Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Matematica

LE FUNZIONI CIRCOLARI NELL'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Tesi di Laurea in Algebra I

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Verardi Libero

Presentata da:
Missiroli Daniela

Sessione II
Anno Accademico 2009/10

Introduzione

In questa tesi si vuole presentare una trattazione sulle funzioni circolari. La maggior parte del lavoro si baserà su un confronto tra due libri delle scuole secondarie evidenziandone gli aspetti positivi e i limiti e cercando di capire cosa potrebbe essere più utile agli studenti; in seguito verrà trattato questo argomento in ambito universitario, notando come alcuni risultati si possono raggiungere anche utilizzando altre strade e infine verrano tracciati i grafici delle funzioni circolari, utilizzando per confronto i software matematici Cabri II Plus e Mathematica.
Il primo libro esaminato è "Funzioni in $\mathbb{R}$, ANALITICITA' E TRIGONOMETRIA 1A" di G. Zwirner e L. Scaglianti, Casa Editrice "Cedam", di cui verranno considerati due capitoli; questi due capitoli verranno descritti e commentati, cercando di scegliere quegli argomenti che differiscono dal secondo libro che si analizzerà.
Il secondo libro esaminato è "Corso base blu di matematica 4" di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi, Casa Editrice Zanichelli, dove verranno sempre considerati due capitoli; in questo caso non verrà riportato l'intero testo ma verranno inserite solo le parti differenti a quelle descritte nel primo libro e verrà fatto un confronto tra i due libri.
Il primo dei due testi è stato stampato per la prima volta nel 1998, ma appare datato. Giuseppe Zwirner era professore di matematica all'Università di Padova negli anni cinquanta e sessanta e redasse molti libri per le scuole secondarie, in particolare per il Liceo Scientifico; i suoi testi sono apprezzati per precisione e chiarezza.

Luciano Scaglianti nella redazione del libro proseguì per la strada tracciata da Zwirner, rielaborando il libro senza tenere conto che il modo di insegnare la matematica è cambiato negli ultimi decenni. Infatti, come detto, il libro appare datato, da anni ante 1970, mancando prerequisiti, scopi, motivazioni e collegamenti col resto del programma; in particolare, è da sottolineare la mancanza di collegamenti con la geometria analitica.
Gli argomenti sono presentati in maniera monografica e questo modo di procedere potrebbe creare molte difficoltà soprattutto agli studenti che hanno un rapporto con la matematica non troppo roseo. E' vero che gli argomenti sono trattati con grande precisione e chiarezza, ma sono presenti dimostrazioni troppo lunghe e difficili, che gli studenti non imparano, anzi avrebbero difficoltà anche alcuni studenti universitari. Il mondo della scuola è cambiato e questo modo di impostare il sapere non fa più parte della didattica scolastica ora in voga.
E' necessario infatti che gli studenti capiscano l'importanza degli argomenti trattati anche attraverso i collegamenti con altre materie scientifiche, cosa che in questo libro viene considerata solo in alcune pagine finali che molte volte gli insegnanti non prendono in considerazione. A mio parere, bisogna spronare gli studenti e far capire loro il ruolo importante che ha la matematica anche in altri campi, portandoli così ad un maggiore interesse poiché potrebbe essere importante per il loro futuro. La matematica non è fine a se stessa come pensano troppe persone.

Il secondo libro considerato è stato pubblicato nel 2001 per la prima volta, solo tre anni dopo il primo, ma è possibile notare molte differenze di impostazione; a differenza dell'altro, sembra vicino al metodo didattico ora in voga nella scuola, anche se in alcuni capitoli è possibile notare la difficoltà degli argomenti trattati, argomenti forse più adatti alle aule universitarie.
Differentemente dal primo, si possono notare collegamenti con altre parti del programma; viene spiegata, ad esempio, l'importanza di introdurre le formule di addizione, le quali non servono solo come elenco di formule da imparare per

risolvere esercizi fine a se stessi, ma sono importanti nella geometria analitica in quanto attraverso la formula di addizione della tangente si può ricavare il coefficiente angolare di rette perpendicolari.
Alla fine di ogni capitolo, diviso in varie unità, sono presenti laboratori di matematica dove agli studenti vengono presentati i vari software che si possono utilizzare per calcolare valori delle funzioni goniometriche, disegnare i grafici, ecc.; in più vi è una parte chiamata "esplorazione", in cui si vede come la parte trattata nel capitolo possa essere utilizzata in altri campi. In questo capitolo è presente un'"esplorazione" della fisica dove viene presentato il moto oscillatorio armonico e viene fatto vedere che le onde elettromagnetiche hanno un andamento sinusoidale.
Le dimostrazioni sono brevi rispetto a quelle presenti nel primo libro; infatti, è utile presentare dimostrazioni e preparare gli studenti al mondo universitario senza però introdurre livelli di difficoltà troppo alti per la scuola secondaria.
Per presentare le funzioni circolari in ambito universitario, analizzeremo due testi; il primo è "Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables" di Henri Cartan, in cui verrà analizzata la funzione e^{iy}, vedendo come alcuni risultati siano ottenibili attraverso metodi diversi rispetto ai libri per le scuole secondarie. Il secondo testo analizzato è "NOTE DI ALGEBRA" redatto da Angelo Vistoli, in cui vengono presentate le funzioni circolari studiando le misure degli angoli e le classi di equivalenza modulo 2π.
Nell'ultimo capitolo, il quinto, vengono utilizzati i software Cabri II Plus e Mathematica per costruire i grafici delle funzioni seno, coseno e tangente.

Indice

Capitolo 1

Le funzioni goniometriche

Analizziamo dapprima come le funzioni goniometriche vengono presentate nel libro “Funzioni in $\mathbb{R}$, ANALITICITA’ E TRIGONOMETRIA 1A” di G. Zwirner e L. Scaglianti, Casa Editrice “Cedam”.

1.1 Seno e coseno di un angolo orientato

Nello studio che si propone si avrà bisogno di associare ad un angolo orientato un particolare sistema cartesiano ortogonale di riferimento.
Inizialmente viene proposta una parte introduttiva, in cui sono richiamati i concetti di angolo orientato e di misura in gradi e in radianti visti in precedenza in altri capitoli.

Definizione 1.1. Si chiama sistema cartesiano ortogonale associato all’angolo orientato $\hat{ab}$, di vertice O, il sistema d’assi avente per origine il vertice O, il semiasse positivo delle x coincidente con il lato a, ed il verso positivo dell’asse y tale che l’angolo orientato $\hat{xy}$ abbia per misura $+\frac{\pi}{2}$.

Definizione 1.2. Si chiama seno dell’angolo orientato $\hat{\alpha}$, e si scrive $\sin\hat{\alpha}$, l’ordinata del punto P, cioè la misura del segmento orientato $\overrightarrow{QP}$, fatta rispetto all’unità di misura u=OP (fig. 1.1).

Si chiama coseno dell'angolo orientato $\hat{\alpha}$, e si scrive $\cos\hat{\alpha}$, l'ascissa del punto P, cioè la misura del segmento orientato $\overrightarrow{OQ}$, fatta rispetto all'unità di misura u=OP (fig. 1.1).

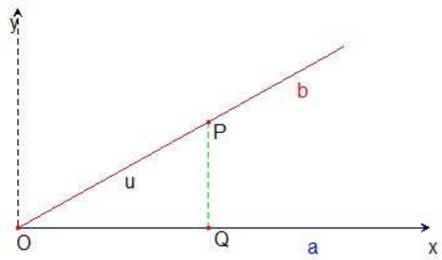


Figura 1.1

Osservazione 1. [1]

1. E' necessario ricordare che, dato un angolo orientato $\hat{\alpha}$, di vertice O, per determinare il seno e il coseno dell'angolo dato, bisogna innanzitutto associare il sistema cartesiano ortogonale Oxy; bisogna poi prendere sul secondo lato dell'angolo il punto P, tale che sia OP=u, e di tale punto bisogna considerare la proiezione ortogonale Q sull'asse x.
   Dopo aver fatto questo bisogna misurare i segmenti orientati $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, rispetto all'unità di misura OP=u.
   I numeri reali positivi, negativi o nulli, così ottenuti sono, per definizione, il seno e il coseno dell'angolo orientato.
   Dunque risulta
$$\sin\hat{\alpha} = \frac{\overrightarrow{QP}}{OP}\ ,\ \cos\hat{\alpha} = \frac{\overrightarrow{OQ}}{OP}$$
2. Dalle definizioni date è evidente che il seno e il coseno di un angolo orientato $\hat{\alpha}$ sono numeri reali relativi.

[1] E' interessante notare come gli autori dopo aver dato la definizione formale di seno e coseno, sentano il bisogno di aggiungere questa ulteriore procedura. Per quale motivo? E' possibile che gli autori abbiano introdotto questa procedura per far comprendere meglio le funzioni seno e coseno, funzioni a volte di difficile comprensione.

3. Il seno e il coseno di un angolo orientato sono funzioni dell'angolo, cioè sono numeri reali che dipendono esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo considerato.

Prima di definire il seno e il coseno di un angolo orientato, è stato dimostrato un teorema, il quale è utile per dimostrare il punto 3 dell'osservazione sopra. Consideriamo la figura 1.2.

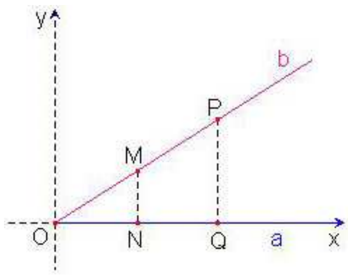


Figura 1.2

Vale il seguente teorema:

Teorema 1.1.1. *Le misure dei segmenti orientati* $\overrightarrow{NM}$ *e* $\overrightarrow{ON}$ *fatte rispetto all'unità di misura OM sono, rispettivamente, eguali alle misure dei segmenti orientati* $\overrightarrow{QP}$ *e* $\overrightarrow{OQ}$*, fatte rispetto all'unità di misura OP.*

Da questo teorema ne segue che:
Il rapporto fra i due segmenti orientati $\overrightarrow{QP}$ *e* $\overrightarrow{OQ}$ *non dipende dal punto P scelto sul lato b.*
Si è dunque dimostrato che il seno e il coseno sono sono funzioni dell'angolo e non dipendono dalla scelta di P.

Teorema 1.1.2. *La somma dei quadrati del seno e del coseno di uno stesso angolo orientato è uguale a 1.*

Dimostrazione. Infatti siano $\hat{ab}$ un angolo orientato di vertice O, $\hat{\alpha}$ la sua misura e Oxy il sistema cartesiano ad esso associato(fig 1.3).

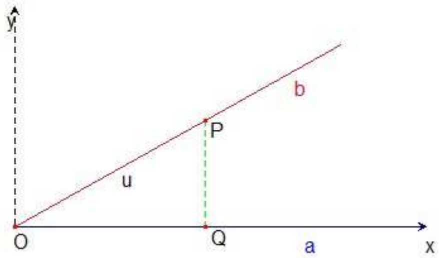


Figura 1.3

Detto P il punto del lato B tale che OP=u e Q la sua proiezione ortogonale sull'asse x, si ha

$$\overrightarrow{OP} = 1, \sin\alpha = QP, \cos\alpha = OQ \tag{1.1}$$

Dal triangolo rettangolo OQP, per il teorema di Pitagora, si ricava:

$$\overrightarrow{QP}^2 + \overrightarrow{OQ}^2 = \overrightarrow{OP}^2$$

dunque, in base alle 1.1, si ha:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1.2}$$

Questa relazione è evidentemente valida per un qualsiasi angolo orientato.

$\square$

Osservazione 2. Si osserva che dalla relazione fondamentale 1.2 segue che: Il seno e il coseno di un angolo orientato sono sempre numeri compresi fra -1 e + 1, estremi inclusi, cioè sono numeri appartenenti all'intervallo chiuso [-1,1]. Si ha dunque

$$\boxed{-1 \leq \sin\alpha \leq 1} \text{ e } \boxed{-1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$

Dopo aver studiato il codominio[2] delle funzioni seno e coseno, viene studiato come variano queste funzioni quando, preso un angolo orientato, si fa variare la sua ampiezza tra 0 e 2π. Attraverso questo studio, si vede che il seno e il coseno assumono in senso crescente o decrescente i valori tra

[2]Si osservi che nella scuola secondaria, a differenza di quanto visto nei corsi universitari, il termine codominio indica l'insieme dei valori della funzione(ossia l'immagine) e non l'insieme di arrivo della funzione stessa, che di norma è tutto $\mathbb{R}$.

-1 e 1 rispetto all'angolo considerato. Riportiamo ora un esempio teorico; non è solito nella scuola secondaria dare questo tipo di esercizi agli studenti ma penso che sia utile per introdurre gli studenti al mondo universitario, soprattutto per quegli studenti che vorranno studiare matematica.

