Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

LA PROPAGAZIONE DEI MASSIMI PER OPERATORI ELLITTICI DEGENERI

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa ANNAMARIA MONTANARI

Presentata da:
THOMAS GIACOMO NIES

Anno Accademico 2016/2017

Dedico questa tesi ai miei amici,
Nicola, Alice e Livia.

Indice

Introduzione

Il presente lavoro ha come oggetto la propagazione dei massimi per funzioni $u \in C^2(\Omega)$ tali che, in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

$$Lu \geq 0$$

dove L è un operatore differenziale del secondo ordine nella forma

$$Lu = \sum_{j=1}^{m} X_j^2 u + Yu + au$$

e dove $X_1, \ldots, X_m$ sono campi vettoriali di classe C^∞.

Precisamente, dimostreremo che se u ha un massimo positivo in un punto $x_0 \in \Omega$ e soddisfa $Lu \geq 0$ il massimo si propaga lungo curve integrali dei campi $\pm X_j,\ j = 1, \ldots, m$ e Y.

Dopo una breve introduzione all'algebra di Lie dei campi vettoriali di classe C^∞ su $\mathbb{R}^N$, tratteremo, nel secondo capitolo, qualche definizione e qualche lemma di tipo geometrico allo scopo di dimostrare il teorema di Bony-Nagumo. Quest'ultimo stabilisce che se un campo vettoriale X è tangente ad un insieme chiuso C allora le curve integrali del campo X sono contenute in C. Otteniamo dunque uno strumento fondamentale per determinare curve contenute dentro l'insieme dei massimi di u.

Nel terzo capitolo riscriveremo Lu nella forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \partial_i u + au$$

e dimostreremo una versione del principio del massimo debole per L.

Con tale principio saremo poi in grado di mostrare il Lemma di Hopf, che stabilisce che se $Lu \geq 0$ allora i campi vettoriali $X_1, \dots, X_m$ sono tangenti all'insieme dei punti sui quali u assume un massimo. Mediante questo lemma e il teorema di Bony-Nagumo troveremo dunque che il massimo si propaga lungo le curve integrali dei campi appartenenti all'algebra di Lie generata da $X_1, \dots, X_m$

Infine, nel quarto capitolo, utilizzando il teorema di Frobenius troveremo che il massimo si propaga positivamente lungo curve integrali del campo Y. Nell'ultima parte del quarto capitolo troveremo, come semplice conseguenza dei teoremi precedenti, un principio del massimo forte per L nel caso in cui l'algebra di Lie generata da $X_1, \dots, X_m$ abbia dimensione N costante.

Capitolo 1

Campi Vettoriali in $\mathbb{R}^N$

In questo capitolo definiamo i campi vettoriali di classe C^∞ come particolari operatori differenziali lineari. Introduciamo poi le parentesi di Lie, le quali ci permetteranno di definire un'algebra di Lie sull'insieme dei campi vettoriali lisci. Infine determineremo l'algebra di Lie generata da un insieme di campi vettoriali lisci.

1.1 Definizione di campo vettoriale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile rispetto alla variabile x_i. Indicheremo allora con $\partial_j u$ la derivata parziale di $u(x_1, \dots, x_N)$ rispetto alla variabile x_j.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Siano poi $a_1, \dots, a_N$ funzioni scalari in $C^0(\Omega)$. Definiamo con Xu la funzione

$$Xu(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\partial_j u(x) \qquad x \in \Omega$$

Definizione 1.1 (campo vettoriale)**.**
Definiamo un campo vettoriale

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j$$

su R^N come la funzione

$$X : C^1(\Omega) \to C^0(\Omega) \qquad f \;\mapsto\; Xf.$$

Definizione 1.2 (campo vettoriale liscio)**.**
Un campo vettoriale $X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j$ viene detto liscio o di classe C^∞ se le funzioni $a_1, \ldots, a_N$ sono tutte di classe C^∞.

Osservazione 1.
Se $X := \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j$ è campo vettoriale liscio allora X può essere considerato come un operatore $X : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$. Infatti per ogni funzione $u \in C^\infty(\Omega)$ la funzione $Xu = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j u$ è ancora di classe C^∞.

Definizione 1.3.
Denoteremo con $T(\mathbb{R}^N)$ lo spazio vettoriale reale dei campi vettoriali lisci munito delle seguenti operazioni:

- $X + Y = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j + \sum_{j=1}^{N} b_j \partial_j := \sum_{j=1}^{N} (a_j + b_j) \partial_j$
- $\lambda X := \sum_{j=1}^{N} (\lambda a_j) \partial_j$

  dove

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j \quad Y = \sum_{j=1}^{N} b_j \partial_j.$$

e dove X e Y sono campi vettoriali C^∞ con tutte le componenti definite sullo stesso aperto Ω.

Definizione 1.4.
Sia $X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j$ un campo vettoriale di classe C^∞ con $a_1, \ldots, a_N \in C^\infty(\Omega)$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$. Denotiamo con $XI : \Omega \to \mathbb{R}^N$ la funzione

$$x \mapsto XI(x) := \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}$$

e dunque

$$XI \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Ricordiamo allora che $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è a sua volta uno spazio vettoriale reale munito della classica operazione di somma tra funzioni e moltiplicazione per scalare. Perciò la funzione

$$T(\mathbb{R}^N) \ni X \mapsto XI \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Infatti la linearità e l'invertibilità di questa funzione è una semplice verifica.

1.2 Parentesi di Lie

Siano X e Y due campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in C^\infty(\Omega)$. Definiamo allora $[X,Y]u$ come

$$[X,Y](u) := X(Y(u)) - Y(X(u)) \qquad u \in C^\infty(\Omega).$$

Definizione 1.5 (Parentisi di Lie)**.**
Definiamo [X,Y] come l'operatore

$$u \mapsto \ [X,Y]u \qquad u \in C^\infty(\Omega).$$

Proposizione 1.2.1.
Siano X e Y campi vettoriali C^∞. Allora $[X,Y]$ è anche esso un campo vettoriale di classe C^∞ .

Dimostrazione. Se $X = \sum_{j=1}^N a_j\partial_j$ e $Y = \sum_{j=1}^N b_j\partial_j$ sono due campi vettoriali C^∞, allora per ogni $u \in C^\infty(\Omega)$ vale

$$X(Y(u)) - Y(X(u)) = X(\sum_{j=1}^N b_j\partial_j u) - Y(\sum_{j=1}^N a_j\partial_j u) =$$

e poichè per il teorema di Schwartz $a_ib_j\partial_j(\partial_i u) = b_ja_i\partial_i(\partial_j u) = a_ib_j\partial_{ij}u$

$$= \sum_{j=1}^N \big(\sum_{i=1}^N a_i\partial_i b_j\partial_j u - b_i\partial_i a_j\partial_j u\big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i\partial_i b_j - b_i\partial_i a_j)\partial_j u = \sum_{j=1}^{N}(X(b_j) - Y(aj))\partial_j u$$

e quindi

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{N}(X(b_j) - Y(aj))\partial_j$$

