

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**CARATTERIZZAZIONE DEL CIRCUITO DI  
TRASMISSIONE DEI SEGNALI  
DELL'ESPERIMENTO DARKSIDE-20K**

**Relatrice:**  
**Prof.ssa Gilda Scioli**

**Presentata da:**  
**Francesco Rotella**

**Correlatore:**  
**Dott. Rosario Nania**

Anno Accademico 2016/2017

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Cosmologia, Supersimmetrie e WIMP</b>	<b>2</b>
1.1 Cosmologia	3
1.1.1 Relatività Generale	3
1.1.2 Metrica <i>Friedman-Robertson-Walker</i>	4
1.1.3 Prima equazione di Friedmann e costante di Hubble	5
1.1.4 Misura della Massa	8
1.1.5 Misura della Velocità di Rotazione delle Galassie	9
1.1.6 Massa Anomala del <i>Cluster</i> Coma	11
1.1.7 Radiazione Cosmica di Fondo	11
1.2 WIMP	13
1.2.1 Rivelazione diretta	14
<b>2 DarkSide</b>	<b>17</b>
2.1 Situazione Sperimentale	18
2.2 Scintillatori	19
2.2.1 Scintillatori Inorganici	19
2.2.2 Scintillatori Organici	20
2.3 Fotomoltiplicatori	21
2.3.1 Effetto Fotoelettrico	21
2.3.2 Tubi Fotomoltiplicatori	23
2.4 SiPM	24
2.4.1 Fotodiodi e Fotodiodi a Valanga	24
2.4.2 Fotomoltiplicatori al Silicio	27
2.5 DarkSide-50	27
2.5.1 Time Projection Chamber	27
2.5.2 <i>Setup</i> Esperimento	28
2.5.3 Principi di Funzionamento	29
2.6 DarkSide-20k	30
2.7 Calibrazione PMT	34

<b>3</b>	<b>Attenuazione e Crosstalk <i>Motherboard</i></b>	<b>35</b>
3.1	Linee di Trasmissione . . . . .	35
3.1.1	Trasmissione su Lunghe Distanze . . . . .	35
3.2	Tecniche di Misura ed Applicazioni . . . . .	37
3.2.1	Metodi Grafici . . . . .	37
3.2.2	Riflettometria . . . . .	44
3.2.3	Tecniche Riflettometriche, Misurazione di Crosstalk . . . . .	44
3.3	Misure . . . . .	47
3.3.1	Misura di Crosstalk tra le Linee di Trasmissione . . . . .	47
3.3.2	Misura di Attenuazione dei Segnali . . . . .	59
	<b>Conclusioni ed Osservazioni</b>	<b>62</b>
	<b>Appendices</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Dimostrazioni Primo Capitolo</b>	<b>64</b>
A.1	Metrica FRW . . . . .	64
A.2	Equazioni di Friedmann . . . . .	65
A.3	Teorema del Viriale . . . . .	66
<b>B</b>	<b>Sviluppo Teorico Linee di Trasmissione</b>	<b>68</b>
B.1	Trasformata di Steinmetz . . . . .	68
B.2	Equazioni Telegrafiche . . . . .	69
B.2.1	Mezzo Non Dissipativo . . . . .	69
B.2.2	Mezzo Dissipativo . . . . .	70
B.2.3	Coefficiente di Riflessione . . . . .	71
B.2.4	Impedenza e Coefficiente di Riflessione Generalizzati . . . . .	72
B.2.5	Coefficiente di Trasmissione . . . . .	73
B.3	Skin Effect . . . . .	74

# Introduzione

Questa tesi sperimentale si occupa di riportare le analisi di riflettometria, *crosstalk* ed attenuazione su una componente circuitale (*motherboard*) dell'apparato di presa dati dell'esperimento DarkSide-20K, che avrà luogo nei Laboratori Nazionali del Gran Sasso. Lo scopo di tale esperimento è la rivelazione diretta di materia oscura, la cui origine teorica, basata su osservazioni sperimentali, è esposta nel primo capitolo, il quale inizia proponendo nozioni di cosmologia utili alla contestualizzazione dell'ipotesi fisica che vede la materia oscura come componente indispensabile della natura, in quanto senza di questa non potrebbero spiegarsi alcune osservazioni astronomiche su grande scala.

Nel secondo capitolo è riportata una descrizione dell'apparato e dei suoi principi di funzionamento, dall'attuale implementazione in DarkSide-50 alla sua futura evoluzione in DarkSide-20K.