Esempio 1.1. Dimostriamo, per esempio, che al variare di α da $\frac{\pi}{2}$ a π, *sen*α assume, in ordine decrescente, tutti i valori compresi tra 1 e 0.
Innanzitutto, se facciamo ruotare il secondo lato, attorno a 0, in modo che la misura dell'angolo vada crescendo da $\frac{\pi}{2}$ a π si vede immediatamente che la misura del segmento orientato PQ decresce da 1 a 0.
Inoltre, se b è un qualsiasi numero reale tra 0 e 1, esiste un angolo α positivo e ottuso tale che $\sin\alpha$=b.
Infatti al numero arbitrario b, compreso tra 0 e 1, facciamo corrispondere il numero negativo a, dato da

$$a = -\sqrt{1-b^2} \tag{1.3}$$

I due numeri (a,b) individuano un punto P nel secondo quadrante (fig. 1.5) ed essendo per la 1.3:

$$a^2 + b^2 = 1 - b^2 + b^2 = 1 \tag{1.4}$$

tale punto P dista dall'origine di un'unità, cioè OP=u.

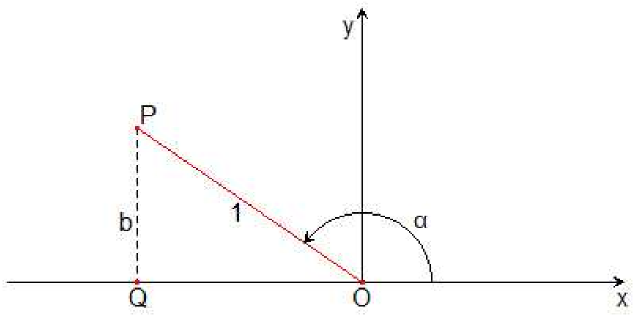


Figura 1.5

La semiretta OP forma con il semiasse positivo delle x un angolo positivo e ottuso il cui seno è proprio b (che è l'ordinata di P).

1.2 Tangente e cotangente di un angolo orientato

Definizione 1.3. Sia $\hat{ab}$ un angolo orientato di vertice O e si consideri il sistema cartesiano ortogonale ad esso associato (fig. 1.6).
Si prenda sul secondo lato b il punto P tale che OP=u e si indichi con Q la sua proiezione sull'asse x.

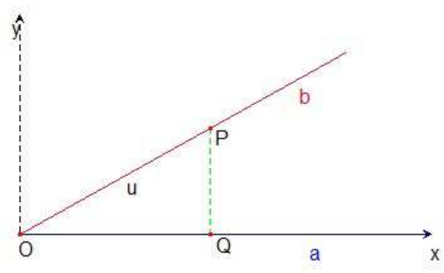


Figura 1.6

1. Si chiama tangente dell'angolo orientato $\hat{ab}$, e si scrive $\tan \hat{ab}$, il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa del punto P, ossia il rapporto tra i due segmenti orientati $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{OQ}$.

2. Si chiama cotangente dell'angolo orientato $\hat{ab}$, e si scrive $\cot \hat{ab}$, il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata del punto P, ossia il rapporto tra i due segmenti orientati $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{QP}$.

Dopo aver dato la definizione di tangente e cotangente, viene riportata un'osservazione in cui vengono definite alcune proprietà di queste due funzioni.
La tangente e la cotangente di un angolo orientato sono funzioni dell'angolo stesso e dalla definizione si ha che la tangente è data dal rapporto tra il seno e il coseno e per questo, quando il coseno è zero, ossia per $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, la tangente non esiste.
Analogamente per la cotangente che è data dal rapporto tra il coseno e il

seno (è il reciproco della tangente dello stesso angolo) e quindi non esiste se $\alpha = 0, \pi$.

Viene ora introdotto lo studio della variazione della tangente. La spiegazione, che verrà data, è perfetta ma forse un po' troppo difficile per gli studenti. A mio parere, sarebbe stato più utile, come poi vedremo nell'altro libro, utilizzare una figura e attraverso questa far comprendere come varia la tangente, cosa tutt'altro che facile visto che non sono stati ancora introdotti i limiti. E' vero che attraverso le figure non si possono dimostrare i risultati, ma a livello di scuola secondaria, sono utili agli studenti che, per la prima volta, affrontano questi argomenti.

1.3 Variazione della tangente

Si consideri inizialmente l'angolo positivo acuto $\hat{ab}$.
Quando l'angolo orientato $\hat{ab}$ ha una misura α compresa fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ è positiva perchè risultano positive l'ordinata e l'ascissa del punto P, o, il che è equivalente, risultano positivi $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$.
Si vede inoltre che facendo ruotare in senso antiorario il lato b (fig. 1.6), in modo però che α si mantenga sempre compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ aumenta di valore, perché aumenta la lunghezza del segmento QP mentre diminuisce quella del segmento OQ.
Possiamo anzi vedere che al crescere da 0 a $\frac{\pi}{2}$, la tangente può assumere valori grandi quanto si vuole. Infatti, dato un numero positivo k grande a piacere, facciamo vedere che esiste un angolo orientato, positivo ed acuto, la cui tangente vale k. A tale scopo fissato un sistema d'assi cartesiani ortogonale Oxy, consideriamo (fig. 1.7) il punto T di coordinate (1,k).

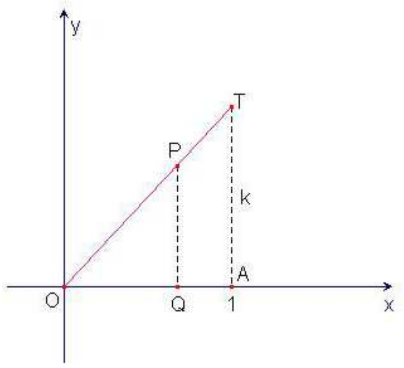


Figura 1.7

Congiungiamo T con O e indichiamo con α la misura dell'angolo acuto positivo $\widehat{AOT}$.
Su OT consideriamo il punto P in modo tale che sia OP = u e sia Q il piede della perpendicolare condotta da P all'asse delle x.
Poiché i due triangoli OQP e OAT sono simili, si può scrivere la seguente proposizione fra i lati corrispondenti:

$$QP : OQ = AT : OA \tag{1.5}$$

La 1.5 vale anche se si considerano orientati tutti i segmenti che vi figurano, in quanto tutti (fig. 1.6) hanno orientazione positiva.
Se consideriamo le misure dei segmenti orientati, essendo, nel modo in cui sono stati costruiti i punti A, T, P, Q:

$$\mathrm{QP} = \sin\alpha,\ \mathrm{OQ} = \cos\alpha,\ \mathrm{AT} = k,\ \mathrm{OA} = 1,$$

dalla 1.5 si ricava la proporzione numerica:

$$\sin\alpha : \cos\alpha = k : 1$$

dalla quale segue, essendo $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, $\tan\alpha = k$.
Quindi l'angolo orientato $\widehat{AOT}$, acuto e positivo, cha abbiamo costruito, è l'angolo cercato.
Si vede dunque che quando α cresce a 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, escluso $\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ assume, sempre crescendo, tutti i valori reali positivi, mentre per $x = \dfrac{\pi}{2}$ non esiste il valore

della tangente.
Si suole esprimere brevemente questo fatto dicendo che quando α cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ cresce da zero a più infinito ($+\infty$). Lo studente deve però aver ben chiaro il significato di questa frase per non cadere nell'errore, molto diffuso, di affermare che la tangente di $\frac{\pi}{2}$ vale infinito! Deve, innanzi tutto, tener presente che la tangente dell'angolo orientato che misura, in radianti, $\frac{\pi}{2}$ non esiste. Deve poi ricordare che quando si afferma che, al variare di α da 0 a $\frac{\pi}{2}$, la tangente varia da 0 a $+\infty$, questo è soltanto un modo abbreviato per dire che quando α varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$, la tangente varia assumendo, in ordine crescente, tutti i valori positivi.[3]
Se α cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π, $\tan\alpha$ risulta negativa, poiché si ha il seno negativo e il coseno positivo in questo intervallo, e quindi il loro rapporto è negativo. Si può vedere con un ragionamento analogo a quello precedentemente fatto, che la tangente assume qualunque valore negativo, per quanto grande esso sia in valore assoluto.
Possiamo perciò dire che quando α cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π, $\tan\alpha$ varia, sempre crescendo, da meno infinito (-∞) a 0, intendendo con questa frase dire che per α crescente da $\frac{\pi}{2}$ a π, $\tan\alpha$ assume, sempre crescendo, tutti i valori negativi.
Si osservi, infine, che quando α, minore di $\frac{\pi}{2}$, si avvicina crescendo a $\frac{\pi}{2}$, allora $\tan\alpha$ assume, sempre crescendo, valori positivi grandi quanto si vuole; mentre quando α si avvicina a $\frac{\pi}{2}$, per valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ assume, decrescendo, valori negativi, in valore assoluto grandi quanto si vuole. Si vede dunque che quando $\hat{\alpha}$ passa da valori un po' minori di $\frac{\pi}{2}$ a valori un po' maggiori di $\frac{\pi}{2}$, la $\tan\alpha$ passa bruscamente da valori positivi grandissimi a valori negativi, in valore assoluto, pure grandissimi.[4]

[3] In questo caso questa spiegazione è perfetta. In generale, però, la nozione di limite (sinistro) non richiede la suriettività su $\mathbb{R}^+$ e neppure la crescenza.

[4] Mancando una definizione esplicita di limite, il testo la sostituisce con questo discorso che è una perifrasi. Per esprimere questo fatto, si usa dire che al tendere di α a $\frac{\pi}{2}$, per valori minori di $\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ tende a $+\infty$, cioè significa dire che quando α assume valori

Con considerazioni analoghe, si nota che se α cresce da π a $\frac{3\pi}{2}$, $\tan\alpha$ varia, sempre crescendo, da 0 a $+\infty$, mentre se α varia da $\frac{3\pi}{2}$ a 2π la tangente è ancora crescente ed il suo valore cresce da $-\infty$ a 0.
Riassumendo si ha che la tangente di un angolo orientato, al variare dell'angolo, può assumere qualunque valore, positivo, negativo o nullo, ossia varia da $-\infty$ a $+\infty$.[5]

1.4 Funzioni goniometriche di angoli maggiori di un angolo giro

E' possibile affermare che due semirette a e b, uscenti da uno stesso punto O, costituiscono il contorno di infiniti angoli e se α è la misura in radianti di uno qualunque di essi, la misura degli altri si ottiene dalla formula:

$$\alpha + k \cdot 2\pi$$

attribuendo a k valori interi, positivi o negativi.
Viceversa, fissata sul piano una semiretta a di origine O e dato un qualsiasi numero reale x, esiste una ed una sola semiretta b, uscente da O, la quale formi con la semiretta a un angolo che abbia per misura, in radianti, il numero fissato x.
Possiamo allora parlare di angoli orientati maggiori di un angolo giro e si pone, per definizione:

---

sempre più prossimi a $\frac{\pi}{2}$, ma inferiori, $\tan\alpha$ assume valori positivi grandi quanto si vuole, mentre per α tendente a $\frac{\pi}{2}$ per valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ tende a $-\infty$. Anche questi discorsi, come ben sappiamo, sono imprecisi.

[5]Le nozioni di funzione $f : A \longrightarrow B$, di dominio A, di codominio B, di funzione suriettiva ecc. sono state definite in capitoli precedenti a questo ma come si può notare non vengono utilizzate. Come detto in precedenza, questo libro ha come limite il fatto di non collegare le varie parti della matematica ma si preoccupa di dare nozioni a se stanti, senza utilizzarle in altri capitoli se non in quelli in cui vengono presentate.

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin\alpha;\ \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos\alpha; \\ \tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan\alpha;\ \cot(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cot\alpha\end{array}}$$

Siccome si è visto che ad ogni numero reale x corrisponde sempre un angolo orientato la cui misura in radianti è il numero x, e viceversa, è così possibile parlare di seno, coseno, tangente e cotangente di un numero reale qualsiasi.

1.5 Periodicità del seno, coseno, tangente e cotangente

Da quanto detto in precedenza si può concludere che:
Il seno e il coseno sono funzioni periodiche dell'angolo, con periodo 2π *radianti, ovvero con periodo* $360°$*.*
Con questa frase si intende dire che ogni qualvolta la misura di un angolo aumenta, in senso algebrico, di 2π, il seno e il coseno tornano ad avere lo stesso valore.
Per quanto riguarda la tangente e la cotangente, si osservi che quando la misura dell'angolo varia da π a 2π, essa esse assumono gli stessi valori, e nello stesso ordine, dei valori che esse assumono quando la misura dell'angolo varia da 0 e π, e così di seguito [6]. Perciò si può affermare che:
La tangente e la cotangente sono funzione periodiche dell'angolo, con periodo π *radianti, ovvero con periodo* $180°$, cioè:

$$\boxed{\tan(\alpha + k \cdot \pi) = \tan\alpha;\ \cot(\alpha + k \cdot \pi) = \cot\alpha}$$

1.6 Funzioni goniometriche di alcuni angoli notevoli

Esempio 1.2. Servendoci delle definizioni date di seno, coseno e tangente di un angolo orientato, si vuole determinare il valore di queste funzioni, relative

[6] Non viene detto in che modo. E' possibile osservarlo studiando la funzione $y = \tan x$ e il suo grafico.

agli angoli di $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$.
Sia ab un angolo orientato la cui misura sia $\frac{\pi}{6}$.
In questo caso (fig. 1.8), si ha, prescindendo dall'orientamento dei segmenti:

$$\overline{OP} = 1 \text{ e } \overline{QP} = \frac{1}{2}\overline{OP} = \frac{1}{2},$$

perchè QP è la metà del lato del triangolo equilatero di lato OP.

