Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Storia del calcolo differenziale e la disputa tra Leibniz e Newton

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Giorgia Lari

Seconda sessione
Anno Accademico 2016-2017

Introduzione

In questa tesi racconto la storia della nascita del calcolo infinitesimale: parto dalle opere di Archimede, nelle quali, per la prima volta, viene trattato il problema del calcolo delle aree delle figure piane e dei volumi solidi, e arrivo fino alla disputa tra Leibniz e Newton.
Nel **capitolo** 1 mostro come Archimede ha calcolato l'area di due particolari figure (una ottenuta facendo ruotare, attorno all'asse, un segmento di paraboloide e l'altra facendo ruotare, attorno all'asse, un segmento di elissoide), utilizzando un procedimento che è simile a quello utilizzato, oggi, per definire la nozione di integrale.
Dopo la morte di Archimede non viene fatto nessun progresso sostanziale, in questa direzione, fino a dopo il Medioevo.
Con la nascita della stampa, nel Rinascimento, vengono tradotte in latino e diffuse alcune sue opere. Per esempio, Federico Commandino oltre ad arricchire di commenti la traduzione prosegue le ricerche; anche Luca Valerio e Galileo affrontano questi problemi. Nel 1615 Keplero pubblica la *Nova stereometria doliorum vinarium* ed è la prima opera dove si abbandonano i metodi archimedei per la determinazione di aree e volumi. Sempre nello stesso periodo, vi fu un altro matematico che svolse lunghi studi sempre a riguardo di questo argomento: Bonaventura Cavalieri. Mentre Evangelista Torricelli, attraverso il metodo degli indivisibili rettilinei, riesce a sistematizzare il calcolo rendendolo più affidabile. Tutto questo viene raccontato nel **capitolo** 2.
Dal 1630 fino alla fine del secolo $XVII$, si ha uno dei periodi più fecondi per lo sviluppo della matematica: in particolare per quanto riguarda il calcolo integrale. Infatti, oltre a Torricelli, anche altri due matematici francesi (Fermat e Pascal) e la scuola inglese con John Wallis portano nuovi contributi all'argomento (**capitolo** 3).
Fino al $XVII$ secolo si sono utilizzati metodi molto laboriosi per determinare aree e volumi: ogni nuovo problema di quadratura esigeva la scoperta di un nuovo artificio.
Nel **capitolo** 4 mostro come intorno al 1640 inizia a farsi largo di quella che

oggi si chiama derivazione. Sono due le origini della derivata: geometrica (il problema delle tangenti), con Descartes e Fermat, e meccanica (la determinazione della velocità di un moto vario), con Galileo, Torricelli e Barrow.
Il **capitolo** 5 è dedicato all'inglese Isaac Newton. Newton non pubblicò niente fino alla seconda metà degli anni ottanta. In questo capitolo analizzo il metodo delle flussioni che si estende in tre trattati: *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, *Tractus de quadratura curvarum*. Analizzo, anche, la prima espansione del metodo delle flussioni che Newton abbia mai pubblicato che apparve nella prima edizione dei *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687): i tratta del più importante trattato scientifico.
Il **capitolo** 6 ha come protagonista Leibniz che dal canto suo si avvicinò più tardi a questo genere di matematica, ovvero quando ebbe l'opportunità di entrare in contatto con la comunità scientifica di Parigi e Londra, ed entrare a far parte della Royal Society. In particolare, analizzo una sua opera *Nuovo metodo per trovare i massimi e minimi, e anche le tangenti, non ostacolano da quantità frazionarie e irrazionali e un unico genere di calcolo per quei problemi* (*Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*), che si trova negli Acta Eruditorum del 1684.
Nel **capitolo** 7 ho trattato della disputa tra Leibniz e Newton, che può essere suddivisa in tre atti:

- il matematico inglese John Wallis recupera le lettere scambiate tra Leibniz e Newton nel 1676, accusando il tedesco di aver da allora plagiato il calcolo infinitesimale di Newton;

- dopo un tentativo fallito da parte dei sostenitori di Leibniz di screditare le capacità matematiche di Newton, il tedesco viene duramente attaccato da un articolo scritto da Nicolas Fatio de Duillier;

- ben più serio dell'attacco portato da Fatio de Duillier fu quello di John Keill. Questa volta Leibniz non potè trovare una difesa efficace, nonostante arrivasse ad appellarsi alla Royal Society, nella figura del segretario Hans Sloane.

L'ultimo capitolo, **capitolo** 8, è dedicato a due considerazioni sulla disputa: la prima riguarda gli anni tra i primi studi di Newton sul metodo delle flussioni e la prima pubblicazione di Leibniz sul calcolo differenziale, mentre la seconda riguarda il periodo successivo alla morte di Newton fino ai giorni nostra.

Nella tesi ho anche inserito due appendici: in una approfondisco il metodo di esausione, mentre nell'altra come Newton ha ottenuto la formula del binomio.

Indice

Capitolo 1

Archimede e suoi predecessori

[1]I due grandi capitoli dell'Analisi infinitesimale sono costituiti dal calcolo integrale e dal calcolo differenziale.
Per rintracciare le origini del calcolo integrale bisogna risalire fino ai geometri greci (400 a.C.) i quali, nella ricerca di aree e volumi, seppero ottenere risultati ammirevoli. Integrare, infatti, significa determinare un'area. In termini moderni si integra generalmente una funzione, ma in antichità le funzioni non esistevano e i problemi di integrazione erano di natura squisitamente geometrica. Geometria e funzioni, apparentemente concetti distaccati, hanno generato ed adottato lo stesso metodo di analisi che ha superato indenne quasi tremila anni di storia.
Archimede fu il primo ad affrontare problemi geometrici applicando nozioni di meccanica e di statica, riuscendo addirittura a costruire un metodo che anticipava di ben diciotto secoli il calcolo integrale. È significativo che il re dei matematici, Karl Friedrich Gauss, abbia ricevuto il testimone dell'analisi infinitesimale non da un suo contemporaneo, ma da un uomo vissuto ben diciotto secoli prima e giustamente considerato come il re della matematica antica.
Il procedimento adottato nell'antichità parte da un sistema di analisi infinitesimale chiamato *metodo di esaustione*. Euclide attraverso questo metodo riuscì a trovare aree o volumi di regioni curve mediante approssimazioni successive, con l'uso di poligoni inscritti e circoscritti (o poliedri) dei quali le aree (o volumi) erano note[2].
Successivamente si passò a superfici curve non approssimabili con poligoni

[1]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [2], [5] e [9].

[2]Per maggiori dettagli sul *metodo di esaustione* si veda *Appendice 1*, dove viene anche riportata l'applicazione del metodo di Euclide.

regolari. Il problema divenne la suddivisione di tali superfici mediante i suddetti rettangolini che la approssimassero sempre meglio.
Sulla stessa strada del metodo di esaustione, ma con superfici curve più complesse, si mosse Archimede che fu il primo ad avere una chiarissima idea di integrale definito, idea che verrà ripresa e sviluppata dagli scienziati del Rinascimento.

1.1 Archimede

Archimede, matematico, fisico e fondatore della statica razionale, nacque a Siracusa verso il 287 a.C. e morì nel 212 a.C.. Si occupò principalmente della determinazione di aree, volumi, baricentri di coniche, di quadriche rotonde e di figure con esse formate.
Qui di seguito mostro, attraverso il linguaggio moderno, quei procedimenti di Archimede che hanno esercitato maggiore influenza sui matematici dell'era moderna: segmento di paraboloide rotondo[3] e segmento di ellissoide[4].

1.1.1 Segmento di paraboloide rotondo compreso tra il vertice ed un piano perpendicolare all'asse.

Si considera l'asse $AD = a$ e lo si divida in n parti uguali di lunghezza h, con $h = \frac{a}{n}$, e per i punti di divisione si conducano corde della parabola perpendicolari all'asse. Si traccino, poi, le parallele all'asse con estremi gli estremi delle corde. Si formano così una serie di rettangoli tutti di altezza h e aventi per base le corde, per esempio i rettangoli BEFC e MGHN, come mostra la figura seguente.

[3]Sviluppato nell'opera *Quadratura della parabola*, il titolo di questo trattato è evidentemente spurio, perché ai tempi di Archimede non era ancora stato introdotto il termine "parabola", ma la curva di cui si occupa in questa opera veniva indicata come sezione del cono rettangolo. Archimede per ottenere una parabola interseca un cono rettangolo con un piano perpendicolare ad una generatrice del cono (parlando in termini odierni). Nel testo greco Archimede usa semplicemente $\tau\mu\tilde{\alpha}\mu\alpha$, sezione, per indicare la sezione parabolica.

[4]Per segmento di ellissoide si intende una parte di curva ellissoidale

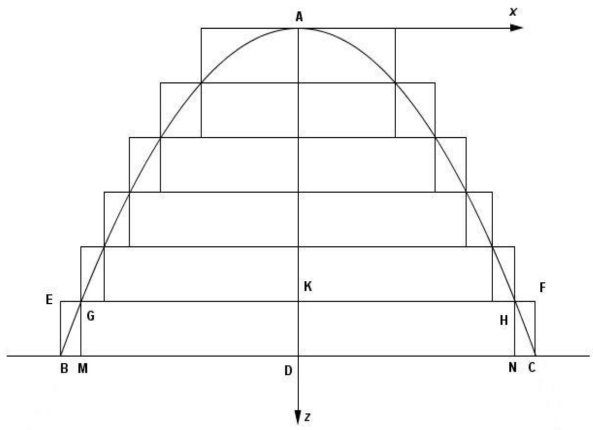


Figura 1.1: Paraboloide

Facendo ruotare la figura intorno all'asse, questi due rettangoli generano due "scatoloidi", composti da due cilindri coassiali: uno scatoloide è circoscritto, l'altro è inscritto nel paraboloide rotondo.
Indicando con S_n e s_n rispettivamente i volumi dei due scatoloidi e con V quello del paraboloide, si può osservare che $s_n < V < S_n$.
Se $z = x^2$ è l'equazione della parabola meridiana e quindi $z = x^2 + y^2$ quella del paraboloide, le basi dei cilindri sono cerchi di aree πh, $2\pi h$, $\ldots$, $n\pi h$. Quindi:

$$s_n = \pi h^2[1 + 2 + \cdots + (n-1)] = \pi \frac{(n-1)n}{2} h^2 = \pi \frac{(n-1)}{2n} a^2,$$

$$S_n = \pi h^2[1 + 2 + \cdots + n] = \pi \frac{(n+1)n}{2} h^2 = \pi \frac{(n+1)}{2n} a^2;$$

la differenza di questi due volumi è $\frac{\pi}{n}a^2$ che può essere trascurabile scegliendo n abbastanza grande. Al crescere di n, s_n e S_n tendono a $\frac{\pi}{n}a^2$ cioè al volume del segmento di paraboloide che come fa osservare Archimede è uguale a $\frac{3}{2}$ del volume del cono avente la stessa altezza a e la stessa base πa del segmento.
Tutto questo in simboli moderni si può così scrivere:

$$V = \pi \int_0^a (x^2 + y^2) dz = \pi \int_0^a z dz = \frac{\pi}{2} a^2.$$

Per la definizione odierna, l'integrale è il limite comune delle due somme (s_n e S_n) ottenute dividendo l'intervallo di integrazione in n parti di lunghezza h.
Si può, così, notare che Archimede utilizza un procedimento che consiste nel

calcolare quell'integrale attraverso la definizione. Si deve tenere conto che Archimede (e come altri filosofi greci) non conosceva ancora il concetto di limite, ma riesce a raggiungere lo stesso risultato mediante il processo di esaustione, ovvero nel seguente modo.
Si suppone che $V \neq \frac{3}{2}$ del volume del cono, cioè da $\frac{\pi}{2}a^2$; per esempio, consideriamo $V < \frac{\pi}{2}a^2$. Sappiamo che, per n tanto grande, $S_n - s_n < \frac{\pi}{2}a^2 - V$ cioè

$$V - s_n < \frac{\pi}{2}a^2 - S_n.$$

Ma cio è assurdo perché, per costruzione, $s_n < V$, mentre

$$S_n = \frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}a^2 > \frac{\pi}{2}a^2.$$

1.1.2 Segmento di ellissoide o iperboloide (a due falde) rotondo.

Si considera sempre la stessa Figura 1.1, ma con un arco di ellisse o iperbole $x^2 = 2pz + mz^2$, allora l'equazione dell'ellissoide rotondo ($m < 0$) o dall'iperboloide rotondo ($m > 0$) sarà $x^2 + y^2 = 2pz + mz^2$. Utilizzando le stesse notazioni di prima per lo scatoloide si ottiene:

$$\begin{aligned} S_n &= \pi h^2[2p(1+2+\ldots+n) + mh(1^2+2^2+\ldots+n^2)] = \\ &= \pi h^2 \left[pn(n+1) + mh\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \\ &= \pi h^2 \left[pn\frac{n+1}{n} + ma\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] \end{aligned}$$

mentre per il volume s_n dello scatoloide inscritto si ha che

$$S_n - s_n = \frac{\pi a^2}{n}(2p + ma)$$

Il volume del solido richiesto è il limite comune di S_n ed s_n:

$$V = \pi a^2\left(p + \frac{ma}{3}\right)$$

che sottoforma di integrale è

$$\int_0^a (2pz + mz^2)dz.$$

A differenza del procedimento di prima, si ha come nuovo il calcolo dell'integrale

$$\int_0^a z^2 dz$$

che sottoforma di termini moderni Archimede lo risolve come

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left(\frac{a^2}{n^2} + 2^2\frac{a^2}{n^2} + \ldots + n^2\frac{a^2}{n^2}\right)$$

e cioè a risolvere la formula della somma dei quadrati dei primi n numeri interi.
Archimede aveva incontrato già in precedenza questa formula quando doveva calcolare l'area limitata da un arco di spirale e da due raggi con la differenza che le coordinate erano polari. É possibile che egli abbia per la prima volta trovato il limite di questa somma paragonando l'espressione del volume di un cono o di una piramide, dedotto mediante il metodo degli scatoloidi, con l'espressione che Euclide ricavò con un altro metodo.
Si può osservare che Archimede ragiona esclusivamente solo su curve o superfici di cui egli possiede la costruzione o definizione precisa. Il processo di "quadratura" che impiega ha una portata molto maggiore dell'uso che ne fa, ma di questa portata egli non parla ed anzi in ciascuno dei problemi da lui trattati egli riprende dall'inizio il procedimento. Inoltre, Archimede applica il metodo di esaustione caso per caso e questo metodo, a differenza del processo di limite, non è un metodo analitico di ricerca che conduca alla scoperta, ma fornisce solo il mezzo di dimostrare per assurdo un risultato che si suppone già noto (come si è visto nel caso del *Segmento di paraboloide*).
Infine, il calcolo dell'integrale $\int_0^a f(x)dx$ come

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left[f\left(\frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \ldots + f(a)\right)\right]$$

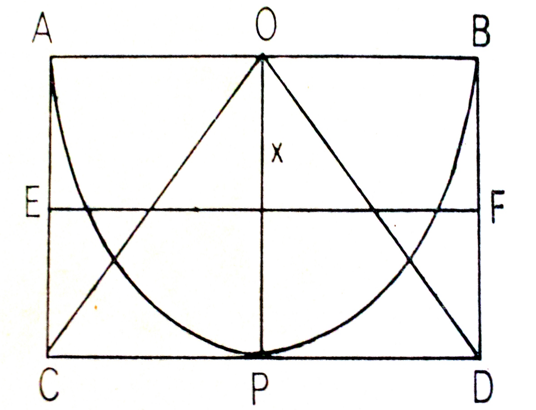
Archimede riusciva a farlo solo per le funzioni più elementari dove la somma tra parentesi si trasformava in una espressione semplice; in effetti, egli adopera solo funzioni x, x^2 e $sen(x)$.
Soltanto nella prima parte del secolo XVII mediante quel procedimento si riesce a calcolare $\int x^\alpha dx$ con α razionale, mentre nella seconda parte dello stesso secolo si risolve l'integrale come operazione inversa della derivazione.

1.2 Commentatori e predecessori di Archimede

Dopo la morte di Archimede, si riesce faticosamente a comprendere e commentare i suoi scritti, ma non viene fatta nessura aggiunta importante ai suoi risultati fino all'era del Medioevo. La fama di Archimede, tuttavia, si trasmette attraverso i secoli grazie agli elogi che scrittori greci e romani fanno delle sue scoperte scientifiche e delle sue invenzioni nel campo della tecnica.
Nel Rinascimento, grazie alla nacita delle stampa, si sono compiute parecchie traduzioni in latino delle sue opere; molte delle quali risalgono alla seconda metà del secolo XV e altre al secolo sucessivo. Tra queste si ricorda quella di Federico Commandino che non si limita ad arricchire di commenti la traduzione, ma, avendo padronanza nei metodi di Archimede, prosegue le ricerche. Per esempio, nella prefazione al *Liber de Centro gravitatis solidorum*[5], Commandino osserva che il siracusano tratta dei baricentri delle figure piane, non delle solide che più interessano. Il Commandino, con procedimenti ispirati ai metodi di Archimede, riesce a determinare il baricentro di diversi solidi e in particolare di un segmento di paraboloide rotondo. Gli stessi problemi vengono affrontati anche da Galileo allo scopo di riparare qualche imperfezione del Commandino ed estendere le proprie ricerche.
Con l'opera di Luca Valerio *Liber de Centro gravitatis solidorum*, pur ispirata ai metodi archimedei, penetrano nella geometria le idee generali di una scienza più giovane, l'algebra, che aveva sin d'allora dimostrato pregi. Infatti, Valerio forse per la prima volta introduce il concetto di curva arbitraria cioè allude ad una curva intuitiva con la restrizione che debba essere immagine di una funzione $y = f(x)$, crescente (o decrescente) in un intervallo, per esempio tra 0 ed a. Valerio vuole calcolare l'area compresa fra la curva, l'asse x e le due ordinate $x = 0$, $x = a$. Perciò divide l'intervallo in n parti, conduce fra i punti di divisione le ordinate e considera i rettangoli che hanno per base l'intervallo $\frac{a}{n}$ e per altezza l'ordinata nell'estremo sinistro o nell'estremo destro di esso. Con questi rettangoli egli forma due figure, una s_n, inscritta, l'altra S_n, circoscritta. L'area è compresa fra s_n ed S_n ed è il limite comune per $n \to \infty$ di s_n ed S_n, perchè $S_n - s_n = \frac{a}{n} f(a)$ può rendersi piccola a piacere. Tutto questo è in sostanza il procedimento che Archimede applicava a curve particolari, ma Valerio lo estende ad una qualsiasi curva continua monotona. Viene fatta questa restrizione perché se la curva si componesse di diversi ar-

[5]Federico Commandino, *Liber de centro gravitatis solidorum*, Bononiae: ex officina Alexandri Banacii, 1565

chi in numero finito, gli uni crescenti gli altri decrescenti, occorrerebbe, per applicare il processo di Archimede, operare separatamente su ogni arco, o scegliere, come si fa nella definizione moderna di integrale secondo Cauchy, in ogni intervallo $\frac{a}{n}$ l'ordinata massima e la minima.
Galileo aveva grandissima stima di Valerio fino a chiamarlo "nuovo Archimede dell'età nostra" e per questo lo coinvolse attraverso il ruolo di un personaggio del Dialogo *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*[6] descrivendo il procedimento per la determinazione del volume di un emisfero. Si considera un emisfero di centro O e raggio r ed il cilindro ad esso circoscritto, compreso fra il piano AB dell'equatore e il piano CD tangente all'emisfero nel polo P; si costruisca, poi, il cono proiettante del centro O la base del cilindro che sta in questo secondo piano.
Allora, attraverso la figura seguente



si vede subito che un piano EF, parallelo alle basi, condotto a distanza x dal centro O, tagli il cilindro, l'emisfero ed il cono lungo tre cerchi di area πr^2, $\pi(r^2 - x^2)$ e πx^2. Dunque $\forall\ x \leq r$, l'area dell'anello compreso tra il cilindro e l'emisfero, è uguale all'area πx^2 del cerchio sezione col cono. Valerio deduce, così, che il volume del solido ottenuto togliendo dal cilindro l'emisfero è uguale al volume del cono; dove si ricava subito il volume dell'emisfero. A Galileo interessa, oltre a questo risultato, il piano mobile EF, l'area della corona circolare compresa fra il cilindro e l'emisfero che è uguale πx^2. Facendo tendere x a zero, il piano mobile tendera a coincidere al piano AB, la corona circolare diventerà il perimetro dell'equatore AB e la sezione del cono si ridurrà al vertice. Si arriverebbe così ad un paradosso: una circonferenza di raggio arbitrariamente grande potesse essere equivalente ad un punto. Dipende dal fatto che lo spessore della corona è un infinitesimo del secondo

[6]Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Ludovico Elzeviro, 1638, Leida - Paesi Bassi.

ordine rispetto al raggio x della sezione del cono, preso come infinitesimo principale. Nel Dialogo, ciò porta ad un dibattito tra gli interlocutori sull'infinito e l'infinitesimo e sulle cautele necessarie per estendere ad essi proprietà valide al finito.

Capitolo 2

Il metodo degli indivisibili: Keplero, Cavalieri e Torricelli

[7]La prima opera, dove si abbandonano i metodi archimedei per la determinazione di aree e volumi, è dovuta a Giovanni Keplero (Johannes von Kepler), nato a Weil der Stadt il 27 dicembre 1571 e morto a Ratisbona il 15 novembre 1630, fu un astronomo, matematico, musicista, alchimista e un teologo evangelico tedesco.
In una sua opera *Nova Stereometria Doliorum*, 1615, Keplero racconta che, da buon capo famiglia, dovendo curare la provvista del vino in un anno di abbondante vendemmia, acquistò diverse botti, la cui capacità fu misurata col procedimento empirico che consisteva nel dedurre il volume dalla lunghezza di un certo diametro valutato introducendo una bacchetta nella botte. Poco persuaso dell'esattezza raggiunta, Keplero intraprese una ricerca geometrica. Nella prima parte dell'opera, egli riporta risultati noti di Euclide e di Archimede: l'area del cerchio può essere ottenuta come somma di infiniti triangoli aventi il vertice nel centro e la base sopra una corda infinitesima della circonferenza, da cui segue che il cerchio è equivalente ad un triangolo avente il raggio per altezza ed il perimentro per base; mentre il volume di una sfera è la somma di infiniti coni aventi il vertici nel centro e la base sopra un elemento di superficie, donde il rapporto ben noto tra volume e superficie. Poi Keplero passa a determinare i volumi di corpi generati dalla rotazione di un segmento di cerchio o conica intorno ad una retta del suo piano. Ad esempio, egli divide il toro mediante molti piani passanti per l'asse, in fette sottili, ciascuna delle quali è assimilabile ad un cilindro retto avente per base

[7]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [3] e [5].

un cerchio meridiano del toro e per altezza la distanza fra i cerchi dei cerchi limitanti la fetta; viene scelta questa distanza perchè è la media aritmetica tra le distanze minima e massima di punti corrispondenti di questi cerchi; da ciò segue che il toro è equivalente ad un cilindro avente per base il cerchio meridiano e l'altezza uguale alla circonferenza descritta dal centro del cerchio descritta nella rotazione intorno all'asse.
Nella seconda parte dell'opera di Keplero, discute il problema che ha dato origine all'opera. Dopo aver stabilito quali solidi di rotazione si avvicinano alla forma delle botti, egli affronta questioni di tipo isoperimetrico ed arriva ad una conclusione: le botti sono state costruite in modo tale da avere una capacità massima e poiché nell'intorno del massimo le variazioni sono trascurabili, i piccoli scarti non influenzano sulla capacità e così la sua misura si può ritenere sufficientemente esatta.
Infinite, nell'ultima parte Keplero affronta una teoria che allora non fu rilevata, ma successivamente venne ripresa da Fermat e divenne la base della teoria dei massimi e minimi.

