieme analitico di W (i.e. per ogni punto $x \in U$, esiste un intorno aperto U_x di x in W, tale che $U \cap U_x$ è luogo di zeri di un sistema di funzioni olomorfe in U_x [4]) con W = $\{(w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$ tali che $|w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 2$ $\}$, q $\notin$ U, e p = $(0, ..., 0)$. Sia $\rho_k(t) = z_k e^{it}$ per $0 \leq t \leq 2\pi$. Allora i diametri degli insiemi ρ_k convergono a 0 (rispetto alla distanza di Kobayashi su $\mathbb{D}^*$, $d_{\mathbb{D}^*}$). Essendo M immerso iperbolicamente in Y per ipotesi, ed essendo le f_k olomorfe, e quindi diminuiscono la distanza di Kobayashi, allora $f_k(\rho_k)$ converge a p. Quindi per k abbastanza grande, esiste una corona circolare R'_k centrata in 0 e tale che $\rho_k \subset R'_k$ e $f_k(R'_k) \subset$ B = $\{(w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$ tali che $|w_1|^2 + ... + |w_n|^2$ < 1 $\}$. Sia R_k il più grande tra queste corone. Ora possiamo assumere che R_k non sia un disco bucato per alcun k o che lo sia per tutti i k e dividiamo la dimostrazione in due sottocasi:

   - R_k è un disco bucato per ogni k: per ipotesi $f_k(z'_k) \to q \notin$ U, esistono allora a_k e b_k in $\overline{R_k}$ con $|a_k| < |b_k|$ e $|f_k(a_k)| = |f_k(b_k)|$ $= 1$. Prendendo una sottosuccessione e riordinandola , possiamo assumere $f_k(a_k) \to q' \in \overline{B}$ e $f_k(b_k) \to q'' \in \overline{B}$. Siano σ_k e τ_k due

curve definite in questo modo : $\sigma_k = a_k e^{it}$ e $\tau_k = b_k e^{it}$ per $0 \leq t \leq 2\pi$. Seguendo quanto fatto in precedenza per ρ_k, osserviamo che $f_k(\sigma_k) \to q'$ $f_k(\tau_k) \to q''$.
Sia ora $f_k = (f_k^1, ..., f_k^n)$ in $f_k^{-1}(U)$. Ruotando W se necessario, vediamo che l'indice di avvolgimento delle curve $f_k^1(\sigma_k)$ e $f_k^1(\tau_k)$ attorno al punto $f_k^1(z_k)$ è 0 per k sufficientemente grandi. Dal teorema di Cauchy abbiamo così:

$$\int_{\sigma_k} \frac{(f_k^1(z))'}{f_k^1(z) - f_k^1(z_k)} dz = \int_{f_k^1(\sigma_k)} \frac{dw_1}{w_1 - f_k^1(z_k)} = 0$$

e

$$\int_{\tau_k} \frac{(f_k^1(z))'}{f_k^1(z) - f_k^1(z_k)} dz = \int_{f_k^1(\tau_k)} \frac{dw_1}{w_1 - f_k^1(z_k)} = 0$$

da cui

$$\int_{\sigma_k} \frac{(f_k^1(z))'}{f_k^1(z) - f_k^1(z_k)} dz \text{ - } \int_{\tau_k} \frac{(f_k^1(z))'}{f_k^1(z) - f_k^1(z_k)} dz = 2\pi i(P - N)$$

con N e P numeri degli zeri e dei poli, rispettivamente ,della funzione $f_k^1(z) - f_k^1(z_k)$ sull'annulus R_k. Questa è una contraddizione poichè N $>$ 0 e P $=$ 0.

- Se R_k è un disco bucato per ogni k, allora il bordo di $\overline{R_k}$ è τ_k, e τ_k e b_k sono come nel punto precedente. Essendo $f_k(R_k) \subset B$, allora f_k si estende in maniera olomorfa a $\overline{R_k}$ con $f_k(0) \in$ B. Ponendo allora $\sigma_k = \emptyset$, l'argomento usato nel punto precedente porta ad una contraddizione.

2. Sia (z'_k) una successione in $\mathbb{D}^*$ tale che $f(z'_k) \to q \in$ Y. Poniamo $f(0)$ = q. Essendo f continua per il punto precedente, per il teorema di Riemann sulle singolarità removibili f è olomorfa in 0.