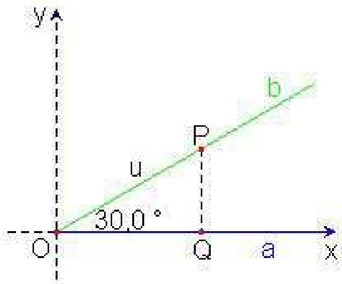


Figura 1.8

Inoltre, dal teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo OQP, si ricava:

$$\overline{OQ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

quindi, tenendo conto anche dell'orientamento dei segmenti:

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}}$$

Con un ragionamento analogo, si prova che:

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Osservazione 3. Nella seguente tabella, si trovano i valori delle funzioni goniometriche, seno, coseno, tangente e cotangente di alcuni angoli notevoli.

Angolo	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste	0
π	0	-1	0	non esiste
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	non esiste	0
2π	0	1	0	non esiste

1.7 Angoli associati

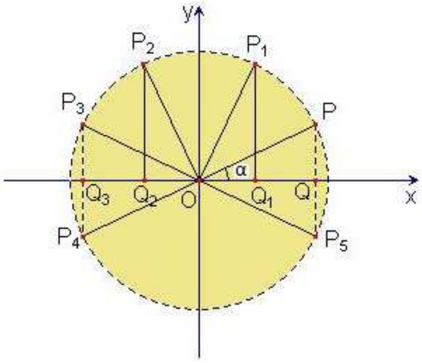
Due angoli orientati si dicono: [7]

- supplementari quando la somma delle loro misure, in radianti, vale π;
- complementari quando la somma delle loro misure, in radianti, vale $\frac{\pi}{2}$;
- opposti quando la somma delle loro misure è zero;
- esplementari quando la somma delle loro misure, in radianti, vale 2π.

Definizione 1.4. Sia α un angolo orientato.
Si chiamano angoli associati all'angolo α quegli angoli le cui funzioni goniometriche, in valore assoluto, sono complessivamente eguali a quelle dell'angolo α.

[7] Si noti che non è stata definita la somma di angoli quindi bisogna puntualizzare che bisogna considerare la somma di angoli modulo 2π, poiché sia sempre vero quello che si definirà ora.

Consideriamo la figura seguente.



I triangoli rettangoli OPQ, OP_1Q_1, OP_2Q_2, OP_3Q_3, OP_4Q_3 e OP_5Q sono fra loro isometrici, perché hanno isometrici l'ipotenusa (che vale u), e l'angolo acuto α.
Se consideriamo i cateti di tali triangoli come segmenti orientati, si ottengono le formule degli angoli associati, e precisamente:

Angoli complementari.

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$, essendo $Q_1P_1 = OQ$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$, essendo $OQ_1 = QP_1$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$, dividendo membro a membro

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$, dividendo membro a membro

Angoli che differiscono di un angolo retto (anticomplementari)

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$, essendo $Q_2P_2 = OQ$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$, essendo $OQ_2 = QP$

$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$, dividendo membro a membro

$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$, dividendo membro a membro

Angoli supplementari.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,$	essendo $Q_3P_3 = QP$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$	essendo $OQ_3 = -OQ$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha,$	dividendo membro a membro
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha,$	dividendo membro a membro

Angoli che differiscono di un angolo piatto (antisupplementari)

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$	essendo $Q_3P_4 = -QP$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$	essendo $OQ_3 = -OQ$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha,$	dividendo membro a membro
$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha,$	dividendo membro a membro

Angoli opposti ed esplementari.

$\sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,$	essendo $QP_5 = -QP$
$\cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha,$	essendo $OQ = OQ$
$\tan(-\alpha) = \tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha,$	dividendo membro a membro
$\cot(-\alpha) = \cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha,$	dividendo membro a membro

Esempio 1.3. Semplificare la seguente espressione.
$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha)\tan(\pi + \alpha) - 3\tan(\pi - \alpha)\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) - 2\tan^2(\pi + \alpha)$
Risoluzione.
$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)\tan(\pi+\alpha)-3\tan(\pi-\alpha)\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)-2\tan^2(\pi+\alpha)=-\tan\alpha\tan\alpha-$
$-3(-\tan\alpha)\tan\alpha - 2\tan^2\alpha = -\tan^2\alpha + 3\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha = 0$

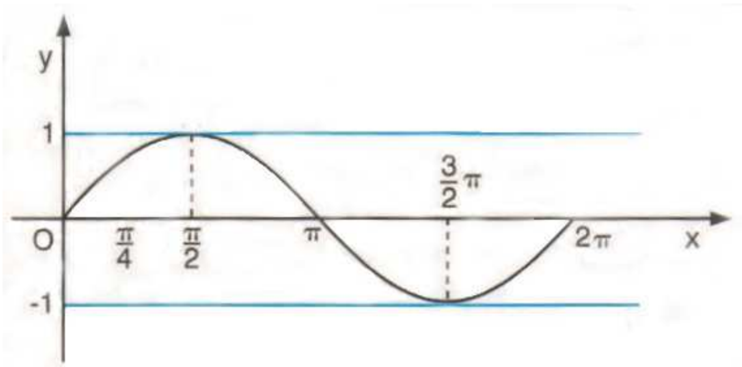
1.8 Grafici delle funzioni goniometriche

Vogliamo ora tracciare i grafici del seno, del coseno, della tangente e della cotangente.

1°) *Grafico della funzione:* $y = \sin x$.

Indicando con x la misura in radianti di un angolo orientato e con y il corrispondente valore del seno, sappiamo che la funzione $y = \sin x$ è definita per ogni valore reale della x. Inoltre, la funzione seno è funzione periodica di periodo 2π, e quindi per studiare l'andamento del suo grafico basta limitarsi a considerare soltanto i valori che essa assume per x variabile nell'intervallo $[0,2\pi]$.

Tenendo presente come varia, in questo intervallo il valore di $\sin x$, facilmente [8] si vede che il grafico della funzione considerata ha un andamento del tipo di quello indicato in figura.

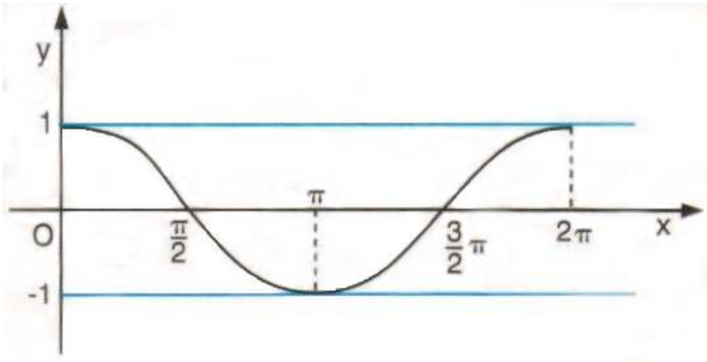


Il grafico della funzione $y = \sin x$ si suol chiamare sinusoide.

2°) *Grafico della funzione:* $y = \cos x$.

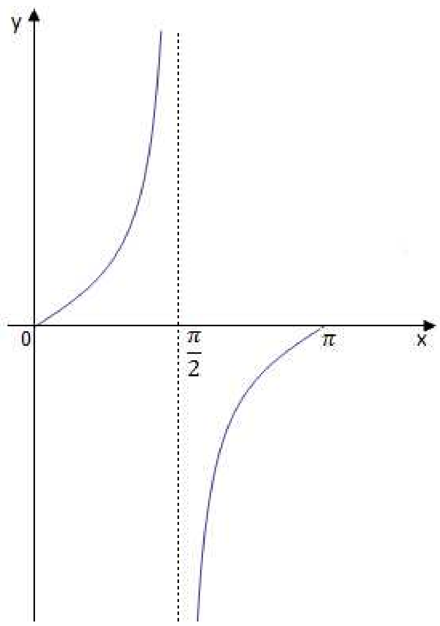
Anche per questa funzione basta tracciare il grafico per x variabile tra 0 e 2π. Tenendo presente allora come varia, in questo intervallo il valore di $\cos x$, facilmente si vede che il grafico della funzione considerata ha un andamento del tipo di quello indicato in figura.

[8] Non è immediato per uno studente che affronta per la prima volta questo argomento comprendere "facilmente" come costruire il grafico di una funzione circolare.



Il grafico della funzione $y = \cos x$ si suol chiamare cosinusoide.

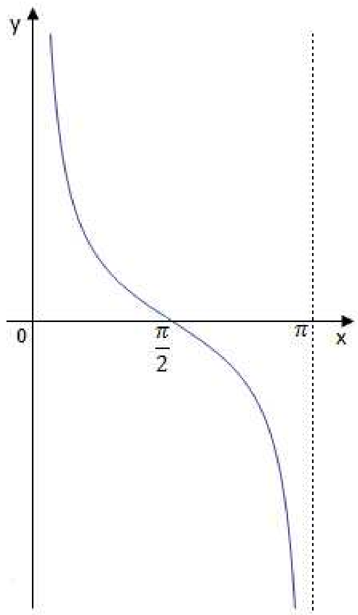
3°) *Grafico della funzione:* $y = \tan x$.
Siccome, come abbiamo visto, il periodo di questa funzione è π, basta tracciare il suo grafico per x variabile da 0 a π. Tenendo presente come varia, in questo intervallo, il valore di $\tan x$, facilmente si vede che il suo grafico ha l'andamento indicato in figura.



Come si vede dalla figura, tale grafico, pur avvicinandosi indefinitamente alla retta parallela all'asse y, condotta per il punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$, (sia a sinistra sia a destra di tale punto), tuttavia non la incontra, e ciò è conforme a quanto

sappiamo, cioè che non esiste il valore della tangente per $x = \frac{\pi}{2}$. Si suol dire che tale retta è asintoto della curva.
Il grafico della funzione $y = \tan x$ si suol chiamare tangentoide.[9]

4°) *Grafico della funzione:* $y = \cot x$.
Anche per questa funzione basta tracciare il grafico per x variabile tra 0 e π. Tenendo presente come varia, in questo intervallo, il valore di $\cot x$, facilmente si vede che il suo grafico ha l'andamento indicato in figura.



L'asse y e la retta parallela all'asse y condotta per il punto di ascissa π sono asintoti per la curva.
Il grafico della funzione $y = \cot x$ si suol chiamare cotangentoide.

E' importante notare che non è il grafico della tangente (o delle cotangente) così come è stata definita, ossia periodica, ma solo della sua restrizione

[9]Questo discorso è un po' troppo impreciso. Si potrebber dire più correttamente: "La figura è conforme a quello che sappiamo sulla tangente: cresce per x da 0 a $\frac{\pi}{2}$, assumendo tutti i valori reali ≥ 0 e in $\frac{\pi}{2}$ non esiste il valore della tangente. La retta parallela all'asse y è detta asintoto della curva".

ad un oppurtuno intervallo lungo quanto il periodo. Tra l'altro, per la tangente sarebbe stato preferibile scegliere come intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ in quanto si nota che il ramo che descrivere la tangente è unico e non spezzato in due, cosa che potrebbe trarre in inganno lo studente. In più sarebbe stato opportuno riportare qualche altro ramo per vedere meglio il grafico della tangente in base anche a com'è stata definita; in più deve essere fatto soprattutto se, come in questo caso, è stato scelto come intervallo $(0, \pi)$.
Sarebbe stato opportuno per la tangente utilizzare l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ anche per introdurre la funzione inversa, l'arcotangente, molto importante per la risoluzione degli integrali, anche se in questo libro non si parla di funzioni inverse delle funzioni goniometriche.

Ora vengono definite le espressioni di tutte le funzioni goniomeriche di un dato angolo orientato mediante una sola di esse.
In precedenza, si è ricavato che valgono le seguenti relazioni: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ e $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Supposta nota una delle tre funzioni (ossia il seno, il coseno o la tangente), si vuole ricavare il valore delle altre due, per mezzo della funzione nota.
Nel ricavare questi valori si ricava anche l'identità $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, senza però metterla in evidenza e quindi lo studente potrebbe non memorizzarla. Questa equivalenza, invece, è estremamente importante ricordarla in quanto viene utilizzata molto nelle derivate e negli integrali.