Sempre nello stesso periodo di Keplero, vi fu un altro matematico che svolse lunghi studi sempre a riguardo di questo argomento: Bonaventura Cavalieri (Milano, 1598 - Bologna, 1647) che introdusse il metodo degli indivisibili[8].
L'idea di Cavalieri consiste nel guardare un'area piana come costituita da infinite corde intercettate entro l'area da un sistema di rette parallele; ciascuna di queste corde pensate come un rettangolo di spessore infinitesimo, è l'elemento indivisibile. Come si era osservato nel capitolo precedente, anche in Archimede i procedimenti erano simili a questo, ma l'idea dell'indivisibile (cioè dell'infinitesimo attuale), pur essendo nota ai matematici greci, non fu accolta come mezzo di dimostrazione; essa fu pure bandita dalla scuola moderna del calcolo infinitesimale. In particolare, anche Cavalieri non afferma di utilizzare un infinito attuale,ma una infinità discreta di indivisibili di una figura per paragonarli con una analoga infinità di una seconda figura. Basandosi su ciò, enuncia un principio che porta il suo nome:

"*se due aree piane tagliate da un sistema di rette parallele intercettano, sopra ognuna di queste, due corde uguali, le due aree sono uguali; se le corde corrispondenti hanno un rapporto costante, lo stesso rapporto passa fra le aree.*"

Attraverso la rappresentazione cartesiana, supponendo che ciascuna delle due aree sia limitata oltre che dalle rette $x = a$, $x = b$ da due sole curve: la

[8]Contenuto nell'opera *Geometria indivisibilibus continuorum, nova quadam ratione promota*, 1635.

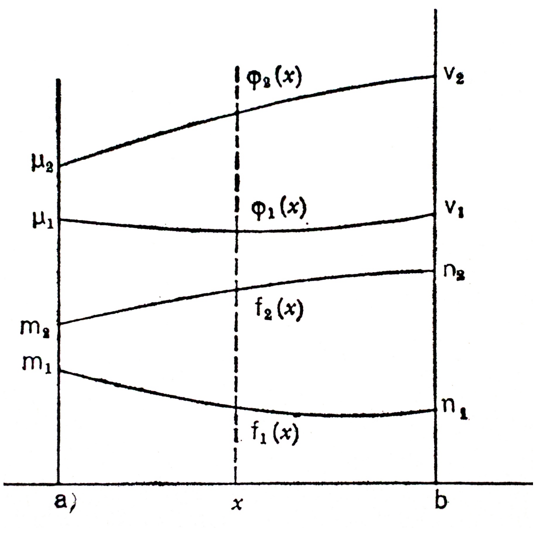
prima dalle curve $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, e la seconda dalle curve $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, il principio di Cavalieri afferma che per ogni x compreso fra a e b:

$$f_2(x) - f_1(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \tag{2.1}$$

allora

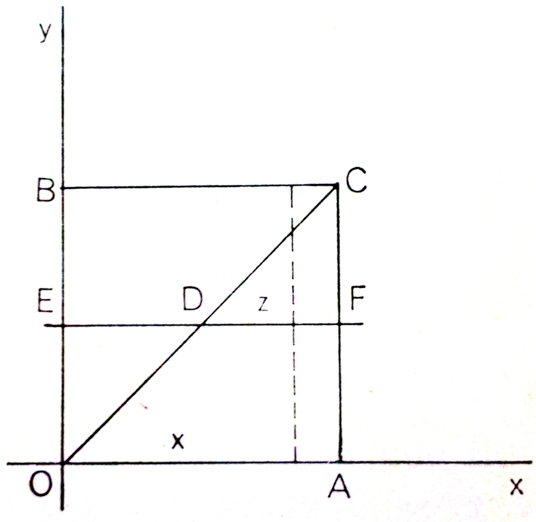
$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx. \tag{2.2}$$

Questa implicazione con la nostra scrittura moderna e quindi con il concetto di integrale è evidente, ma si deve pensare che ancora Cavalieri non aveva tutte queste conoscenze.
La (2.2) ci dice che, indicata con $f(x)$ la (2.1) e diviso l'intervallo $a - b$ in intervalli mediante i punti x_1, x_2, ..., ciascuna delle due aree può essere approsimata da una somma di rettangoli del tipo $(x_{i+1} - x_i)f(x_i)$ dove gli spessori sono infinitesimi potenziali cioè che tendono a zero al crescere del numero delle divisioni (come mostra la seguente figura).



Cavalieri non si limita solo a figure piane, ma considera anche solidi, ciascuno dei quali viene pensato come una sovrapposizione di innumerevoli fogli sottilissimi e paralleli.
Ritornando alle aree piane, si deve aggiungere che Cavalieri paragona, anzichè le corde corrispondenti alle aree, i quadrati costruiti sulle corde, allo scopo di determinare rapporti tra volumi. Per esempio, consideriamo un quadrato con due lati uguali ad a sui due assi coordinati e si tracci la bisettrice che biseziona il quadrato e si conduca la mediana $y = \frac{a}{2}$. Si tracci una corda del quadrato parallela all'asse y, condotta a distanza x, essa viene spezzata dalla

diagonale in due segmenti x, $a - x$, mentre l'angolo di vertice D intercetta su di essa una corda z tale che $x = \frac{a}{2} + z$:



Allora
$$x^2 + (a - x)^2 = \frac{a^2}{2} + 2z^2.$$
Cavalieri somma i due membri di questa uguaglianza per i valori di x compresi tra 0 ed a che intermini moderni si traduce
$$\int_0^a x^2 dx + \int_0^a (a - x)^2 dx = \int_0^a \frac{a^2}{2} dx + 2 \int_0^a z^2 dx$$
dove il primo integrale determina il volume V di una piramide avente il vertice in O e per base il quadrato costruito sopra AC nel piano perpendicolare a quello della figura, il secondo dà il volume V di una piramide uguale che ha il vertice in C e la base quadrata sopra OB, il terzo integrale dà il volume $\frac{a^3}{2}$ del parallelepipedo avente per base il quadrato costruito su OA e per base OE e, infine, l'ultimo integrale dà la somma $2V'$ dei volumi di due piramidi simili alle precedenti, aventi i vertici in D e le basi quadrate rispettivamente FC ed OE. Allora:
$$2V = \frac{a^3}{2} + 4V'$$
e sapendo che per i poliedri simili vale $V' = \frac{V}{8}$ e andando a sostituire si ottiene il seguente risultato:
$$V = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Questo risultato era già noto ad Archimede, ma Cavalieri dà insieme il valore dell'integrale e il valore della piramide e, in particolare, si possono determinare i volumi di qualsiasi solido generato dalla rotazione di un arco di parabola od iperbole intorno alla corda. Da cio egli trova

$$a^n = n \int_0^a x^{n-1} dx.$$

Tra i matematici vicini a Cavalieri che meglio hanno saputo utilizzare i suoi metodi, va ricordato Evangelista Torricelli (nato a Roma nel 1608 e morto a Firenze nel 1647). Con il suo metodo degli indivisibili curvilinei, unitamente a quello degli indivisibili rettilinei, Torricelli riesce a sistematizzare il calcolo, rendendolo più affidabile. Egli si rende conto che il metodo, male applicato, può portare a risultati errati. É, quindi, egli stesso che offre esempi di applicazioni errate. Il principio su cui si basano gli indivisibili curvi è il seguente. Per confrontare due figure, intersechiamo la prima, che è racchiusa da un sistema di curve e la seconda che è racchiusa da un sistema di rette parallele: se ogni indivisibile curvo della prima figura è corrispondente ad un indivisibile rettilineo della seconda figura, cioè se ogni trapezoide infinitesimo della prima figura è equivalente al quadrangolo infinitesimo della seconda, le due figure avranno la stessa area.

Capitolo 3

Gli sviluppi del calcolo integrale

[9]Il periodo che va dal 1630 alla fine del secolo XVII è uno dei periodi più fecondi per lo sviluppo della matematica ed ha una grande importanza per il calcolo integrale. Accanto a Torricelli tre matematici francesi, legati tra loro da stretti rapporti di amicizia ed in frequente scambio espistolare, portarono nuovi contributi all'argomento di cui ci stiamo occupando fra il 1630 e il 1660.

Pierre de Fermat (1601-1665) coltivò con passione le matematiche e lasciò tracce profonde in tutti i rami di queste (teoria dei numeri, algebra, geometria analitica, calcolo infinitesimale, calcolo delle probabilità). Introdusse per primo la nozione di derivata e può riguardarsi come l'iniziatore del calcolo differenziale.

Blaise Pascal (1623-1662) fu ingegno precoce: a dodici anni aveva ricostruito da solo le prime proposizioni degli Elementi di Euclide; a sedicianni pubblicò l'*Essai pour les coniques*[10] contenente il celebre teorema che porta il suo nome. Colto da una crisi di misticismo abbandonò la scienza, ma poi riprese verso il 1653 gli studi, interessandosi a questioni di aritmetica e di calcolo delle probabilità. Le sue ricerche sull'integrazione e, in particolare, sulla determinazione di aree e volumi legati alla cicloide, appartengono all'ultimo periodo della sua breve vita.

---

[9]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [5].

[10]Nel 1642 Blaise Pascal compose la sua prima opera scientifica *Essai pour les coniques* (*Sulle sezioni coniche*).

3.1 Fermat

Nel 1636 Fermat e Roberval (1602-1675) erano pervenuti alla formula che oggi scriviamo così:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

per n intero positivo, formula che dà l'area compresa tra la parabola $y = x^n$, l'asse x e una ordinata. Erano arrivati ad essa imitando il procedimento che Archimede aveva adoperato per $n = 2$ cercando un'espressione che desse la somma delle potenze $n - esime$ dei primi n numeri interi.
Pochi anni dopo Fermat determinò il valore di quell'integrale anche per n razionale positivo, riuscendo così a quadrare un segmento di parabola generalizzata $x^p = y^q$ con p e q interi positivi. Il procedimento che gli rese pubblico soltanto nel 1657 è molto ingegnoso. Vediamolo.

Si divide l'intervallo $[0, a]$ in intervalli parziali, mediante punti le cui ascisse formano, non una progressione aritmetica, bensì una progressione geometrica illimitata. Se $r < 1$ è il rapporto costante di questa, i punti nominati hanno le ascisse $a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots$ e gli intervalli hanno le lunghezze $a(1-r),\ ar(1-r),\ ar^2(1-r),\ \ldots$.
D'altra parte la funzione $y = x^n$ con $n = \frac{p}{q}$ assume in quei punti i valori $a^n,\ a^n r^n,\ a^n r^{2n},\ \ldots$.
I rettangoli che, presi insieme, permettono di approssimare la superficie compresa fra la parabola, l'asse x e la retta $x = a$ hanno dunque le aree $a^{n+1}(1-r),\ a^{n+1}r^{n+1}(1-r),\ a^{n+1}r^{2(n+1)}(1-r),\ \ldots$.
La somma di queste aree è la somma della serie geometrica

$$(1-r)a^{n+1}[1 + r^{n+1} + r^{2(n+1)} + \ldots] = \frac{1-r}{1-r^{n+1}}a^{n+1}.$$

L'integrale richiesto è il limite di questa espressione quando r tende a 1 perché, allora, gli intervalli tendono a 0.
Fermat, poi, pone $r = s^q$ con $s < 1$ e si ha

$$\frac{1-r}{1-r^{n+1}} = \frac{1-s^q}{1-s^{p+q}} = \frac{(1-s)(1+s+s^2+\cdots+s^{q-1})}{(1-s)(1+s+s^2+\cdots+s^{p+q-1})}$$

e si vede che il limite per s che tende a 1, cioè per r che tende a 1, è

$$\frac{q}{p+q}.$$

Quindi l'integrale diventerà

$$\int_0^a x^{p+q} dx = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}},$$

ossia

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1},$$

anche per n frazionario posivito.
Fermat dimostra con lo stesso metodo nel 1657 che l'ultima formula vale pure per n frazionario negativo con $n \neq -1$ e supponendo però che $r > 1$. Ma in questo risultato egli è stato preceduto da Torricelli che tra il 1641 e il 1644 si è occupato della quadratura delle infinite iperboli $x^p y^q = 1$ e della cubatura del solido generato dalla rotazione della curva intorno ad uno dei suoi asintoti.

3.2 Torricelli

Già nel 1641 Torricelli, come risulta da una lettera a Cavalieri, aveva scoperto un fatto nuovo e notevole che lo sorprese: una proprietà dell'iperbole equilatera e del solido generato da un ramo della curva fatto rotare intorno ad uno degli asintoti.

Sul ramo della curva giacente nel primo quadrante si prenda un punto qualsiasi A di coordinate $(a, \frac{1}{a})$ e si considera l'area compresa tra l'asse x, il tratto di curva illimitato AX e l'ordinata AB. Quest'area ha misura infinita, ma il solido che essa genera rotando intorno all'asse x, sebbene esteso all'infinito, ha volume finito, dato a meno del fattore π, dall'integrale improprio

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}.$$

Torricelli per calcolare questo volume utilizza il metodo degli indivisibili curvi.
Come mostra la figura (3.1), si conduca per A la parallela AC=a all'asse x, e si aggiunga al solido che si vuol valutare il cilindro generato dal rettangolo ABOC mediante rotazione intorno ad x; il cilindro ha il volume $\frac{\pi}{a}$. Ciò posto, immaginiamo il solido rotondo somma, come composto dalle superfici degli infiniti cilindri rotondi intorno all'asse x, aventi l'altezza $MP = x$, compresa fra a e ∞, e il raggio della base $NM = \frac{1}{x}$. Ciascuno di quei cilindri ha la superficie laterale 2π. A questo indivisibile superficiale Torricelli sostituisce il disco equivalente che ha il centro in P sull'asse y, il piano perpendicolare all'asse y e il raggio $\sqrt{s}$. Questi dischi costituiscono un cilindro avante l'altezza $OC = \frac{1}{a}$ e il raggio della base $\sqrt{2}$, cilindro i cui volume è $\frac{2\pi}{a}$.

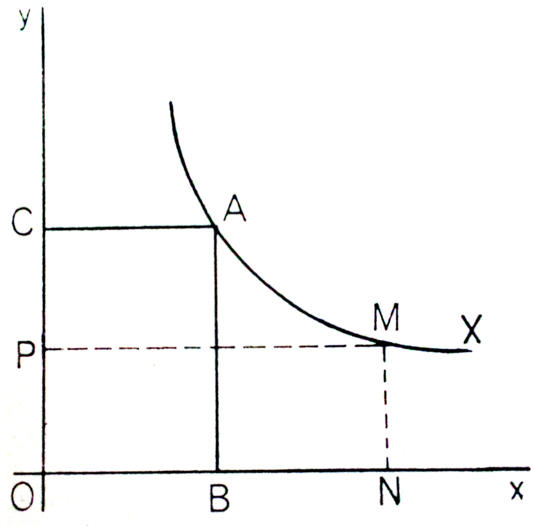


Figura 3.1: Iperbole equilatera

Per il principio di Torricelli sugli infinitesimi curvi, questo è pure il volume del solido generato dalla rotazione di OCAXBO intorno all'asse x. Il primo solido, generato dalla rotazione di BAXB, ha dunque il volume $\frac{\pi}{a}$; così si ricava subito il valore dell'integrale improprio.
In termini moderni, questo procedimento cosiste nel sostituire le coordinate cartesiane x, y, z dello spazio con le coordinate cilindriche x, ρ, φ con

$$y = \rho cos\varphi, \ z = \rho sen\varphi;$$

in queste coordinate la superficie rotonda generata dalla iperbole ha l'equazione $\rho x = 1$, ed il volume richiesto è dato da

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} \rho x \ d\rho = \frac{2\pi}{a}.$$

Torricelli vide che il procedimento adoperato per determinare il volume del suo solido serve anche a quadrare l'iperbole $x^2 y = 1$ e a dimostrare che l'area compresa fra la curva, l'asintoto x ed un'ordinata, sebbene si estenda all'infinito, ha un valor finito, al contrario di quel che succede per l'iperbole equilatera. Ma egli si è accorto che quel metodo non si applica alla iperbole più generale $x^p y^q = 1$, con p e q interi positivi, $p \neq q$, e per questa curva ricorre ad un procedimento di stile archimedeo, molto notevole per eleganza e rigore.

3.3 Pascal

Si è detto che Pascal negli ultimi anni della sua vita si è occupato di questioni riguardanti il calcolo integrale. Vi fu condotto quando volle risolvere problemi di quadratura e di cubatura inerenti ad una celebre curva, la cicloide da lui chiamata roulette. La cicloide aveva già attirato l'attenzione di Galileo fin dagli anni giovanili; egli molto più tardi propose a Torricelli il problema di quadratura della cicloide, senza sapere che esso era stato risolto, fra il 1634 e il 1635 da Roberval (valutò il volume del solido generato facendo ruotare la cicloide intorno all'asse di simmetria o intorno alla base) e successivamente da Descartes e da Fermat. Nel 1658 Pascal bandì un concorso a premio sul tema:

area compresa fra un arco di cicloide e una retta parallela alla base, volumi dei solidi rotondi generati da quest'area e relativi baricentri.

Non soddisfatto delle risposte ricevute, pubblicò egli stesso le soluzioni che possedeva.
Non tratterò di queste risposte, ma attraverso il seguente esempio si potrà capire l'intuizione geometrica di Pascal e, in particolare, si potrà osservare che egli si avvale del linguaggio e del metodo degli indivisibili e che non utilizza notazioni algebriche, che già da venti anni Descartes e Fermat avevano adottato.

Consideriamo l'area (*triligne*[11]) compresa fra i due assi e la curva $y = f(x)$ che congiunge i punti $(a, 0)$ e $(0, b)$ e calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^a xy\ dx. \tag{3.1}$$

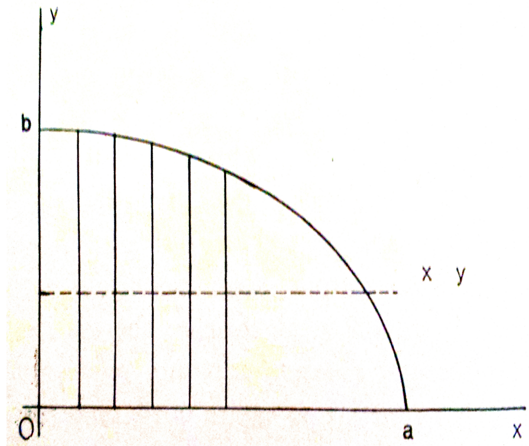
Dividiamo l'intervallo $[0, a]$ in n parti di lunghezza h e per i punti della divisione conduciamo le ordinate $y_0 = f(0)$, $y_1 = f(h)$, $y_2 = f(2h)$, $\ldots$, $y_{n-1} = f((n-1)h)$. Vediamo che l'integrale è approssimato dalla somma

$$hy_0h + 2hy_1h + \ \ldots\ + nhy_{n-1}h = h\left(\sum_{i=0}^{n-1} hy_i + \sum_{i=1}^{n-1} hy_i + \cdots + hy_{n-1}\right)$$

dove il primo termine dentro le parentesi approssima l'area del *triligne*, il secondo l'area compresa fra la curva, l'ordinata y_1 e l'asse x, ecc. Lasciando il *triligne* al suo posto, applicando alla seconda area la traslazione h parallelamente all'asse cartesiano z, portando similmente la terza area sul piano

[11]Triligne perché è un area compresa tra tre segmenti.

$z = 2h$ e così via, si ottiene uno scatoloide iscritto nel solido che Pascal chiama *onglet* e che si ottiene tagliando il cilindro verticale che ha per base il *triligne*, mediante il piano $x = z$ condotto per l'asse y con la inclinazione di $45°$ (come mostra la seguente figura).



L'integrale (4) è dunque il volume dell'*onglet*. Questo volume lo si può anche valutare tagliandolo con piani verticali paralleli all'asse x. Un generico di questi taglia l'*onglet* secondo un triangolo rettangolare isoscele di cateto x ed area $\frac{x^2}{2}$, se x è l'ascissa del punto della curva per cui il piano è condotto. Quindi, quel volume si trova integrando $\frac{x^2}{2}\ dy$ per i valori di y compresi fra 0 e b. Resta, così, dimostrata l'uguaglianza seguente

$$\int_0^a yx\ dx = \int_0^b x^2 dy,$$

che traduce, nel caso particolare esaminato, la formula di integrazione per parti.

Accanto ad altre formule dello stesso tipo, che Pascal dimostra una per una, egli calcola, con metodi analoghi, integrali di funzioni trigonometriche ($sen^r(x)$, $sen(x)cos(x)$, $x^r sen(x)$, $\ldots$) e anche di funzioni irrazionali quadratici ($\sqrt{a^2-x^2}$, $x^2\sqrt{a^2-x^2}$, $\ldots$).

Pascal riesce, così, a costruire la parte elementare del calcolo integrale; ma i procedimenti faticosi che egli segue avrebbero ben presto arrestato le ricerche in questo campo se, venti anni dopo, Newton e Leibniz non avessero indicato la via agevole che conduce rapidamente a risultati ben più generali di quelli.

3.4 Wallis

Contemporaneamente a Fermat e a Pascal, grazie John Wallis (Ashford, 23 novembre 1616 - Oxford, 28 ottobre 1703) la scuola inglese partecipa alle ricerche infinitesimali, a cui i geometri italiani e poi i francesi avevano portato tanti contributi. Ben presto, con Isaac Newton, l'Inghilterra prenderà il primo posto in questo campo.
Wallis, come Pascal, ricorre al metodo degli indivisibili ma, mentre i procedimenti di Pascal sono rigorosi, Wallis si lascia ordinariamente guidare da considerazioni di analogia, dalla fiducia nella persistenza formale delle leggi operative e dal principio di continuità. Quando egli si accorse che una certa uguaglianza fra un integrale definito e una espressione artmetica vale per i primi valori di un determinato carattere, afferma che altrettanto succederà per ogni valore di quel carattere.
Nell'opera *Arithmetica infinitorum*[12], Wallis arriva al risultato più notevole partendo dallo studio dell'espressione che con le nostre notazioni si scrive così:

$$I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dy,$$

e che con semplici cambiamenti di variabili la si può così scrivere

$$I_n = \frac{1}{2^{2n}} \int_0^1 (1 - y^2)^n dy = \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(\varphi) d\varphi,$$

dove l'esponente n è un intero positivo. L'integrale, ora, si può calcolare facilmente attraverso il metodo di Wallis, cioè sviluppando la potenza del binomio e integrando termine a termine e integrando per parti (con il nostro metodo). Si trova, così, che

$$2^{2n} I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdots \cdot (2n+1)} = \frac{2n}{2n+1} \cdot 2^{2(n-1)} I_{n-1}.$$

In un secondo momento, Wallis dà ad n valori del tipo $\frac{2m+1}{2}$ per m intero ed ammette che la relazione tra I_n ed I_{n-1} sussiste ancora e gli permette di calcolare $I_{\frac{2m+1}{2}}$ quando sia noto $I_{\frac{1}{2}}$ o interpolare le I ad indice frazionario tra quelle ad indice intero. Ora questo integrale $I_{\frac{1}{2}}$ misura l'area di un semicerchio di raggio $\frac{1}{2}$ e vale quindi $\frac{\pi}{8}$.
Egli trova così che per $n = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2, \dots$

$$2^{2n} I_n = 1,\ \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{8}\frac{\pi}{2},\ \frac{8}{15}, \dots$$

[12]Opera più importante di Wallis pubblicata nel 1656.In questo trattato furono sistematizzati ed estesi i metodi dell'analisi di Descartes e di Cavalieri.

Per capire questo procedimento, supponiamo segnati nel piano i punti che hanno per ascissa i valori di n e per ordinata i corrispondenti valori di $2^{2n} I_n$. Si verifica subito che i punti di posto dispari sono i vertici di una poligonale decrescente e presenta una convessità verso il basso e che lo stesso succede per i punti di posto pari. Wallis ammette che le stesse proprietà abbia la poligonale avente per vertici successivi tutti i punti segnati. La prima proprietà è vera (ordinate decrescenti) per il fatto che la funzione da integrare $(1 - y^2)^n$ decresce al crescere di n quando $0 < y < 1$. Quindi

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \geq \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2} \geq \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$$

da cui segue la formula di Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n \cdot \ 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot \ (2n+1)}.$$

Wallis si serve anche della seconda proprità (convessità), per concludere che nella dobbia disuguaglianza il rapporto fra il primo e il secondo membro è maggiore del rapporto fra il secondo e il terzo termine: quindi il rapporto è maggiore e il secondo minore di $\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$. Ciò gli permette di assegnare un confine molto approssimato dell'errore che si commette prendendo l'ultima frazione scritta come valori di $\frac{\pi}{2}$.