$\square$

Osservazione 2.
Siano $X = \sum_{j=1}^{N} a_j\partial_j$ e $Y = \sum_{j=1}^{N} b_j\partial_j$ due campi vettoriali C^∞. Allora si ha

$$[X,Y]I = \begin{pmatrix} Xb_1 \\ \vdots \\ Xb_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Ya_1 \\ \vdots \\ Ya_N \end{pmatrix}$$

Poiché poi per ogni u di classe C^1 $Xu = (\nabla u)\cdot XI$, dove $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} Xb_1 \\ \vdots \\ Xb_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Ya_1 \\ \vdots \\ Ya_N \end{pmatrix} = J_{YI}XI - J_{XI}YI$$

dove J_{XI} e $J_Y I$ sono le matrici jacobiane di XI e YI

$$J_{XI} = \begin{pmatrix} \nabla a_1(x) \\ \vdots \\ \nabla a_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\partial_1 & & a_1\partial_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n\partial_1 & & a_N\partial_N \end{pmatrix} \quad J_{YI} = \begin{pmatrix} b_1\partial_1 & & b_1\partial_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n\partial_1 & & b_N\partial_N \end{pmatrix}$$

Proposizione 1.2.2.
Siano X, Y, Z campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$, siano $a,\ b \in \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Valgono allora le seguenti proprietà:

- $[X,Y] = -[Y,X]$ *antisimmetria*
- $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ *bilinearità*
- $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ *identità di Jacobi*
- $[\lambda X, Y] = \lambda[X,Y] - (Y(\lambda))X$

La dimostrazione di queste ugualianze è una semplice verifica.

1.3 Algebra di Lie

Definizione 1.6 (Algebra di Lie).
Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale V dotato di una mappa bilineare antisimmetrica $V \times V; (x, y) \mapsto [x, y]$ che soddisfa l'identità di Jacobi.

Dunque per la proposizione (1.2.2) l'insieme $T(\mathbb{R}^N)$ dei campi vettoriali C^∞, dotato delle parentesi di Lie, è un algebra di Lie.

Definizione 1.7 (Algebra di Lie generata da un insieme di campi).
Sia U un insieme di campi vettoriali C^∞ di $\mathbb{R}^N$ allora denotiamo con

$$\mathcal{L}(U)$$

la più piccola algebra di Lie contenente U, vale a dire

$$\mathcal{L}(U) := \bigcap \mathfrak{h} \qquad \text{dove } \mathfrak{h} \text{ è una sotto-algebra di Lie di } T(\mathbb{R}^N) \text{ tale che } U \subseteq \mathfrak{h}$$

Proposizione 1.3.1.
Sia $U \subset T(\mathbb{R}^N)$ un insieme qualsiasi di campi vettoriali lisci. Poniamo

$$U_1 := span\{U\} \quad U_n := span\{[u, v] \mid \ \in U \quad v \in U_{n-1}\}.$$

Abbiamo allora che

$$\mathcal{L}(U) = span\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dimostrazione. Poniamo $U^* := \text{span}\{U_n \ n \in \mathbb{N}\}$. Allora $U \subseteq U^*$ ed è contenuto in ogni algebra di Lie che includa U. Dunque è sufficiente provare che U^* è chiuso rispetto alle parentesi di Lie. Per fare ciò basta mostrare che per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ e per ogni $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in U$ vale che

$$\big[[u_1[u_2[\ldots[u_{i-1}[u_i]\ldots]]]; [v_1[v_2[\cdots[v_{j-1}[v_j]\cdots]]]]\big] \in U_{i+j}$$

Procediamo per induzione su $k := i + j \geq 2$. Per $k = 2$ e $k = 3$ l'asserzione è banale. Supponiamo dunque che la tesi valga per $j + i \leq k$ con $k \geq 4$ e proviamo la tesi per $i + j = k + 1$. Per antisimmetria possiamo supporre

$j \geq 3$. Applicando ripetutamente l'ipotesi di induzione e l'identità di Jacobi otteniamo

$$\big[u; [v_1, [v_2[\cdots [v_{j-1}, v_j] \cdots]]]\big] =$$

$$-[v_1, \underbrace{[[v_2, [v_3, \cdots]], u]]}_{\text{lungezza } k} - [[v_2, [v_3, \cdots]], [u, v_1]] =$$

$$\{\text{elemento di } U_{k+1}\} - [[v_1, u], [v_2, [v_3, \cdots]]] =$$

$$\{\text{elemento di } U_{k+1}\} + [v_2, \underbrace{[[v_3. \dots], [v_1, i]]}_{\text{lunghezza } k}] + [[v_3, \cdots], [[v_1, u], v_2] =$$

$$\{\text{elemento di } U_{k+1}\} + [[v_2, [v_1, u]], [v_3, \cdot]] =$$

e dopo un numero finito di passi

$$\{\text{elemento di } U_{k+1}\} = (-1)^{j-1}[[v_{j-i}, [v_{j-2}, \cdots [v_1, u]]]v_j] =$$

$$\{\text{elemento di } U_{k+1}\} + (-1)^j [v_j, [v_{j-i}, [v_{j-2}, \cdots [v_1, u]]]] = U_{k+1}.$$

$\square$

Corollario 1.3.2.
Siano $Z_1, \dots, Z_m \in T(\mathbb{R}^N)$ campi vettoriali lisci fissati. Allora

$$\mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_n) = span\big\{Z_J \mid J = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k \quad k \in \mathbb{N}\big\}$$

dove $Z_J := [Z_{j_1}, \dots, [Z_{j_{k-1}}, Z_{j_k}] \cdots]$.

Il risultato deriva direttamente dalla proposizione precedente.

Capitolo 2

Alcuni risultati di geometria differenziale

In questo capitolo, dopo avere introdotto le curve integrali di un campo vettoriale, definiamo, in maniera molto generale, i vettori normali ad un insieme chiuso e gli insiemi invarianti rispetto ad un campo vettoriale. Poi mediante due lemmi dimostreremo il teorema di Bony Nagumo.

2.1 Curve Integrali

Definizione 2.1.
Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e sia $X = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\partial_j$ un campo vettoriale di classe C^∞ su $\mathbb{R}^N$ con $a_1, \ldots, a_N \in C^\infty(\Omega)$. Una curva $\gamma : I \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è detta curva integrale del campo vettoriale X se

$$\dot{\gamma}(t) = XI(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} a_1(\gamma(t)) \\ \vdots \\ a_n(\gamma(t)) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I.$$

Se X è un campo vettoriale C^∞ si ha che il problema di Cauchy autonomo

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = XI(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x \end{cases}$$

ha un'unica soluzione

$$\gamma_X(\cdot, x) : I \to \mathbb{R}^N.$$

a meno di curve equivalenti. Infatti poiché $XI : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è di classe C^∞ esso è anche localmente lipschitziano. Vale dunque il teorema di Picard-Lindelölf.

Indichiamo allora con $D(X, x)$ il più grande intervallo aperto di $\mathbb{R}$ sul quale $\gamma_X(\cdot, x)$ può esistere.