Nell'ultimo paragrafo di questo capitolo vengono stabilite le relazioni che legano le misure dei lati di in triangolo ai valori delle funzioni goniometriche degli angoli; vengono così proposti le relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo avente come applicazione il calcolo dell'area di un triangolo e del parallelogrammo, il teorema della corda e dei seni (o di Eulero), il teorema delle proiezioni ed il teorema del coseno o di Carnot. Come fatto in precedenza negli altri paragrafi, le relazioni sopra nominate sono state dimostrate con dimostrazioni a volte troppo lunghe e complicate per gli studenti.

Capitolo 2

Formule goniometriche

[1] In questo capitolo vogliamo osservare che le funzioni goniometriche, pur variando al variare dell'angolo, non variano proporzionalmente ad esso. Si ha che le funzioni goniometriche non sono dei "morfismi" rispetto all'addizione; infatti per esempio, in generale:

$$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta;\ cos(\alpha-\beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta, \text{ ecc.}$$

Determiniamo ora le formule di trasformazione delle funzioni goniometriche.

2.1 Formule di sottrazione

Le formule di sottrazione e addizione hanno lo scopo di esprimere il seno, il coseno e la tangente dell'angolo $\alpha-\beta$ e $\alpha+\beta$, mediante il valore del seno, del coseno e della tangente degli angoli α e β.
Viene presentata una dimostrazione lunga e difficile per gli studenti; è forse necessario che il professore cerchi un'altra dimostrazione più adatta o la salti proprio. A mio parere, è utile dimostrare agli studenti i risultati che si vanno ad enunciare ma è anche utile comprendere che gli studenti, negli ultimi decenni, non sono più disposti ad imparare dimostrazioni lunghe e a volte di

[1] Così com'è presentato, questo capitolo non ha alcuna valenza se non un riassunto di formule. Manca infatti qualunque motivazione per la sua presenza: a che cosa servono tutte queste formule?

difficile comprensione, soprattutto quelli che hanno alcune difficoltà con la matematica. Nella scuola secondaria, le dimostrazioni in molti casi vengono solo presentate, senza essere chieste all'orale, per preparare lo studente al mondo unversitario e per fargli capire che tutto quello che si spiega è possibile dimostrarlo; è quindi, secondo me, più adatto presentare dimostrazioni più brevi e di maggiore comprensione, se possibile. Le formule di sottrazione sono:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,; \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,;$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

2.2 Formule di addizione

Siccome le formule di sottrazione valgono qualunque siano i due angoli α e β, con la nota eccezione per la formula di sottrazione della tangente, per avere le formule di addizione basta porre al posto di β il valore $-\beta$. Ricordano che $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, $\cos(-\beta)=\cos\beta$ e $\tan(-\beta)=-\tan\beta$, si ottengono le formule formule di addizione:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,; \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,;$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Le prime due formule sono valide per qualsiasi valore di α e β, mentre la terza è valida per $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+h\pi$, con h e k numeri interi relativi qualsiasi.

Esempio 2.1. Utilizzando le formule di addizione e sottrazione , si vogliono calcolare le funzioni goniometriche di angoli che si possono pensare come differenza o somma di angoli notevoli. Calcoliamo i valori delle funzioni goniometriche dell'angolo di 75°.
$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75° = \tan(45°+30°) = \frac{\sin 75°}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2} =$$

$$= 2+\sqrt{3}$$

2.3 Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione degli angoli sono quelle che danno il valore delle funzioni goniometriche dell'angolo 2α, conoscendo il valore delle funzioni goniometriche dell'angolo α.

Queste formule si deducono dalle formule di addizione, ponendo in queste $\beta = \alpha$. Si ottiene:

$$\boxed{\begin{gathered} \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha\,; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,; \\ \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{gathered}}$$

Osservazione 4. 1. Le prime due formule sono valide per qualsiasi valore dell'angolo α, mentre per la validità della terza si deve supporre:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

perché per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, perde di significato il secondo membro, mentre il primo membro vale zero. [2]

[2] Si può notare che è stato fatto un errore da parte degli autori. Non è stata inserita un'ulteriore condizione di esistenza per $\tan 2\alpha$. Infatti $\tan 2\alpha$ esiste se $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ossia se $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Da quanto si è appena visto $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$, quindi, poiché la $\tan 2\alpha$ esista, deve esistere $\tan\alpha$ e $1-\tan^2\alpha$ deve essere diverso da zero. In definitiva, $\tan 2\alpha$ esiste per $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

2. Ricordando, inoltre, che $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ e $cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ la seconda delle formule di duplicazione, si può scrivere anche sotto le forme seguenti:

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$$

2.4 Formule di bisezione

Queste formule servono, noti i valori di $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, a calcolare i valori delle funzioni goniometriche dell'angolo metà, cioè $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$. Queste formule si ricavano dalle formule di duplicazione del coseno, ponendo in queste formule $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α. Nel cercare la formula di bisezione della tangente, bisogna supporre $\cos\alpha \neq \pi + 2k\pi$. In definitiva, le formule di bisezione sono:

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad ; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad ; \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

Osservazione 5. Dei due segni, posti davanti alla radice, nelle formule di bisezione, se ne deve prendere uno solo, e per decidere quale è necessario conoscere il quadrante in cui cade il secondo lato dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$

Vengono poi definite le formule di prostaferesi e di Werner. A volte è incomprensibile il motivo per cui queste formule vengano inserite; visto che non c'è nessun collegamento con altre parti della matematica, il motivo per cui vengono inserite sembra essere un esercizio di memorizzazione o un modo per avere più esercizi da proporre agli studenti.
Questa parte sulle formule goniometriche è abbastanza densa e per gli studenti è molto pesante imparare tutte queste formule; è quindi necessario scegliere quali formule siano davvero importanti e quali si possano saltare anche perché è impossibile poter fare tutto.

2.5 Esercizio di ricapitolazione

Semplificare la seguente espressione: $\left[\tan 2\alpha - \frac{\tan\alpha}{\tan 45° - \tan\alpha}\right]\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$.
Risoluzione.
Per prima cosa è necessario porre le condizioni di esistenza.
C.E. 1: $\tan 2\alpha$ esiste $\Longleftrightarrow 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Longleftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
C.E. 2: $\tan\alpha$ esiste $\Longleftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
C.E. 3: $\tan 45° - \tan\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow 1 - \tan\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \tan\alpha \neq 1 \Longleftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.
C.E. 4: $1 - \cos^2\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \sin^2\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \sin\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq k\pi$.
In definitiva, l'espressione vale per $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \alpha \neq k\pi$.

$$\left[\tan 2\alpha - \frac{\tan\alpha}{\tan 45° - \tan\alpha}\right]\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \left[\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} - \frac{\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right]\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= \left[\frac{2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)} - \frac{\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right]\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} =$$

$$= \left[\frac{2\tan\alpha - \tan\alpha - \tan^2\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}\right]\frac{2}{\tan\alpha} = \left[\frac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}\right]\frac{2}{\tan\alpha} = \frac{2}{1+\tan\alpha}$$

Si può notare che questa presentazione di seno, coseno e tangente è molto scarsa dal punto di vista della conoscenza: nessuna contestualizzazione, nessuna problematicità, nessuna applicazione. Questo potrebbe piacere a quegli alunni che si accontentano del sei, imparandosi le formula in modo acritico, e una volta fatto il compito in classe cancellano quanto fatto.
Manca qualunque collegamento con la geometria analitica o il calcolo dei vettori. Questi argomenti vengono trattati in altri capitoli del libro ma senza richiami a quanto visto in precedenza. Come detto inizialmente, gli autori hanno deciso di presentare la matematica in maniera monografica, trattando ogni argomento in modo a se stante e senza fare collegamenti tra i vari rami della matematica e delle altre scienze.

Capitolo 3

Confronto fra i due libri

Analizziamo ora come vengono presentate le funzioni e le formule goniometriche nel libro “Corso base blu di matematica 4” di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi, Casa Editrice Zanichelli.
Si vuole paragonare i due libri e notare le differenze sostanziali tra di essi.
Il capitolo sulla goniometria è diviso in due unità: la prima si occupa delle funzioni goniometriche, mentre la seconda si occupa delle formule goniometriche.

3.1 Seno e coseno

Come fatto nell'altro libro preso in considerazione, per introdurre il seno e il coseno viene data la definizione di angolo orientato ma poi è possibile notare una sostanziale differenza. Viene data la definizione di circonferenza goniometrica e attraverso questa vengono definite le funzioni circolari.
La definizione che verrà data non aiuta nel calcolo pratico dei valori delle funzioni; infatti essa si basa sui triangoli rettangoli per molti angoli. Essa consente, tuttavia, la definizione delle funzioni trigonometriche per tutti gli argomenti reali, positivi e negativi. La circonferenza goniometrica può essere vista come ad un modo per considerare un numero infinito di triangoli

rettangoli in cui varia la lunghezza dei cateti, mentre l'ipotenusa si mantiene uguale ad 1.

Definizione 3.1. Nel piano cartesiano, per circonferenza goniometrica intendiamo la circonferenza di centro l'origine O degli assi e raggio di lunghezza 1, ossia la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 4.1).

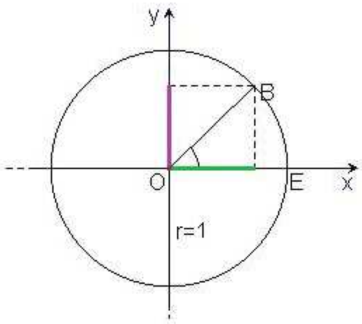


Figura 4.1

Il punto E(0;1) si dice origine degli archi.
Utilizzando la circonferenza goniometrica si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse x. In questo modo ad ogni angolo corrisponde un punto B intersezione fra la circonferenza e il lato termine.

Introduciamo alcune funzioni goniometriche che alla misura dell'ampiezza di ogni angolo associano un numero reale.

Definizione 3.2. Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α e sia B il punto della circonferenza associato ad α.
Definiamo coseno e seno dell'angolo α, e indichiamo con $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$, le funzioni che ad α associano rispettivamente il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto B. In figura 4.1, il coseno è indicato in verde mentre il seno è indicato in viola.

$$\begin{array}{l} \cos\alpha = x_B \\ \qquad\qquad B(\cos\alpha; \sin\alpha). \\ \sin\alpha = y_B \end{array}$$

Osservazione 6. Consideriamo una circonferenza di raggio qualsiasi $r' \neq 1$. Prendiamo, per semplicità, un angolo appartenente al primo quadrante. Dette (x'; y') le coordinate di B', dalla similitudine dei triangoli OBA e OB'A' deduciamo:

$$\frac{x'}{r'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \cos\alpha,$$
$$\frac{y'}{r'} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} = \sin\alpha.$$

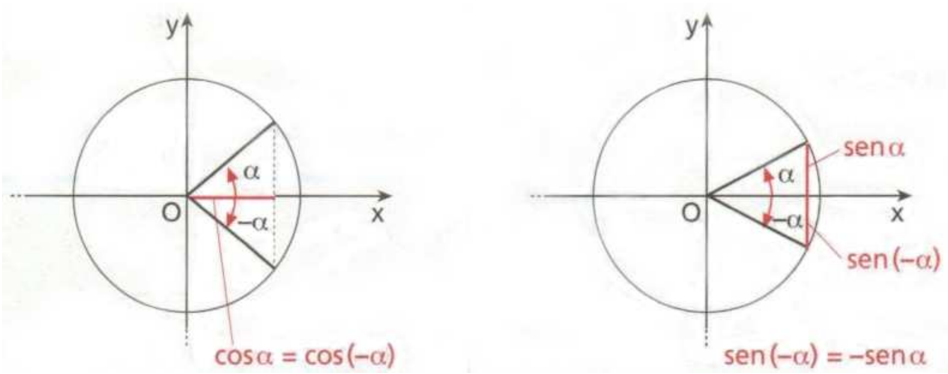
I due rapporti non dipendono dalla particolare circonferenza considerata, ma esclusivamente dall'angolo α.
Consideriamo ora un triangolo rettangolo OAB. Possiamo pensare all'ipotenusa OB come al raggio di una circonferenza, quindi il seno di α è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa, il coseno è uguale al rapporto tra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa.

Questa osservazione è stata proposta anche nell'altro libro; vi è però una differenza. Nel libro preso in esame precedentemente questa proprietà delle funzioni goniometriche è stata dimostrata considerando un angolo orientato e tracciando il sistema cartesiano ad esso associato, mentre in questo libro è stato si preso in esame un angolo orientato ma è stata utilizzata la circonferenza goniometrica. Questo deriva dalla differente definizione di seno e coseno che è stata data.

Ora viene proposto lo studio della variazione delle funzioni seno e coseno. Considerando la circonferenza goniometrica, si suppone che un punto B percorra l'intera circonferenza, a partire da E, in senso antiorario.
Si consideri $\alpha = E\hat{O}B$ e studiamo come variano $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ al variare di B. Basta osservare che cosa succede all'ascissa di B (ossia il coseno) e alla sua ordinata (ossia il seno).
Vengono studiate come variano, anche attraverso l'utilizzo delle figure, x_B e y_B nei quattro quadranti; in questo modo vengono trovati i valori del seno e del coseno per gli angoli $0 = 2\pi$, $\frac{\pi}{2}$,π, $\frac{3}{2}\pi$.