Capitolo 4

L'origine dell'idea della derivata

[13]Come si è visto nei capitoli precedenti verso la metà del secolo XVII si utilizzarono metodi geniali, ma laboriosi per determinare aree e volumi. Ogni nuovo problema di quadratura esigeva la scoperta di un nuovo artificio per determinare il limite di una somma di infiniti termini. Era prevedibile che quella via si sarebbe ben presto arrestata di fronte alle difficoltà algoritmiche inerenti alla integrazione di nuove funzioni. Come si sia superato è ben noto. Si vide che l'integrazione è l'inversa di una nuova operazione, la derivazione di carattere più elementare. Questo può eserguirsi per tutte le funzioni e conduce a nuove funzioni, generalmente più semplici o almeno non più complicate di quelle da cui si parte. Ora questo procedimento indiretto di integrazione non poteva adottarsi nel periodo storico che si è esaminato fino ad ora, perché solo intorno al 1640 si intravvede vagamente l'interesse di introdurre nella scienza la nuova operazione e quarant'anni dopo essa venne studiata in modo sistematico.
Può ora sorgere la seguente domanda: perché queste due operazioni che oggi le troviamo avvicinate in ogni trattato di calcolo infinitesimale sono nate in epoche e in ambienti scientifici lontani?
Come è noto sono due le origini della derivata: geometrica (il problema delle tangenti o l'equivalente problema dei massimi e minimi) e meccanica (la determinazione della velocità di un moto vario).
I geometri greci avevano insegnato a condurre le tangenti a varie curve da essi studiate, ma per ogni curva si assegnava una costruzione speciale. Un

[13]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [3], [5] e [6].

metodo generale non poteva essere proposto finché non si avesse una definizione generale di curva. Il concetto di integrale si trova sostanzialmente in Archimede; resta solo da risolvere, caso per caso, la difficoltà algoritmica del calcolo integrale. Al contrario la costruzione della tangente ad una curva non è, né dagli antichi, né dai precursori di Descartes, condotta al punto da potersi tradurre in una operazione analitica determinata.
Per quanto riguarda l'origine meccanica, o meglio cinematica, della derivata è chiaro che essa non poteva attirare l'attenzione se non quando si fosse iniziato lo studio sistematico dei moti vari; questo studio nel caso più semplice della caduta dei gravi è opera di Galileo.
Ecco perché prima di Descartes e di Galileo non si incontra il concetto di derivata.

4.1 Il problema delle tangenti

Il problema delle tangenti è stato particolarmente trattato da Descartes e Fermat che vengono considerati i fondatori della geometria analitica nella sua forma moderna. Essi, però, trattano il problema da punti di vista diversi e diversa è la risonanza che ebbero i loro metodi sullo sviluppo della scienza.

4.1.1 Descartes

Nel 1637 René Descartes, italianizzato in Renato Cartesio, (Touraine, 1596 - Stoccolma, 1950) pubblica il *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie qui sont des essais de cete Méthode* (Discorso sul metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze più la diottrica, le meteore e la geometria che sono saggi di questo metodo) dove spiega le caratteristiche essenziali del suo metodo e mostra come sia stato applicato nell'ambito dello studio dell'ottica (fenomeni di rifrazione e di diffrazione), dei fenomeni meteorologici e della geometria.
In questa sua opera Descartes afferma che la matematica è l'unica disciplina che può essere assunta come modello sul quale plasmare il proprio metodo.
Egli enunciava il suo programma nel modo seguente:

> *Tutti i problemi della geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che per la loro costruzione basta conoscere la lunghezza di alcune rette.*

Cartesio parla quindi di costruzioni geometriche e non di riduzione della geometria all'algebra.

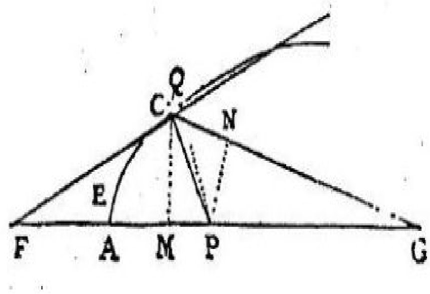
Nello sviluppare la sua geometria, Descartes è convinto pregiudizialmente (sulla scia di Aristotele e di Averroè[14]) che le curve algebriche potranno sempre essere rettificate con approssimazione. Dato lo stato avanzato della geometria che egli sviluppa, si può immaginare che solo quel pregiudizio non abbia permesso a Descartes di rettificare una qualche curva anticipando in questo Torricelli nella sua rettificazione di una curva (la spirale logaritmica).
É da notare che Descartes sviluppa una geometria molto diversa da quella che noi utilizziamo, anche perché non usa quasi mai coordinate ortogonali. Non rintracceremo nelle sue elaborazioni dei dati metrici come la formula della distanza, delle coordinate per individuare punti, non vi è cenno all'angolo tra rette, all'inclinazione di una retta, a coordinate negative, ..., ma, soprattutto, non si incontra mai una curva disegnata a partire dalla sua equazione. Sembra proprio che questa geometria che non aveva alcuna utilità pratica, non lo interessasse: era una esemplificazione del suo discorso sul metodo e basta. Cartesio, in questa sua opera, enuncia anche delle regole:

La prima regola era di non accettare mai nulla per vero, senza conoscerlo evidentemente come tale[...].
La seconda, di dividere ogni problema preso in esame in tante parti quanto fosse possibile e richiesto per risolverlo più agevolmente.
La terza, di condurre ordinatamente i miei pensieri cominciando dalle cose più semplici e più facili a conoscersi, per salire a poco a poco, come per gradi, sino alla conoscenza delle più complesse;[...]

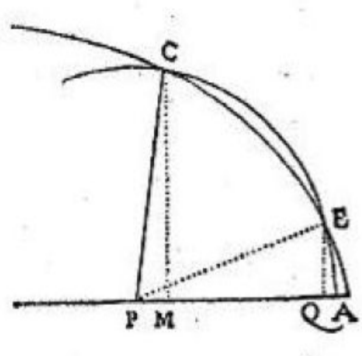
Discours ebbe tre appendici che esemplificavano il metodo cartesiano, una di esse era *La Géométrie* che è composto da tre libri.
Il primo è dedicato alla costruzione di un'algebra di segmenti, cioè a stabilire una corrispondenza fra operazioni aritmetiche e operazioni geometriche, punto di partenza per la risoluzione dei problemi geometrici piani.
Nel secondo libro Descartes affronta, invece, il problema della determinazione della retta normale a una curva osservando che il metodo proposto è del tutto generale qualora si conosca l'equazione (polinomiale) della curva.
Mentre per quanto riguarda il terzo libro, tratta della soluzione delle equazioni di grado superiore al secondo mediante intersezioni di curve. Descartes, partendo dal presupposto che bisogna sapere se l'equazione sia riducibile o meno, insegna come passare da un grado superiore a uno inferiore dell'equazione quando sia nota una radice e che possono darsi tante radici positive quante sono le variazioni di segno nel primo membro e tante negative quante

[14]Averroè (Cordova, 1126 - MarraKech, 1198) era un matematico arabo.

volte i segni + e − si susseguono (regola dei segni di Cartesio). Dà pure alcune regole che riguardano l'eliminazione nell'equazione del secondo termine o la reintroduzione di un termine mancante. Posto ciò, affronta i problemi le cui soluzioni dipendono da equazioni di terzo grado e oltre; per questo, prima si sofferma sulla soluzione delle equazioni di terzo grado e subito dopo su quelle di quarto grado, che risolve riducendone il grado, o altrimenti applicando il metodo dei coefficienti indeterminati che gli consente di ridurre equazioni di quarto grado ad un prodotto di equazioni di secondo grado. A causa di un'affrettata generalizzazione, Descartes fu indotto a pensare di aver trovato erroneamente la soluzione di equazioni superiori al quarto.
Vediamo meglio come Descartes descrivere il metodo per determinare la retta normale.

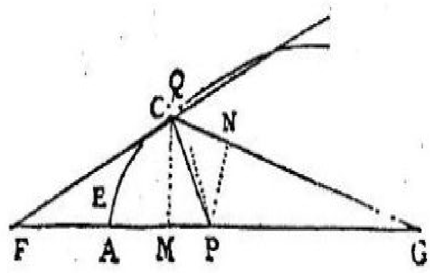
> "Sia CE la curva e, per il punto C occorra tracciare una retta che formi con essa angoli retti. Suppongo tutto già compiuto, e assumo CP come la linea cercata, linea che prolungo fino a P dove incontra la retta GA, che suppongo esser quella cui debbono riferirsi tutti i punti della linea CE.
> Così, ponendo $MA \propto y$, $CM \propto x$, otterrò una certa equazione che esprime la relazione che sussiste tra x e y.
>
> 
>
>
> Poi prendo $PC \propto s$ e $PA \propto v$ o $PM \propto (v-y)$ e, essendo PMC un triangolo rettangolo, ss che è il quadrato della base, uguale a $xx + vv - 2vy + yy$ cioè ai quadrati dei due lati; quindi
>
> $$x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy} \qquad y \propto v + \sqrt{ss - vv}$$
>
> e, mediante quest'equazione, elimino dall'altra equazione, che esprime la relazione tra tutti i punti della curva CE e quelli della retta GA, una delle quantità indeterminate, x o y; operazione assai facile da eseguirsi, mettendo dovunque $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$

al posto di x, e il quadrato di questa somma in luogo di xx e il suo cubo in luogo di x^3; e così di seguito, se è x che intendiamo eliminare. Se invece intendessimo eliminare y, metteremmo al suo posto $v + \sqrt{ss - xx}$ e il quadrato o il cubo ecc. di questa somma, in luogo di yy o di y^3 ecc. In tal modo, dopo ciò, rimane sempre una equazione in cui non si dà che una sola quantità indeterminata, x o y.



Ora, dopo aver trovato tale equazione [...], poiché il punto C è dato, dobbiamo usarla per trovare v o s, che determinano il punto P richiesto. A tal fine, bisogna considerare che se questo punto P è come lo desideriamo, il cerchio di cui sarà centro e che passerà per C, vi toccherà la curva CE senza intersecarla.
Al contrario, se questo punto P è un po' più vicino o un po' più lontano dal punto A di quel che deve essere, il cerchio intersecherà la curva, e non solo nel punto C, ma necessariamente anche in qualche altro. Inoltre, dobbiamo pure considerare che quando tale cerchio interseca la curva CE, l'equazione con cui cerchiamo la quantità x o y o qualche altra simile (supponendo note PA e PC) ammette necessariamente due radici che non sono uguali [...]. Da ciò segue evidentemente che il valore di x o di y o di qualsiasi altra ipotetica quantità, sarà doppio in questa equazione, cioè che vi saranno due radici diverse tra loro delle quali, se è x la quantità cercata, saranno l'una CM e l'altra EQ, mentre se è y, l'una MA e l'altra QA; e così per le altre. É pur vero che se il punto E non si trova sulla stessa parte della curva in cui giace il punto C, una sola radice sarà vera, mentre l'altra sarà dalla parte opposta o inferiore a zero; al contrario però tanto più questi due punti, C ed E, sono vicini tra loro, tanto minore è la differenza che sussiste fra queste radici; infine, se questi punti giacciono am-

bedue in uno (cioè se il cerchio che passa per C vi tocca la curva senza intersecarla), queste radici saranno assolutamente uguali.



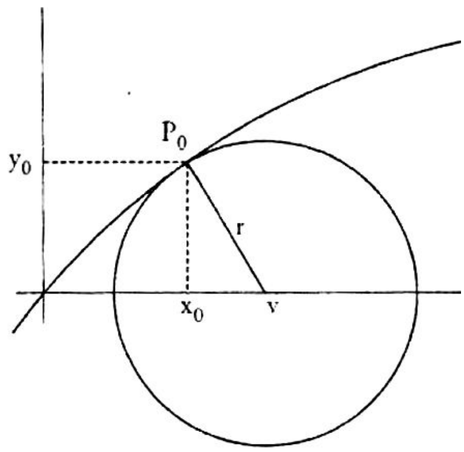
Inoltre, dobbiamo considerare che un'equazione in cui si danno due radici uguali ha necessariamente la stessa forma che si ottiene se si moltiplica per se stessa la differenza fra la quantità incognita e la quantità nota che le è uguale e, dopo ciò, se quest'ultima somma è di grado inferiore alla precedente, la si moltiplica per un'altra somma che abbia tanti gradi quanti mancano alla precedente, in modo che preso separatamente, ciascun termine dell'una corrisponda a quello dell'altra.
Perciò, se in virtù di questa espressione prendiamo la linea AP uguale a v, le cui quantità son tutte note, e se tracciamo dal punto P, così trovato, una retta verso C, questa interseca in tal punto ad angoli retti la curva CE, ciò che si doveva fare. Non vedo nulla che impedisca che si estenda questo problema, nella stessa maniera, a tutte le linee curve che sottostanno a qualche calcolo Geometrico."

Attraverso il seguente esempio ripercorriamo il passo appena mostrato.

Data una curva e un suo punto P_0 di coordinate (x_0, y_0), si vuole trovare la retta normale alla curva in P_0. Tra le infinite circonferenze tangenti alla curva in P_0, si consideri la circonferenza con il centro che giace su uno degli assi (si noti che nella *Gèomètrie* non compaiono gli assi cartesiani ortogonali, ma qui vengono introdotti per semplicità):

$$y^2 + (x - v)^2 = r^2.$$

Si devono, così, determinare i parametri v e r dell'equazione della circonferenza.



Se $F(x, y) = 0$ è l'equazione polinomiale della curva, il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ y^2 + (x - v)^2 = r^2 \end{cases}$$

rappresenta l'intersezione tra la curva e la circonferenza. Se si elimina la variabile y si ottiene un polinomio in x, che indichiamo con $Q(x)$. Si può osservare che, se l'equazione della curva è di grado n, il polinomio risultante $Q(x)$ è di grado $2n$.
La condizione di tangenza del cerchio equivale a richiedere che il polinomio $Q(x)$ di grado $2n$ abbia una radice doppia in x_0 cioè $Q(x) = (x - x_0)^2 R(x)$, dove $R(x)$ è un polinomio di grado $2n-2$. Applicando il principio di identità dei polinomi si ottengono $2n+1$ equazioni in $2n+1$ incognite, rappresentate da $2n-1$ coefficienti di $R(x)$ e dai due parametri v e r. Risolvendo questo sistema molto complesso si determinano solo i parametri v e r che definiscono univocamente il cerchio tangente.
Infine, Descartes, sempre nel passo riportato, osserva che questo metodo può essere applicato teoricamente a tutte le curve algebriche.

4.1.2 Fermat

Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 1601 - Castres, 1655), nel 1637, manda a Parigi la memoria *Methodus ad disquierendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* che presenta un originale approccio geometrico al problema delle tangenti, diverso da quello cartesiano che viene pubblicato quasi contemporaneamente.
Qui di seguito si considererà la memoria che Fermat spedì a Mersenne (Oizé, 8 settembre 1588 - Parigi, 1 settembre 1648, teologo, filosofo e matematico

francese) alla fine del 1637 perché la facesse avere a Descartes.
La prima parte riguarda un metodo per determinare i massimi e minimi, mentre nella seconda parte, Fermat determina con il suo nuovo metodo la tangente a una parabola.
Vediamo ora questo metodo di determinazione dei massimi e minimi attraverso un esempio che Fermat propone.

Dato un problema in cui si devono trovare dei valori massimi o minimi, si fissa una incognita. Fermat indica le incognite con le vocali e i dati noti con le consonanti seguendo la convenzione adottata da Viète. In questo caso si ha un segmento di lunghezza nota B e si vuole dividere il segmento in modo tale che i due segmenti ottenuti siano i lati del rettangolo di area massima.
Dunque, si indica con A uno dei due segmenti che risolvono il problema (cioè massimizzano l'area) e con $B - A$ quello rimanente. Una volta fissata l'incognita, si imposta la relazione da massimizzare o minimizzare: nell'esempio che propone Fermat, la relazione esprime l'area del rettangolo di lati A e $B - A$, cioè $BA - A^2$.
A questo punto, si riconsidera il primo segmento incognito A e lo si incrementa di un valore E; ora si ha l'incognita $A + E$ che rappresenta il primo segmento e $B - A - E$ che rappresenta il secondo. Si può, allora, riscrivere la relazione che esprime l'area del rettangolo: $(A + E)(B - A - E)$ ovvero $BA - A^2 + BE - 2AE - E^2$.
Si è così espresso l'area del rettangolo prima in termini di A e poi in termini di $A + E$; le espressioni che abbiamo ottenuto non sono esattamente uguali (perché nel secondo caso si ha incrementato A di una quantità non nulla E) e quindi non possiamo uguagliarle ma adeguagliarle:

$$BA - A^2 \approx BA - A^2 + BE - 2AE - E2.$$

Ora si può assumere che valgano le usuali regole dell'algebra ed eliminare i termini uguali che si trovano rispettivamente nel primo e nel secondo membro dell'adequazione, nonché trasportare da un membro all'altro i termini, cambiando di segno. Allora si ottiene:

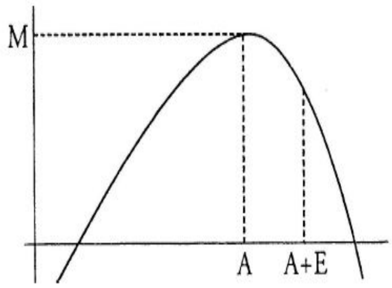
$$BE \approx 2AE + E^2.$$

Si divide per E, supponendo, per ora, che E sia diverso da zero, che compare in tutti i termini, in modo da ottenere un'espressione in cui almeno un termine non contenga E:

$$B \approx 2A + E.$$

Ricordandosi che l'incognita iniziale è A e dunque l'incremento E deve valere 0; ponendo $E = 0$ si eliminano tutti i termini che contengono E. Si noti che per $E = 0$ l'adequazione diventa una vera equazione $B = 2A$ da cui $A = \frac{B}{2}$, cioè l'area del rettangolo è massima quando si assume come lato la metà del segmento dato. In altre parole, l'area è massima quando il rettangolo è in realtà un quadrato.

Ma in termini moderni quale è l'idea di fondo? Fermat non spiega chiaramente quali sono le ragioni matematiche che stanno dietro questa regola: infatti, vi è un tono prescrittivo, argomentativo.
Si può immaginare di rappresentare la relazione da massimizzare come una funzione della variabile X, $f(X) = BX - X^2$ e si suppona che f assuma il valore massimo M quando $X = A$, come mostra la seguente figura



Se si incrementa il valore di A di una quantità arbitraria E, il valore assunto dalla funzione nel punto $A + E$ dovrà essere minore del valore assunto dalla funzione nel punto di massimo A, cioè $f(A + E) < f(A)$. Questa disuguaglianza la si può anche scrivere come adequazione cioè $f(A + E) \approx f(A)$ o anche $f(A + E) - f(A) \approx 0$. Poiché $E \neq 0$ allora

$$\frac{f(A+E) - f(A)}{E} \approx 0$$

che intermini moderni questa espressione rappresenta, l'idea di Keplero secondo cui nell'intorno di un massimo, le variazioni dell'ordinata sono insensibili rispetto all'incremento E dell'ascissa corrispondente al massimo. Qualora si annulli l'incremento l'adequazione diventa *aequatio*

$$\left.\frac{f(A+E) - f(A)}{E}\right|_{E=0} = 0.$$

Si può osservare che

- questi passaggi non sono molto rigorosi (prima si divide per una quantità non nulla (E) poi la si pone uguale a zero);

- la divisione per E è semplice solo nel caso in cui $f(A+E) - f(A)$ sia un polinomio;
- in notazione moderna, l'ultima espressione potrebbe avere una famigliarità con la derivata prima della funzione, cioè $f'(A) = 0$, ma questa identificazione sarebbe una forzatura inquanto Fermat non possiede il concetto di funzione e nemmeno conosce la teoria dei limiti (che comparirà all'inizio dell'Ottocento) e la derivazione è un operatore che agisce su una funzione secondo determinate regole e la trasforma nella funzione derivata, che verrà poi uguagliata a zero per la determinazione dei punti stazionari. Mentre Fermat agisce sempre su adequazioni o equazioni e contrariamente la derivata, l'equazione è sempre globale.

La seconda parte della memoria *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*, intitolata *De tangentibus linearum curvarum*, riguarda la determinazione della tangente a una parabola, con il nuovo metodo e vi si ritrova il risultato classico (la sottotangente è doppia del piede dell'ordinata).
Il metodo di Fermat funziona per i casi già noti ed è questa una condizione indispensabile per presupporre che possa essere efficacemente esteso anche ai casi ancora insoluti.
In questa seconda parte Fermat espone solo l'esempio della parabola e non fa una descrizione generale del metodo che la si può trovare in una memoria successiva, *Doctrina tangentium.* Qui di seguito è stato riportato il testo originale riguardante la determinazione della tangente alla parabola.

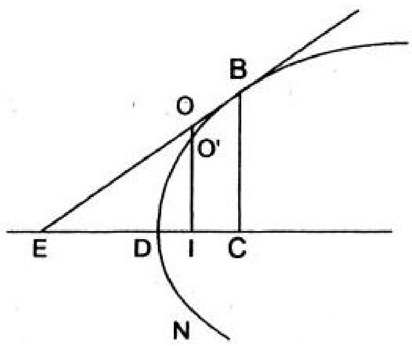


Figura 4.1: Determinazione della tangente alla parabola

"Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus. Sit data, verbi gratia,

parabole BDN cuius vertex D, diameter DC et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.
Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC maior erit proportio CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI quia punctum O est extra parabolen; sed, propter similitudinem triangulorum, ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum; maior igitur erit proportio CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE.
Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD: sit igitur CD aequalis D datae. Ponatur CE esse A: ponatur CI esse E. Ergo D ad $D - E$ habebit maiorem proportionem quam Aq ad $Aq + Eq - A$ in E bis.
Et, ducendo inter se medias et extremas,

$$D \text{ in } Aq + D \text{ in } Eq - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis maius erit quam } D \text{ in } Aq - Aq \text{ in } E$$

Adaequentur igitur iuxta superiorem methodum: demptis itaque communibus

$$D \text{ in } Eq - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis adaequabitur } -Aq \text{ in } E$$

aut, quod idem est,

$$D \text{ in } Eq + Aq \text{ in } E \text{ adaequabitur } D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}$$

Omnia dividantur per E: ergo

$$D \text{ in } E + Aq \text{ adaequabitur } D \text{ in } A \text{ bis}$$

Elidatur D in E: ergo

$$\text{Aq aequabitur } D \text{ in } A \text{ bis}$$

ideoque

$$A \text{ aequabitur } D \text{ bis}$$

> Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet. Nec unquam fallit methodus; imo ad plerasque quaestiones pulcherrimas potest estendi [...]."