Infine, il terzo ed ultimo capitolo introduce gli argomenti fisici indispensabili alla resa organica dell'esposizione, rimandando i dettagli matematici all'appendice B, la quale espone i passaggi teorici che, a partire dalle equazioni di Maxwell e dalla nozione di circuito RLC, costruiscono la teoria delle linee di trasmissione, centrale nel lavoro sperimentale di questa tesi. Il terzo capitolo contiene inoltre un resoconto dettagliato dei risultati dell'analisi, che consiste in una quantificazione del disturbo interno alla *motherboard* dovuto all'interazione mutua dei canali di trasmissione. Sono state effettuate su quest'ultima anche misure di attenuazione e, indirettamente, di impedenza differenziale.

# Capitolo 1

## Cosmologia, Supersimmetrie e WIMP

Parlando di *Materia Oscura*, si fa riferimento ad una classe di particelle, per ora non meglio specificate, non presenti nel *modello standard* e soddisfacenti alcuni requisiti[2], per esempio:

- non devono essere elettricamente cariche, non devono quindi interagire con i fotoni;
- devono essere molto stabili;
- devono essere non barioniche;

La giustificazione di quanto elencato ed ulteriori punti saranno forniti nei prossimi paragrafi.

Tuttavia, si può già accennare al fatto che tale classe di particelle costituisce circa il 90% della massa dell'universo osservabile e, dato che non si accoppia con i fotoni, non sarà direttamente osservabile se non tramite la sua interazione gravitazionale con il resto della materia, alla quale, d'ora in poi, si farà riferimento come *materia ordinaria*, mettendo in evidenza la capacità di quest'ultima di interagire con la luce e di essere quindi visibile ed osservabile *direttamente*. Nei prossimi paragrafi sarà brevemente esposto il contesto teorico-sperimentale nel quale ci troviamo al giorno d'oggi. In particolare si ripercorreranno le intuizioni e i risultati teorici della *cosmologia* e della *relatività generale*, i quali saranno messi a confronto con i risultati sperimentali.

La conoscenza della densità della materia nell'universo è fondamentale. Infatti la prima grande prova dell'esistenza della materia oscura venne proprio dalla misurazione della massa di un cluster (*Coma*). Altrettanto importante è l'analisi sulla radiazione cosmica di fondo che, come vedremo in seguito, consentirà di calcolare la densità di materia oscura.

## 1.1 Cosmologia

### 1.1.1 Relatività Generale

In *relatività generale* la gravitazione è descritta, proprio come nel caso classico Newtoniano, da una relazione lineare tra una derivata seconda di un campo ed un termine massivo, quindi energetico.

La simmetria tra queste equazioni, cioè quella di Einstein [6] per la relatività e quella di Poisson per la gravitazione Newtoniana, è evidente<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= 4\pi G_N\rho \\ G_{\mu\nu} &= 8\pi G_N T_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Con il *tensore di Einstein* definito dall'equazione

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

e il *tensore di Ricci*  $R_{\mu\nu}$  a partire da quello di *Riemann*,

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{il;jk} - g_{ik;jl} + g_{jk;il} - g_{jl;ik})$$

tramite una contrazione di due dei suoi indici che, con la convenzionale notazione sulle derivate covarianti, esprime una funzione (tensoriale) di derivate seconde della metrica, indicata con  $g_{\mu\nu}$ .

Reiterando la procedura si ottiene lo *scalare di Ricci*  $R$ .

Nella parte *destra* dell'equazione di Einstein 1.1 appare il *tensore Energia-Impulso*  $T_{\mu\nu}$ , definito dalla relazione

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu},$$

valida per un fluido perfetto la cui 4-velocità è  $u_\mu$ , dove  $p$  e  $\rho$  sono rispettivamente la pressione e la densità proprie. In un sistema di riferimento solidale al fluido si ha[1]:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & pg_{ij} \end{pmatrix}$$

Si noti che quest'ultima grandezza tensoriale si propone come generalizzazione di  $\rho$  stessa.

L'equazione di Einstein così impostata è quindi, in un certo senso, dipendente solamente dalla metrica  $g_{\mu\nu}$ , dalle sue derivate e dalla densità di energia  $\rho$ , ed è proprio su quest'ultima che ci soffermeremo nel prossimo paragrafo.

---

<sup>1</sup>c=1

Inoltre, la 1.1 rappresenta, in realtà, un sistema di dieci<sup>2</sup> equazioni differenziali al second'ordine, non lineari, rispetto alla metrica (ma lineari rispetto alle sue derivate seconde). L'identità di Bianchi, riportata qui sotto, consente di ridurre questo numero a sei, infatti

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$$

è in realtà un'imposizione di quattro vincoli a loro volta indipendenti.

### 1.1.2 Metrica *Friedman-Robertson-Walker*

Trovare una soluzione generale a questo sistema di equazioni può essere reso possibile nel vuoto, dove si annulla il tensore energia-impulso, solo grazie alla presenza di particolari simmetrie[6]. Imponendo quindi nell'equazione di Einstein isotropia e omogeneità dello spazio tramite gli opportuni *vettori di Killing*, quindi di traslazione e rotazione, si ottiene in modo univoco<sup>3</sup> la *metrica FRW* (Friedman-Robertson-Walker)[1].