La conclusione a cui si arriva è:
Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra -1 e 1, quindi: $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ *e* $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.

Osservazione 7. Osserviamo che, poiché $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, allora il coseno è una funzione pari, mentre, essendo $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$, il seno è una funzione dispari (vedi figura).



Non viene definito $-\alpha$ ma viene mostrato attraverso una figura. Dal punto di vista matematico, non è molto giusto ma molte volte una figura è molto più eloquente delle definizioni; soprattutto, a livello di scuola secondaria, gli studenti necessitano di figure per comprendere meglio quello che si sta loro presentando.
Si può notare che quest'ultima osservazione non la si trova nel libro analizzato in precedenza; è vero che si può arrivare a questa conclusione attraverso lo studio degli angoli associati ma gli studenti non sanno che il coseno è una funzione pari e il seno è una funzione dispari. Le funzioni goniometriche vengono utilizzate in molti campi scientifici e lo studente potrebbe ritrovare questa proprietà in un libro, ad esempio in una dimostrazione, e non comprendere cosa significhi.

3.2 Grafici delle funzioni seno e coseno

Determinati nello studio precedente i valori del seno e del coseno per gli angoli di 0, $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3}{2}\pi$, vengono costruiti i grafici delle funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$ in $[0, 2\pi]$ riportando sull'asse delle x i valori degli angoli e, in corrispondenza, sull'asse delle y le coordinate dei punti che stanno sulla circonferenza goniometrica .
E' possibile notare una differenza dovuta sempre alla differente definizione data; infatti, nell'altro libro analizzato, sono stati prima trovati i valori del seno e del coseno degli angoli più significativi e in un secondo momento costruiti i grafici delle funzioni. In questo libro, allo studente è presentata la stretta correlazione tra la circonferenza goniometrica e le funzioni goniometriche.
Come detto in precedenza, attaverso lo studio dei grafici sono stati trovati i valori del seno e coseno degli angoli $0 = 2\pi$, $\frac{\pi}{2}$,π, $\frac{3}{2}\pi$; ora vengono individuati sulla circonferenza goniometrica gli angoli notevoli e viene mandato il rispettivo valore nel piano cartesiano; congiungendo i punti d'intersezione trovati si descrive il grafico della funzione seno e coseno.

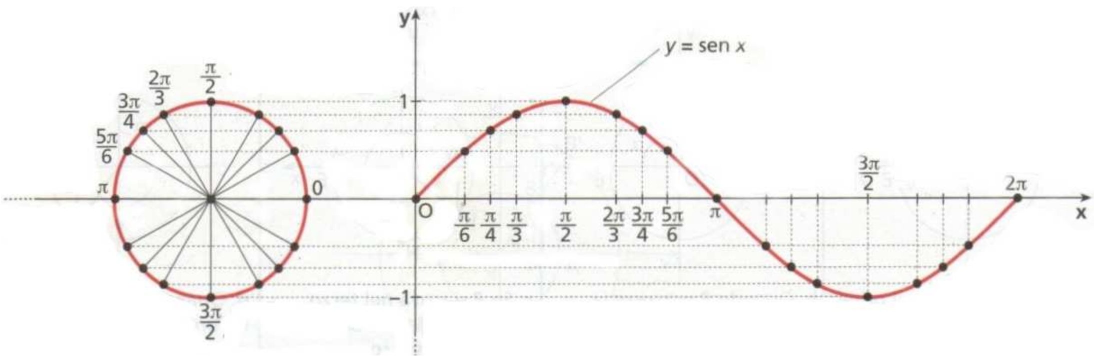


Grafico di $y = \sin x$ in $[0, 2\pi]$

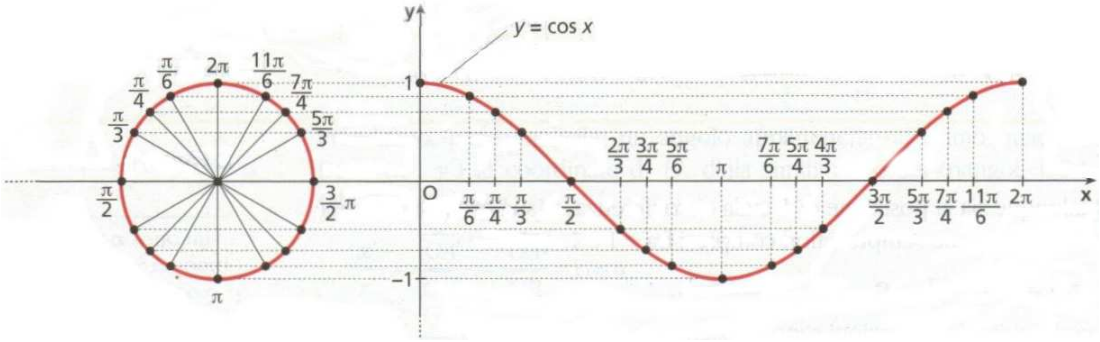


Grafico di $y = \cos x$ in $[0, 2\pi]$

In seguito, viene definito il periodo delle funzioni seno e coseno, che come precedentemente visto sono periodiche di periodo 2π, e vengono mostrati i grafici "completi"[1] delle funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$, detti rispettivamente sinusoide e cosinusoide.

Osservazione 8. I grafici delle due funzioni sono sovrapponibili con una traslazione di vettore parallelo all'asse x e di modulo $\dfrac{\pi}{2}$.

Viene poi definita la prima relazione fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Questa relazione viene dimostrata in due modi; il primo viene dalla definizione della circonferenza goniometrica, avente come espressione $x^2 + y^2 = 1$, e dalla definizione di seno e coseno. Il secondo modo è lo stesso utilizzato nel primo libro, ossia considerando un triangolo rettangolo, interno alla circonferenza goniometrica e avente come angolo α, l'angolo al centro tra l'ipotenusa e il cateto, e applicando il teorema di Pitagora.

3.3 La funzione tangente

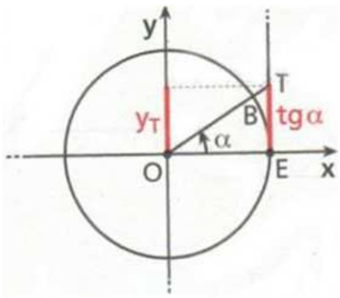
Come fatto precedentemente per le funzioni seno e coseno, viene definita la funzione tangente attraverso l'utilizzo della circonferenza goniometrica.

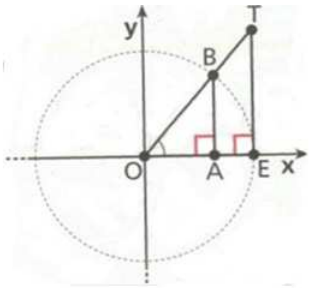
[1] E' ovvio che i grafici delle funzioni circolari sono completi per modo di dire, visto che il foglio è limitato.

Definizione 3.3. Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica di centro O. Definiamo tangente di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa del punto B: $\tan\alpha = \dfrac{y_B}{x_B}$.

Differentemente all'altro libro, viene proposto un altro modo di definire la tangente.

Definizione 3.4. Consideriamo la circonferenza goniometrica e la tangente ad essa nel punto E, origine degli archi. Il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto T (fig. a sinistra).
La tangente dell'angolo α può anche essere definita come il valore dell'ordinata del punto T, ossia: $\tan\alpha = y_T$.

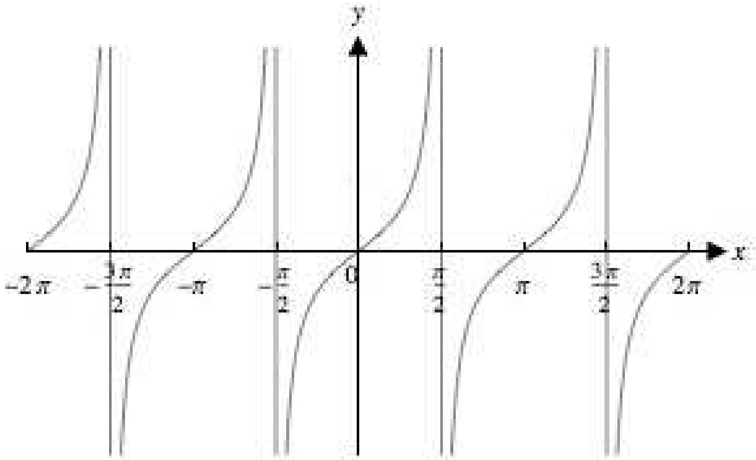




Dimostrazione. Dimostriamo che le due definizioni date sono equivalenti.
Consideriamo i due triangoli rettangoli OAB e OET (figura a destra).
Essi sono simili quindi:
$TE : BA = OE : OA$. Si ha quindi $y_T : y_B = 1 : x_B$ da cui $y_T = \dfrac{y_B \cdot 1}{x_B}$
Pertanto $\tan\alpha = \dfrac{y_B}{x_B} = y_T$ □

Analogamente a quanto fatto prima per il seno e il coseno vengono studiate le medesime proprietà, ossia la variazione, il grafico e il periodo della funzione tangente, proprietà gia presentate nell'altro libro ma nell'analisi di questo libro è possibile notare una predilezione per la sinteticità e l'utilizzo delle figure per aiutare gli studenti a comprendere meglio quello che si sta trattando.
Il grafico della funzione tangente viene prima costruito fra $(0, \pi)$, utilizzando

lo stesso procedimento con cui sono stati costruiti i grafici di seno e coseno, e poi presentato in maniera "completa", costruendo più rami (logicamente non è possibile costruire tutti i rami poiché sono infiniti). Possiamo notare come in questo libro non sia stato fatto l'errore didattico del libro precedente, in quanto, come detto in precedenza, mostrare il grafico della tangente solo tra $(0, \pi)$ potrebbe portare lo studente a trarre conclusioni errate.



Dopo aver studiato la variazione della funzione tangente anche attraverso l'utilizzo dei grafici, ossia come varia la tangente considerando l'angolo nei quattro quadranti, viene proposta un'osservazione.

Osservazione 9. A differenza delle funzioni seno e coseno, la funzione tangente può assumere qualunque valore reale. Il suo codominio è quindi $\mathbb{R}$, mentre il suo campo di esistenza è $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Attraverso una figura, viene fatto vedere che $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ e quindi la tangente è una funzione dispari.

Dopo aver costruito il grafico della tangente, come fatto precedentemente per il seno e il coseno, viene fatto notare allo studente che man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ il valore della tangente tende a $+\infty$ o a $-\infty$, rispettivamente per valori minori e maggiori di $\frac{\pi}{2}$.
Anche in questo caso, grazie all'aiuto dei grafici, si è giunti a questo risultato. Credo che per gli studenti sia più utile questa presentazione rispetto a quella fatta nel libro precedente, nella quale veniva presentata una dimostrazione

molto lunga e difficile.
Viene inserito ora il primo collegamento tra le funzioni goniometriche e la geometria analitica; viene dato il significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta.
Tracciamo la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y = mx$, da cui si ottiene $m = \frac{y}{x}$. In particolare, se $x = 1$ e $y = \tan\alpha$, si ha $m = \tan\alpha$.
Il coefficiente angolare della retta è uguale alla tangente dell'angolo fra la retta e l'asse x.
Dalla geometria analitica sappiamo che due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare e che esse formano angoli congruenti con l'asse x.
Ciò permette di estendere il risultato ottenuto anche a rette che non passano per l'origine.

In tutta la presentazione della tangente, non viene detto che la tangente è data dal rapporto tra il seno e il coseno anche se è vero che, per la definizione data, si può arrivare a questo risultato. In questo libro, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ viene presentata come la seconda relazione fondamentale della goniometria: la tangente di un angolo è data dal rapporto, quando esiste, fra il seno e il coseno dello stesso angolo.

3.4 La funzione cotangente

Definizione 3.5. Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica. Definiamo cotangente di α la funzione che associa ad α il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto B: $\cot\alpha = \frac{x_B}{y_B}$.

Analogamente a quanto fatto per la tangente, viene presentato un altro modo per definire la cotangente, viene studiato il codominio e il campo di esistenza, il grafico e il periodo. Questa funzione è trattata in maniera più sintetica rispetto alle altre, forse anche perché meno utilizzata.

Come fatto nel libro analizzato in precedenza, vengono ora calcolate le funzioni goniometriche di alcuni angoli notevoli: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$.