Non riporto la traduzione dal latino (per essa si rimanda a [6]), ma solo il significato in termini moderni di questo metodo.
Si ricorda che il diametro di una parabola è una retta che congiunge i punti medi delle corde che hanno la stessa direzione.
Si considera la parabola BDN di vertice B e si determina la tangente in un suo punto B. La tangente incontra il diametro (nella figura (4.1) coincide con l'asse) nel punto E. Si considera, poi, il punto O che giace sulla retta tangente e si conduca la perpendicolare OI al diametro, supponendo che OI intersechi la parabola nel punto O'. I segmenti BC (perpendicolare al diametro) e $O'I$ sono le ordinate dei punti B e O' che giacciono sulla parabola, le cui rispettive ascisse sono CD e ID. La proprietà che caratterizza una parabola si sintetizza dicendo che le ascisse stanno fra loro come i quadrati delle rispettive ordinate e dunque

$$CD : DI = BC^2 : O'I^2,$$

ma $OI > O'I$ perché il punto O è esterno alla parabola e dunque

$$CD : DI = BC^2 : O'I^2 > BC^2 : OI^2.$$

La similitudine dei triangoli rettangoli $B\hat{C}E$ e $O\hat{I}E$ giustifica la seguente $BC : OI = CE : IE$ cioè $BC^2 : OI^2 = CE^2 : IE^2$ e quindi

$$CD : DI > CE^2 : IE^2 \tag{4.1}$$

ovvero $CD : DI \approx CE^2 : IE^2$. Si vuole ora trasformare questa disuguaglianza geometrica in una relazione algebrica. Ponendo $CD = d$, $CE = a$ e $CI = e$, si ottiene

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

$$d(a-e)^2 > a^2(d-e)$$

$$da^2 + de^2 - 2dae > a^2d - a^2e.$$

La relazione si trasforma in un'adequazione

$$da^2 + de^2 - 2dae \approx a^2d - a^2e$$

ed eliminando i termini simili si ha

$$de^2 - 2dae \approx -a^2e$$

$$de^2 + a^2e \approx 2dae.$$

Dividendo per e

$$de + a^2 \approx 2da$$

e ponendo $e = 0$ si ottiene una equazione $a^2 = 2da$ cioè $a = 2d$ ovvero la relazione seconda la quale in una parabola la sottotangente CE è doppia del segmento CD, piede dell'ordinata.
Una prima osservazione che si può fare a riguardo di questo esempio è che Fermat considera la determinazione della tangente alla parabola come un'applicazione del metodo dei massimi e minimi: apparentemente non viene massimizzata nessuna relazione, ma in realtà, le cose non stanno così. Infatti, se si considera la disuguaglianza (4.1) e trasformandola in

$$CD : BC^2 > DI : OI^2$$

si può osservare che, se si scegliesse un punto qualsiasi O a destra di B, questa relazione ci dice che $\frac{DI}{OI^2}$ è sempre minore del rapporto fissato $\frac{CD}{BC^2}$ e al più è uguale quando O coincide con B, cioè $e = 0$. Poiché i triangoli $B\hat{C}E$ e $O\hat{I}E$ sono simili e quindi vale $OI^2 : IE^2 = BC^2 : CE^2$, si ha che

$$\frac{DI}{OI^2} = \frac{DI \cdot CE^2}{BC^2 \cdot IE^2},$$

che in termini algebrici e ponendo $CB = b$, si traduce in

$$\frac{DI}{OI^2} = \frac{(d - e) \cdot a^2}{b^2 \cdot (a - e)^2}.$$

L'unica grandezza che varia al secondo membro è e; quindi quest'ultima espressione la si può considerare come una funzione in e e provare che ha un massimo per $e = 0$.

Volevo concludere la parte riguardante Fermat riportando un brano del *Doctrina tangentium* che riassume i punti essenziali del pensiero di Fermat.

"Consideramus nempe in plano cuiuslibet curvae rectas duae positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde, iam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvae, non in curva amplius, sed in invenienda tangente, per adaequalitatem consideramus et, elisis (quae monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum aequalitas quae punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem."

La cui traduzione è

"Consideriamo nel piano in cui giace la curva, due rette date in posizione, della quali una si chiamerà, se si vuole, il diametro e l'altra l'applicata. Supponiamo che sia stata determinata la tangente alla curva in un suo punto e consideriamo la proprietà specifica della curva non sulla curva ma sulla tangente e, dopo aver eliminato la quantità omogenee (come insegna il metodo dei massimi e minimi),alla fine troviamo un'equazione che determina il punto di intersezione tra la tangente e il diametro, e quindi possiamo determinare la tangente vera e propria."

Si può osservare che: Fermat sottolinea la necessità di collocare la curva da studiare in un sistema di riferimento formato da due assi che vengono chiamati diametro e ordinata; questo metodo si basa sull'analisi che suppone nota la tangente da determinare ed esso e serve per determinare la sottotangente, che individua univocamente la tangente. Infine, il passaggio importante è il trasferimento della proprietà che caratterizza la curva dai punti della curva ai punti della tangente, cioè l'equazione si trasforma in adequazione. Tutto questo, in termini moderni, si può tradurre nel fatto che la tangente rappresenta localmente la curva.

4.2 Il problema della velocità

4.2.1 Galileo

Galileo Galilei (Pisa, 15 febbraio 1564 - Arcetri, 8 gennaio 1642) aveva come interesse principale le scienze della natura; pochi sono gli scritti matematici in senso stretto e non i più importanti. Ma egli sa che il libro dell'universo

"è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola".

Il suo pensiero è sempre guidato dal ragionamento matematico.
I discorsi e dissertazioni matematiche intorno a due nuove scienze, pubblicata nel 1638 a Leida, è la più importante opera galileiana sulla scienza moderna, che illustra e dimostra i principi scientifici della fisica, della dinamica dei movimenti, e della scienza delle costruzioni.
Il trattato si sviluppa come un dialogo fra tre personaggi (Salviati, Simplicio e Sagredo), ambientato a Venezia ed essi dibattono fra loro temi scientifici e rappresentano diversi punti di vista: Salviati interpreta il ricercatore innovatore e progressista, Simplicio rappresenta il dotto accademico ancorato alla

tradizione ed infine Sagredo cerca di mediare fra questi due opposti orientamenti, interessandosi anche agli aspetti tecnici ed economici delle nuove scienze.
Il Dialogo avviene in una settimana ed è diviso in sei giornate, ma, in particolare, si considererà solo la terza e quarta giornata.
Nella terza giornata Galileo, dopo aver definito il moto rettilineo uniforme vario (come quello dove la velocità cresce proporzionalmente al tempo) e dopo aver fatto vedere che è questo il moto di un grave cadente verticalmente, ha l'idea semplice di rappresentare il moto mediante un diagramma ove il tempo è assunto come ascissa e la velocità come ordinata. Il diagramma $v = gt$ (g costante) è una retta inclinata sull'asse dei tempi (vedi figura(4.2)).

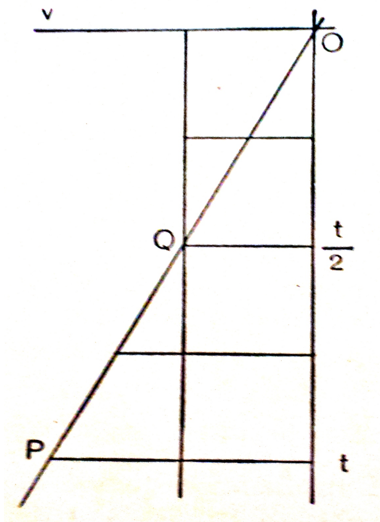


Figura 4.2: Moto di un grave cadente verticalmente

Galilelo dimostra che lo spazio descritto dal mobile nel tempo t è uguale allo spazio che percorrerebbe un altro punto il quale si muovesse di moto uniforme durante lo stesso tempo t con la velocità che il primo punto ha nell'istante $\frac{t}{2}$, cioè la velocità $\frac{gt}{2}$. Lo spazio è così dato da

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

esso è misurato dall'area del triangolo OtP, area il cui valore si otterrebbe mediante una quadratura

$$s = \int_0^t gt\ dt,$$

se valesse la pena di applicare a questo caso elementare la formula generale data più tardi.

Nel dialogo della quarta giornata Galileo stabilisce la legge fondamentale della composizione vettoriale dei moti e ne profitta per determinare la traiettoria descritta da un proiettile. Consideriamo il caso più semplice cioè il proiettile viene lanciato orizzontalmente in O con velocità a, lungo l'asse x, esso, se non esistesse la gravità, percorrerebbe quest'asse di moto uniforme, mentre per effetto della sola gravità cadrebbe di moto uniformemente accelerato lungo l'asse verticale y; per la composizione dei due moti, trascorso il tempo t, il proiettile si troverà nel punto

$$x = at, \; y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Al variare del tempo, il proiettile descriverà, dunque, la parabola

$$y = \frac{g}{2a^2}x^2.$$

Il parametro di questa $\frac{a^2}{g}$, come osserva Galileo, dà il doppio dello spazio di cui dovrebbe cadere un punto lungo l'asse y per arrivare in O con la velocità a, uguale a quella con cui vien lanciato orizzontalmente il proiettile che descrive la data parabola.

4.2.2 Torricelli

Queste fondamentali ricerche di Galileo furono proseguite pochi anni dopo da Torricelli nello scritto *De motu gravium* contenuto nelle sue *Opera geometrica* pubblicate nel 1644. In questo scritto egli, tra gli altri risultati, dà il modo di determinare la velocità con la quale il proiettile cadente lungo la parabola continuerebbe il suo moto, qualora in un determinato istante venisse a cessare la forza acceleratrice, nel qual caso il corpo descriverebbe di moto uniforme la tangente.
Il problema vien poi ripreso sotto una forma più generale negli appunti che Torricelli ha lasciato morendo nel 1647. Torricelli ponendosi da un punto di vista puramente teorico, considera un punto materiale che si muova sopra una retta con una legge qualsiasi. Si può rappresentare in un primo diagramma la velocità v come funzione del tempo, imitando ciò che ha fatto Galileo nel caso del moto uniformemente vario. Allora Torricelli stabilisce che lo spazio s descritto dal punto fra gli istanti t_1, t_2 è dato dall'area compresa fra la curva, l'asse t e le ordinate nei punti t_1, t_2. In scrittura moderna si avrà

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v \; dt.$$

Si costruisce ora un secondo diagramma per rappresentare lo spazio s come funzione del tempo t. Scelto orizzontale l'asse t e verticale diretto verso il basso l'asse s, si può osservare che il diagramma ci dà pure, per il principio di composizione dei moti, la traiettoria che seguirebbe un proiettile il quale venisse lanciato orizzontalmente nel punto $O(0,0)$, con velocità 1, e cadesse d'altra parte con la legge del moto che si vuol studiare. Ora, se in questo istante t cessa la forza che lo sollecita verso il basso, mobile descriverà la tangente PU di moto uniforme con la velocità che ha acquisito in P e che è la risultante della velocità verticale ancora incognita e della velocità orizzontale uguale ad 1. Torricelli dice di immaginarsi di invertire la velocità del punto lungo la tangente. Esso descriverà il tratto PT nel tempo t che il mobile ha impiegato a portarsi da O in P, perché la componente orizzontale della velocità è 1.

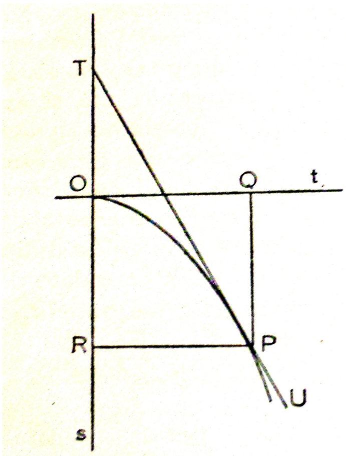


Figura 4.3: Traiettoria di un proiettile lanciato orizzontalmente

Dunque la velocità del punto mobile in P è $\frac{PT}{RP}$, mentre la componente verticale di essa è $\frac{RT}{RP}$, essendo $RP = t$. Se, ora, si riguarda di nuovo la curva come rappresentante lo spazio $s = QP$ in funzione del tempo $t = RP$, questa componente verticale è proprio la velocità v, nell'istante t, del mobile che percorre l'asse s con la legge assegnata. Quindi

$$v = \frac{RT}{RP} = tang\widehat{RPT}$$

ossia, in notazione moderna,

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

In questa ricerca Torricelli ha sicuramente visto il carattere inverso delle due operazioni seguenti:

- quadratura (o integrazione) che dà lo spazio quando sia nota la velocità;
- costruzione della tangente (o derivazione) che dà la velocità quando sia noto lo spazio.

Torricelli si preoccupa di risolvere il problema delle tangenti. Egli non adopera la derivazione o il suo equivalente geometrico per determinare la velocità, ma è la questione inversa che lo interessa. La velocità è per lui già nota a priori; di ciò egli profitta per costruire la tangente, o nel linguaggio moderno, per calcolare la derivata $\frac{ds}{dt}$.
Per esempio, Torricelli considera il moto di un punto la cui velocità cresca proporzionalmente al quadrato del tempo: $v = ct^2$. Lo spazio si ottiene mediante l'integrazione che egli sa eseguire:

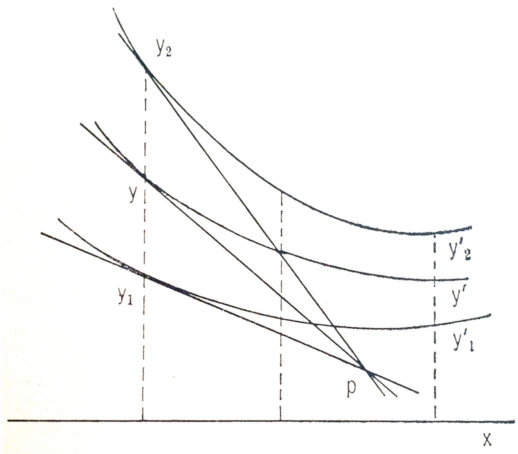
$$s = \int_0^t ct^2\, dt = \frac{ct^3}{3}.$$

Il diagramma che dà lo spazio in funzione del tempo è dunque una parabola cubica. La tangente in P (vedi figura (4.3)) è la diagonale di un rettangolo i cui lati paralleli agli assi t, s valgono 1, ct^2, componenti della velocità orrizzontale e verticale, la quale è già data per ipotesi. Poi si ricava subito che la sottotangente RT sull'asse s è tripla dell'ordinata OR e si ha quindi la regola per costruire la tangente alla parabola cubica.

4.2.3 Barrow

Barrow (Londra, 1630 – 1677) conosce la geometria analitica cartesiana, ma si studia di evitarne l'uso; è dubbio se conosca le ricerche di Fermat, il cui nome, sebbene egli sia molto scrupoloso nelle citazioni, non compare mai nelle sue lezioni. Egli, invece, nomina Cavalieri, Galileo e Torricelli dei quali ha studiato profondamente le opere. La sua opera principale consiste nelle *Lectiones opticae et geometricae* pubblicate nel 1670. Le lezioni geometriche asprirano forse ad essere la prima esposizione organica del nuovo ramo della matematica.
Da Galileo a Torricelli è evidentemente ispirata la generazione di curve esposta nelle prime lezioni di Barrow.
Si immaginino due rette che si muovono l'una parallelamente all'asse y, di moto uniforme, l'altra parallelamente all'asse x di moto vario; il punto d'incontro descrive la curva, che in termini moderni, si rappresenta così parametricamente: $x = at$, $y = f(t)$.
Il doppio movimento serve ad evitare l'introduzione del concetto di funzione; è noto che all'epoca di Barrow non si concepivano altre funzioni all'infuori

delle algebriche, più precisamente delle espressioni razionali ed irrazionali. In quelle prime lezioni, Barrow si propone di estendere alle curve di cui parla, proprietà che Euclide ed Apollonio hanno stabilito per il cerchio e le coniche. Le lezioni seguenti si occuparono propriamente di trasformazioni di curve: data una o più curve riferite biunivocamente, si ricava con una determinata operazione una nuova curva e si dà il moto di condurre la tangente a questa in un punto quando siano note le tangenti a quelle in punti corrispondenti. Per questa via si stabiliscono in modo molto indiretto le regole di derivazione di una somma, di un prodotto ..., senza parlare mai di derivata, ma ricorrendo a procedimenti geometrici spesso faticosi.
Per esempio, si supponga di avere due curve $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ e di costruire la curva $2y = y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$.



Barrow dimostra che le tangenti alle tre curve in punti aventi la stessa ascissa si incontrano in un medesimo punto.
Se si scrivessero le equazioni delle tre tangenti

$$Y - y_1 = m_1(X - x_1),$$

$$Y - y_2 = m_2(X - x_2),$$

$$Y - y = m(X - x),$$

la condizione di concorrenza risulterebbe $2m = m_1 + m_2$ ossia

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}.$$

Il teorema di Barrow, quindi, esprime la proprietà additiva della derivata, ma lui non ha mai parlato di questa determinazione analitica, almeno fino allora.
Arrivato alla fine della decima lezione, Barrow scrive:

"Aggiungo, in forma d'appendice, un metodo per determinare tangenti col calcolo, frequentemente usato da me; sebbene io non sappia se, dopo tanti e pregevoli anni metodi come quelli già visti, vi sia veramente un vantaggio a far ciò. Tuttavia lo farò per seguire il consiglio di un amico [Newton], e tanto più volentieri in quanto il nuovo metodo sembra più fecondo e generale di quelli che ho prima discusso."

Il metodo si presenta così, facendo uso della rappresentazione cartesiana. Nella equazione della curva $f(x, y) = 0$, al posto di x, y si pongono $x + h$, $y + k$ (dove h e k sono i lati infinitesimi del triangolo differenziale di cui parla ogni trattato moderno di calcolo). Nello sviluppo di $f(x + h, y + k) = 0$ il gruppo dei termini indipendenti da h e k si annulla perché il punto (x, y) appartiene alla curva. Si cancellino poi tutti i termini che sono infinitesimi d'ordine superiore al rispetto ad h e k. Resta una equazione lineare omogenea in h, k la quale dà il rapporto $h : k = S_t : y$, dove S_t è la sottotangente. Poi seguono alcuni esempi in cui viene applicato questo metodo.
Sempre in questa lezione si trovano alcune notevoli trasformazioni di curve esposte allo scopo di condurre a costruzioni di tangenti. In particolare, Barrow dice di volerne indicare una che "*si vedrà essere molto generale e non conveniente omettere*".
Sia $y = f(x)$ una curva crescente, si costruisce un altra curva $Y = F(x)$ con la condizione che l'ordinata $Y = NP$ sia uguale all'area compresa fra la prima curva, l'asse x e le ordinate $f(0) = OL$, $f(x) = NM$; con la scrittura moderna

$$Y = \int_0^x y dx.$$

Barrow, allora, dice che per costruire la tangente in un punto $P(x, Y)$ si deve procedere così: partendo dal punto $N(x, 0)$ si porti sull'asse x il segmento $NT = \frac{Y}{y} = \frac{NP}{NM}$ e si congiunga P con T; la retta PT è la tangente richiesta. Tanto vale a dire che il coefficiente direttivo della tangente è $\frac{NP}{NT} = NM = y$, cioè

$$\frac{dY}{dx} = y$$

(Si veda figura(4.4)).
In questo modo Barrow presenta il carattere inverso della derivazione e della integrazione e giustifica la costruzione della tangente per via interamente geometrica nel modo seguente. Egli prende sulla seconda curva un punto qualsiasi $P_1(x_1, Y_1)$ e conduce per esso la parallela P_1Q all'asse x. Per la definizione di questa curva si ha $QP = Y - Y_1 = area(N_1M_1MN)$. Dall'altra parte

$$QR : QP = NT : NP = \frac{Y}{y} : Y = \frac{1}{y};$$

e quindi

$$QR = \frac{1}{y} = area(N_1M_1MN).$$

Ora la detta area è minore di $y(x - x_1)$ se $x > x_1$, perché la curva LM_1M è crescente; dunque $QR > QP_1$. Se invece $x < x_1$, con lo stesso ragiovamento, si trova $QR < QP_1$. Ciò dimostra che la retta PT, la quale ha in comune il punto P con la curva OP_1PP_2, lascia questa da una stessa banda ed è quindi la tangente ad essa.

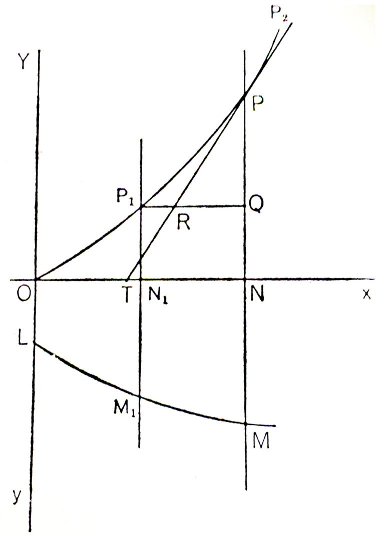


Figura 4.4: Costruzione geometrica della tangente

Anche Barrow, come Torricelli, non sa trarre da questo fondamentale teorema tutte le conseguenze in esso racchiuse, perché non sostituisce all'ente geometrico tangente, l'ente analitico corrispondente derivata, al quale accenna soltanto nei passaggi appena visti.
Nelle ultime lezioni, Barrow pone e risolve vari problemi che portano alla integrazione di una equazione differenziale. Si tratta, cioè, di costruire una curva le cui tangenti soddisfano a una determinata condizione. Per esempio, si voglia la curva la cui sottotangente nel punto $(x; y)$ sia uguale all'ordinata $Y = f(x)$ di una curva data. Oggi scriveremo così l'equazione del problema

$$S_t = \frac{y}{y'} = f(x).$$

Barrow con i suoi procedimenti geometrici riesce a separare le variabili e ad integrare l'equazine ottenendo un risultato equivalente a questo:

$$\int_c^y \frac{dy}{y} = \int_0^x \frac{dx}{f(x)},$$

dove c'è una costante arbitraria positiva. Il risultato è presentato in forma geometrica: il primo integrale, per Barrow, è l'area compresa fra un'iperbole equilatera, un asintoto e due parallele all'altro asintoto; il secondo integrale esprime un area relativa alla curva $Y_1 = \frac{1}{f(x)}$.
Si deve osservare che fra i predecessori di Barrow il problema dell'integrazione si proponeva ordinariamente il calcolo di una area, mentre qui l'area limitata da un'ordinata variabile, sta a rappresentare una funzione nota e, precisamente, non l'area della curva data $Y = f(x)$, ma di una trasformata di questa cioè $Y_1 = \frac{1}{f(x)}$.

Capitolo 5

Isaac Newton

[15]Isaac Newton nacque in un villaggio, Woolsthorpe, della Contea di Lincoln il 25 dicembre 1642.
Newton aveva dimostrato interesse per le materie scientifiche fin da giovanissimo, occupandosi, in particolare, di chimica e alchimia, discipline che all'epoca erano molto vicine tra loro. La famiglia era di tradizioni contadine: garantì a Newton una vita senza troppe difficoltà economiche ma piuttosto umile. Isaac fu il primo della sua famiglia a saper scrivere il proprio nome e cognome. Gli studi che aveva portato avanti gli avevano conferito una preparazione in Latino, Greco ed Ebraico e basilari nozioni di aritmetica. A diciasette anni a Newton fu imposta la vita contadina: avrebbe dovuto prendere in mano la gestione della fattoria di famiglia. Tuttavia ben presto divenne evidente che non era quello il tipo di vita per il quale il giovane Isaac era nato, fu quindi rimandato alla Grammar School di Grantham a completare la formazione, in preparazione agli studi universitari. Quando nel 1661 Newton fu mandato a studiare al Trinity College di Cambridge, sapeva poco e nulla di matematica.
Anche senza quasi nessuna preparazione specifica, Newton fu indirizzato dal tutor Isaac Barrow verso gli studi di matematica e fisica, piuttosto che di filosofia. Ma non furono soltanto le lezioni di Barrow a nutrire la vorace mente del giovane Isaac. La maggior parte di ciò che Newton apprese nei primi anni a Cambridge è da considerarsi frutto della sua abilità da autodidatta. Questo testimania l'incredibile predisposizione naturale che egli aveva nei confronti della matematica.
Gli anni anni 1664 e 1665 furono dedicati da Newton interamente allo studio dei testi matematici francesi Descartes e Viète (1540 - 1603), degli olandesi

[15]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [3], [5], [11] e [12].

Hudde (1628 - 1704), Huygens (1629 - 1695), Van Schooten (1615 - 1660) e dei connazionali Wallis (1616 - 1703) e Oughtred (1574 - 1660). Furono proprio questi anni di intenso studio a condurlo ad un periodo di grande creatività in diversi ambiti scientifici. Dal punto di vista specificamente matematico, nell'inverno del 1664 Newton padroneggia lo sviluppo della serie binomiale, da lui inventata, e pochi mesi dopo già utilizzava procedimenti di derivazione e integrazione. In paratica a partire dal 1664 Newton si rese conto di aver raggiunto i limiti della conoscenza matematica: era ormai pronto a dare il proprio contributo[16].
A causa di una epidemia di peste, per gran parte dell'anno accademico 1665 - 1666 il Trinity College rimase chiuso e Newton rientrò a casa per evitare il contagio e per continuare a studiare. In questi mesi di ritiro forzato, Newton fece quattro delle sue maggiori scoperte fisico-matematiche, in particolare: la formula del binomio[17], il metodo delle flussioni, la legge di gravitazione universale e la natura dei colori.
Il 29 ottobre 1669 il Newton fu chiamato a succedere al suo maestro Barrow nella cattedra di professore lucasiano a Cambridge; vi rimase oltre vent'anni. Il suo nome, già grande per le ricerche di matematica e di ottica, acquistò fama universale in seguito alla pubblicazione dei *Principi di filosofia naturale* (1686 – 1687).
Morì il 20 marzo 1727 e fu sepolto nell'Abbazia di Westminster a Londra.