Inoltre, sempre per il fatto che X è un campo vettoriale liscio la funzione

$$t \mapsto \gamma_X(t, x)$$

è di classe C^∞. Questo significa che possiamo calcolare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di $\gamma_X(\cdot, x)$ in $t = 0$

$$\gamma_X(t, x) = \gamma_X(0, x) + t\dot{\gamma}_X(0, x) + \mathcal{O}(t^2) = \gamma_X(0, x) + tXI(\gamma_X(0, x)) + \mathcal{O}(t^2) =$$

$$= x + tXI(x) + \mathcal{O}(t^2) \quad \text{per } t \to 0$$

Definizione 2.2.
Sia X un campo vettoriale di classe C^∞. Poniamo allora

$$\exp(tX)(x) := \gamma_X(t, x),$$

con x appartenente a $\mathbb{R}^N$, $t \in D(X, x)$ e $\gamma_X(\cdot, x)$ curva integrale di X passante x.

Enunciamo ora senza dimostrazione due importanti proposizioni della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Proposizione 2.1.1.
Sia

$$U := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mid x \in \mathbb{R}^N,\ t \in D(X, x)\}.$$

Allora abbiamo che U è un aperto e la funzione

$$U \ni (t, x) \mapsto exp(tX)(x) \in \mathbb{R}^N$$

è di classe C^1.

Proposizione 2.1.2.
Con la notazione precedente si ha che $t \in D(-X, x)$ *se e solo se* $-t \in D(X, x)$ *e valgono*

- $exp(-tX)(x) := exp((-t)X)(x) = exp((t) - X)(x)$
- $exp(-tX)(exp(tX)(x)) = x$
- $exp((t + s)X)(x) = exp(tX)(exp(sX)(x))$
- $exp(ts(X))(x) = exp(t(sX))(x)$

per ogni s, t *per i quali i termini nelle ugualianze elencate sono definiti.*

2.2 Alcune definizioni di geometria differenziale

Definizione 2.3.
Sia $|\cdot|$ la norma euclidea su $\mathbb{R}^N$ allora denotiamo con $B(x, r)$ la palla aperta di centro x_0 e raggio r

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y - x| < r\}.$$

Definizione 2.4.
Sia $C \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω. Sia y un punto di C. Allora $v \in \mathbb{R}^N$ è detto normale (esteriormente) a C in y se esiste una palla aperta $B(y + v, |v|)$ contenuta in $\Omega \setminus C$ tale che y sia aderente alla palla. In altre parole

$$\overline{B(z, r)} \subseteq (\Omega \setminus C) \cup \{y\}$$

con $r = |v|$ e $z = y + v$. Scriveremo allora

$$v \perp C \text{ in } y.$$

Poniamo inoltre

$$C^* = \{y \in \Omega \mid \text{esiste } v : v \perp C \text{ in } y\}$$

Definizione 2.5.
Sia $X \in T(\mathbb{R}^N)$ un campo vettoriale di classe C^∞ e sia $C \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω. Diciamo che C è positivamente X-invariante se per ogni curva integrale $\gamma : [0,T] \to \Omega$ tale che $\gamma(0) \in C$ si ha che $\gamma(t) \in C$ per ogni $t \in [0,T]$.

Definizione 2.6.
Sia $X \in T(\mathbb{R}^N)$ un campo vettoriale di classe C^∞ e sia $C \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω. Se C è sia, X-invariante che $-X$-invariante, allora diciamo che C è X-invariante .

Osservazione 3. Per la proposizione (2.1.1) si ha che un insieme C è X-invariante se e solo se ogni curva integrale di X che interseca C è interamente contenuta in C.

Lemma 2.2.1.
Sia $X \in T(\mathbb{R}^N)$ un campo vettoriale di classe C^∞ e sia $C \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω. Sia C positivamente X invariante. Allora per ogni $y \in C$ e per ogni vettore v normale a C^* in y

$$\langle XI(y), v\rangle \leq 0.$$

Dimostrazione. Sia $y \in C$ e v un vettore normale esteriormente a C in y. Sia $\gamma : [0,T] \to \Omega$ una curva integrale di X tale che $\gamma(0) = y$. Per la definizione di vettore normale esiste una palla $B(y+v, |y|)$ tale che

$$\overline{B(y+v, |v|)} \subseteq (\Omega \cap C) \cup \{y\}$$

e poiché $\gamma(t)$ appartiene a C per ogni t in $[0,T]$ si ha che

$$|\gamma(t) - (y+v)|^2 \leq |v|^2.$$

Inoltre $\gamma(0) = y$, $|\gamma(0) - (y+v)|^2 = |v|^2$.

Definiamo dunque la funzione $g : [0,T] \to \mathbb{R}$

$$g(t) := |\gamma(t) - (y+v)|^2$$

Tale funzione ha un massimo per $t = 0$. Perciò

$$0 \leq \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} |\gamma(t) - (y+v)|^2 = \langle \dot{\gamma}(0), \gamma(0) - (y+v) \rangle = \langle XI(y), -v \rangle$$

e dunque abbiamo $\langle XI(y), v \rangle \leq 0$. □

2.3 Il teorema di Bony Nagumo

Lemma 2.3.1. *Sia $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $M \in \mathbb{R}$ una costante tale che*

$$\limsup_{h \to 0^-} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \leq M \quad \forall t \in [0, T].$$

Allora

$$g(t) \leq g(0) + Mt \quad \forall t \in [0, T].$$

Dimostrazione. Fissiamo un qualsiasi $\varepsilon > 0$.

Sia $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$t \mapsto g(t) - g(0) - (M + \varepsilon)t.$$

È sufficente mostrare che f ha un massimo assoluto in $t = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$. Infatti, se $f(0) = 0 \geq f(t)$ $\forall t \in [0, T]$, allora

$$g(t) \leq g(0) + (M - \varepsilon)t \quad \forall t \in [0, T]$$

e dunque per ε tendente a zero si ottiene la tesi.

Se quindi per assurdo esiste un $\varepsilon_0 > 0$ e un $t_0 \in (0, T]$ tale che

$$f(t) \leq f(t_0) \quad \forall t \in [0, T]$$

cioè

$$g(t) - g(0) - (M + \varepsilon_0)t \leq g(t_0) - g(0) - (M + \varepsilon_0)t_0 \quad \forall t \in [0, T]$$

allora, per qualsiasi $h < 0$ tale $t_0 + h \in [0, T]$, con $t = t_0 + h$, si ottiene

$$\frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} \geq M + \varepsilon_0.$$

Questo contraddice l'ipotesi del lemma

$$\limsup_{h\to 0^-} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} \leq M \quad \forall t \in [0,T]$$

□

Proposizione 2.3.2.
Sia $X \in T(\mathbb{R}^N)$ un campo vettoriale di classe C^∞ e sia $C \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω. Sia poi $\gamma : [0,T] \to \Omega$ una curva integrale di X con $\gamma(0) := x_0 \in C$ e sia $B(x_0, r)$ una palla centrata in x_0 tale che $\gamma([0,T]) \subseteq V$ e $B(x_0, 2r) \subseteq \Omega$. Sia infine XI di Lipschietz su $B(x_0, r)$ con costante di Lipschietz $M > 0$. Definiamo

$$\delta(t) := dist(\gamma(t), C), \;\; t \in [0,T].$$

Allora se per ogni $y \in C^*$ e per ogni vettore v normale a C^* in y vale

$$\langle XI(y), v\rangle \leq 0,$$

si ha che

$$L(t) := \liminf_{h\to 0^-} \frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{|h|} \geq L\;\delta(t) \quad \forall t \in (0,T]$$

Dimostrazione. Se $\delta(t) = 0$ per ogni $t \in [0,T]$ allora la disegualianza è banalmente verificata poiché $h < 0$ e $\delta(t+h) \geq 0$.