3.5 Le funzioni goniometriche inverse

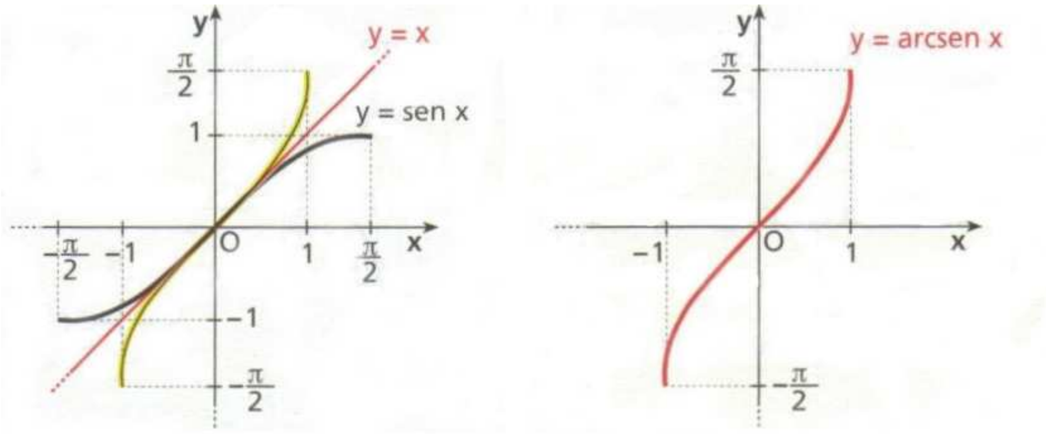
LA FUNZIONE INVERSA DI $y = \sin x$

Una funzione è invertibile, ossia ammette funzione inversa solo se è biiettiva. La funzione $y = \sin x$ non è biiettiva perché non è iniettiva[2]. Infatti, se consideriamo una retta $y = k$, parallela all'asse x, con $-1 \leq k \leq 1$, essa interseca il grafico della funzione seno in infiniti punti, quindi ogni valore del codominio [-1,1] di $y = \sin x$ è il corrispondente di infiniti valori del dominio $\mathbb{R}$.
Se restringiamo il dominio della funzione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione $y = \sin x$ risulta biiettiva e dunque invertibile. La funzione inversa del seno si chiama arcoseno.

Definizione 3.6. Dati i numeri reali x e y, con $-1 \leq x \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'arcoseno di x se x è il seno di y. Lo indichiamo con $y = \arcsin x$.

Per ottenere il grafico della funzione $y = \arcsin x$, basta costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante del grafico della funzione $y = \sin x$, considerata nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

[2]In verità la funzione seno è definita da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ e quindi non è neanche suriettiva. Poiché $-1 \leq \sin x \leq 1$, possiamo restringere il codominio all'immagine della funzione seno([-1,1]). Sembra quindi che si possa ridefinire la funzione restringendo il codominio all'immagine e quindi sembra che queste due nozioni vengano fatte coincidere.



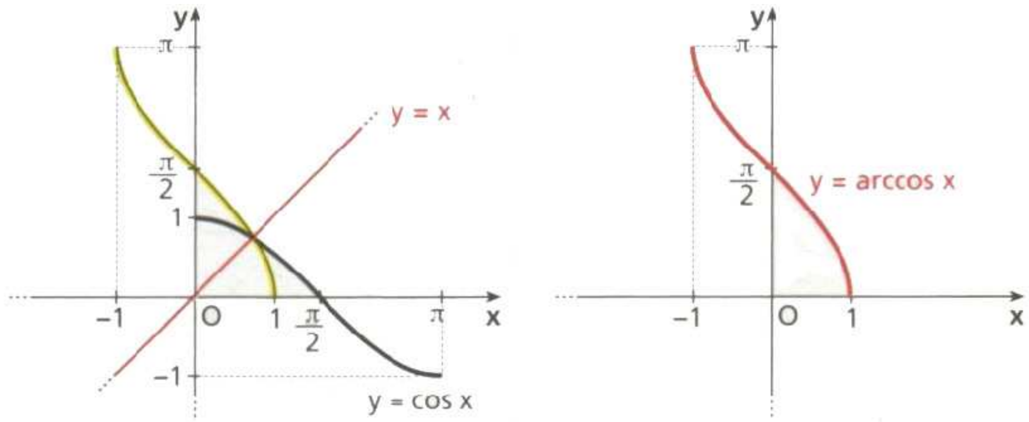
Esempio 3.1. $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Le considerazione fatte per la funzione inversa di $y = \sin x$ valgono anche per le funzioni inverse delle altre funzioni goniometriche.

LA FUNZIONE INVERSA DI $y = \cos x$

La funzione inversa del coseno si chiama arcocoseno.

Definizione 3.7. Dati i numeri reali x e y, con $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \pi$, diciamo che y è l'arcocoseno di x se x è il coseno di y. Lo indichiamo con $y = \arccos x$.

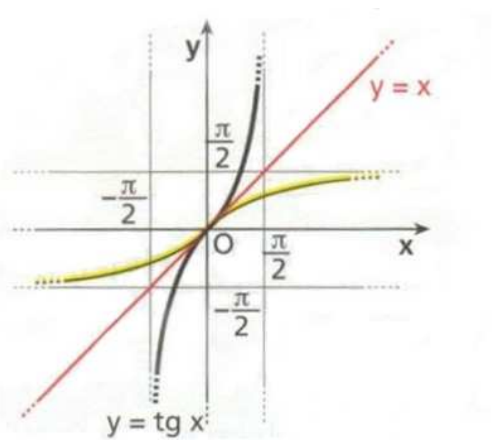


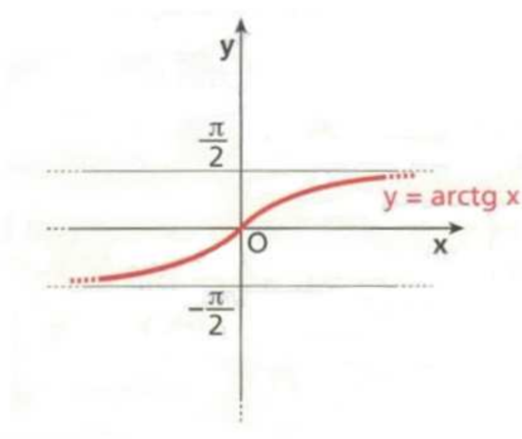
Esempio 3.2. $\arccos(-1) = \pi \leftrightarrow \cos\pi = -1$; $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6} \leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{6} = $ $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

LA FUNZIONE INVERSA DI $y = \tan x$

La funzione inversa della tangente si chiama arcotangente.

Definizione 3.8. Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'arcotangente di x se x è la tangente di y. Lo indichiamo con $y = \arctan x$.





Esempio 3.3. $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4} \leftrightarrow \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$; $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} \leftrightarrow \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Possiamo notare come non venga spiegato il motivo per cui per ottenere il grafico di una funzione inversa basti costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante; la spiegazione è semplice e ben comprensibile ed è possibile notare un collegamento con la geometria analitica. Infatti, se f è invertibile, allora i punti del tipo $y = f^{-1}(x)$, cioè il grafico dell'inversa, sono gli stessi che soddisfano la condizione $x = f(y)$. Questa è identica alla condizione $y = f(x)$ che definisce il grafico di f, eccetto che i ruoli di x e y sono invertiti. Questo vuol dire che il grafico di f^{-1} si ottiene scambiando la posizione dei due assi o, equivalentemente, riflettendo il grafico di f attraverso la retta $y = x$ (la bisettrice del 1° e 3° quadrante).

Non si trovano accenni alle espressioni delle funzioni goniometriche di un angolo orientato mediante una sola di esse e quindi di conseguenza non viene introdotta la relazione $\frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, importante nelle derivate e negli integrali.
E' importante notare come non venga fatto alcun accenno agli integrali; la funzione arcotangente la si ritrova molte volte nella risoluzione degli integrali delle funzioni razionali fratte. Si può pensare però ragionevolmente che questo collegamento non sia stato fatto in quanto gli studenti non conoscono ancora le derivate.
Gli autori potevano però evidenziare queste considerazioni in modo che gli studenti capissero l'importanza di alcune funzioni o relazioni che poi ritroveranno nel corso degli studi; è anche vero che il professore può sopperire a queste mancanze visto che il mondo della scuola secondaria si basa molto sulla spiegazione del professore e sugli appunti presi in classe. I libri devono però aiutare i professori, soprattutto quelli che sono all'inizio della loro carriera scolastica, nell'impostare le lezioni, visto che il mondo universitario è molto differente.

Nella seconda unità vengono introdotte le formule goniometriche. Sono definiti gli angoli associati, le formule di sottrazione e di addizione, le formule di duplicazione, le formule di prostaferesi e di Werner.
Il metodo di introduzione di queste formule è simile a quello che si trova nel libro precedentemente analizzato, ma è possibile notare una sostanziale differenza: vengono inseriti collegamenti con la geometria analitica. In questo modo, lo studente inizia ad entrare nell'ottica matematica e inizia a comprendere come la matematica è tutta collegata e quindi non è possibile resettare totalmente la mente dopo un compito in classe.

3.6 Le formule di addizione e sottrazione

Dopo essere stati trovati i valori delle formule di addizione e sottrazione, vengono introdotti l'angolo tra due rette e il coefficiente angolare di rette perpendicolari.

L'ANGOLO TRA DUE RETTE

Consideriamo nel piano cartesiano due rette r ed s incidenti, di equazioni: $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$.
Sappiamo che $m = \tan\alpha$ e $m' = \tan\beta$, dove α e β sono gli angoli che le rette formano con l'asse x (fig. 4.3).

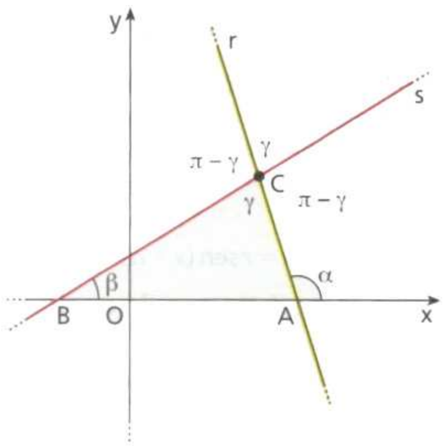


Figura 4.3

Vogliamo trovare l'angolo γ formato dalle due rette. Poiché α è angolo esterno al triangolo ABC:

$$\alpha = \beta + \gamma \rightarrow \gamma = \alpha - \beta \text{ da cui:}$$
$$\tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Se il valore della tangente è positivo, l'angolo γ è l'angolo acuto fra le due rette, altrimenti l'angolo γ è l'angolo ottuso.

Esempio 3.4. Determinare l'angolo tra le rette di equazione $y = 2x + 4$ e $y = -3x + 2$:

$\tan\gamma = \dfrac{2+3}{1-6} = -1 \rightarrow \gamma = \dfrac{3}{4}\pi.$

Gli angoli fra le due rette sono $\dfrac{3}{4}\pi$ e $\pi - \dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{\pi}{4}$.

IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI RETTE PERPENDICOLARI

Consideriamo r_1 e r_2 due rette fra loro perpendicolari e indichiamo con α_1 e α_2 gli angoli che esse formano col semiasse positivo delle x (fig. 4.4).

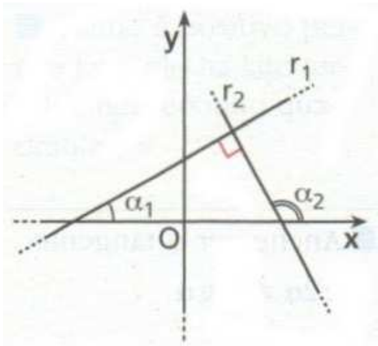


Figura 4.4

Poiché l'angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni, non adiacenti ad esso, possiamo scrivere:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \text{ da cui si ha:}$$
$$\tan\alpha_2 = \tan\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\alpha_1 = -\frac{1}{\tan\alpha_1}$$

Poiché $m = \tan\alpha$, ritroviamo la condizione nota di perpendicolarità fra i coefficienti angolari: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$.

Due rette [3]sono perpendicolari quando hanno il coefficiente angolare uno opposto del reciproco dell'altro.

[3]Si noti che le rette non devono essere parallele agli assi.

Capitolo 4

Le funzioni circolari nell'ambito universitario

4.1 La funzione esponenziale immaginaria e^{iy}

In questo paragrafo, si vogliono definire le funzioni circolari seno e coseno in maniera differente; verranno definite come serie di potenze e attraverso lo studio nel piano complesso verranno dimostrate alcune proprietà già viste in precedenza.

Definizione 4.1. $\forall z \in \mathbb{C}$ si pone $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ e $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
La definizione data ha senso poiché le due serie hanno raggio di convergenza pari a $+\infty$.

Proposizione 4.1.1. *Su* $\mathbb{C}$ *vale* $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. *Questa formula si chiama formula di Eulero.*

Osservazione 10. Dalla definizione data si ricava che il coseno è una funzione pari, ossia $\cos z = \cos(-z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, e il seno è una funzione dispari, ossia $\sin(-z) = -\sin z$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Ricaviamo ora le formule di addizione del seno e del coseno.