5.1 Il metodo delle flussioni

Il metodo delle flussioni (o calcolo delle flussioni), come viene usualmente chiamato il metodo scoperto da Newton per l'integrazione e la derivazione, risale agli *anni mirabiles* 1665 e 1666, ma i primi testi Newtoniani che ne trattano in modo sistematico sono successivi. Furono pubblicate con notevole ritardo sia per desiderio di raggiungere un più perfetto rigore, sia per evitare critiche penose al suo carattere timido e riservato, o per non fornire ad altri i procedimenti di indagare che gli servivano a risolvere nuovi problemi.
Il metodo delle flussioni si estende in tre trattati, che andrò qui di seguito ad analizzare:

- *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*;

[16]In una lettere ad Hooke scritta anni dopo, Newton descrive questo particolare momento in modo molto felice: *Se ho visto più in là di Descartes, è perché mi ero drizzato sulle spalle dei giganti.*

[17]Per un approfondimento si rimanda all'*Appendice 2*, dove viene riportata la spiegazione della formula.

- *Methodus fluxionum ed serierium infinitarum*;
- *Tractus de quadratura curvorum.*

5.1.1 De analysi per aequationes numero terminorum infinitas

Il *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* fu pubblicato nel 1711, ma cominciò a circolare tra gli amici dello scienziato inglese a partire dal 1669. In questo testo monografico Newton ancora non fa uso della notazione che poi adotterà nel suo metodo delle flussioni, anzi, ancora non usa nemmeno la terminologia tipica dei suoi lavori successivi. Egli estende l'applicabilità dei metodi trovati in Barrow w Ferma attraverso il suo teorema del binomio.
Newton introduce il concetto di infinitamente piccolo, sia geometricamente che analiticamente, utilizzando l'idea di un rettangolo indefinitamente piccolo e ottiene la quadratura delle curve nel modo seguente:

Sia tracciata una curva in modo tale che per l'ascissa x e l'ordinata y l'area sia

$$z = \left(\frac{n}{m+m}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}.$$

Sia o il momento o incremento infinitesimo sull'asse delle ascisse. Il nuovo valore sulle ascisse sarà dunque $x + o$ e l'area sarà diventata

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+m}\right) a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Applicando il teorema del binomio, dividendo per o e poi annullando tutti i termini contenenti o[18]. Il risultato sarà allora $y = ax^{\frac{m}{n}}$.
E dunque, se l'area sottesa alla curva è

$$z = \left(\frac{n}{m+m}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}.$$

[18] Questo è un passaggio molto delicato e controverso: Newton prima divide per o, assumendo quindi $o \neq 0$, ma poi fa tendere o a valori infinitamente piccoli, annullando quindi tutti i termini che si moltiplicano per o, come se all'infinito fosse effettivamente $o = 0$.

la curva sarà $y = ax^{\frac{m}{n}}$[19].
Mentre data una curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$, sarà possibile ottenere l'area[20]

$$z = \left(\frac{n}{m+m}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}.$$

In questo modo Newton, considerando l'incremento dell'area, risolve quello che in analisi moderna viene detto integrale indefinito. In precedenza l'integrazione veniva considerata soltanto come limite di una somma in un intervallo. Centrale in questo procedimento è la determinazione dell'incremento, cioè alla base del metodo di integrazione c'è la derivazione. Newton fu il primo a trovare un metodo generale per calcolare le derivate e un metodo per ricondurre i problemi di somme alla derivazione. In precedenza veniva fatto esattamente l'inverso: i problemi di calcolo di tangento venivano ricondotti alla quadratura delle curve.
Sebbene il *De Analysi* contenga molti dei metodi essenziali alla base del calcolo, Newton non fornisce alcuna giustificazione rigorosa. Si tratta di una spiegazione piuttosto che di una dimostrazione, quindi nessun concetto viene chiarito con cura. Possiamo soltanto dedurre che nell'operazione di integrazione precedentemente descritta l'ordinata y rappresenta la velocità dell'incremento dell'area, mentre sulle ascisse x troviamo il tempo. Newton considerava appartenenti alla metafisica tutti i problemi legati al moto, questa è una ragione per cui inizialmente evitò ogni tentativo di definizione troppo rigorosa e limitativa.

5.1.2 Methodus fluxionum ed serierium infinitarum

Il *Methodus fluxionum ed serierium infinitarum*, che viene fatto risalire al 1671, è decisamente più estese e per certi versi più completo. Questo trattato, pubblicato soltanto nel 1736, introduce la notazione caratteristica dei testi successivi e i concetti basilari del calcolo delle flussioni di Newton. Fondamentalmente nel sistema di Newton diventa il concetto di moto, strettamente legato al concetto intuitivo di tempo e quindi considerato primitivo, tanto che non necessita di alcuna definizione. Newton chiama *flussione* la velocità di generazione della quantità variabile detta *fluente*. Se denotiamo con x e y le quantità fluenti, allora le flussioni saranno denotate con $\dot{x}$ e $\dot{y}$[21].

[19] Questa è una operazione di derivazione.
[20] Questa è una operazione di integrazione.
[21] Nella notazione Newtoniana a partire dal 1691, una flussione è denotata da una lettera con un punto al di sopra di essa, in inglese ci si riferisce ad esse come "pricked letter". Pri-

In analisi moderna una flussione è semplicemente la derivata prima della funzione considerata. Ovviemente Newton considerava anche flussioni di grado superiore denotandone con un ulteriore punto al di sopra della lettera, ad esempio $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ sono le flussioni di $\dot{x}$ e $\dot{y}$, a loro volta flussioni di x e y.
Nel *Methodus Fluxionum* Newton enunciò chiaramente il problema fondamentale del calcolo: data una relazione tra le quantità fluenti, stabilire la relazione tra le relative flussioni, e viceversa. Seguendo il metodo di Newton, si considera la relazione $y = x^n$. La soluzione viene ottenuta con un metodo che si discosta leggermente ma in mondo fondamentale da quello del *De Analysi*. Sia o un intervallo di tempo infinitamente piccolo, siano $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ gli incrementi infinitesimi, o momenti, delle quantità fluenti x ed y. Tornando a $y = x^n$, sostituiamo x con $x + \dot{x}o$ e y con $y + \dot{y}o$. Infine, in modo analogo a quanto descritto nel *De Analysi*, applichiamo il teorema del binomio, cancelliamo tutti i termini non contenenti o e dividiamo tutto per o.

$$\begin{aligned} y &= x^n \\ y + \dot{y}o &= (x + \dot{x}o)^n \\ \dot{y} &= (x + \dot{x}o)^n \\ &\vdots \\ \dot{y} &= nx^{n-1}\dot{x}. \end{aligned}$$

I cambiamenti di notazione non influenzano sostanzialmente i precedenti risultati, ma eliminano le difficoltà, secondo Newton, della dottrina degli indivisibili utilizzando il concetto molto più intuitivo di moto. In questa prima formulazione del metodo delle flussioni, resta tuttavia ancora molto incerto il concetto di limite. Newton tratta le flussioni come quantità *evanescenti*, perché ad un certo punto i termini sono infinitamente piccoli, ma, poiché di fatto le flussioni sono sempre in rapporto tra loro, serve una più rigorosa definizione di limite per evitare incertezze nel procedimento[22].
Resta comunque il fatto che Newton, a partire dal 1666, già possedeva le regole generali del calcolo infinitesimale. Più tardi, intorno al 1671, iniziò ad utilizzare un metodo molto evolutivo per trattare i problemi di calcolo delle tangenti e delle quadrature, dando vita al primo sistema strutturato di calcolo di integrali e derivate nella storia della matematica.

---

ma di quella data Newton utilizzava una notazione molto scomoda, con lettere dell'alfabeto diverse per indicare le fluenti e le relative flussioni.

[22] Si sta criticandola leggerenza con la quale Newton prima considera o un divisore e poi elimina i termini che contengono o perché infinitamente piccoli.

5.1.3 Tractus de quadratura curvorum

Tractus de quadratura curvorum venne pubblicato soltanto nel 1704.
In questo testo Newton si allontana da concetto di infinitamente piccolo, rappresentato dalla o di $x + o$, che lo portava a considerare nulli alcuni termini in cui compariva il termine infinitamente piccolo, ovvero trascurabile. Piuttosto egli comincia a considerare le flussioni sempre in rapporto, mai da sole, quasi anticipando il concetto di limite[23].
Ad esempio consideriamo le fluenti x e y collegate dalla relazione $y = x^2$. Nell'intervallo di tempo finito o, x si incrementa di $o\dot{x}$ nel tempo in cui la quantità x, fluendo, diventa $o\dot{x}$, la quantità $y = x^2$ diventa

$$(y = x + x\dot{x})^2 = x^2 + ox\dot{x} + o^2x^2.$$

Prendiamo, ora, il rapporto tra l'incremento della x e quello della y, che è

$$\frac{ox}{2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2} = \frac{1}{2x + o\dot{x}}.$$

Il rapporto è tra quantità finite, non infinitesime, quindi è possibile calcolare il valore di tale rapporto quando o è uguale a zero. Esso è pari a $\frac{1}{2}x$ ed è detto ultima ragione, perché è l'ultimo della successione di rapporti numerici che si ottengono per valori di o decrescenti verso lo zero. Ma è detto anche prima ragione, perché è il primo della successione di rapporti numeri crescenti a partire dallo zero. Egli si riferisce all'ultima e alla prima ragione rispettivamente come quantità evanescenti e quantità nascenti. Newton si avvicina molto al concetto moderno di derivata, nel suo linguaggio "flussione", ma lo fa in modo confuso perché non utilizza la terminologia di limite.
Il ragionamento di Newton è debole dal punto di vista aritmetico: egli non chiarisce l'ultima ragione in termini di limite della successione di numeri che rappresentano le ragioni delle quantità (le flussioni), ma piuttosto la intuisce geometricamente.
Ciò che mancava insomma al metodo di Newton, era una rigorosa aritmetizzazione del procediemtno e una chiarificazione del linguaggio[24].

[23]Evidentemente Newton avvertiva la necessità di servirsi della nozione di limite, che però non verrà definita rigorosamente fino all'Ottocento.

[24]Proprio su ciò cui Leibniz era più preparato. Al tempo del *De quadratura* Leibniz, in fatti aveva chiara la natura artimetica e algoritmica dei problemi del calcolo infinitesimale, e già utilizzava la notazione dx per indicare le derivate.

5.2 Philosophiae naturalis principia mathematica

La prima espansione del suo metodo delle flussioni che Newton abbia mai pubblicato apparve nella prima edizione dei *Philosophiae naturalis principia mathematica*, nel 1687. Si tratta del più importante trattato scientifico di tutti i tempi: questo libro di oltre cinquecento pagine, scritto interamente in latino, presentò i fondamenti della fisica e dell'astronomia nel linguaggio della geometria pure.
Newton, che era solito lavorare ininterrottamente giorno e notte nei suoi alloggi all'università di Cambridge, completò la prima parte dei *Principia* in solito diciotto mesi. All'epoca egli era senz'altro l'unico matematico attivo a Cambridge, nonché uno dei pochi scienziati.
Intorno all'estate del 1685 egli aveva già scritto interamente quello che in pubblicazione divenne il Libro I, e buona parte del Libro II. Nessuno dei lavori matematici di Newton aveva ancora visto la luce, quindi i *Principia* furono il primo testo a presentare le sue teorie sul calcolo infinitesimale. Tuttavia, sebbene il metodo delle flussioni fosse intrinsecamente algebrico, l'apporccio dei *Principia* era invece soprattutto geometrico. Newton cercò di sostenere che in questo enorme trattato ebbe modo di presentare al mondo scientifico i suoi metodi matematici, ma in realtà non era presente alcun elemento di quello che fu poi riconosciuto come il metodo delle flussioni. I *Principia* mantennero un approccio geometrico, dunque Newton non fece altro che enunciare alcune proposizioni matematiche nel linguaggio più compatibile con le sue teorie fisiche.
Infatti, oltre a complicati diagrammi, illustrazioni, tavole astronomiche e disegni geometrici, nel *Principia Mathematica* ci sono numerose proposizioni analitiche. La prima sezione del Libro I è intitolata: "Il metodo delle prime e ultime ragioni delle quantità, con l'aiuto del quale dimostriamo le proposizioni che seguono". Tali proposizioni iniziano con il Lemma 1:

> "Delle quantità, o dei rapporti di quantità, che in un intervallo di tempo finito qualsiasi convergono con continuità verso l'uguaglianza, e che prima della fine di tale intervallo si avvicinano l'una all'altra così tanto che la loro differenza è inferiore a qualsiasi differenza data, finiscono per diventare uguali."

Questo lemma è chiaramente una definizione, o meglio un tentativo di definizione, del concetto di limite di una funzione. Newton ancora si riferisce alle prime ed ultime ragioni delle quantità, ma finalmente la sua esposizione

prende la forma di un vero e proprio trattato scientifico, con enunciati, dimostrazioni, lemmi e corollari.
Newton si concentra sul rapporto tra quantità variabili preservando un approccio piuttosto informale al calcolo, perché i metodi presentati sono ancora esposti come procedere matematiche generali. Ciò che tuttavia non può essere messo in dubbio è che Newton mostrò nei *Principia* delle tecniche per risolvere problemi di differenziazione ed integrazione, anticipando molti risultati degli anni successivi.
Un fatto importante fu la relativa chiarezza che Newton adottò nei *Principia*, soprattutto per quanto riguarda le parti più matematiche. La matematica dei *Principia* era più semplice da capire, rispetto allo stile del *Metodo delle flussioni*, ma anche rispetto alle oscure formulazioni del *Nova Methodus* di Leibniz. Del resto il calcolo di Leibniz era ancora troppo immaturo[25] per poter essere utilizzato nelle questioni fisiche trattate da Newton, che quindi utilizzò la matematica che aveva a disposizione. È da sottolineare che Newton utilizzò i metodi matematici proprio in funzione dell'utilità che avevano per descrivere la sua nuova fisica, piuttosto che per interesse puramente teorico.
Nel corso del Libro I egli fa ampio uso delle serie infinite: ancora non viene esplicitato l'aspetto algoritmico del calcolo. All'inizio del Libro II, compare una misteriosa formulazione della derivazione, che viene presentata semplicemente come un metodo per calcolare i cambiamenti di quantità matematiche. Lo stile è più adatto ad un testo di alchimia che non ad un trattato di matematica:

> "*Il momento di qualsiasi genitum è uguale ai momenti di ciascuno dei lati generatori moltiplicati continuamente per gli indici delle potenze di quei lati e per i loro coefficienti.*"

La spiegazione che Newton dà di questo Lemma mostra che con *genitum* egli in realtà intendeva quello che noi chiamiamo termine da derivare e per il *momento di un genitum* intendeva un incremento infinitamente piccolo. Indicato con a il momento di A e con b il momento di B, Newton dimostra che

$$\text{il momento di } AB \text{ è } aB + bA$$
$$\text{il momento di } A^n \text{ è } naA^{n-1}$$
$$\text{il momento di } \tfrac{1}{A} \text{ è } -\tfrac{a}{A^2}.$$

Banalmente, togliendo i momenti a, b dove servono, riconosciamo nelle espressioni di Newton le derivate rispettivamente di un prodotto, di una potenza

[25] Poiché la prima parte mancava completamente dei motodi di integrazione.

e di una potenza con esponente non negativo. Tali espressioni sono la prima dichiarazione ufficiale[26] di Newton riguardo al calcolo infinitesimale. Al momento della pubblicazione pochi matematici riuscivano a comprendere a pieno la nuova analisi espressa nel complicato linguaggio Newtoniano. Ma quando, nel continente, era probabilmente in grado di capirla, come lo stesso Newton riconosce nello scolio al Lemma II, dal secondo libro della prima edizione dei *Principia*.
Newton non era certo il primo ad effettuare derivazioni ed integrazioni, o a percepire la relazione esistente fra queste operazioni, espressa nel teorema fondamentale del calcolo infinitesimale. La sua scoperta fu quella di consolidare tali elementi e coordinarli in un algoritmo applicabile a tutte le funzioni. Una scoperta che nella prima edizione dei *Principia* poteva in qualche modo condividere con Leibniz, ma che nelle edizioni successive invece volle rivendicare completamente a sé. Nell'edizione del 1726, Newton toglie ogni riferimento a Leibniz. Ma per quale motivo?
La ragione principlae per cui Newton scelse di nominare Leibniz e porlo sul suo stesso livello era ovvia: Leibniz aveva già pubblicato tre anni prima un testo in cui presentava il suo calcolo differenziale. Tale testo era ormai riconosciuto come la prima pubblicazione sulla nuova matematica. Semplicemente Newton non poteva ignorarlo. Soprattutto nell'Europa continentale, i metodi del calcolo erano ormai strettamente legati al nome di Leibniz.
I motivi per cui Newton decise di rimuovere completamente ogni riferimento a Leibniz nelle edizioni successive dei Principia sono altrettanto ovvi: non voleva continuare a riservargli un posto così privilegiato nel suo libro più importante. Nemmeno Lebniz aveva fatto alcun riferimento a Newton nella sua pubblicazione del 1684.
Nel 1687 i rapporti tra i due matematici erano ancora buoni, anche se ormai non erano più in contatto. Leibniz infatti venne a conoscenza della pubblicazione dei *Principia* da una recensione di dodici pagine pubblicata sugli *Acta Eruditorum* nel 1688. Erano chiuse le comunicazioni da una sponda all'altra dello Stretto della Manica, ma la stima di Leibniz nei confronti di Newton era rimasta intatta. Il merito scientifico dei *Principia mathematica* di Newton è fuori discussione. La sua importanza è anche nell'aver esposto i metodi matematici di Newton in una forma comprensibile, più di quanto non fosse differenziale di Leibniz.

[26] Ufficiale perché compaiono in un testo pubblicato.

Capitolo 6

Gottfried Wilhelm Leibniz

[27]Gottfried Wilhelm Leibniz nacque a Lipsia il 3 luglio 1646. Tra il 1661 e il 1663 studiò filosofia a Lipsia e matematica elementare a Jena. Il barone di Boineburg si accorse ben presto del valore del giovane Leibniz e gli affidò nel 1672 una missione diplomatica alla corte di Luigi XIV a Parigi. Qui egli conobbe gli uomini maggiori che venivano allora in quel gran centro intellettuale e strinse amicizia con Christian Huygens, il quale lo mise al corrente dei processi che la matematica andava compiendo e lo incitò a leggere gli scritti di Cavalieri, Descartes, Fermat e Pascal. Fu a Londra una prima volta nel 1673, strinse rapporti con Oldenburg ed altri soci influenti della Royal Society[28], nella quale egli stesso entrò poco dopo. Non conobbe però Newton. Delle scoperte analitiche di questo sommo scienziato egli ebbe notizia due anni dopo a Parigi, dal matematico W. von Tschirnhaus che, durante un soggiorno in Inghilterra, aveva avvicinato Newton.
Per avere maggiori particolari Leibniz scrisse a Newton nel 1676 e ricevette, lo stesso anno, due lettere in risposta, una del giugno, l'altra dell'ottobre, ove il grande matematico espone alcune delle sue scoperte ed in particolare quelle riguardanti gli sviluppi in serie. Newton nasconde, invece, sotto un anagramma un cenno sul metodo delle flussioni, anagramma superfluo, perché la spiegazione che l'autore ne diede più tardi nulla avrebbe insegnato a chi di quel metodo non avesse già conosciuto gli elementi.
Leibniz fu di nuovo a Londra nell'ottobre 1676 e poté colà prendere visione, presso Collins che lo aveva in consegna, del manoscritto di Newton *De Ana-*

[27]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [3] e [5].

[28]È un'associazione scientifica britannica, fondata il 28 novembre 1660 per iniziativa di John Evelyn (1620-1706),scrittore inglese e altri accademici allo scopo di promuovere l'eccellenza scientifica come viatico per il benessere della società.

lysi per aequationes numero terminorum infinitas.
Leibniz morì il 14 novembre 1716 amareggiato per le violente critiche rivoltegli dagli amici e discepoli di Newton che lo accusano di essersi appropriato metodi e risultati spettanti al loro maestro.

Da appunti manoscritti di Leibniz, che risalgono agli anni $1673 - 1675$, risulta che egli era in possesso fin d'allora della notazione differenziale che è poi divenuta classica; egli vi accenna pure in una lettera del 21 giugno 1677 destinata a Newton. Il primo lavoro su tale argomento è *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, pubblicato nel 1684 negli *Acta Eruditorum* di Lipsia. Il titolo ed uno dei problemi trattati ricordano la memoria di Fermat ove appare per la prima volta il concetto di derivata. Leibniz parte da una curva $y = f(x)$ e suppone che sia tracciata la tangente uscente da un punto (x, y) della curva. Dato poi ad x un incremento qualsiasi che egli chiama differenza (e noi differenziale) ed inizia con dx, sceglie il differenziale della funzione, dy, in modo che il rapporto $\frac{dy}{dx}$ uguagli il coefficiente direttivo della tangente, cioè la derivata. Questa definizione coincide con quella che si dà oggi.
Esporrò come Leibniz enuncia le regole delle operazioni sui differenziali (differenziale somma, del prodotto, del quoziente, della potenza a esponente razionale) senza mai parlare di derivata e senza introdurre i concetti di limite o di infinitesimi dei vari ordini.

> "Sia dato l'asse AX, e più curve come VV, WW, YY, ZZ, e le ordinate di un loro punto, normali all'asse, siano VX, WX, YX, ZX: queste si dicono rispettivamente v, w, y, z; ed il segmento AX, tagliato sull'asse, sia detto x. Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B, C, D, E (v. fig.18b).
> Ora un segmento, preso ad arbitrio, sia detto dx ed un segmento (v. fig.18a) che sta a dx, come v (o w, o y, o z) sta a BX (o CX, o DX, o EX) sia detto dv (o dw, o dy, o dz) ossia differenza delle stesse v (o w, o y, o z). Ciò posto, le regole del calcolo saranno queste:
> Sia a una quantità data costante, sarà
>
> $$da = 0 \text{ e } dax = adx.$$
>
> Se abbiamo $y = v$ (ossia se un'ordinata qualsiasi della curva YY, è uguale ad una qualsiasi ordinata corrispondente della curva VV),

sarà: $dy = dv$ (v. fig. 18).
Addizione e sottrazione:
se si ha

$$z - y + w + x = v,$$

sarà

$$d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx.$$

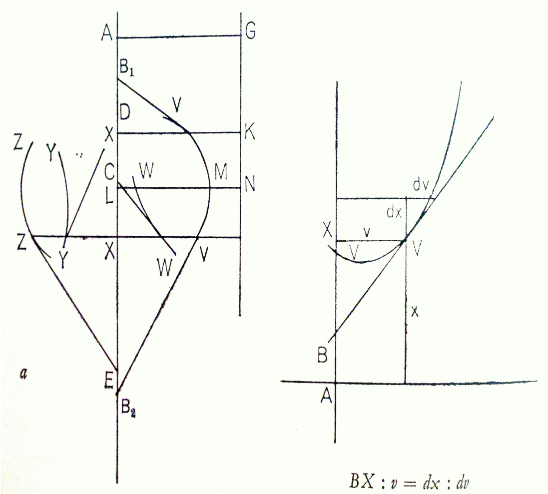


Fig. 18*a*

Fig. 18*b*

Moltiplicazione:

$$dxv = xdv + vdx,$$

ovvero, posto

$$y = xv,$$

sarà

$$dy = xdv + vdx.$$

Infatti è ad arbitrio impiegare un'espressione come xv, oppure brevemente una sola lettera come y.
È da notarsi che in questo calcolo si trattano nello stesso modo tanto x come dx, tanto y quanto dy, o un'altra qualsiasi lettera indeterminata come il suo differenziale.
È anche da notarsi che non sempre può darsi il procedimento inverso a partire da un'equazione differenziale, senon con una certa cautela di cui si dirà altrove.

Divisione:
posto
$$z = \frac{v}{y}$$
si ha
$$d\frac{v}{y} = dz = \frac{\pm v dy \mp y dv}{y^2}.$$
Quanto ai segni è da notarsi ora questo: quando viene sostituito alla lettera semplicemente il suo differenziale, si devono conservare gli stessi segni, e scrivere $+dz$, in luogo di $+z$ e $-dz$, in luogo di $-z$, come appare dall'addizione e dalla sottrazione esposta poco prima. Ma quando si viene alla discussione dei valori, o quando viene considerata la relazione di z con x, appare allora se dz è una quantità positiva o minore di zero, ossia negativa; in quest'ultimo caso, la tangente ZE si conduce dal punto Z non verso A, ma in direzione opposta, ossia al disotto di X, e ciò accade quando le stesse ordinate z descrescono mentre crescono le x.