Supponiamo dunque $\delta(t) > 0$ e consideriamo una successione $h_n \uparrow 0$ tale che

$$L(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta(t+h_n)-\delta(t)}{h_n}.$$

Dobbiamo allora mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta(t+h_n)-\delta(t)}{h_n} \leq L\delta(t).$$

Definiamo $x := \gamma(t)$ e $x_n := \gamma(t+h_n)$. Per ogni x_n esiste allora un y in Ω tale che

$$\mathrm{dist}(x_n, C) = \mathrm{dist}(x_n, z_n).$$

Infatti poiché $\gamma([t_0, t_1]) \subseteq B(x_0, r)$ e $B(x_0, 2r) \subseteq \Omega$

$$\operatorname{dist}(x_n, C) = \inf_{y \in C} \operatorname{dist}(x_n, y) = \inf_{y \in B(x_n, r)} \operatorname{dist}(x_n, y) =$$

$$= \inf_{y \in B(x_n, r)} \operatorname{dist}(x_n, y) = \min\{\operatorname{dist}(x_n, y) \,|\, y \in \overline{B(x_0, 2r)}\}$$

dato che $\overline{B(x_0, 2r)}$ è compatto. Esiste quindi un punto minimo $z_n \in \overline{B(x_0, 2r)}$ tale che

$$\operatorname{dist}(x_n, C) = \operatorname{dist}(x_n, z_n).$$

Sempre per la compattezza di $\overline{B(x_0, 2r)}$ possiamo supporre che la successione z_n è convergente con $\lim_{n\to\infty} z_n := z$. Infatti z_n ha una sottosuccessione z_{n_k} convergente e dunque è sufficente considerare la successione h_{n_k} al posto di h_n per ricondursi a questo caso. Con questa notazione

$$|x_n - z_n| = \operatorname{dist}(x_n, F) = \delta(t + h_n).$$

Poiché la norma euclidea e la distanza di un punto da un insieme chiuso sono funzioni continue si ha

$$|x - z| = \lim_{n\to\infty} |x_n - z_n| = \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, C) = \operatorname{dist}(x, F) = \delta(t + h_n).$$

e inoltre per ogni z_n vale $|x - z| \leq |x - z_n|$.

Poiniamo quindi

$$v := 1/2(x - z) \perp F \text{ in } z.$$

Allora

$$\delta(t + h_n) - \delta(t) = |x_n - z_n| - |x - z| \geq |x_n - z_n| - |x - z_n| \geq |x_n - x|$$

che a sua volta può essere minorato con la norma della sua proiezione sul vettore $z_n - x$

$$|x_n - x| \geq -\frac{\langle x_n - x, z_n - x\rangle}{|x - z_n|}.$$

Dunque dividendo per h_n, che è negativo,

$$L(t) \leq \lim_{n\to\infty} \left\langle \frac{x - z_n}{|x - z_n|}, \frac{x_n - x}{h_n} \right\rangle = \left\langle \dot{\gamma}(t), \frac{z - x}{|z - x|} \right\rangle =$$

$$= \frac{2}{x-z}\langle XI(x), v\rangle =$$

$$= \frac{2}{|x-z|}\big(\langle XI(z) - XI(x), v\rangle + \langle XI(z), v\rangle\big) =$$

$$= \frac{2}{|x-z|}\langle XI(z) - XI(x), v\rangle.$$

Per Cauchy-Schwartz, poiché $|v| = \frac{1}{2|x-z|}$

$$\frac{2}{|x-z|}\langle XI(z) - XI(x), v\rangle \leq |x-z|\frac{|XI(z) - XI(x)|}{|z-x|} \leq M\delta(t)$$

dato che

$$M := \sup_{x,y \in B(x_0,r),\, x \neq z} \frac{|XI(z) - XI(x)|}{|x-z|}.$$

□

Teorema 2.3.3 (Bony Nagumo)**.**
Sia $X \in T(\mathbb{R}^N)$ un campo vettoriale di classe C^∞ e sia $C \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω. Allora C è positivamente invariante rispetto a X se e solo se

$$\langle XI(y), v\rangle \leq 0$$

per ogni $y \in C*$ e per ogni vettore v normale a C in y.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se un insieme relativamente chiuso C è positivamente X-invariante, allora vale

$$\langle XI(y), v\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C* \quad \forall v \perp C \,\mathrm{in}\, y.$$

Rimane dunque da mostrare l'implicazione inversa. Sia x_0 un qualsiasi punto in C. Sia $\gamma : [0, T] \to \Omega$ una curva integrale di X con $\gamma(0) := x_0 \in C$. Dato che la funzione XI è di classe C^∞ essa è anche localmente Lipschietz di costante $M > 0$ in una palla $B(x_0, r) \subset B(x_0, 2r)$ con $B(x_0, 2r) \subseteq \Omega$.

Possiamo allora restringere oppurtunamente l'intervallo $[0, T]$ sul quale è definito γ scegliendo T in maniera tale che valga $MT < \frac{1}{2}$ e $\gamma([0, T]) \subseteq B(x_0, r)$.

Sia allora

$$\delta(t) := \mathrm{dist}(\gamma(t), C), \quad t \in [0, T]$$

Per la proposizione precedente 2.3.2

$$\limsup_{h \to 0^-} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} \leq M\delta(t) \leq M \sup_{t \in [0,T]} \delta, \quad \forall t \in (0, T]$$

e per lemma 2.3.1, poiché $MT < \frac{1}{2}$

$$\delta(t) \leq \delta(0) + tM \sup_{t \in [0,T]} \delta \leq MT \sup_{t \in [0,T]} \delta < \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,T]} \delta \ \forall t \in (0, T].$$

Dunque per ogni $t \in [0, T]$ si ha

$$\delta(t) < \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,T]} \delta$$

e questo è possibile solo se $\delta \equiv 0$.

Allora necessariamente $\gamma([0, T]) \subseteq C$. □

Definizione 2.7.
Un campo vettoriale X in $T(\mathbb{R}^N)$ è detto tangente ad un insieme C se per ogni y in C^* e per ogni v normale a C in y vale

$$\langle XI(y), v \rangle = 0.$$

Corollario 2.3.4.
Per il Teorema di Bony Nagumo un campo vettoriale X in $T(\mathbb{R}^N)$ è tangente ad un insieme C se e solo se C è X-invariante.

2.4 Insiemi invarianti rispetto ai vettori dell'algebra di Lie

Proposizione 2.4.1.
Siano X e Y in $T(\mathbb{R}^N)$ due campi vettoriali di classe C^∞. Sia $C \subseteq \Omega$ un insieme X-invariante e Y-invariante. Allora C è anche $[X, Y]$-invariante.

Dimostrazione. Sia $y \in C^*$ e $v \perp C$ in y.