3. se $f_k(0)$ non converge a q, allora senza perdita di generalità possiamo assumere $f_k(0) \to p \neq q$. Essendo le f_k continue per ogni k, esiste allora una successione (z_k) in $\mathbb{D}^*$ con $z_k \to 0$ e $f_k(z_k) \to p$. Ma ciò contraddice il primo punto. $\blacksquare$

Corollario: (Il Grande Teorema di Picard)

Dimostrazione: Poniamo M = $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ e Y = $P_1(\mathbb{C})$, abbiamo già visto nella seconda sezione che M è immerso iperbolicamente in Y. Sfruttando il secondo punto del precedente teorema otteniamo la dimostrazione.$\blacksquare$

Bibliografia

[1] R. E. Greene, K.-T. Kim, and S. G. Krantz, *The geometry of complex domains.* Springer Science & Business Media, 2011, vol. 291.

[2] P. Garrett, “Compactification: Riemann sphere, projective space,” 2014.

[3] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces.* Springer Science & Business Media, 2013, vol. 318.

[4] M. H. Kwack, “Generalization of the big picard theorem,” *Annals of Mathematics*, pp. 9–22, 1969.

[5] S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings: an introduction.* World Scientific Publishing Co Inc, 2005.

[6] A. Isaev, *Lectures on the automorphism groups of Kobayashi-hyperbolic manifolds.* Springer, 2007.

[7] H. Royden, “Remarks on the kobayashi metric,” *Several Complex Variables II Maryland 1970*, pp. 125–137, 1971.

[8] S. Kobayashi, “Intrinsic distances, measures and geometric function theory,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 82, no. 3, pp. 357–416, 1976.

[9] K.-T. Kim and H. Lee, *Schwarz’s lemma from a differential geometric viewpoint.* World Scientific, 2011, vol. 2.

[10] D. Minda and G. Schober, "Another elementary approach to the theorems of landau, montel, picard and schottky," *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 2, no. 2, pp. 157–164, 1983.

[11] S. Krantz, "Complex analysis: the geometric viewpoint, carus math," *Monographs, MAA. theorem, Hilbert s Null stellensatz, Structure of artinian rings, Dedekind domains. Introduction to Algebraic Number Theory. Factroisation of ideals. Finiteness of class number. Euclidean number rings*, 1990.

[12] A. F. Beardon, D. Minda *et al.*, "The hyperbolic metric and geometric function theory," *Quasiconformal mappings and their applications*, vol. 956, 2007.

[13] T. Gamelin, *Complex analysis.* Springer Science & Business Media, 2003.

[14] J. H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics: Teichmüller theory.* Matrix Press, 2006.

[15] J. P. Bowman, "612 class lecture: Hyperbolic geometry," 2013.

[16] S. G. Krantz, "The carathéodory and kobayashi metrics and applications in complex analysis," *American Mathematical Monthly*, vol. 115, no. 4, pp. 304–329, 2008.

[17] P. Kiernan and S. Kobayashi, "Holomorphic mappings into projective space with lacunary hyperplanes," *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 50, pp. 199–216, 1973.

[18] ——, "Satake compacitification and extension of holomorphic mappings," *Inventiones mathematicae*, vol. 16, no. 3, pp. 237–248, 1972.

[19] P. Kiernan, "Hyperbolically imbedded spaces and the big picard theorem," *Mathematische Annalen*, vol. 204, no. 3, pp. 203–209, 1973.

[20] ——, "Extensions of holomorphic maps," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 172, pp. 347–355, 1972.

[21] S. Lang, *Introduction to complex hyperbolic spaces.* Springer Science & Business Media, 2013.

Ringraziamenti

In queste poche righe vorrei ringraziare brevemente chi mi ha accompagnato in questo viaggio: i miei genitori per aver creduto in me anche quando io non lo facevo, Marta, lei sa perchè e non basterebbe una tesi per spiegarlo, il mio relatore, Luca Migliorini, per avermi fatto scoprire un argomento che alla fine della storia mi ha appassionato non poco e che senza di lui non avrei potuto conoscere. Ovviamente ringrazio tutti i parenti e gli amici che mi sono stati affettuosamente accanto in questi anni, dispongo di una meravigliosa lista di tali nomi, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina e preferirei ringraziarvi di persona uno ad uno perchè lo meritate. Un ultimo ringraziamento va a mio nonno Totò e alla mia forza di volontà . Senza di loro probabilmente oggi non sarei qui.