E poiché le stesse ordinate v, ora crescono ed ora decrescono, dv sarà una quantità talora positiva e talora negativa: nel primo caso la tangente V_1B_1 viene condotta verso A e nell'altro V_2B_2 in direzione opposta.

Né un caso, né l'altro si presenta poi nel mezzo in M, nel quale punto le stesse v né crescono né decrescono, sono stazionarie, e così è $dv = 0$, dove non importa che la quantità sia positiva o negativa, poiché $+0 = -0$; ed ivi la stessa v, vale a dire l'ordinata LM, è massima (se volgesse la convessità all'asse sarebbe minima), e la tangente alla curva in M né l'asse, né sotto X in direzione opposta, ma risulta parallela all'asse.

Se dv è infinito rispetto a dx, allora la tangente è perpendicolare all'asse, ossia è l'ordinata stessa.

Se dv e dx sono uguali, la tangente forma un angolo semiretto con l'asse.

Se crescono le ordinate v crescono pure gli stessi loro incrementi, o i differenziali dv (ossia se presi i dv positivi anche i d^2v, differenza delle differenze, sono positivi, e se i dv negativi, anche i d^2v sono negativi) la curva volge all'asse la sua concavità, o, nel caso contrario, la sua convessità; dove però è massimo o minimo l'incremento, o dove gli incrementi da decrescenti divengono crescenti, o viceversa, ivi è un punto di flesso: concavità o convessità si scambiano fra loro, purché però nello stesso punto le ordinate da decrescenti non divengano crescenti o viceversa; allora, infatti,

la concavità o la convessità rimarrebbe; non può, invece, accadere che gli incrementi continuino a crescere o a decrescere, ma le ordinate diventino da crescenti decrescenti o viceversa.
Si trova quindi un punto di flesso quando d^2v è zero, mentre v e dv sono diversi da zero. Cosicché nel problema del flesso si hanno tre radici eguali, e non due sole come nel problema della massima ordinata.
In tutti questi capitoli occorre un retto uso dei segni. Talvolta poi sono da adoperarsi i segni ambigui, come si è detto nella divisione, prima cioè che risulti come debbono essere interpretati."

Leibniz, non avendo fissato esatte convenzioni sull'uso dei segni in geometria analitica, si trova costretto a complicare le regole del calcolo introducendo segni ambigui.

"E invero se crescono (o decrescono) le $\frac{v}{y}$, i segni ambigui in $d\frac{v}{y}$ ossia in $\frac{\pm v dy \mp y dv}{y^2}$ devono interpretarsi in modo che la frazione sia una quantità positiva (o negativa). Inoltre $\mp$ significa il contrario di $\pm$, in modo che se questo è $+$ quello sia $-$, e viceversa.
Possono pure in uno stesso calcolo, presentarsi più ambiguità, che distinguono per mezzo di parentesi; ad esempio se fosse

$$\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$$

sarebbe

$$\frac{\pm v dy \mp y dv}{y^2} + \frac{(\pm) y dz (\mp) z dy}{z^2} + \frac{(\pm) x dv (\mp) v dx}{v^2} = dw;$$

altrimenti le ambiguità sorte da espressioni diverse si confonderebbero. E qui è da notarsi che una quantità avente segno ambiguo, moltiplicata per se stessa dà un risultato positivo, per il suo contrario negativo, per un'altra di segno ambiguo forma una nuova ambiguità che dipende da entrambe.
Potenza:

$$dx^a = a x^{a-1} dx;$$

sarà

$$d\frac{1}{x^a} = -\frac{a dx}{x^{a+1}}.$$

Radice

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}.$$

sarà

$$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}.$$

Sarebbe invero bastata la regola della potenza numerica intera per determinare i differenziali tanto delle frazioni come delle radici; la potenza, infatti, diviene una frazione quando l'esponente è negativo, e si muta in radice quando l'esponente è frazionario: ma ho preferito dedurre io stesso queste conseguenze piuttosto che lasciarle ad altri da dedurre, dal momento che sono assai generali e s'incontrano spesso queste conseguenze piuttosto che lasciarle ad altri da dedurre, dal momento che sono assai generali e s'incontrano spesso, e in un argomento per sé stesso complesso è preferibile pensare alla felicità.
Dalla conoscenza di questo particolare algoritmo, o di questo calcolo, che io chiamo differenziale, tutte le altre equazioni differenziali possono ricavarsi per mezzo del calcolo comune, ed ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti, in modo che non sia necessario far sparire le frazioni o gli irrazionali, od altri vincoli, come tuttavia si doveva fare, secondo i metodi sin'ora pubblicati."

Non risulta come le giustificasse, ma soltanto ad un certo punto dice:

"*Dalla conoscenza di questo particolare algoritmo, o di questo calcolo che io chiamo differenziale, . . . , possono . . . ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti in modo che non sia necessario far sparire le frazioni o gli irrazionali, od altri vincoli, come tuttavia si doveva fare secondo i metodi sinora pubblicati.*"

Si osservi che Leibniz aveva ricavato il rapporto $\frac{dy}{dx}$ dalla conoscenza della tangente, mentre qui allude al processo inverso. Qui vi è forse una illusione di Newton che, in un lavoro allora non pubblicato ma di cui Leibniz doveva conoscere il manoscritto, adopera appunto per comodità, ma non certo per necessità, quel metodo indiretto. Poi Leibniz prosegue:

"*La dimostrazione di tutte le regole esposte (cioè dell'algoritmo differenziale) sarà difficile per chi è versato in questi studi ed una cosa sola non è stata sin qui spiegata a sufficienza: che cioè si possono avere dx, dy, . . . proporzionali alle differenze, o agli incrementi o alle diminuzioni momentanee di x, y, . . .*"

Poche righe più sotto, dopo aver detto:

"*il nostro metodo si estende alle linee trascendenti, che non si possono ricondurre al calcolo algebrico, o che non sono di grado determinato*" aggiunge:

> ”*purché si ritenga in genere che trovare la tangente è condurre una retta che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola, o tracciare il lato prolungato di un poligono infitangolo che per noi equivale alla curva. Quella distanza infinitamente piccola è sempre nota per mezzo di qualche differenziale dv, o può esser espressa per mezzo di una relazione con questo, cioè per via di una certa tangente nota.*”

Nello stesso lavoro di Leibniz si introduce anche il differenziale secondo, con la notazione ddy, e si afferma che il segno di esso permette di decidere se una curva sia concava o convessa. Si approfitta poi dell'annularsi del differenziale primo per risolvere due problemi di massimo o minimo, il primo dei quali si risolve integrando una equazione differenziale del primo ordine (uno dei problemi proposti da F. De Beaune a Descartes), cioè quindi di trovare una curva che abbia la sottotangente costante; qui Leibniz era stato preceduto dal Barrow.

Questo primo scritto di Leibniz ha un'importanza fondamentale nella storia del calcolo, grazie a quella notazione differenziale subito accolta dai matematici del continente. Le incertezze da noi rilevate nella esposizione di Leibniz dimostrano che la notazione fu il frutto di una geniale intuizione più che di un cosciente processo logico. E ciò non sorprende se si pensa che da quel giorno è dovuto trascorrere un secolo e mezzo prima che il concetto di differenziale e di infinitesimo potesse liberarsi da tutte le soprastrutture grossolanamente intuitive o metafisiche che i seguaci di Leibniz vi avevano annesso.

Il segno di integrale che Leibniz scriveva così: $\int y$ in un manoscrito del 1675, appare per la prima volta in un lavoro stampato del 1686 nel *De Geometria recondita et Analysis indivisibilium atque infinitorum* sotto la forma $\int ydx$; forma molto felice perché ricorda che un'area è la somma, non di tutte le ordinate, come il metodo degli indivisibili poteva far pensare, ma di rettangoli infinitesimi. Un esame più accurato dell'operazione d'integrazione e la dimostrazione che essa è l'inversa della derivazione si trova soltanto nella memoria *Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio linea ex data tangentium conditione* del 1693.

Un altro interessante lavoro è *Specimen novum analyseos pro scienta infiniti crica summa et quadraturas* del 1702 ove si assegna il procedimento per l'integrazione di una funzione razionale mediante scomposizione di questa in una somma di frazioni semplici. Leibniz, naturalmente, cerca di evitare l'intervento dell'unità immaginaria ed aggiunge:

> "*Noi perveniamo, a questo proposito, ad una questione di grande importanza, cioè se tutte le quadrature (di funzioni) razionali possono ridursi alla quadratura dell'iperbole e del cerchio*"

vale a dire a logaritmi ed archi tangenti, più, s'intende, funzioni razionali.

> "*La questione vien ricondotta dalla nostra analisi ad esaminare se ogni funzione razionale intera (con una variabile) possa scindersi in fattori reali di* 1° *e* 2° *grado.*"

Noi sappiamo che la risposta è affermativa. Ma Leibniz, facendo un errore di calcolo algebrico nella scomposizione di $x^4 + a^4$ nei suoi fattori, impedisce di darla, facendogli ritenere possibili altre soluzioni, che pochi mesi dopo furono escluse da Johann Bernoulli. Tuttavia la domanda che Leibniz si presenta è molto notevole, specialmente se la si confronta con ciò che scrive Newton in un lavoro pubblicato due anni dopo (1704). Questi, infatti, dopo aver cercato di integrare razionalmente una funzione razionale, si limita ad asserire che la detta integrazione è impossibile se il polinomio denominatore possiede radici semplici, e non parla degli altri casi di impossibilità, né fa una accurata analisi del carattere trascendente che l'integrale assume in quei casi.
Un altro importante risultato classico dovuto a Leibniz è riportato nel lavoro *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione*, ove si espone il procedimento che oggi si adopera per determinare la curva inviluppo di un sistema semplicemente infinito di curve. Inviluppi di rette erano stati esaminati precedentemente con procedimenti diversi, e in particolare da Huygens (1673) che introduce la evoluta, inviluppo delle normali di una data curva. Ma Leibeniz fu il primo a considerare un sistema di curve come rappresentato da una equazione contenente un parametro ed a stabilire che il detto sistema ammette generalmente una curva inviluppo.
Desideroso di accrescere sempre più il proprio sapere scientifico, Leibniz non era molto scrupoloso nelle questioni di priorità. Fu questa la causa della penosa polemica che egli ebbe con i discepoli e gli amici di Newton, polemica che se getta delle ombre su Leibniz, non mette nella maggior luce la figura di Newton il quale, senza mai comparire, contribuì notoriamente a raccogliere ed aggravare le accuse contro il rivale, a cui non aveva risparmiato elogi nei primi scritti.
Pur facendo astrazione dai risultati di dubbia paternità, può dirsi che le scoperte certamente dovute a Leibniz (i metodi e gli algoritmi da lui proposti, le considerazioni generali di cui son ricchi i suoi lavori e l'influenza che egli ebbe nello sviluppo dell'analisi) son sufficienti perché si debba scriverne il nome tra quelli dei grandi scienziati del suo tempo. Inferiore senza dubbio a

Newton come matematico, Leibniz supera questo nelle facoltà comuniative. Mentre il primo era avaro delle sue scoperte, e quando doveva pubblicarle non faceva nessuno sforzo per interessare e guidare il lettore, Leibniz, come maestro efficace, si diffonde in chiarimenti e, quel che più vale, cerca sempre di illuminare dall'alto i problemi che prende in esame. L'avvenire gli ha dato ragione; nel calcolo infinitesimale odierno si trovano maggiori tracce dei procedimenti formali di Leibniz che di quelli dovuti al sommo matematico inglese.

Varie son le ragioni della maggior fortuna della notazione differenziale di Leibniz. Essa in tanto soddisfa ad una condizione che Leibniz espone chiaramente in una lettera a Tschirnhaus del 1678:

> "*Ai simboli è da richiedere che essi si prestino alla ricerca; ciò succede principalmente quando essi esprimono in modo conciso e quasi dipingono l'intima natura della cosa, perché essi allora risparmiano mirabilmente lo sforzo del pensiero.*"

In particolare la rappresentazione della derivata sotto forma di quoziente $\frac{dy}{dx}$ sta a ricordare che, sebbene la derivata sia il limite di un quoziente, essa in varie questioni si comporta come un quoziente; così nel derivare una funzione di funzione

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

o la funzione inversa di una data

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Ma accanto a questo vantaggio ben noto della rappresentazione differenziale, ve n'è un altro che spesso vien lasciato in ombra perché non s'accorda con le vedute della scuola critica. Nelle applicazioni della matematica la notazione differenziale riesce particolarmente utile quando i differenziali dx, dy, ... stanno ad indicare, non già quantità variabili tendenti a zero, bensì quantità molto piccole rispetto agli ordini di grandezza che siamo abituati a considerare. L'ambiguità che si potrebbe temere da questo duplice significato del differenziale, riesce, invece, vantaggiosa perché stabilisce per dir così un passaggio tra la notazione teorica di continuità, che risponde ad una esigenza della nostra mente, e la innegabile discontinuità della natura che ci si presenta ogni giorno sotto nuovi aspetti.

Capitolo 7

La disputa tra Leibniz e Newton

[29]Questo capitolo analizza storicamente la disputa tra Leibniz e Newton sulla proprietà intellettuale del calcolo infinitesimale, la matematica superiore che si applicò perfettamente alla fisica newtoniana.
Una disputa tra due grandi protagonisti del panorama intellettuale del XVI e XVII secolo, ed anche tra due visioni della matematica agli antipodi: una matematica generale e teorica secondo Leibniz, una matematica applicata al mondo naturale secondo Newton.
Lo scontro tra i due giganti fu inizialmente sulla priorità di scoperta: chi aveva per primo ottenuto i metodi del calcolo infinitesimale? Quando poi fu chiaro che fu Newton a compiere per primo gli studi sul calcolo, la disputa si spostò sull'equivalenza tra i due metodi: erano entrambi validi? Avevano entrambi la stessa potenza e generalità?
La disputa andò avanti per molti anni e famosi scienziati dell'epoca si schierarono dall'una o dall'altra parte, con perfino alcuni scontri nazionalisti tra matematici inglesi e continentali.
Ai primi del Settecento fu Newton a trionfare, ma nell'Ottocento il lavoro di Leibniz fu molto rivalutato. Ci interessa in questo capitolo comprendere in modo imparziale come andarono veramente le cose e in che relazione possiamo considerare i due approcci all'analisi matematica.

[29]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [1], [3] [4], [7], [8] e [10].

7.1 Il primo atto della disputa

Nel 1693 ci fu il primo e unico scambio di lettere tra Leibniz e Newton. I due si scambiarono dei complimenti reciproci, senza entrare minimamente nel dettaglio delle loto teorie matematiche. L'importanza storica di queste lettere è soltanto di testimoniare i buoni rapporti tra i due, e nient'altro.
Fu il tedesco ad iniziare la corrispondenza:

"*Ho riconosciuto pubblicamente, laddove l'occasione me lo permise, quale enorme debito abbiamo nei suoi confronti per la conoscenza della matematica e della natura. Avevi già dato un grande contributo allo sviluppo della geometria con le tue serie, ma quando pubblicasti la tua opera dal titolo "Principia", ci dimostrasti che ogni argomento dell'analisi, anche quelli non studiato da altri, per te è come un libro aperto.*"

Dopo sei mesi Newton rispose, così da porre fine allo scambio epistolare:

"*Reputo molto importante la tua amicizia e per anni ti ho considerato uno dei geometri più importante del secolo, come ho riconosciuto in ogni occasione che mi si è offerta.*"

Il tedesco non aveva nessun motivo per pensare che Newton potesse costituire una minaccia. Ed infatti la minaccia non era Newton.
La situazione si fece più tesa non appena un connazionale di Newton, John Wallis, cominciò ad insinuare che il calcolo differenziale di Leibniz non fosse che un'opaca replica del metodo delle flussioni di Newton, che per di più era stato sviluppato dieci anni prima.
John Wallis era un autorevole matematico inglese che nel 1683 aveva pubblicato in latino un suo importante testo di matematica dal titolo *Algebra*, ripubblicato nel 1693 in inglese. Caratteristica di Wallis fu la sua volontà di promuovere in ogni modo il lavoro dei matematici inglesi, in una sorta di nazionalismo intellettuale che l'illuminismo avrebbe reso completamente obsoleto. Nella sua *Algebra* Wallis incluse alcuni concetti tratti da due lettere di Newton del 13 giugno e del 24 ottobre 1676. Di fatto fu questo testo che rese Newton popolare in tutta Europa con il suo metodo delle flussioni.
Il fatto strano è che nell'Europa continentale i metodi di Newton non erano noti, ma lo era, invece, il calcolo differenziale di Leibniz. Se si aggiunge che Wallis esplicitamente difendeva la semplicità del metodo delle flussioni di Newton rispetto alla complessità del calcolo di Leibniz, si può comprendere come i testi del 1693 divennero presto famosi in Europa. Essi costituirono il primo vero atto della disputa sulla proprietà intellettuale del calcolo infinitesimale.

Dopo qualche anno dalla pubblicazione dell'Algebra, quando il primo volume delle sue *Opere* era ancora in via di pubblicazione, in data 1 dicembre 1969 Wallis scrisse a Leibniz dove afferma che Leibniz ha presentato come proprie delle teorie che invece avrebbe dovuto attribuire a Newton, il quale dal canto suo non ha fatto niente per difendere la proprietà intellettuale su argomenti così importanti. La prefazione di Wallis al primo volume delle sue *Opere mathematica* del 1695 ha toni meno accesi, ma nonostante ciò ebbe l'effetto di far divampare la polemica.
Le reazioni dal continente non tardarono ad arrivare.
Dei testi pubblicati da Wallis nella prima metà degli anni novanta, Leibeniz non poté leggere subito l'*Algebra* poiché anni prima egli viaggiò in Italia ed Europa Centrale alla ricerca di documenti e testimonianze che riconducessero la Casata dei Brunswick ad una qualche importante famiglia nobile Europea, che si rivelò essere la Famiglia D'Este, ed anzi fu Huygens ad avvisarlo della pubblicazione in una lettera del 29 maggio 1694.
Del resto Huygens conosceva bene il calcolo di Leibniz, che lo stesso tedesco gli aveva spiegato in una lettera del luglio 1690. Le prime reazioni furono piuttosto fredde, soprattutto perché trovò il testo di Leibniz piuttosto oscuro. Soltanto dopo alcune settimane Huygens comprese la reale portata della nuova matematica, descrivendola come "buona ed utile", anche se considerava i suoi metodi altrettanto potenti.
Un'ostilità motivata dal fatto che Huygens, sebbene ammettesse che nelle fasi di scoperta la precisione matematica potesse venire meno, non accettava che una teoria ben fondata non avesse dimostrazioni rigorose. Ma infine Huygens doveva aver ben capito le scoperte di Leibniz, visto che immediatamente capì che il metodo di Newton era praticamente equivalente.
In autunno, dopo aver ricevuto materiali da Huygens, Leibniz si dice poco soddisfatto di quanto contiene l'opera di Wallis, perché non trovò lumi sul metodo per calcolare gli integrali.
Huygens morì nel 1695: Leibniz si propose come suo immediato successore, sostenendo inoltre che lo stesso Huygens lo avesse individuato come il vero scopritore del calcolo. Le differenze tra Huygens e Leibniz erano tuttavia evidenti per quanto riguarda la valutazione dell'importanza del calcolo:

- Huygens (come Newton) inseriva il calcolo infinitesimale all'interno di uno sviluppo continuo della matematica che includeva anche metodi di analisi precedenti;

- Leibniz sosteneva di aver scoperto metodi di analisi di tipo completamente diverso rispetto a quanto fosse mai esistito fino ad allora.

Se dunque tutti e tre avevano una comprensione tecnica molto evoluta dei metodi del calcolo, assunsero posizioni diverse riguardo all'interpretazione filosofica della nuova matematica. Soltanto Leibniz sostenne una censura netta con il passato: dopo il nuovo calcolo differenziale la matematica non sarebbe stata mai più la stessa.
Nel giugno 1696 sugli *Acta Eruditorum* comparve un estratto dei primi due volumi delle *Opere* di Wallis. Gli editori, tra cui probabilmente lo stesso Leibniz, rilevarono che nella parte finale della prefazione, dove si fa menzione dello scambio epistolare Leibniz-Newton del 1676, Wallis non aveva esposto correttamente l'andamento dei fatti il proprio metodo, ma perché non veniva affatto detto che all'epoca delle lettere Leibniz era già in possesso di un proprio procedimento di calcolo, come lo stesso Newton aveva confermato.
Questo è un punto chiave: Newton era in possesso del proprio metodo a partire dal 1665 – 1666, Leibniz dal 1675 circa. Lo scambio epistolare del 1676 dunque era stato uno scambio di due metodi già definiti: i sostenitori di Newton non potevano sostenere che da quelle lettere Leibniz avesse derivato il suo calcolo infnitesimale, ciò semplicemente non poteva essere vero.
Dopo aver letto la recensione delle sue opere negli *Acta*, Wallis scrive per chiarire la sua posizione a Leibniz, nel 1 dicembre 1969: Wallis è molto difensivo e non manca di rimarcare la sua stima nei confronti di Leibniz che era un matematico di ben altro calibro rispetto a lui. Subito dopo risponde immediatamente all'obiezione sollevata dagli editori degli *Acta*: egli non era a conoscenza di come si erano veramente svolti i fatti. Addirittura ad un certo punto aggiunge:

"*Mi si può comunque scusare che alla mia età (ho superato infatti gli* 80 *anni) non sia al corrente di tutto.*"

Poi Wallis arriva allo scambio di lettere Leibniz-Newton nel 1676: afferma che non aveva chiesto a Newton di inviargli una copia di quelle lettere con l'intenzione poi di pubblicarle insieme a quelle di Newton. Ma Newton gli disse di non averle più.
Ora ci si può domandare come mai, visto che Wallis non aveva avuto l'opportunità di consultare le lettere, decise di prendere una posizione così netta e decisa contro Leibniz. Almeno in parte questo è da attribuirsi dal suo innegabile spirito nazionalistico, che pure egli cerca di minimizzare poco più avanti nella stessa lettera.
Leibniz risponde a Wallis il 19 marzo 1697, apprezzandone i toni così conciliati pur senza rinunciare a rispondere alla velata provocazione di Wallis, che aveva insinuato che nemmeno i tedeschi fossero completamente imparziali. Leibniz intende ripercorrere brevemente gli sviluppi che hanno portato lui e Newton alla scoperta del calcolo infinitesimale. Dopo aver elencato i meriti

di Galilei e Cavalieri per la geometria degli indivisibili e Fermat per il calcolo dei massimi e dei minimi, egli arriva a matematici più vicini nel tempo. Nomina, infatti, Huygens e lo stesso Wallis, infine Gregory, Barrow e Mercator ed in ultimo Newton.
Leibeniz mette sul piatto le proprie teorie, parallelamente, ma non in competizione, alle teorie di Newton, che viene invitato ancora una volta a pubblicare le proprie scoperte, evidentemente in parte ancora ignote a Leibniz nei loro dettagli più specifici. In un'altra lettera del maggio 1697 Leibniz è molto insistente nell'invitare Newton a pubblicare i suoi lavori, tanto che poco dopo sarà lo stesso Wallis a girare a Newton la richiesta.
La corrispondenza tra i due continua: più volte Wallis ribadisce di aver capito in cosa consista il calcolo differenziale di Leibniz, e lo mette sempre in relazione con il metodo delle flussioni di Newton. Leibniz precisa che il suo metodo e quello di Newton hanno grandi somiglianze.
Tuttavia il tedesco ancora non sospetta che tale ingannabile somiglianza verrà utilizzata dagli inglesi per accusarlo di plagio e si dimostra ancora ottimamente disposto nei confronti di Newton che non manca mai di elogiare. Del resto Leibniz è al di fuori del dibattito tra i matematici inglesi e non sa esattamente cosa sta accadendo al di là della Manica riguardo alla sua disputa con Newton. Come unica fonte, egli ha soltanto un rapporto epistolare con Thomas Burnet (figlio del Royal Physician for Scotland) che lo aggiorna sporadicamente sulla vita intellettule inglese e lo aiuta nel consegnare le sue lettere a Locke, Newton e lo stesso Wallis.
Lo scambio epistolare Leibniz-Wallis andrà avanti ancora fino al 1698, anni in cui Leibniz autorizza Wallis a pubblicare le lettere del 1676 - 1677 che finalmente Wallis è riuscito a recuperare.
Dopo questa piccola disputa, un attacco ben più serio al calcolo differenziale di Leibniz arriverà da Fatio de Duiller[30], appena l'anno successivo.