Osservazione 11. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ vale
$\cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$
$\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z$

Dimostrazione. $e^{(w+z)} = e^{iw}e^{iz} = (\cos w + i \sin w)(\cos z + i \sin z) = (\cos w \cos z -$
$- \sin w \sin z) + i(\sin w \cos z + \cos w \sin z)$ □

Analogamente si ricavano le formule di sottrazione del seno e del coseno e, ponendo $w = z$, si ricavano le formule di duplicazione.
Studiamo ora la funzione esponenziale immaginaria e^{iy}, con y reale. Nella dimostrazione di un teorema dimostreremo come variano il seno e il coseno e la loro periodicità.
L'espansione in serie di potenze di e^{iy} mostra che e^{-iy} è il coniugato complesso di e^{iy}; tuttavia, $e^{iy} \cdot e^{-iy}$ è il quadrato del modulo di e^{iy} e questo prodotto è uguale a 1. Si ha dunque $|e^{iy}| = 1$.
Si nota che, nella rappresentazione del piano di Argand del campo complesso $\mathbb{C}$, il punto e^{iy} sta sulla circonferenza unitaria, che è il luogo dei punti i quali hanno distanza pari a 1 dall'origine.
I numeri complessi u, tali che $|u| = 1$, formano un gruppo moltiplicativo U; su U è definita una struttura di gruppo moltiplicativo($e^{iy}e^{iy'}$=$e^{i(y+y')}$) e l'applicazione $y \longmapsto e^{iy}$ è un omomorfismo di gruppi dal gruppo additivo reale al gruppo moltiplicativo U.

Teorema 4.1.2. *L'omomorfismo $y \longmapsto e^{iy}$ mappa $\mathbb{R}$ in U, e il suo nucleo (sottogruppo formato dagli y tali che $e^{iy} = 1$, l'elemento neutro di U) è composto da tutti i multipli interi di un certo numero reale > 0. Per definizione, questo numero sarà denominato 2π.*

Dimostrazione. Per la formula di Eulero, si ha $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, che definisce due funzioni reali $\cos y$ e $\sin y$, tali che $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$. Dobbiamo studiare come variano queste due funzioni. Poiché $\frac{d}{dy}(e^{iy}) = ie^{iy}$, separando la parte reale ed immaginaria si ottiene:

$$\frac{d}{dy}(\cos y) = -\sin y, \; \frac{d}{dy}(\sin y) = \cos y.$$

Quando $y = 0$, $\cos y$ è uguale a 1; poiché il coseno è una funzione continua, allora esiste un $y_0 > 0$ tale che $\cos y > 0$ per $0 \leq y \leq y_0$. Quindi $\sin y$, la cui derivata è $\cos y$, è una funzione strettamente crescente nell'intervallo $[0, y_0]$. Poniamo $\sin y_0 = a > 0$.

Dimostriamo ora che il $\cos y$ si annulla per un certo valore di $y > 0$. Supponiamo infatti che il $\cos y > 0$ per $y_0 \leq y \leq y_1$; si ha

$$\cos y_1 - \cos y_0 = -\int_{y_0}^{y_1} \sin y dy. \tag{4.1}$$

Tuttavia, $\sin y \geq a$, perché $\sin y$ è una funzione crescente nell'intervallo $[y_0, y_1]$, in cui la sua derivata > 0, pertanto

$$\textstyle\int_{y_0}^{y_1} \sin y dy \geq a(y_1 - y_0)$$

Sostituendo questa disuguaglianza nella 4.1 e, notando che $\cos y_1 > 0$, si ottiene

$$y_1 - y_0 < \frac{1}{a} \cos y_0.$$

Questo prova che $\cos y$ si annulla nell'intervallo $\left[y_0, y_0 + \frac{1}{a}\cos y_0\right]$. Sia $\frac{\pi}{2}$ il più piccolo valore di $y > 0$ per il quale $\cos y = 0$; quella appena data è una definizione del numero π.

Nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos y$ decresce strettamente da 1 a 0, e il seno cresce strettamente da 0 a 1; così l'applicazione $y \longmapsto e^{iy}$ è una mappa biettiva dell'intervallo compatto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sull'insieme formato dalle coppie (u, v) appartenenti alla circonferenza unitaria le cui coordinate u e v sono entrambi ≥ 0. Dal teorema topologico su mappe continue, biettive su un compatto è possibile affermare:

Lemma 4.1.3. *La mappa $y \longmapsto e^{iy}$ è un omeomorfismo da $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ al settore della circonferenza unitaria $u^2 + v^2 = 1$, avente $u, v \geq 0$(quadrante positivo).*

Per $\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0$, si ha $e^{iy} = ie^{i(y - \frac{\pi}{2})}$ da cui si deduce facilmente che e^{iy} prende ogni valore complesso di modulo 1 la cui ascissa è ≤ 0 e la cui ordinata è ≥ 0, e prende ogni valore una sola volta.

Si possono dedurre risultati analoghi per gli intervalli $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ e $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.
Così, per $0 \leq y < 2\pi$, e^{iy} prende ogni valore complesso di modulo 1, precisamente una sola volta, dal momento che $e^{2i\pi} = 1$. Pertanto la funzione e^{iy} è periodica di periodo 2π, e l'applicazione $y \longmapsto e^{iy}$ mappa $\mathbb{R}$ su U. $\square$

Abbiamo analizzato lo stretto legame tra l'esponenziale complesso e le funzioni trigonometriche; le funzioni trigonometriche diventano essenziali nell'interpretazione geometrica dell'analisi complessa.
Studiamo ora i punti in cui si annullano seno e coseno. Per la formula di Eulero, si ha:

$$\forall z \in \mathbb{C} \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \tag{4.2}$$

Esempio 4.1. Cerchiamo gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\sin z = 0$.
Per la 4.2, $\sin z = 0 \Longleftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Longleftrightarrow e^{2iz} = 1$.
Questo è equivalente a dire $e^{2iz} = e^{2k\pi i}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Ne segue $2iz = 2k\pi i \Longrightarrow z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Cerchiamo gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\cos z = 0$.
Per la 4.2, $\cos z = 0 \Longleftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Longleftrightarrow e^{2iz} = -1$.
Questo è equivalente a dire $e^{2iz} = e^{(2k+1)\pi i}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Ne segue $2iz = (2k+1)\pi i \Longrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Nei testi per le scuole secondarie, si può trovare una trattazione sulle funzioni circolari simile a quella sopra descritta; soprattutto negli istituti tecnici, nei corsi di elettronica, si può notare l'utilizzo della notazione esponenziale e della trigonometria dei numeri complessi.

4.2 Misura degli angoli

Analizziamo ora il testo "NOTE DI ALGEBRA" redatto dal professor Angelo Vistoli. Le funzioni circolari seno e coseno sono introdotte nel para-

grafo in cui si tratta della misura dell'angolo; possiamo notare come si consegua allo stesso risultato ottenuto studiando la funzione esponenziale e^{iy}, dimostrando che esiste una biezione tra $\mathbb{R}/2\pi$ e la circonferenza unitaria.
L'angolo è un punto sulla circonferenza di raggio 1 e con centro l'origine nel piano cartesiano; si vuole misurare tale angolo, ovvero attribuire ad esso un numero reale θ, che sarà la sua misura in radianti.
Prima di definire le funzioni seno e coseno, viene proposta una trattazione sulle classi di equivalenza; infatti si nota che la misura dell'angolo è definta a meno di un multiplo di 2π.
La relazione di congruenza modulo 2π è una relazione di equivalenza e questo risultato è facilmente dimostrabile. Si considerino le classi di equivalenza per questa relazione; se x è un numero reale, la classe di equivalenza contenente x è $[x] = \{y \in \mathbb{R} | y \equiv x(mod 2\pi)\} = \{x + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$.
Notiamo che per ogni numero reale x esiste un unico y tale che $0 \leq y < 2\pi$ e $x \equiv y(mod 2\pi)$. Denotiamo l'insieme delle classi d'equivalenza con $\mathbb{R}/2\pi$.
Se x è un numero reale e k è un intero, si ha che $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ e $\sin(x+2\pi k) = \sin x$. Possiamo quindi definire il seno e il coseno di $\theta \in \mathbb{R}/2\pi$ mediante le formule $\cos\theta = \cos x$ e $\sin\theta = \sin x$, dove x è un qualsiasi numero reale tale che $\theta = [x]$.
Se x e y sono numeri reali con $(\cos x, \sin x) = (\cos y, \sin y)$, allora $x \equiv y$ $(mod 2\pi)$. Ne segue che se θ_1 e θ_2 sono in $\mathbb{R}/2\pi$ e $(\cos\theta_1, \sin\theta_1) = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$, allora $\theta_1 = \theta_2$. E' anche vero che dato un punto P=(a,b) sulla circonferenza unitaria, in modo tale che le coordinate soddisfino l'equazione $a^2 + b^2 = 1$, esiste una classe θ in $\mathbb{R}/2\pi$ tale che $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$. In termini di teoria degli insiemi, la funzione che da $\mathbb{R}/2\pi$ alla circonferenza unitaria che manda θ in $(\cos\theta, \sin\theta)$ è una biezione.

Capitolo 5

Grafici delle funzioni circolari

Costruiamo i grafici delle funzioni circolari, utilizzando i software matematici Cabri II Plus e Mathematica; attraverso il primo software si costruiscono i grafici passo per passo, mentre con il secondo basta scrivere un comando e il grafico viene disegnato automaticamente.
Nella costruzione dei grafici utilizzando Cabri, si nota la stretta relazione tra la circonferenza goniometrica e le funzioni circolari; come vedremo il grafico sarà simile al grafico delle funzioni seno e coseno che abbiamo visto nel secondo libro analizzato. D'altra parte, con Mathematica, è possibile scegliere l'intervallo in cui costruire la funzione scelta; è interessante notare per la tangente come, dando un intervallo molto grande, non si noti più molto bene l'asintoto verticale e sembra che la tangente sia una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Non è possibile però avere nel grafico, nell'asse delle x, i valori in radianti.

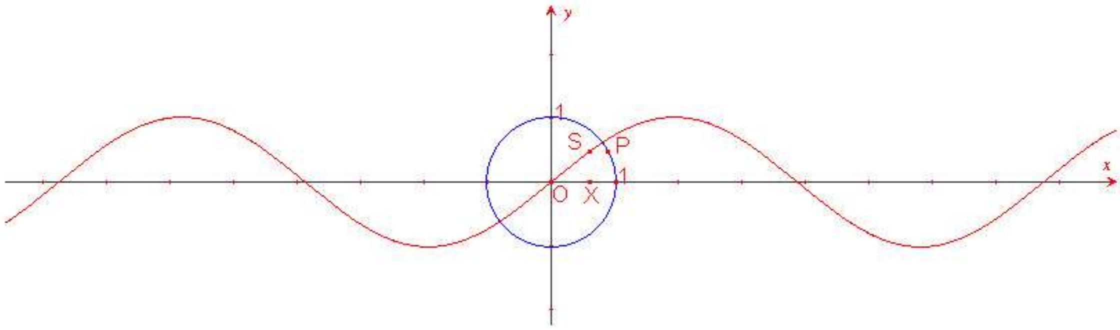
5.1 Grafici delle funzioni circolari disegnati con Cabri

Ricordiamo che, considerata sul piano cartesiano la circonferenza goniometrica ed un angolo α con vertice nell'origine degli assi e il primo lato sull'asse delle ascisse positive, possiamo dire che l'ordinata del punto di in-

tersezione del secondo lato con α rappresenta $\sin\alpha$, mentre l'ascissa del punto rappresenta $\cos\alpha$.
Tracciamo ora il grafico della funzione $y = \sin x$. Descriviamo tutti gli step per costruire il grafico della funzione seno.

- **Mostra gli assi**
- **Circonferenza** di centro O e passante per (1, 0)
- **Punto su una retta**: fissiamo un punto sull'asse x, che chiamiamo X
- Chiediamo le **coordinate** di X.
  L'ascissa di X rappresenta la misura in radianti dell'angolo x; ora dobbiamo riportarla sulla circonferenza, a partire da (1, 0):
- **trasporto di misura**: bisogna cliccare sull'ascissa di X, poi sul punto (1, 0) e sulla circonferenza.
  Otteniamo un punto P sulla circonferenza; la semiretta OP è il secondo lato dell'angolo x e l'ordinata di P è $\sin x$. Perciò bisigna disegnare:
- **retta parallela** all'asse x e passante per P,
- **retta parallela** all'asse y e passante per X,
- **intersezione tra** queste due rette: ottengo un punto S che ha per ascissa la misura dell'angolo in radianti e per ordinata il seno dell'angolo (nascondere le rette attraverso il comando **Mostra/Nascondi**)
- **luogo** generato da S al variare di X.