Definiamo

$$\Gamma(t) := \big(\exp(-\sqrt{t}Y) \circ \exp(-\sqrt{t}X) \circ \exp(\sqrt{t}Y) \circ \exp(-\sqrt{t}X)\big)(y)$$

dove exp è la funzione definita in (2.2) e $\circ$ la composizione di funzioni. Sia $T > 0$ tale che $\Gamma(t)$ appartiene a Ω $\forall t \in [0, T]$. Sviluppando γ secondo Taylor al primo ordine in $t = 0$ otteniamo

$$\Gamma(t) = y + t\big(J_{YI}(y) \cdot XI(y) - J_{XI}(y)\big) + o(t) =$$

$$= y + t[X, Y]I(y) + o(t) \quad \text{per } t \downarrow 0.$$

Allora

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\Gamma(t) - y}{t} = [X, Y]I(t).$$

Essendo poi C invariante rispetto a X e Y, $\Gamma(t) \in C$ $\forall t \in [0, T]$. Di conseguenza, dato che $\overline{D(y + v, |v|)} \subset (\Omega/C) \cup \{y\}$ e $\Gamma(0) = y$, si ha

$$|\Gamma(t) - (y + v)|^2 \geq |v| = |\Gamma(0) - (y - v)|^2$$

Allora usando l'ugualianza precedente abbiamo

$$0 \geq \frac{d}{d\,t}\Big|_{t=0} |\Gamma(t) - (y + v)|^2 = 2\langle [X, Y]I(y), v\rangle.$$

e quindi

$$\langle [X, Y]I(v), v\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C^* \quad \forall v \perp C \text{in } y.$$

Scambiando poi X e Y otteniamo $\langle [Y, X], v\rangle \leq 0$ e dunque necessariamente applicando la proprietà antisimmetrica

$$\langle [X, Y]I(y), v\rangle = 0 \; \forall y \in C \; \forall v \perp C \text{in } y.$$

Quindi, per il teorema di Bony Nagumo C è invariante rispetto a $[X, Y]$. □

Proposizione 2.4.2.

Siano $C \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso X-invariante e Y-invariante, dove X e Y sono campi vettoriali di $T(\mathbb{R}^N)$. Siano λ_1 e λ_2 due funzioni $C^\infty(\Omega)$. Allora C è anche $\lambda_1 X + \lambda_2 Y$-invariante.

Dimostrazione. Per il teorema di Bony Nagumo basta osservare che per ogni y in C^* e per ogni v normale a C^* in y vale

$$\langle \lambda_1(y)XI(y) + \lambda_2(y)YI(y), v\rangle = \lambda_1\langle XI(y), v\rangle + \lambda_2(y)\langle YI(y), v\rangle = 0$$

Proposizione 2.4.3.
Siano $X_1, \ldots, X_k$ campi vettoriali di classe C^∞ e $\mathcal{L}(\{X_1, \ldots, X_k\})$ l'algebra di Lie generata da $\{X_1, \ldots, X_m\}$. Sia C un sottoinsieme relativamente chiuso di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\emptyset \neq C \neq \Omega$.

Se per ogni $k \in \{1, \ldots, m\}$, C è X_i-invariante , allora C è Z-invariante per ogni Z in $\mathcal{L}(\{X_1, \ldots, X_k\})$.

Dimostrazione. Per il corollario 1.3.2 sappiamo che

$$L(\{X_1, \ldots, X_k\}) = \operatorname{span}\big\{Z_J \mid J = (j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k \quad k \in \mathbb{N}\big\}$$

Questo significa che ogni elemento di $L(\{X_1, \ldots, X_k\})$ è esprimibile come una combinazione lineare di Z_J dove

$$Z_J := [Z_{j_1}, \ldots, [Z_{j_{k-1}}, Z_{j_k}] \cdots].$$

Per la proposizione 2.4.1 sappiamo che C è $[X, Y]$-invariante se è X-invariante e Y-invariante.

Per induzione abbiamo allora che C è Z_J invariante per ogni $J = (j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k \quad k \in \mathbb{N}$.

Dunque rimane da mostrare che una combinazione lineare di campi C invarianti è a su volta C invariante.

Siano allora X e Y due campi vettoriali in $T(\mathbb{R}^N)$ per i quali C sia invariante. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda XI + \mu YI, v\rangle = \lambda\langle XI, v\rangle + \mu\langle YI, v\rangle = 0 \ \forall y \in C^* \ \forall v \dot{C} \text{in } y$$

Dunque sempre per induzione C è invariante rispetto ad ogni combinazione lineare di $\{Z_J \mid J = (j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k \quad k \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Capitolo 3

Operatori ellittici degeneri

In questo capitolo ci occuperemo degli operatori L definiti su un aperto di $\mathbb{R}^N$ nella forma

$$Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Yu + au$$

dove $X_1, \ldots, X_r, Y$ sono campi vettoriali di classe C^∞ definiti un aperto Ω, e $a(x)$ è a sua volta una funzione $C^\infty(\Omega)$.

Per X_k^2 intendiamo l'operatore che a una funzione u associa

$$X_k(X_k(u))$$

In particolare riscriveremo Lu nella forma

$$Lu = \mathrm{div} A(\nabla u)^T + Y'u + au$$

dove A sarà una matrice simmetrica semidefinita positiva e Y' un campo vettoriale opportuno. Tale forma ci permetterà di dimostrare un risultato molto simile al principio del massimo debole e fondamentale per le dimostrazioni dei successivi teoremi nel capitolo 4.

3.1 Forme equivalenti per somme di quadrati di campi vettoriali

In questa sezione esponiamo una forma equivalenti per la somma dei quadrati di campi vettoriali.

Osservazione 4. Sia

$$X_k = \sum_{j=1}^{N} a_{j,k}\partial_j$$

e dunque come nel capitolo precedente

$$X_k I = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{N,k} \end{pmatrix}, k \leq m$$

$X_k^2 u$ si può scrivere allora come

$$X_k(X_k(u)) = \sum_{j=1}^{N} a_{j,k}\partial_j\big(\sum_{i=1}^{N} a_{i,k}\partial_i u\big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,k}a_{j,k}\partial^2_{i,j}u + \sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{N} a_{ik}(\partial_i a_{j,k})\Big)\partial_j u$$

Definizione 3.1. Denoteremo con S la matrice $N \times m$ con la k-esima colonna data da $X_k I$,

$$S := \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,k} & & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & & a_{N,k} & & a_{N,m} \end{pmatrix}.$$

Definizione 3.2.

Definiamo la matrice simmetrica associata ad $Lu = \sum_{j=1}^{m} X_k^2 u + Yu + au$

$$A := S \cdot S^T = \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}a_{j,k}\Big)_{i,j \leq N} =: (\alpha_{i,j})_{i,j \leq N}.$$

dove S è la matrice definita in 3.1 . Dunque l'elemento di posizione (i,j) di A è dato da

$$\alpha_{ij} = \langle X_i I, X_j I \rangle.$$

Osservazione 5.
La matrice A è simmetrica e semidefinita positiva. La simmetria vale in quanto $A^T = (S \cdot S^T)^T = (S^T)^T \cdot S^T = S \cdot S^T = A$.