7.2 Il secondo atto della disputa

Con i lavori di Wallis la disputa sulla proprietà intellettuale del calcolo infinitesimale era appena iniziata, ma non era ancora entrata nel vivo: Leibniz era intervenuto in modo molto pacato mentre Newton non era neppure sceso in campo.
Eppure i matematici di tutta Europa avevano già cominciato a schierarsi. Nel continente Leibniz godeva di molti sostenitori, tra i quali l'amico storico Johann Bernoulli. Questi, per provare la superiorità di Leibniz su Newton e

[30]Fatio de Duiller (Basilea, 1664 - Madresfield, Regno Unito, 1753) era un matematico.

l'inabilità matematica dell'ultimo, propose una sfida matematica detta *il problema Brachistocrono*, aperta ai matematici più abili di quel periodo. Furono inviate a Wallis e Newton in Inghilterra singole copie del testo del problema, che fu inoltre pubblicato sugli *Acta Eruditorum* e su una pubblicazione francese dal titolo *Journal de Sçauans*. Ci sarebbe stato tempo per rispondere fino alla Pasqua seguente. Obiettivo finale di questo problema, nella mente di Bernoulli, era dimostrare la proprietà del calcolo differenziale rispetto al metodo delle flussioni di Newton.
Il problema consisteva nel calcolare una curva che collega due punti, non allineati uno sotto all'altro, tale che un corpo in caduta, sotto l'effetto soltanto della forza di gravità, la percorra nel minor tempo possibile. Newton risolse il problema in appena una notte, ma fu praticamente l'unico a risolverlo utilizzando il metodo delle flussioni. In Europa Leibniz, de L'Hôpital e i Bernoulli lo risolsero servendosi del calcolo differenziale.
Il tentativo di Bernoulli era fallito, ma in fin dei conti era stata dimostrata la superiorità del calcolo infinitesimale. Leibniz se ne considerava il fondatore, poco gli importava se dall'altro lato dello Stretto della Manica un inglese avesse un metodo diverso dal suo.
Guillame François Antoine de Sainte Mesme, marchese de l'Hôpital, uno dei cinque matematici che erano riusciti a risolvere il problema brachistocrono, informò Leibniz del pericolo poiché l'amico non riusciva a vedere le minacce che incombevano su di lui. Nelle sue lettere si possono notare due aspetti:

- chiaramente de l'Hôpital ignorava il metodo delle flussioni prima di averne letto da Wallis, soprattutto ignorava il fatto che tale metodo fosse noto a Newton ben prima che Leibniz possedesse il calcolo differenziale;

- Wallis avesse cercato di portare in Inghilterra quanti più meriti scientifici possibili.

Leibniz era a conoscenza della volontà di Wallis di pubblicare le proprie lettere, quindi non poteva esserne sorpreso, ma ciò che probabilmente non sapeva è che nell'ultimo anno era comparso in Inghilterra un articolo che lo attaccava molto più direttamente. Secondo tale articolo di cui autore Fatio di Duillier (matematico svizzero grande amico di Newton) non solo Newton era stato il primo a scoprire il calcolo, ma si cercava di dimostrare che Leibniz avesse copiato i propri metodi da quelli di Newton. Il marchese de l'Hôpital avvisò Leibniz che era stato pubblicato un tale articolo e dopo appena due settimane Leibniz rispose ringraziandolo per la segnalazione, esprimendo assoluta tranquillità per quanto riguarda il testo di Wallis, mentre per quanto riguarda l'articolo di Fatio era molto turbato. Fatio de Duillier aveva almeno due ragioni per attaccare apertamente Leibniz:

- per guardare credito agli occhi dell'amico Newton, era disposto a scagliarsi contro colui che ne aveva messo in discussione la priorità nella scoperta del calcolo;
- aveva personali motivi di risentimento nei confronti di Leibniz: egli era entrato in una sorta di competizione con il tedesco, al tempo in cui erano entrambi discepoli di Huygens. Successivamente scrisse numerose lettere allo stesso Leibniz chiedendogli di condividere i suoi studi matematici, ma non ottenne risposta. In seguito, pur risolvendo il problema brachistocrono, non riuscì a inviare la soluzione in tempo e quindi rimase fuori dalla schiera dei risolutori ufficiali di cui Leibniz scrisse, elogiando il fatto che soltanto i veri discepoli di Newton e dello stesso Leibniz avevano gli strumenti matematici adatti per risolvere il problema. Così Fatio la prese come una questione personale, ed era ormai pronto ad attaccare direttamente Leibniz.

Complessivamente Fatio ebbe buon gioco nell'attaccare Leibniz, ma senza il supporto di Newton non avrebbe potuto attaccarne l'autorità. Del resto Leibniz era il matematico più celebre del mondo, godeva di una reputazione incredibile anche in Inghilterra ed era membro di lunga data della Royal Society. Leibniz all'attacco di Fatio rispose in modo vincente essenzialmente perché chiamò in causa Newton con il quale non ha mai avuto nessun disaccordo e a testimonianza della stima di cui gode da parte sua espone come prova la prima edizione dei *Principia* del 1687 dove Newton afferma che

"... certe sue nuove scoperte geometriche, comuni a entrambi, nessuno dei due le doveva alla luce dell'altro, ma ciascuno alle proprie meditazioni, e che io le avevo esposte circa dieci anni avanti."

Leibniz spiega anche quanto poco apprese dal primo scambio epistolare con Newton. Leibniz citò, anche, Wallis con il quale ebbe avuto uno scontro, ma che ne uscì facilmente. Leibniz era talmente sicuro di sé che invitò persino Newton a pubblicare i suoi scritti ancora chiusi nel cassetto. Egli voleva giustamente confrontarsi, su una questione così importante come quella della paternità del calcolo, con il matematico direttamente coinvolto. Il silenzio di Newton fu interpretato come un'approvazione della risposta di Leibniz. Anche questo attacco era stato sventato, ma il tedesco dovette capitolare, alla fine della vicenda, quando finalmente Newton decise di scendere in campo. A partire dal 1703 Newton divenne presidente della Royal Society: questo gli diede un potere immenso in campo scientifico, e gli permise di giocare nel migliore dei modi tutte le sue carte contro Leibniz.

7.3 Il terzo atto della disputa

Isaac Newton fu eletto presidente della Royal Society, l'organisco accademico più importante di tutta Inghilterra, e probabilmente d'Europa, il 30 novembre 1703. Finalmente Newton ebbe riconosciuta l'importanza che meritava: addirittura qualche anno dopo la regina Anna lo nominò cavaliere.
Nel 1702 un medico di origini scozzesi, George Cheyne, aveva pubblicato un libro sul *Metodo inverso delle Flussioni*, nel quale riprendeva e espiegava il metodo Newtoniano. Cheyne dichiarava esplicitamente che il metodo di Newton coincideva con quello di Leibniz, ma lo precedeva di almeno diciasette anni. Da allora Newton divenne sempre più importante, in Inghilterra e poi nell'Europa continentale. Nel 1704 tutti poterono ulteriormente approfondire il metodo delle quadrature newtoniano, attraverso un trattato scritto dallo stesso Newton: il *De Quadrature curvarum*, in appendice al suo trattato di Ottica. Il trattato sulle quadrature era stato scritto molti anni prima, ma la spiegazione del metodo di Newton data da Cheyne era così imprecisa che Newton stesso sentì l'esigenza di pubblicare qualcosa scritto di proprio pugno.
Morto anni prima anche Hooke, suo storico avversario, Newton aveva finalmente dato alla luce i suoi lavori sul calcolo. Di fatto il trattato Newtoniano non rappresentava novità sostanziali per chi aveva già avuto modo di studiare il suo metodo più da vicino, ma fu comunque importante per due motivi. Anzitutto, il *De Quadratura* fu importante per tutti i matematici del mondo perché fu pubblicato, guadagnando così un'ampia diffuzione. Poi gli editori degli *Arca Eruditorum* pubblicarono nel gennaio del 1705 una provocatoria recensione sul trattato che incendiò definitivamente la disputa Leibniz - Newton. Per la prima volta, viene affermato che Leibniz è l'inventore del calcolo, cosa che non poteva passare inosservata agli occhi di Newton e dei suoi seguaci. Chi scrive la recensione sugli *Acta* evidentemente conosce già il metodo di Newton, quindi se non era Leibniz doveva essere qualcuno molto vicino a lui. Un passo di tale recensione fu interpretato dai newtoniani come se Leibniz intendesse dire che Newton aveva sostituito alle differenze le flussioni, come Honoré Fabri,$(1608 - 1688)$ matematico, fisico e astronomo francese, aveva sostituito al metodo di Cavalieri il progresso dei moti. In pratica questo significava che Leibniz era il vero inventore del calcolo e Newton lo aveva derivato da lui.
Passarono alcuni anni prima che tale recensione finisse nelle mani di Newton, finché nel 1708 uno dei seguaci di Newton prese le difese dell'inglese.
Il primo sostenitore di Newton che uscì allo scoperto, John Wallis, morì nel 1703, ma Newton poteva contare su un nuovo alleato. Dopo Fatio, fu John Keill, un giovane professore a Oxford e pupillo di Gregory, ad assestare un

colpo decisivo alla reputazione di Leibniz.
Nelle *Philosophical Transactions* della Royal Society, comparve un articolo di John Keill, nel quale egli riuscì a sferrare un'accusa difficilmente gestibile da Leibniz. Egli non scrisse che Newton pubblicò per primo i lavori sul calcolo (cosa che sarebbe stata facilmente smentita), ma gli attribuì la priorità di scoperta. Leibniz, inoltre, era presentato come colui che aveva seguito le orme di Newton non soltanto temporalmente, ma anche per quanto riguarda il contenuto.
L'insinuazione colpì nel segno, e come tale era inconfutabile. Leibniz avrebbe effettivamente potuto copiare i lavori di Newton. Diventava quasi irrilevante il fatto che l'avesse realmente fatto oppure no.
La risposta di Leibniz arrivò con una lettera ad Hans Sloane, segretario della Royal Society. Ma fu come se tale risposta fosse indirizzata a Newton in persona, all'epoca precedente ed autorità assoluta della Royal Society. Leibniz scrisse il 4 marzo 1711 da Berlino e strategicamente si appella al precedente con Fatio, ma ben presto si accorgerà che questa volta l'attacco era di tutt'altra portata. Appellarsi a Newton non fu di nessun aiuto.
La difesa di Leibniz era essenzialmente quella di negare di aver conosciuto il metodo di Newton prima della pubblicazione dei suoi Trattati. Decise quindi di tirare in ballo lo stesso Newton. Del resto egli non aveva nulla da temere. Newton si era sempre dimostrato molto gentile ed accondiscendente, e non aveva mai messo in discussione le scoperte di Leibniz. Alla fine della lettera Leibniz chiede esplicitamente che Keill ritratti, appellandosi alla Royal Society.
Tramite Hans Sloane quest'ultima lettera arrivò a Keill che rispose con una missiva da inoltrare al tedesco. Questa volta tale risposta fu pianificata dallo scozzese assieme a Newton stesso: dopo averci lavorato per alcune settimane la presentò alla Royal Society nel mese di aprile. Il tono di Keill era educato, ma deciso. Non intendeva retrocedere: la sua accusa era molto più robusta di quella di Fatio. D'altra parte Leibniz aveva forse colto le parole di Keill con più malizia di quanta non ve ne fosse in realtà. Lo scozzese quindi chiarisce il vero significato delle sue espressioni.
Ecco giunti al punto chiave, Keill riformula l'accusa in un modo astuto: quasi si stesse difendendo e giustificando, insinua qualcosa che non può essere smentito in alcun modo.
L'astuzia di Keill è anche nel fatto che fornisce un quadro perfettamente plausibile di come si svolsero le vicende. Era perfettamente plausibile che Leibniz avesse coprato qualcosa dal metodo di Newton, così come era plausibile che Leibniz (non avendo capito le espressioni di Newton) ne avesse utilizzate delle altre soltanto per chiarirsi le procedure, senza di fatto aggiungere nessun nuovo concetto.

Il colpo finale arriva quando Keill motiva il suo intervento: Newton ha scoperto il suo metodo ben prima di Leibniz, quindi conobbe il metodo di Newton prima di pubblicare i propri articoli. John Keill non ha lo stesso coinvolgimento di Fatio, quindi riesce a mantenere sempre un approccio pacato e ragionevole. Risultando di fatto inattaccabile. Innegabile è il fatto che Leibniz davvero non ebbe mai modo di consultare un vero trattato di Newton sull'analisi e che ebbe il merito di pubblicare per primo un testo sul calcolo infinitesimale. Keil ammette tutto questo senza problemi: sa bene che non avrebbe diminuito in alcun modo il peso e la potenza delle proprie accuse.
Leibniz, dopo aver letto la lettera, rispose ad Hans Sloane il 29 dicembre 1711 da Hannover. Sostanzialmente, Leibniz rifiuta il confronto con un matematico che non considera suo pari per importanza ed esperienza. Infine Leibniz chiama in causa l'unico, scomparso Oldenburg, che può testimoniare come siano andate effettivamente le cose: Isaac Newton, presidente della Royal Society di Londra.
Newton ancora volle tenersi per qualche tempo, come risulta dalle lettere interconnesse tra lui ad Hans Sloane, nelle quali chiedeva di non essere coinvolto nella disputa tra Leibniz e Keill.
Alla lettere di Leibniz, la Royal Society rispose convocando una commissione per il giorno 6 Marzo 1712. Sulla carta era una normale disputa tra due membri della Royal Society che doveva essere risolta dopo un'investigazione. Ma l'investigazione non fu relativamente oggettiva, ed anzi fu utilizzata da Newton per difendere la propria posizione. Per la commissione non si trattava di valutare le differenze tra metodo delle flussioni e calcolo differenziale (perché venivano considerati identici se non per la notazione), ma soltanto stabilire la priorità nella scoperta. La domanda se Newton fosse stato in possesso del metodo delle flussioni prima che Leibniz scoprisse il calcolo differenziale aveva una risposta banale. Non ci sarebbe stato bisogno di alcuna commissione, perché gli stessi protagonisti della vicenda avrebbero confermato lo svolgimento dei fatti. Ciò che Leibniz avrebbe voluto difendere erano le differenze intrinseche tra il suo calcolo e il metodo di Newton. Ma la commissione non lasciò spazio a considerazioni metodologiche, l'unico obiettivo era stabilire la vera successione temporale delle scoperte. Sostanzialmente i risultati della relazione furono corretti, ma totalmente irrilevanti per stabilire realmente i rispettivi meriti di Leibniz e Newton.
Il 24 Aprile 1712, la commissione pubblicò una relazione lunga e dettagliata sulla questione: *Commercium Epistolicum D. Johannis Collins et Aliorum de Analysi Promota*[31]. Il risultato era una condanna senza appello di Leibniz,

[31]Noto come *Commercium Epistolicum*, è una raccolta di corrispondenze pertinenti alla controversia tra Newton e Leibniz a riguardo della scoperta del calcolo infinitesimale.

colpevole di plagio, mentre Newton ne uscì ovviamente vincitore in quanto scopritore del calcolo e massimo matematico del secolo. Sostanzialmente il *Commercium Epistolicum* raccoglie una serie di scritti e di lettere tra il 1669 e il 1677. A dimostrazione del plagio di Leibniz vengono portate essenzialmente due prove: lo scambio epistolare con Collins e la gaffe di Leibniz durante l'incontro con il matematico inglese John Pell. Oltre a ciò, la sentenza stabilì che Newton era in possesso del suo metodo almeno dal 1669 e che le differenze tra il metodo di Newton e il calcolo di Leibniz si riducono soltanto alla notazione.
Si stabilisce che Leibniz conobbe la matematica di Newton e Gregory, con l'aiuto di Collins, intorno ai primi anni settanta. Viene sottolineato il fatto che Leibniz avesse conosciuto la matematica degli inglesi non dai suoi autori diretti ma tramite Collins, quasi a suggerire l'ingenuità di quest'ultimo nel rivelare tali preziose informazioni ad un personaggio come Leibniz.
Subito dopo viene descritto nei particolari l'episodio che videro coinvolti Pell e Leibniz e viene riportato un fatto che non rientra direttamente nell'oggetto dell'inchiesta, soltanto a testimoniare la presunta attitudine di Leibniz ad appropriarsi dei meriti altrui. L'accusa è pesante, perché si serve di un precedente che è diventato improvvisamente ingombrante. Infatti subito dopo il fattaccio viene ricollegato alla corrispondenza con Newton e Collins.
Così non resta che stabilire due fondamentali punti:

- la priorità di Newton nella scoperta;
- l'equivalenza dei due approcci di Leibniz e Newton, fatta eccezione per notazione terminologia.

Nel *Commercium Epistolicum* viene detto esplicitamente che il metodo è uno soltanto, quindi bisogna soltanto stabilire chi l'ha ottenuto per primo. Chi non indica Newton come inventore dunque, non può che sbagliarsi.
Il *Commercium Epistolicum* fu pubblicato l'8 gennaio 1713 ed alcune copie furono spedite ai maggiori matematici d'Europa. Una copia finì nelle mani di Johann Bernoulli, che informò Leibniz inviandogli una lettera il 7 Giugno dello stesso anno.
Il tedesco si trovava nella difficile situazione di doversi difendere da un'accusa molto pesante: aver plagiato i lavori dello scienziato più importante del periodo, presidente dell'istituzione scientifica più prestigiosa, la Royal Society di Londra.
Inizialmente Leibniz mantenne un rigoroso rispetto nei confronti di Newton, ma quando venne in possesso di una copia del *Commercium Epistolicum* cambiò completamente atteggiamento. In una lettera inviata a Johann Bernoulli, Leibniz arrivò a mettere in dubbio che Newton avesse davvero posseduto un

proprio procedimento per il calcolo infinitesimale. Questa linea di difesa fu mantenuta da Leibniz nella pubblicazione di un articolo, *Charta Volans*[32] che nel luglio del 1713 cominciò a circolare in tutta Europa. Il testo fu pubblicato anonimo, anche se non c'erano dubbi che l'autore fosse lo stesso Leibniz, sempre nominato in terza persona. La *Charta Volans* si basava su una premessa sbagliata, probabilmente suggerita da Johann Bernoulli allo stesso Leibniz, cioé che fosse stato in realtà Newton a copiare il calcolo da Leibniz. Ovviamente tale fatto non poteva essere sostenuto. Leibniz inoltre prese posizione contro l'atteggiamento xenofobo degli scienziati inglesi, che si preoccupavano a dismisura di difendere i risultati dei connazionali e di rivendicare ingiustamente scoperte dovute a scienziati continentali.
A sostegno di questa linea, *Charta Volans* riportava l'opinione di un importante matematico (che più avanti si scoprì essere Johann Bernoulli) che testimoniava un fatto curioso riguardante la pubblicazione della seconda edizione dei *Principia* di Newton. Nel 1712 Nikolaus Bernoulli, nipote di Johann, segnalò a Newton un'imprecisione di calcolo nella bozza della seconda edizione dei *Principia* e gli inviò la soluzione corretta. Newton rispose alla lettera ammettendo l'errore e ringraziando. Secondo Leibniz e i suoi sostenitori questa era una prova della scarsa preparazione dell'inglese.
Probabilmente insoddisfatto del lavoro del comitato della Royal Society, Newton scrisse un "Account[33]. Tale articolo fu pubblicato anonimo nel 1715 sul *Philosophical Transactions of the Royal Society.* L' "Account" prendeva spunto dalla risposta di Keill del 1714 e fu chiaramente attribuito a Newton soltanto a partire dal 1761. Tale testo è l'unica narrazione coerente e articolata scritta da Newton stesso riguardando alla sua disputa con Leibniz. L' "Account" è una chiara e diretta difesa di Newton: egli ha abbandonato la speranza che i suoi testi possano automaticamente difendere la sua posizione nella disputa.
L'argomentazione è suddivisa in cinque parti:

I° **parte** : si dimostra che il metodo di Newton era già completo nel 1669. Qui Newton non trova molti ostacoli perché effettivamente in quell'anno il suo metodo non aveva eguali nel continente. Tuttavia manca di

[32]Importante documento scritto da Gottfried Leibniz durante la disputa tra lui e Newton su chi di loro aveva scoperto il calcolo differenziale.

[33]È un articolo del *Commercium Epistolicum* che è stata successivamente pubblicata nelle *Philosophical Transactions* della Royal Society di Londra per i mesi di gennaio e febbraio che hanno concluso l'anno 1714 nel calendario giuliano allora utilizzato in Inghilterra (essendo i primi due mesi della Gregoriana Calendario poi utilizzato sul continente europeo, e ormai universalmente impiegato).

confrontare direttamente il suo metodo con il calcolo di Leibniz, impedendo dunque al lettore di farsi un'idea più precisa delle differenze e delle somiglianza tra i due. In particolare manca un confronto diretto, Newton manca di smentire che il calcolo di Leibniz arrivò precisamente più tardi ma con una struttura ed una formulazione algoritmica molto più evoluta. Newton riesce soltanto a difendere una priorità temporale di una teoria ancora acerba;

II° **parte** : Newton intende supportare la sua priorità di scoperta con una precisazione ovvia: Leibniz non possedeva il suo calcolo prima del 1677. Spingendosi ancora oltre, egli sostiene che la preparazione matematica di Leibniz a quel tempo era piuttosto limitata, a tal punto che si trovò nella situazione di dover chiedere più volte spiegazioni ad Oldenburg ed a Newton stesso, come è testimoniato dalla corrispondenza tra i tre. Inoltre, in base alle lettere di Leibniz, secondo Newton è perfino possbile concludere che la scarsa preparazione di Leibniz è una prova che il suo calcolo non sia in realtà genuino, ma frutto di un'appropriazione delle teorie di Newton e Barrow prima di lui;

III° **parte** : contiene l'attacco di Newton alla notazione di Leibniz. Egli intende distinguere le sue flussioni dai differenziali di Leibniz dimostrando uno scetticismo nei confronti di una particolare notazione. Newton volle enfatizzare la superiorità del suo metodo che non faceva uso degli infinitesimali, ma piuttosto degli strumenti geometrici intuitivi più accurati possibili. Ingenuamente Newton con questo non fa che confermare l'originalità del calcolo di Leibniz e quindi confutare l'argomentazione della parte seconda.

IV° **parte** : Newton sostiene che il suo metodo delle flussioni fin dalla prima formulazione poté essere agevolmente esteso a flussoni di ordini superiori al secondo. Ciò risponde ad una delle critiche mosse da Bernoulli, che attaccava proprio questo aspetto del metodo, sostenendo che Newton non avesse chiaro il concetto di derivata di secondo grado o superiore. Tale difesa è tuttavia debole e le obiezioni di Bernoulli sembrano rimanere intatte perché non abbiamo molto materiale da parte di Newton che possa testimoniare che il metodo delle flussioni avesse inizialmente caratteristiche descritte da Newton nell' "Account";

V° **parte** : riguarda la filosofia della natura di Newton, basata sulla fisica sperimentale e quindi intrinsecamente più moderna della filosofia meccanicistica di Leibniz.

L' "Account" fu letto soltanto in Inghilterra dove Newton aveva molti sostenitori e quindi non servì a modificare le sorti della disputa. Quando l' "Account" fu tradotto in francese e arrivò in Europa (1715), la comunità scientifica non ne restò particolarmente impressionata. In conclusione, l' "Account" non fu ancora decisivo per la soluzione della questione tra Leibniz e Newton.