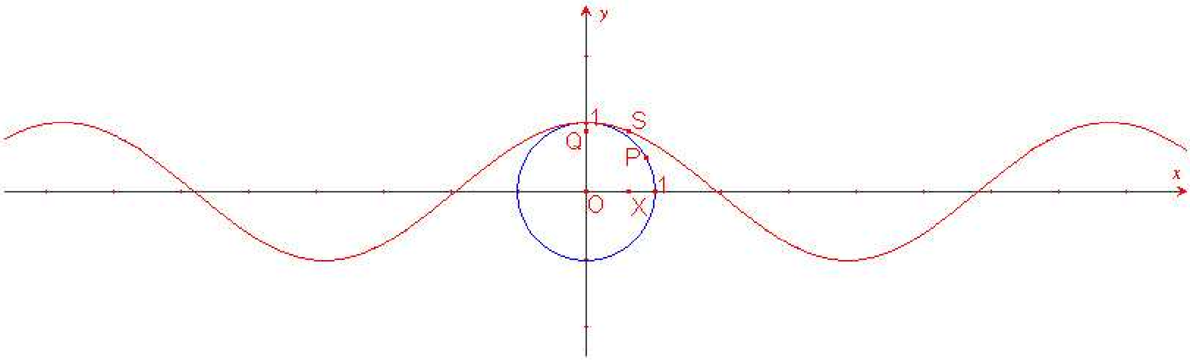
Ecco il grafico della funzione $y = \sin x$.



Costruiamo, in modo analogo a quanto fatto precedentemente per la funzione seno, il grafico della funzione $y = \cos x$.

- **Mostra gli assi**
- **Circonferenza** di centro O e passante per (1, 0)
- fissare **un punto X sull'asse x**, la cui ascissa rappresenta la misura in radianti dell'angolo e poi
- **trasportarne l'ascissa** sulla circonferenza a partire da (1, 0). Analogamente a quanto fatto per il seno troviamo un punto P sulla circonferenza unitaria. Dobbiamo ora
- attraverso il comando **trasporto di misura**, trasportare sull'asse y l'ascissa di P, ottenendo un punto Q.
- Tracciare le **rette parallele** agli assi rispettivamente per il punto Q e per X,
- cercarne l'**intersezione** e infine
- chiedere il luogo generato da S al variare di X.

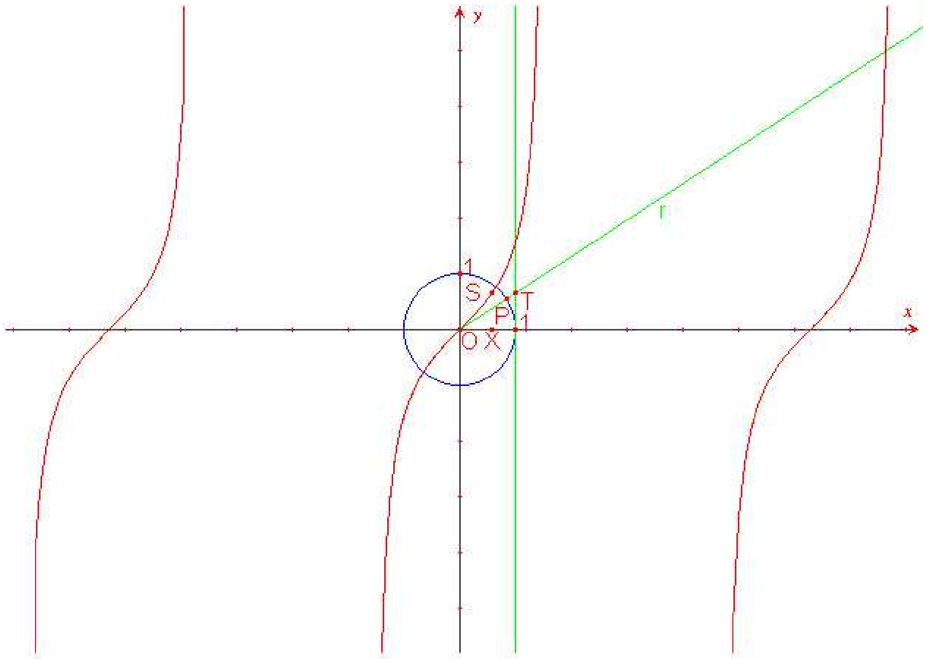
Ecco il grafico della funzione $y = \cos x$.



Costruiamo ora il grafico della funzione $y = \tan x$.

- **Mostra gli assi**
- **Circonferenza** di centro O e passante per (1, 0)
- Fissare **un punto X sull'asse x**, la cui ascissa rappresenta la misura in radianti dell'angolo e poi
- **trasportarne l'ascissa** sulla circonferenza a partire da (1, 0).
- Tracciare una **retta parallela** all'asse y e passante per il punto (1,0);
- disegnrae una **semiretta** avente come origine l'origine degli assi in modo che tagli il primo quadrante.
- Trovare il punto di **intersezione tra** la semiretta r e la retta parallela all'asse y; si chiami tale punto T.
- Tracciare le **rette parallele** agli assi rispettivamente per il punto T e per X,
- cercarne l'**intersezione** e infine
- chiedere il luogo generato da S al variare di X.

Ecco il grafico della funzione $y = \tan x$.



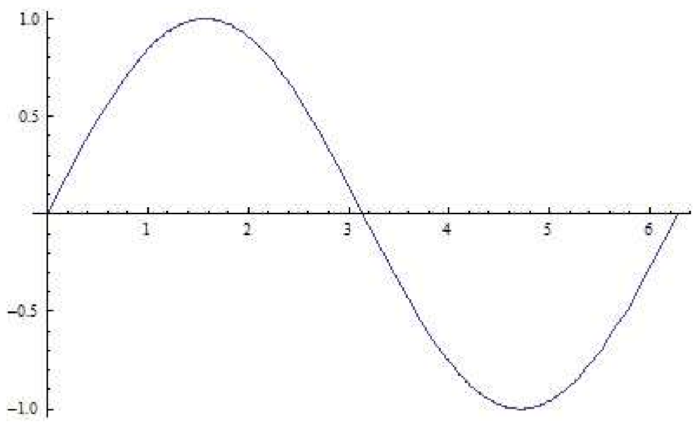
Nella costruzione di questi tre grafici, si può notare come, muovendo sull'asse delle x il punto X, il punto P si muove sulla circonferenza unitaria mentre il punto S descrivere il grafico della funzione cercata; dunque, si può notare la stretta correlazione tra la circonferenza goniometrica e le funzioni circolari, come si è visto nei primi capitoli.

5.2 Grafici delle funzioni circolari disegnati con Mathematica

E' molto più facile creare i grafici delle funzioni circolari utilizzando il software Mathematica; infatti, è necessario scrivere un unico comando e verrà disegnato il grafico richiesto.
Nella costruzione dei grafici del seno e del coseno si è deciso di mostrare il grafico nell'intervallo $[0, 2\pi]$, in quanto essendo funzioni continue periodiche di periodo 2π il grafico si ripeterà all'infinito; per quanto riguarda la tangente è, invece, più importante far vedere vari rami che formano tale funzione, in

modo che si capisca bene come varia.
Mathematica riconosce i valori in radianti, senza però disegnare tali valori negli assi cartesiani, dove troveremo solo numeri interi.
Ecco i grafici delle funzioni seno e coseno e i rispettivi comandi necessari per disegnarli.

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}]
```

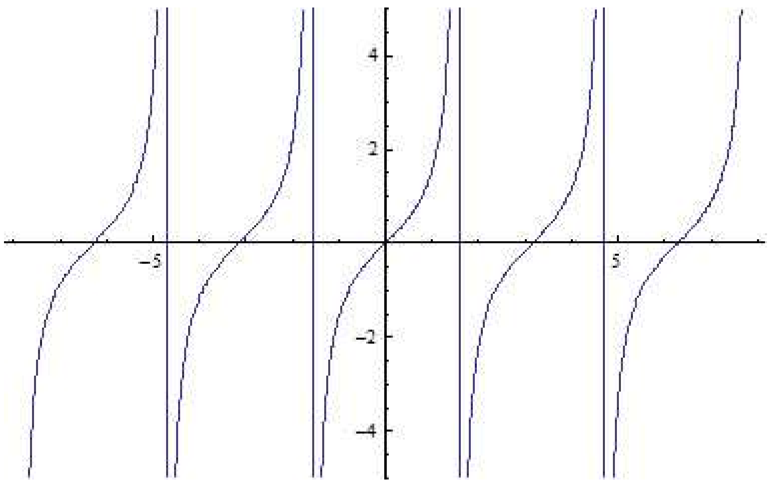


E' possibile notare come il grafico del seno non siano proprio corretto; infatti, $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, quindi il grafico è dimetrico; se il grafico viene reso monometrico è molto più schiacciato.
Lo stesso problema si avrà nella visualizzazione del grafico della funzione coseno, il quale è, anch'esso, dimetrico.
E' necessario, dunque, fare molta attenzione quanto si vogliono creare i grafici delle funzioni circolari, poiché non sempre i software matematici sono precisi.

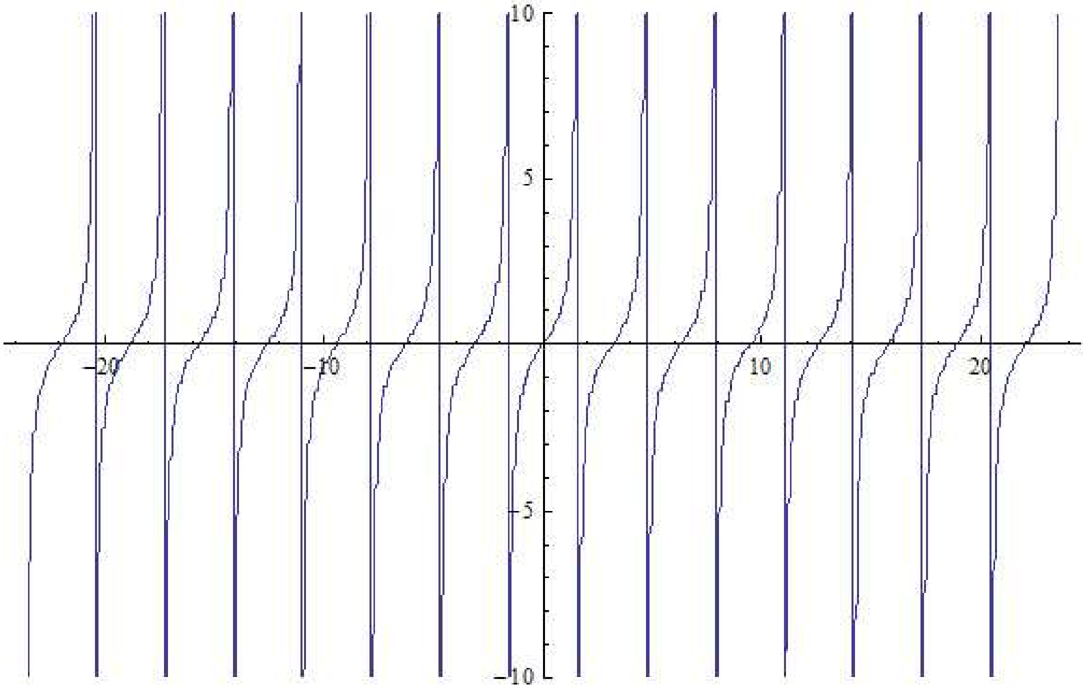
```
Plot[Cos[x], {x, 0, 2 Pi}]
```

Per quanto riguarda la funzione tangente, per quanto visto, il codominio della tangente è tutto $\mathbb{R}$ e per disegnare il grafico è stato necessario restringere il codominio. Nelle due seguenti immagini vengono scelti due intervalli differenti; il primo grafico mostra che la tangente non è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ ma lo è solo in alcuni intervalli, mentre nella seconda immagine si può notare come, prendendo un intervallo più grande, in alcuni intervalli non si noti più la distinzione tra il ramo della funzione tangente e l'asintoto verticale.
Vengono ora mostrate le figure sopra descritte con il rispettivo comando utilizzato per disegnarle in modo che si possa capire l'intervallo che è stato scelto.

```
Plot[Tan[x], {x, -5*Pi/2, 5*Pi/2}, PlotRange → {-5, 5}]
```



```
Plot[Tan[x], {x, -15*Pi/2, 15*Pi/2}, PlotRange→{-10, 10}]
```



Nella seconda immagine, non vi è precisione nella costruzione dei grafici, ma è possibile comprendere che, considerando un intervallo molto grande, la tangente tenda sempre più all'asintoto verticale e quindi non venga osservato che, in realtà, l'asintoto verticale identifica una parte di piano in cui la tangente non è definita e sembra che faccia parte della funzione.

Nella costruzione del grafico con Cabri, questo problema non è sorto, poiché l'asintoto verticale non viene disegnato, in quanto con il comando luogo viene disegnato il luogo dei punti che descrivono la funzione tangente, e l'asintoto verticale non ne fa parte.

Bibliografia

[1] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Corso base blu di matematica 4*, Zanichelli, 2001.

[2] H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover Publications, 1995.

[3] E. Lanconelli, *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 1*, Pitagora Editrice Bologna, 1998.

[4] A. Vistoli, *NOTE DI ALGEBRA*, Bologna 1993/94.

[5] G. Zwirner, L. Scaglianti, *Funzioni in* $\mathbb{R}$*, ANALITICITA' E TRIGONOMETRIA 1A*, Cedam, 1998.