Infine $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\langle A\xi, \xi \rangle = \langle SS^T, \xi \rangle = \langle S^T\xi, S^T, \xi \rangle = \|S^T\xi\|^2 \geq 0$$

Proposizione 3.1.1.
Se $L_0 := \sum_{k=1}^m X_k^2$ con $X_k = \sum_{j=1}^N a_{jk}\partial_j$ allora

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{i,j}\partial^2_{i,j} + \sum_{j=1}^N \beta_j \partial_j$$

dove gli α_{ij} sono i coefficenti della matrice simmetrica $S \cdot S^T$ della definizione (3.1) e $\beta_j = \sum_{k=1}^m X_k a_{j,k}$ per ogni $j = 1, \dots, N$

Dimostrazione.

$$L_0 = \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{i,j=1}^N a_{i,k}a_{j,k}\partial^2_{i,j} + \sum_{j=1}^N \Big(\sum_{i=1}^N a_{ik}(\partial_i a_{j,k})\Big)\partial_j \Big) =$$

per la proprietà commutativa della somma

$$= \sum_{i,j}^N \Big(\sum_{j=1}^m ai, ka_{j,k}\Big)\partial^2_{i,j} + \sum_{N}^{j=1} \Big(\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N a_{i,k}(\partial_i a_{j,k})\Big)\partial_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^N \alpha_{i,j}\partial^2_{i,j} + \sum_{j=1}^N \Big(\sum_{k=1}^m X_k a_{j,k}\Big)\partial_j.$$

Dunque

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{i,j}\partial^2_{i,j} + \sum_{j=1}^N \beta_j \partial_j$$

$\square$

3.2 Alcuni teoremi sulle matrici simmetriche

Definizione 3.3.
Una matrice A quadrata, $n \times n$ e simmetrica si dice semidefinita positiva se per ogni vettore ξ in $\mathbb{R}^n$ vale che $\langle A\xi, \xi\rangle \geq 0$. Una matrice B simmetrica si dice invece semidefinita negativa se per ogni vettore ξ in $\mathbb{R}^n$ vale che $\langle B\xi, \xi\rangle \leq 0$.

Proposizione 3.2.1.
Sia A una matrice semidefinita positiva reale $n \times n$. Esiste allora una matrice $S := A^{\frac{1}{2}}$ simmetrica e semidefinita positiva tale che $S^2 = S \cdot S = A$.

Dimostrazione. Per il teorema spettrale, essendo A una matrice simmetrica reale, esiste una matrice di cambio di base ortogonale U che diagonalizza A:

$$A = U \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]\, U.$$

Sempre per il teorema spettrale si ha che gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono reali e infine $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ poichè se A avesse un autovettore v_{λ_i} relativo ad un autovalore λ_i negativo si avrebbe

$$\langle Av_{\lambda_i}, v\rangle = \langle \lambda_i v_{\lambda_i}, v_{\lambda_i}\rangle = \lambda \|v_{\lambda_i}\|^2 \leq 0$$

e A non sarebbe semidefinita positiva.. Ponianmo dunque

$$S := U\operatorname{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}]U^T.$$

Allora

$$S \cdot S = U\operatorname{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}]U^T U\operatorname{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}]U^T =$$

$$= U\operatorname{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}]I\operatorname{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}]U^T =$$

$$U\operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]U = A.$$

□

Proposizione 3.2.2.
Siano A e B matrici simmetriche reali. Sia A semi definita positiva e B semi definita negativa. Allora traccia$(A \cdot B) \leq 0$

Dimostrazione. Sia $S := A^{\frac{1}{2}}$ una radice simmetrica di A. Allora traccia$(S \cdot B) =$ traccia$(S{\cdot}S{\cdot}B) =$ traccia$(S{\cdot}B{\cdot}S) =$ traccia$(S^T{\cdot}B{\cdot}S) =$ traccia$(B) \leq 0$ poiché B è semi definita negativa. □

3.3 Una forma debole del principio del massimo

Definizione 3.4.
Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 definita su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Definiamo la matrice hessiana di u in $x \in \Omega$ come

$$\mathrm{Hess}\big(u\big)(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11}u(x) & \cdots & \partial_{1n}u(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}u(x) & \cdots & \partial_{nn}u(x) \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.3.1.
Sia $B(x_0, r)$ una palla con centro x_0 di $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(B(x_0, r))$.

Fissato $x \in B(x_0, r)$, la funzione $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$U(t) := u(x_0 + t(x - x_0))$$

è di classe C^2 e

$$U'(t) = \big\langle \nabla u(x_0), x{-}x_0 \big\rangle = 0 \quad U''(t) = \big\langle Hess\big(u\big)(x_0){\cdot}(x{-}x_0), (x{-}x_0) \big\rangle \; \forall t \in [-1, 1].$$

Dimostrazione. U è di classe C^2 perchè è funzione composta di funzioni C^2. La prima relazione è ovvia per il teorema di derivazione delle funzioni composte e derivando quest'ultima otteniamo

$$U''(t) = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{i,j}u(x_0{+}t(x{-}x_0))(x^i{-}x_0^i)(x^j{-}x_0^j) = \langle \mathrm{Hess}\big(u\big)(x_0{+}t(x{-}x_0))(x{-}x_0), (x{-}x_0) \rangle$$

$\square$

Proposizione 3.3.2. *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$.*

Se $x_0 \in \Omega$ è un massimo di u allora

$$\nabla u(x_0) = 0$$

e

$$Hess\big(u\big)(x)$$

è semidefinita negativa.

Dimostrazione. Sia $B(x_0, r) \subset \Omega$ una palla aperta contenuta in Ω di centro x_0.

Fissato $x \in B(x_0, r)$, la funzione $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$U(t) := u(x_0 + t(x - x_0))$$

è di classe C^2 e ha un massimo nel punto $t = 0$: per il teorema di Fermat e la proposizione 3.3.2 dunque

$$U'(0) = \big\langle \nabla u(x_0), x - x_0 \big\rangle = 0 \quad U''(0) = \big\langle \mathrm{Hess}\big(u\big)(x_0) \cdot (x - x_0), (x - x_0) \big\rangle \leq 0.$$

Dato che x era stato scelto in maniera arbitraria in $B(x_0, r)$, il vettore $v = (x - x_0)$ è a sua volta arbitrario. Allora, per omogeneità, le due relazioni precedenti equivalgono a

$$\big\langle \nabla u(x_0), v \big\rangle = 0 \quad \big\langle \mathrm{Hess}\big(u\big)(x_0) \cdot v, v \big\rangle \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

e per tanto per la prima relazione $\nabla u(x_0) = 0$ e per la seconda si ha che l'hessiana di u è semidefinita negativa in x_0. $\square$

Osservazione 6.
Sia $L_0 = \sum_{k=1}^{m} X_k^2$. Allora, con la notazione della proposizione 3.1.1,

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{i,j} \partial_{i,j}^2 + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \partial_j.$$

Perciò

$$\begin{aligned} L_0 u &= \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{i,j}\partial_{i,j}u^2 + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \partial_j u = \\ &= \mathrm{traccia}(A \cdot \mathrm{Hess}(u)) + \langle \beta, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

con $\beta = ({}_1, \dots, \beta_n) + YI$.