Capitolo 8

Riflessioni sulla disputa

[34]Volevo concludere con due considerazioni.
La prima considerazione riguarda gli anni tra il 1665 e il 1684, ovvero gli anni tra i primi studi di Newton sul metodo delle flussioni e la prima pubblicazione di Leibniz sul calcolo differenziale. È ormai accertato che Newton entrò in possesso dei suoi procedimenti per calcolo tangenti e quadrature circa nove anni prima di Leibniz. Infatti, se Newton fa risalire i suoi studi sul metodo agli anni mirabiles $1665 - 1666$, Leibniz non possiede ancora nessuna procedura di calcolo differenziale fino 1675. Cronologicamente, il primo scopritore è senza dubbio Newton. Si potrebbe osservare che i metodi di Newton del 1666 erano meno evoluti di quelli di Leibniz, ma di fatto l'idea centrale del metodo delle flussioni era già presente. Inoltre, Newton aveva approfondito molto la teoria delle serie, laddove invece Leibniz si era piuttosto concentrato sul calcolo delle tangenti (derivazione di funzioni). Negli anni successivi Newton sembrò disinteressarsi dell'analisi infinitesimale e si concentrò su esperimenti fisici di ottica. Durante il famoso scambio epistolare del $1676 - 1677$ i due avevano attitudini molto diverse. Leibniz aveva appena raggiunto importanti risultati matematici, ma ancora non possedeva una piena conoscenza della materia.
Newton, invece, che aveva una preparazione accademica più robusta, stava recuperando studi del decennio precedente perché gli era stato interpellato dall'amico Oldenburg di spiegare allo straniero Leibniz i suoi metodi. Nel giro di qualche anno lo svantaggio di Leibniz si azzerò, tanto che fu lui, per primo, a pubblicare un testo sul calcolo differenziale, nel 1684. Un testo di sole sei pagine, piuttosto complicato e per di più senza troppi riferimenti al calcolo integrale, che fu oggetto di una pubblicazione di Leibniz due an-

[34]Per questo capitolo si è fatto riferimento a [4] e [5].

ni dopo. Ma il *Nova Methodus* fu la prima vera pubblicazione sistematica sui nuovi metodi di derivazione, quindi guadagnò rapidamente l'attenzione dei matematica continentali. Nelle isole britanniche l'impatto fu più ridotto. Inoltre molti matematici già conoscevano i metodi di Newton e non faticarono a ritrovare molte procedure simili nel nuovo testo del tedesco.
La seconda considerazione riguarda il periodo successivo alla morte di Newton fino ai giorni nostri. Il fatto importante è che fino all'Ottocento il vincitore della disputa sembrò essere Newton. Per qualche tempo le teorie Newtoniane, ignorate nel continente per troppi anni e riscoperte da poco, ebbero la meglio sul calcolo di Leibniz. È come se i matematici si fossero sentiti di dover scontare la colpa di non aver tenuto in giusta considerazione un così grande matematico e scienziato. Dopo la morte di Leibniz, Newton continuò ad attaccarlo, senza che nessuno lo difendesse, e questo fu di una certa importanza, seppure non decisivo. Probabilmente anche la fama di cui Newton godeva in campo fisico giovò non poco a far pendere dalla parte degli inglesi gli equilibri della disputa sul calcolo.
Essenzialmente, dunque, la priorità di scoperta spetta a Newton, ma la prima pubblicazione è di Leibniz. Inoltre se negli anni immediatamente successivi alla scomparsa dei due matematici, fu Newton a guadagnare più credito tra i matematici, a partire dall'Ottocento il rigore di Leibniz cominciò a diventare sempre più interessante per chi stava indagando, nell'Europa continentale, i fondamenti dell'analisi.

Appendice 1

[35]Il *metodo di esaustione* fu inventato da Eudosso di Cnido[36]. Questo metodo, si proponeva di riempire, letteralmente, un'area con delle figure note tali che la loro somma approssimasse l'area cercata.
Esso rappresenta uno schema fisso al quale si ricorre quando si vuole dimostrare l'equivalenza di due grandezze omogenee Q e Q' (aree, volumi, lunghezze, etc.). Espresso in termini moderni, questa teoria consiste nel dimostrare che due grandezze (lunghezze, aree o volumi) sono uguali perché è assurdo che la loro differenza sia diversa da zero. Otteniamo questo risultato, non da un confronto diretto delle due grandezze in questione, ma dal confronto tra due classi di grandezze (dette contigue) con le seguenti caratteristiche:

- le classi sono separate, cioè ogni grandezza appartenente alla prima classe è minore di ogni grandezza appartenente alla seconda classe;

- è sempre possibile trovare due grandezze, rispettivamente una in ciascuna classe, che abbiano una differenza minore di qualsiasi grandezza scelta piccola a piacere.

Il metodo di esaustione è di fatto il metodo delle classi contigue.
Per provare che una figura A è uguale a una figura B nel caso in cui non siano equiscomponibili si dovrà provare che non può essere né $A < B$ né $A > B$. Per fare ciò si procede per assurdo; supponendo ad esempio che $A < B$ l'assurdo si raggiunge mediante la costruzione di una figura intermedia tra A e B che dovrebbe risultare contemporaneamente maggiore e minore di A.
Il metodo di esaustione è in questo modo interpretato in chiave moderna.
Nell'antichità, ricordiamoci che questo procedimento era stato sviluppato soprattutto in campo geometrico: all'idea di limite di due successioni convergenti, si preferiva l'idea analoga di limite da "riempire" con grandezze note. Ad esempio l'area del segmento parabolico viene calcolata da Archimede "riempiendolo", letteralmente, con dei triangoli sempre più piccoli, fino

[35]Per questa appendice si è fatto riferimento a [2], [3], [8] e [12].
[36]Eudosso di Cnido (CNIDO, 406 – 355 a.C.), filosofo seguace di Platone.

ad "esaurire" (da cui il nome del metodo) lo spazio a disposizione.
I matematici greci anteriori a Eudosso infatti avevano suggerito l'idea di inscrivere e circoscrivere figure rettilinee attorno alla figura curva e di continuare questo a moltiplicare indefinitivamente il numero dei lati, essi però non sapevano come concludere il ragionamento perché il concetto di limite era sconosciuto a quel tempo. Secondo Archimede fu Eudosso a fornire il lemma (che oggi porta il nome di lemma di Archimede-Eudosso o assioma della continuità) che serviva come base per il metodo di esaustione.
Il lemma che negli Elementi di Euclide è dato come definizione (definizione 4, libro V) afferma:

Si dice che hanno rapporto fra loro quelle grandezze che sono capaci se moltiplicate di superarsi a vicenda.

ossia in termini equivalenti:

Date due grandezze aventi un certo rapporto, è possibile trovare un multiplo dell'una che supera laltra.

Partendo da tale assioma, Euclide dimostra una proposizione (proposizione 1, libro X) che costituisce la base del metodo di esaustione:

date due grandezze disuguali, se dalla maggiore si sottrae una parte maggiore della sua metà e da ciò che rimane una parte maggiore della sua metà e se questo procedimento viene ripetuto continuamente, allora alla fine rimarrà una grandezza che sarà minore della minore delle grandezze date[37].

Euclide osserva che tale ragionamento continua a valere anche se "le parti sottratte siano la metà".
Questa proposizione, spesso indicata come "proprietà di esaustione" è equivalente al teorema che in linguaggio moderno scriviamo come

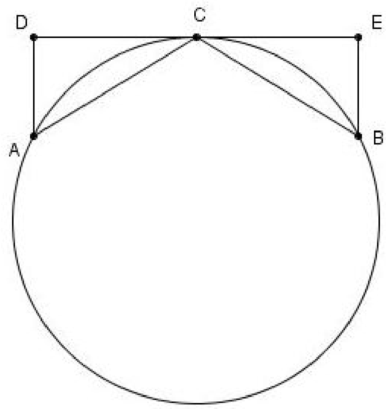
Data una grandezza G e una grandezza ε precedentemente assegnata e dello stesso genere, se r è un rapporto tale che $\frac{1}{2} \leq r < 1$, allora è possibile trovare un intero N tale che per ogni intero $n > N$, sarà $G(1-r)^n < \varepsilon$.

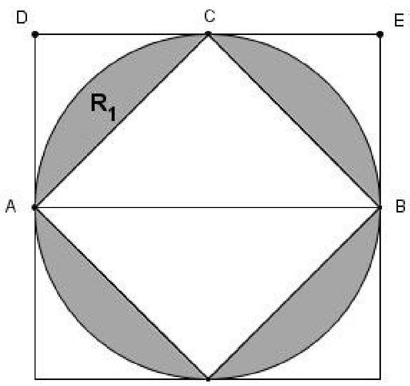
In altri termini: $\lim\limits_{n\to\infty} G(1-r)^n = 0$.
Euclide usa di fatto tale proprietà per dimostrare che un cerchio può essere "esaurito" da poligoni regolari iscritti con un numero di lati via via crescente, in realtà tale proposizione è attribuita a Eudosso stesso ed è la prima parte della dimostrazione della proposizione 2 del libro XII secondo la quale *i cerchi stanno l'un l'altro come i quadrati dei diametri.*

[37] Cioè minore di una grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.

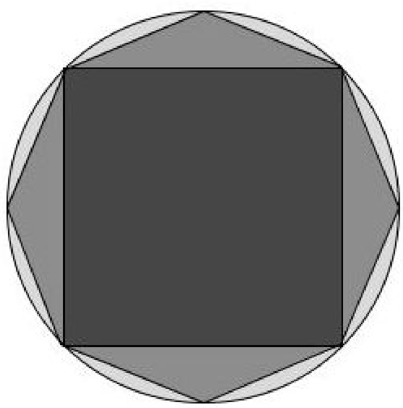
Riporto la prima parte di tale dimostrazione come esempio di applicazione del metodo di esaustione.

> Considerato un arco qualunque di cerchio sotteso dalla corda AB, per il punto medio C dell'arco si tracci la tangente e si proiettino in D ed E i punti A e B.





> La figura $ABED$ è un rettangolo di area maggiore di quella del segmento di cerchio ACB; l'area della sua metà, cioè del triangolo ACB, è maggiore di quella della metà del segmento stesso. Detto ciò, un quadrato inscritto nel cerchio ha un'area maggiore dell'area del cerchio stesso; quindi l'area R_1,che è la differenza tra le aree del cerchio e del quadrato, è minore della metà del cerchio. Dimezzando gli archi delimitati dai lati del quadrato inscritto si costruisca l'ottagono.



La somma delle aree dei triangoli formati da due lati dell'ottagono e da un lato del quadrato è maggiore della metà della somma delle aree dei segmenti circolari circoscritti ai triangoli stessi. Quindi sottraendo dal cerchio l'area dell'ottagono si ottiene una differenza: $R_2 < \frac{R1}{2}$. Proseguendo la costruzione dei poligoni regolari inscritti nel cerchio si troverà un poligono che sottratto dal cerchio lascerà come differenza un'area più piccola di un'area qualunque precedentemente ottenuta (ad es. R_1, R_2,ecc $\ldots$). In questo dobbiamo leggere la potenza del metodo di esaustione: se gli antichi geometri avevano solo suggerito l'idea che il cerchio (come le altre figure curvilinee) poteva essere esaurito o colmato da poligoni regolari iscritti intuendo soltanto il concetto di "passaggio al limite", Eudosso per la prima volta rende rigoroso il procedimento evitando di ricorrere al concetto di limite stesso.
In termini moderni il metodo di esaustione viene ancora utilizzato nel calcolo integrale, anche se oggigiorno non lo si chiama più "metodo di esaustione di Eudosso", ma più semplicemente "calcolo dell'integrale semplice". Il calcolo infinitesimale sposta il suo campo d'azione dalla geometria all'analisi arricchendolo da un lato in precisione e rapidità, ma d'altro canto impoverendolo perché per calcolare l'area di una figura si può ancora utilizzare il calcolo integrale, ma è molto meglio lavorare con formule più rapide già dimostrate, anche se sono state trovate (ad esempio l'area del cerchio) con quello che un tempo era il metodo di esaustione.
Eudosso, più di 2000 anni fa, fu il primo a sviluppare un calcolo che può definirsi la chiave dell'analisi infinitesimale moderna.

Appendice 2

[38]Newton ebbe modo di raccontare come ottenne la formula del binomio, cioè il teorema che descrive lo sviluppo in serie di un binomio, oltre venti anni più tardi dell'effettiva scoperta, in due lettere del 1676, inviate ad Henry Oldenburg, ma inidirizzate in realtà a Leibniz[39]. Tale formula fu pubblicata da Wallis, che correttamente l'attribuì a Newton, nella sua *Algebra* del 1685, ma fu espressa per la prima volta da Newton stesso in una lettera inviata ad Oldenburg il 13 giugno 1676, affinché la trasmettesse a Leibniz.
Riporto qui sotto un passo significativo della lettera del 13 giugno[40]:

> "Le estrazioni di radice possono essere molto abbreviate mediante il seguente teorema:
>
> $$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots.$$
>
> Dove $P + PQ$ esprime la quantità di cui si deve ricercare o la radice, o anche una qualsiasi potenza, o la radice di una potenza. P indica il primo termine di tale quantità; Q indica i rimanenti termini divisi per il primo, ed $\frac{m}{n}$ l'indice numerico della potenza di $P+PQ$; questo sia che si tratti di una potenza intera, frazionaria, positiva o negativa."

Newton chiarisce dunque la sua notazione di potenze frazionarie e negative:

> "Infatti come gli analisti vogliono scrivere a^2, a^3, $\ldots$, invece di aa, aaa, $\ldots$, così io scrivo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; invece di $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{a^5}$, $\ldots$. Egualmente scrivo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, invece di $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$."

[38]Per questa appendice si è fatto riferimento a [4].

[39]Henry Oldenburg (1618 - 1677), allora segretario della Royal Society, fece da tramite tra i due matematici negli anni 1677 - 1677.

[40]Secondo la traduzione in [4].

Resta da chiarire il significato delle lettere maiuscole coefficienti di Q, ed è quello che fa Newton subito dopo:

> "E infine, dei termini ottenuti nel quoziente mediante le operazioni mi servo delle lettere A, B, C, D, ...; e precisamente A al posto del primo termine $P^{\frac{m}{n}}$, B al posto del secondo $\frac{m}{n}AQ$; e così per tutti gli altri termini."

A questo punto Newton fornisce nove esempi di applicazione della regola, riporto qui sotto solo il quarto esempio:

> "Radice cubica di $(d+e)^4$ [41] $= d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{9d^{\frac{2}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} + \ldots$,
> infatti $P = q$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 4$, $n = 3$, $A(= P^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{4}{3}} \ldots$"

Newton utilizza la notazione di potenze frazionarie secondo quanto chiarito in precedenza e procede poi all'estrazione di radice seguendo la regola enunciata. Egli riconosce l'abilità matematica del suo interlocutore e quindi non ritiene necessario ulteriori chiarimenti, ma solo l'elenco con i nove esempi di applicazione della regola.
Nella lettera datata 24 ottobre dello stesso anno, cioè 1676, in risposta ad una richiesta di Lebniz, l'inglese spiega dettagliatamente come giunse alla serie binomiale.

> "Ho già esposto a Leibniz uno dei miei metodi, ora voglio esporgliene un altro, proprio quello che per primo mi fece pervenire a queste serie. Infatti le trovai prima di conoscere le divisioni e le estrazioni di radice, di cui ora, di preferenza, mi servo. La spiegazione che ora ne darò, mostrerà anche il fondamentale teorema, posto all'inizio della lettera precedente, che Leibniz desiderava conoscere."

Dopo queste considerazioni introduttive, si hanno alcuni paragrafi che costituiscono una delle prime testimonianze del genio assoluto di Newton: egli si servì della sua straordinaria intuizione matematica per ottenere la serie binomiale a partire da alcuni lavori di Wallis sulle serie[42]. Newton stesso descrive dettagliatamente il procedimento che lo ha portato a formulare alcune considerazioni solamente sulla base dell'osservazione di termini delle serie di

[41] cioé $(d+e)^{\frac{4}{3}}$.

[42] In particolare il lavoro sul problme adi trovare l'area delimitata da curve le cui coordinate avevano la forma $(1-x^2)^n$.

Wallis, finché poi arrivò per analogia al termine del binomio. Ci si può chiedere se la fluidità e semplicità con cui Newton presenta i suoi straordinari risultati sia da attribuire al suo genio matematico oppure non sia piuttosto uno stratagemma per apparire migliore agli occhi di Leibniz, e magari non rivelare dettagliatamente tutti i passaggi, facendoli apparire ovvi e scontati. La risposta più sensata è la prima, per due ragioni: innanzitutto nel periodo della lettera del 1676 i rapporti tra Leibniz e Newton erano piuttosto buoni, e c'era sincero interesse da parte di entrambi nel conoscere i rispettivi risultati, inoltre Lebniz già conosceva il genio matematico di Newton, che quindi non aveva bisogno di esagerare i proprio meriti.
Riporto qui di seguito le pagine che descrivono la scoperta della formula del binomio come una genuina testimonianza, che voleva semplicemente descrivere ad un amico uno dei più importanti risultati della sua carriera matematica.

> "Quando, all'inizio dei miei studi di matematica, esaminai l'opera del nostro celeberrimo Wallis, considerai le siere mediante la cui iterpolazione egli ci dà l'area del cerchio e dell'iperbole, come per esempio le serie delle curve aventi per comune base, o asse, x e per ordinate $(1-xx)^{\frac{0}{2}}$; $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$; $(1-xx)^{\frac{2}{2}}$; $(1-xx)^{\frac{3}{2}}$; $(1-xx)^{\frac{4}{2}}$; $(1-xx)^{\frac{5}{2}}$; ..., dove se le aree dei termini alterni che sono x; $x-\frac{1}{3}x^3$; $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$; $x-\frac{3}{5}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$; ..., potessero venire interpolate, otterremmo le aree dei termini intermedi, il primo dei quali $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ è il cerchio.
> Al fine di interpolarli notavo allora che in tutti i casi il primo termine era x e che i secondi termini erano in preogressione aritmetica, e che quindi i primi due termini della serie da interpolare dovevano essere:
>
> $$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3};$$
> $$x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3};$$
> $$x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3};$$
> $$\ldots.$$
>
> Inoltre per interpolare le restanti consideravo che i denominatori 1, 3, 5, 7, ..., erano in progressione aritmetica, e che quindi dovevano ricercare solo i corffiecienti numerici dei numeratori; ma questi nelle aree date alternativamente erano le cifre delle potenze del numero 11, cioè 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4; ovvero 1; 1, 1; 1, 2, 1;

> 1, 3, 3, 1; 1, 4, 6, 4, 1 ....
> Mi domandavo inoltre in qual modo, in queste serie, date le prime due figure, fosse possbile ricavare le rimanenti; e trovai che, posta la seconda figura m, si ricavavano tutte le altre, moltiplicando continuamente i termini della serie:
> $$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \dots .''$$

Con questa formula, posto il secondo termine $m = 3$ ed essendo il primo termine 1, la serie sarà

$$3 \times \frac{3-1}{2} \times \frac{3-2}{3} \times \frac{3-3}{4} \dots$$

e dunque i termini saranno rispettivamente 1, 3, 3, 1. Nel caso $m = 4$ i termini saranno 1, 4, 6, 4, 1 e così via per $m = 5, 6, \dots$.
Newton procede rapidamente e in modo molto informale, come se i suoi risultati fossero assolutamente ovvi. In particolare si basa su intuizioni personali che gli permettono di muoversi a salti, senza enunciare e dimostrare rigorosamente tutti i passaggi. Proprio questo stile fu una delle caratteristiche peculiari dello scienziato inglese. Egli si discostò molto da Leibniz, che in quanto filosofo, logico e giurista aveva uno stile molto cauto e per certi versi moderni nelle dimostrazioni matematiche. È probabile però che proprio l'audacia di Newton lo portò ad ottenere certi risultati prima di ogni altro: egli era in qualche modo privo di ogni freno, e riusciva a dare libero sfogo al proprio genio matematico.
Più avanti nella lettera del 24 ottobre infatti Newton descrive come è giunto ad ottenere dei procedimenti per calcolare le aree sottese a determinare curve, facendo un passo avanti verso la formulazione di una vera e propria teoria dell'integrazione.

> "Mi sono servito di questa regola per interpolare le serie.
> [...] E con lo stesso procedimento ottenni anche le aree da interpolare delle restanti curve, come l'area dell'iperbole e delle altre curve alterne nella serie $(1+xx)^{\frac{0}{2}}$; $(1+xx)^{\frac{1}{2}}$; $(1+xx)^{\frac{2}{2}}$; $(1+xx)^{\frac{3}{2}}$; ....
> E lo stesso è il procedimento per interpolare le altre serie, e ciò attraverso intervalli di due o più termini mancanti. Questo fu il mio primo esordio in meditazione di tal genere, che certamente avrei ben presto dimenticato se già da qualche settimana non avessi rivolto la mia attenzione a certi altri fatti.
> E, proprio quando avevo appreso le cose di cui sopra, stavo considerando che anche i termini $(1+xx)^{\frac{0}{2}}$; $(1+xx)^{\frac{2}{2}}$; $(1+xx)^{\frac{4}{2}}$;

> $(1+xx)^{\frac{6}{2}}$; ..., cioè 1; $1-xx$; $1-2xx+x^4$; $1-3xx+3x^4-x^6$; ... potevano venir interpolati alla stessa maniera, e così le aree da essi generate; e che a questo scopo niente altro si richiedeva se non l'eliminazione dei denominatori 1, 3, 5, 7, ... nei termini esprimenti le aree; che cioè i coefficienti dei termini della quantità da interpolare $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$, o $(1-xx)^{\frac{2}{3}}$, o in generale $(1-xx)^m$, si ottenevano continuando la moltiplicazione dei termini delle serie
>
> $$m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \dots .''$$

Poco più avanti Newton scrisse di aver ottenuto un procedimento per estrarre aritmeticamente la serie, che sono radici della quantità $1-xx$.

> "Egualmente la riduzione generale dei radicali in serie infinite, mediante la regola da me stabilita all'inizio della lettera precedente[43], mi era nota prima che trovassi il modo di farlo mediante estrazioni di radice.
> Tuttavia, una volta pervenuto alla conoscenza del primo procedimento, il secondo non poteva rimanermi a lungo nascosto. Infatti per provare la validità di queste operazioni, moltiplicai $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ per se stesso, ottenendo $1-xx$, dato che tutti gli altri termini, continuando la serie, svanivano all'inifinito. Anche $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$, moltiplicato due volte per se stesso, dette come risultato $1-xx$. Questo mi indusse, non appena fu certa la dimostrazione di queste conclusioni, a tentare se, viceversa, queste serie, che risultavano essere radici della quantità $1-xx$, non potessero venire estratte aritmenticamente. Il tentativo riuscì perfettamente [...].
> [...] tralasciai completamente l'interpolazione delle serie e da allora mi servii solo delle nuove operazioni in quanto fondamentalmente più genuini.
> [...] Ma l'epidemia di peste mi costrinse a quel tempo a fuggir via di qua e a pensare ad altre cose."

Completata la spiegazione della sua formula del binomio, Newton nel resto della lettera racconta i suoi progressi nel calcolo delle tangenti, base del suo metodo delle flussioni.

[43] Si tratta della lettera del 13 giugno.

Bibliografia

[1] J. Bennett, *Exchange of paper between Leibniz and Clarke*, 2010 - 2015;

[2] Giorgio T. Bagni, *Il metodo di esaustione nella storia dell'analisi infinitesimale*, Periodico di Matematiche VII, 4, 1/2 (1997), $15 - 33$.

[3] Charles B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano, 1980;

[4] G. Cantelli, *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, Bollati Boringhieri, Torino, 2006;

[5] G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Biblioteca Scientifica Feltrinelli, Milano, 1962;

[6] V. Gavagna, *Dal metodo delle tangenti al calcolo differenziale: un percorso storico-didattico*, Dipartimento di Matematica di Salerno, 2009 - 2012;

[7] E. Giusti, *Il calcolo infinitesimale tra Leibniz e Newton*, conferenza tenuta nel 1988 presso Università Politecnico Torino;

[8] M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, 1991;

[9] E. Ruffini, *Il "Metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Biblioteca Scientifica Feltrinelli, Milano, 1961;

[10] V. Volterra, *Saggi scientifici*, Zanichelli, Bologna, 1920;

[11] http://www.math.rutgers.edu/courses/436/Honors02/newton.html, sezione del sito web del Dipartimento di Matematica dell'Università Rutgers, New Jersey;

[12] *Il giardino di Archimede un museo per la Matematica*, http://www.math.unifi.it/~archimede/archimede/index.html, sezione "La storia del calcolo infinitesimale attraverso i libri della biblioteca matematica".