Possiamo ora ricavare una versione debole del principio del massimo per operatori differenziali del secondo ordine nella forma

$$Lu(x) = \sum_{k=1}^{m} X_k^2 u(x) + Yu(x) + a(x)u(x)$$

con

$$a(x) \leq 0$$

e $X_1, \dots, X_m, Y$ campi vettoriali lisci di $\mathbb{R}^N$ definiti su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Teorema 3.3.3.
Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x_0 \in \Omega$ un punto di massimo relativo positivo per u. Sia L un operatore differenziale del secondo ordine della forma

$$Lu(x) = \sum_{k=1}^{m} X_k^2 u(x) + Yu(x) + a(x)u(x)$$

con $a(x) \leq 0$

Allora vale che

$$Lu(x_0) \leq 0.$$

Inoltre se $a(x) < 0$ allora

$$Lu(x_0) < 0.$$

Dimostrazione. Per la proposizione 3.1.1

$$Lu(x_0) = \mathrm{traccia}(A \cdot \mathrm{Hess}\big(u\big)(x_0)) + \langle \beta + YI, \nabla u(x_0) \rangle + a(x_0)u(x_0).$$

$\nabla u(x_0) = 0$ poiché poi x_0 è un punto di massimo relativo e dunque

$$Lu(x_0) = \mathrm{traccia}(A \cdot \mathrm{Hess}\big(u\big)(x_0)) + a(x_0)u(x_0)$$

Infine poiché per la proposizione 3.3.2 l'Hessiana è definita negativa in x_0 possiamo maggiorare $Lu(x_0)$ usando il lemma 3.2.2

$$Lu(x_0) \leq a(x_0)u(x_0)$$

e dato che $u(x_0) \geq 0$ si ha la tesi. $\square$

Capitolo 4

La propagazione del massimo

In questo capitolo conclusivo ci occuperemo di studiare l'insieme dei punti di massimo di una funzione u di classe C^2 che sia soprasoluzione di un operatore ellittico degenere del secondo ordine, cioè $Lu \geq 0$. Denoteremo in questo capitiolo con L l'operatore

$$Lu = \sum_{k=1}^{m} X_k^2 u + yu + au = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \partial_{i,j} u + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \partial_i u + au$$

con $X_1, \dots, X_m$ e Y in $T(\mathbb{R}^N)$ e che soddisfi inoltre la condizione

$$a(x) \leq 0 \quad \forall \, x \in \Omega.$$

4.1 Il Lemma di Hopf

Lemma 4.1.1.
Sia L un operatore differenziale del secondo ordine come indicato sopra. Sia $A = (\alpha_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,N\}}$ la matrice simmetrica associata a L come in definizione 3.2 Un vettore $\xi \in \mathbb{R}^N$ è perpendicolare a ogni vettore $X_1 I(y), \dots, X_m I(y)$ se e solo se

$$\langle A(y)\xi, \xi \rangle = 0$$

Dimostrazione. Per quanto visto nella proposizione 3.1.1 A(y):=S $\cdot S^T$ dove S è la matrice $n \times m$ e ha le colonne formate dai vettori $X_1 I(y), \dots, X_m I(y)$.

Da questo segue direttamente che

$$\langle A(y)\xi, \xi\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle X_j I(y), \xi\rangle^2$$

e dunque $\langle A(y)\xi, \xi\rangle = 0$ se e solo se $X_i I \perp \xi$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$.

Il seguente teorema è una generalizzazione del Lemma di Hopf.

Teorema 4.1.2.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che assume un massimo positivo $m > 0$ su Ω. Sia poi $C \neq \emptyset$ l'insieme dei punti sui quali la funzione u assume il massimo m. Allora ciascuno dei campi vettoriali $X_1, \dots, X_m$ è tangente a C.

Dimostrazione. Per il lemma 4.1.1 è sufficente mostrare che per ogni y in C^* e per ogni vettore v normale esteriormente a C in y valga

$$\langle A(y)v, v\rangle = 0.$$

Siano allora $y \in C^*$ e $v \perp C$ in y tali che

$$\overline{B(y + v, |v|)} \subseteq (\Omega \setminus C) \cup \{y\}.$$

Assumiamo per assurdo che

$$\langle A(y)v, v\rangle > 0$$

e consideriamo la funzione

$$h(x) := e^{-\lambda|x-z|^2} - e^{-\lambda r^2}$$

dove $z = y + v$ è il centro della palla esterna a C, $r = |v|$ e λ è una costante reale positiva da fissare. Possiamo notare che la funzione h è positiva dentro la palla $B(y + v, r)$ negativa fuori dalla palla e zero su tutto il bordo della palla. Un calcolo diretto mostra che

$$Lh(y) = 4\lambda e^{-\lambda r^2} \cdot \big(\langle A(y)v, v\rangle + \mathcal{O}(1/\lambda)\big),$$

e per un λ sufficientemente grande $Lh(y) > 0$. Possiamo dunque trovare un intorno V di y sul quale vale $Lh > 0$.

Poniamo ora

$$w(x) := u(x) + \varepsilon h(x)$$

con $\varepsilon > 0$.

Dunque $w(y) = m$ e $w < m$ fuori da $B(y + v, r)$. Inoltre essendo

$$\overline{B(z,r)} \cap \partial V$$

un insieme chiuso, limitato e pertanto compatto,ponendo

$$\varepsilon = \frac{m - \max\{u(x) \mid x \in \overline{B(z,r)} \cap \partial V\}}{2 \max\{h(x) \mid x \in \overline{B(z,r)} \cap \partial V\}}$$

vale

$$w(x) < m \quad \forall x \in \overline{B(z,r)} \cap \partial V.$$

Perciò w assume necessariamente un massimo positivo in un punto interno x_m di V.

Inoltre $Lw = L(u + \varepsilon h) > 0$ dentro a V. Per il principio del massimo debole però vale anche che $Lw(x_m) \leq 0$ e dunque per assurdo abbiamo provato che

$$\langle A(y)v, v\rangle = 0.$$

□

4.2 Il teorema di Frobenius

Definizione 4.1.
Definiamo la dimensione di $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$ in un punto $x \in \Omega$ come la dimensione dello spazio vettoriale formato dai vettori $ZI(x)$ dove $Z \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$.

Enunciamo ora brevemente, senza dimostrarlo, il teorema di Frobenius.

Teorema 4.2.1 (Il teorema di Frobenius)**.**
Sia $X_1, \ldots, X_m$ un insieme di campi vettoriali in $T(\mathbb{R}^N)$. Sia poi $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$

di dimensione costante $p < N$ per ogni x in Ω. Allora per ogni $x \in \Omega$ esistono delle coordinate locali $\eta_1, \dots, \eta_N$ per le quali $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ è generata da dei campi vettoriali lisci che hanno componenti $\eta_{p+1}, \dots, \eta_N$ nulle. Dunque nelle nuove coordinate si ha che ogni Z in $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ è nella forma

$$Z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \eta_i}.$$

4.3 Il principio del massimo forte

Proposizione 4.3.1.
Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che verifichi $Lu \geq 0$ su Ω.

Supponiamo che u abbia un massimo positivo in Ω. Sia infine $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ di dimensione costante. Allora ogni campo vettoriale Z in $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ è tangente all'insieme dei punti di Ω sui quali u assume un massimo.

Dimostrazione. Per il lemma di Hopf $X_1, \dots, X_m$ sono tangenti all'insieme C dei punti nei quali u assume un massimo positivo. Allora per la proposizione 2.4.3 si ha immediatamente il risultato. □

Teorema 4.3.2 (Il Principio del Massimo forte)**.**
Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che verifichi $Lu \geq 0$ su Ω. Sia inoltre $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ di dimensione costante N. Se u assume un massimo positivo in Ω allora u è costante sulla componente connessa di Ω che contiene tale massimo.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.3.1 ogni campo vettoriale in $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ è tangente all'insieme C dei punti sui quali u assume un massimo. Poiché poi la dimensione di $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ è pari ad N per ogni x in Ω si ha che $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m) = T(\mathbb{R}^N)$. Dato che un insieme aperto e connsesso è anche connesso per archi si ha la tesi. □

Osservazione 7.

Se per ogni $x \in \Omega$.

$$\dim\big(\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)\big)(x) = p < N$$

allora, indipendentemente da L, il principio del massimo forte sopra enunciato non è più valido.

Infatti per il teorema di Frobenius è possibile trovare delle coordinate locali $\eta_1, \dots, \eta_n$ tali che Lu sia nella forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial \eta_i} + au.$$

Scambiando eventualmente η_N con $-\eta_N$ si può trovare un sottoinsieme aperto D di Ω non vuoto sul quale

$$\alpha_N \leq 0.$$

Fissiamo un quasiasi punto $P = (p_1, \dots, p_N)$ di D. Consideriamo allora la funzione $v(\eta_1, \dots, \eta_N)$ tale che $v = 0$ per $\eta_N \leq p_N$ e $v = -(\eta_N - p_N)^3$ per $\eta_N \geq p_N$. Allora v ha un massimo positivo in P e $Lv \geq 0$ ma non è costante.

4.4 La propagazione del massimo

Osservazione 8. Sia, nelle coordinate locali precedentemente introdotte, $X_k = \sum_{j=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial \eta_j}$ con $a_{jk} = 0$ per $j > p$

$$L_0 = \sum_{k=1}^{m} X_k^2.$$

Applicando la proposizione 3.1.1 a L_0 ,nelle coordinate locali precedentemente introdotte, otteniamo

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} + \beta_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}$$

con $\beta_j = \sum_{k=1}^{m} X_k a_{jk}$. Dunque $\beta_j = 0$ se $j > p$. Allora, ponendo $X' = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}$, si ha che $X' \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ e

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} + X'$$

Dunque possiamo scrivere

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j} + X'u + Yu + au.$$

Se Y non appartiene a $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$ allora esistono ulteriori curve sulle quali i massimi positivi di u si popagano.

Teorema 4.4.1.
Supponiamo che

$$dim\big(\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)\big)(x) = p$$

per ogni $x \in \Omega$ *con* Ω *aperto di* $\mathbb{R}^N$. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *che verifica* $Lu \geq 0$ *e che raggiunge un massimo* m *positivo in un punto* $x_0 \in \Omega$. *Sia poi* Z *un campo vettoriale in* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m)$ *e sia* $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione positiva di classe* C^∞.

Se $\gamma(t)$ *è una curva integrale del campo vettoriale* $\lambda Y + Z$ *tale che* $\gamma(0) = x_0$*, allora il massimo si propaga lungo la curva integrale di* $\lambda Y + Z$.

Dimostrazione. Come nei teoremi precedenti definiamo C come l'insieme dei punti sui quali la funzione u assume il massimo m. Allora per dimostrare la proposizione è sufficente che C sia positivamente invariante rispetto a $\lambda Y + Z$. Per il teorema di Bony-Nagumo questo equivale a verificare che per tutti i vettori v normali a C in un qualsiasi punto x di C^* valga

$$\langle \lambda Y I(x) + Z I(x), v \rangle \leq 0.$$

Poiché λ è positivo, è sufficiente mostrare che $\langle Y I(x), v \rangle \leq 0$.

Per il teorema di Frobenius è possibile, in un intorno di x, trovare, come prima, delle coordinate locali $\eta_1, \ldots, \eta_N$ tali che Lu sia nella forma

$$Lu = Lu = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j} + X'u + Yu + au.$$

e tali che $v = e_N$. Esiste dunque con riferimento alle nuove coordinate, una palla $B(e_N, 1)$ centrata nel punto di ascissa 1 sull'asse η_N la cui chiusura interseca C nell'origine.

Sia, nelle coordinate di Frobenius, $Y' : (X' + Y) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \partial_j$. Rimane allora da mostrare che

$$\langle Y(x), e_N \rangle = \langle Y'(x), e_N \rangle = \langle (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), e_N \rangle = \alpha_n \leq 0.$$

Poiché il massimo si propaga secondo le direzioni $\eta_1, \ldots, \eta_p$ risulta che il cilindro definito per

$$\eta_{p+1}^2 + \ldots + \eta_{N-1}^2 + (\eta_N - 1)^2 \leq 1$$

non contiene punti di C al suo interno. Sia allora δ la funzione positiva tale che

$$\delta^2 = \varepsilon(\eta_1^2 + \ldots + \eta_p^2) + \eta_{p+1}^2 + \ldots + \eta_{N-1}^2 + (\eta_N - 1)^2$$

con $0 < \varepsilon < 1$.

Possiamo notare che l'ellissoide di equazione $E := \{\delta \leq 1\}$ interseca C solamente nell'origine. Consideriamo dunque la funzione

$$v(x) := e^{-\delta^2} - e^{-1}.$$

Si ha che

$$Lv(0) = -2\varepsilon \sum_{i=1}^{p} (\alpha_{ii}) + 2\alpha_N.$$

e, se α_N è strettamente positivo, si può trovare un intorno V dell'origine tale che, per un ε sufficientemente piccolo, $Lv > 0$ su V.

Poniamo ora

$$w(x) := u(x) + \rho v(x)$$

con $\rho > 0$. Dunque $w(0) = m$ e $w < m$ fuori da E. Allora

$$\overline{E} \cap \partial V$$

è un insieme chiuso, limitato e dunque compatto.

Per

$$\rho = \frac{m - \max\{u(x) \mid x \in \overline{E} \cap \partial V\}}{2 \max\{v(x) \mid x \in \overline{E} \cap \partial V\}}$$

si ha

$$w(x) < m \quad \forall x \in \overline{E} \cap \partial V.$$

Allora $w(x) \leq m$ per ogni x in ∂V. Questo significa che w assume il massimo positivo m in un punto interno x_m di V. Inoltre $Lw = L(u + \rho v) > 0$ dentro a V. Per il teorema 3.3.3 però vale anche che $Lw(x_m) \leq 0$. Abbiamo così ottenuto l'assurdo cercato. $\square$

Bibliografia

[1] Bony, Jean-Michel *Principe du maximum, inégalite de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19 1969 fasc. 1, 277–304 xii.

[2] Bonfiglioli, A.; Lanconelli, E.; Uguzzoni, F. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[3] Montanari, Annamaria; Morbidelli, Daniele *A Frobenius-type theorem for singular Lipschitz distributions.* J. Math. Anal. Appl. 399 (2013), no. 2, 692–700