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (1.2)$$

dove:

- $a(t)$ : fattore di scala;
- $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ ;
- l'origine  $r = 0$  è totalmente arbitraria;
- $k$ : parametro di curvatura, tale per cui

–  $k = 0$

universo *piatto*, infatti la parte spaziale della metrica sarebbe uguale ad un'usuale metrica euclidea in coordinate sferiche:  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ ;

–  $k = 1$

universo *chiuso*, cioè il *raggio proprio*<sup>4</sup> di ogni osservatore sarà superiormente limitato, e la topologia globale sarà quella di una sfera ( $S^3$ );

–  $k = -1$

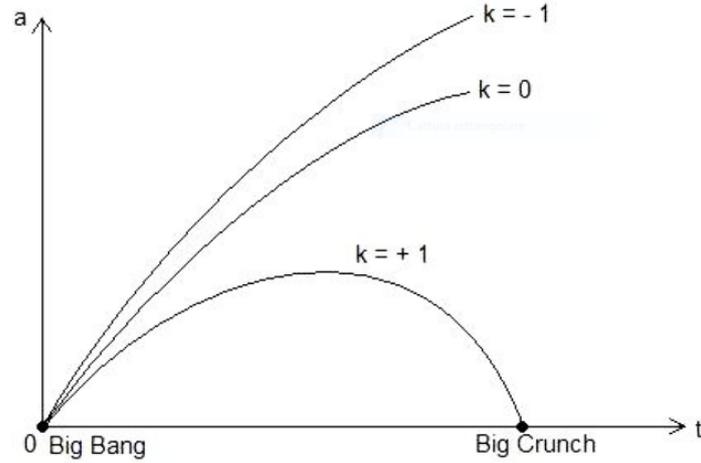
universo *aperto*, la cui topologia sarà quella di un iperboloide.

La figura 1.1 rende molto bene l'idea della natura e del significato fisico del parametro di curvatura, infatti viene chiarita la dipendenza tra il fattore di scala e  $k$ . Come sarà

<sup>2</sup>stesso numero di gradi di libertà (non fisici) del tensore  $\mathbf{g}$ .

<sup>3</sup>I dettagli di questi procedimenti sono mostrati in appendice.

<sup>4</sup>la cui esistenza è garantita dall'arbitrarietà dell'origine delle coordinate



**Figura 1.1:** Rappresentazione della dipendenza del fattore di scala  $a(t, k)$  dal tempo al variare del parametro di curvatura.

mostrato in seguito, poiché la derivata logaritmica di  $a(t)$  è positiva, proprio come  $a(t)$  stesso, si potrà concludere che l'universo sia attualmente in *espansione*<sup>5</sup> ( $\dot{a} > 0$ ). La misurazione di queste grandezze consentirà di stimare la densità media dell'universo, la quale sarà successivamente differenziata tra densità medie di materia ordinaria, oscura, etc...

### 1.1.3 Prima equazione di Friedmann e costante di Hubble

Reinserendo la metrica 1.2 nell'equazione di Einstein nella maniera indicata in appendice A, si ottiene un'equazione tensoriale la cui parte temporale è detta *prima equazione di Friedmann*[1],

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G_N \rho. \quad (1.3)$$

Mentre quella spaziale è

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G_N(\rho + 3p). \quad (1.4)$$

Si definiscono inoltre:

- il *parametro di Hubble*, detto spesso e impropriamente *costante di Hubble*:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.5)$$

---

<sup>5</sup> $H > 0, \quad a > 0 \implies \dot{a} > 0.$

il cui valore attuale, secondo recenti misurazioni<sup>6</sup>, è di  $(2,176 \pm 0,039) \times 10^{-18}$  Hz;

- la *densità critica*:

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G_N}, \quad (1.6)$$

ottenuta imponendo  $k = 0$  (topologia standard e metrica euclidea) nella 1.3;

- il *parametro di densità*:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}. \quad (1.7)$$

Usando quindi queste nuove variabili nella prima delle equazioni di Friedmann, la 1.3 può essere riscritta in questo modo:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (1.8)$$

Esplicitando la 1.6 per  $H^2$  e sostituendo nella 1.8 si ottiene

$$\rho - \rho_{crit} \propto k, \quad (1.9)$$

quindi

$$\begin{aligned} k = 0, & \quad \rho = \rho_{crit} \\ k > 0, & \quad \rho > \rho_{crit} \\ k < 0, & \quad \rho < \rho_{crit}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

La tabella che segue riassume, quindi, quanto detto finora.

Casistiche equivalenti		
$\rho < \rho_{crit}$	$\Omega < 1$	$k = -1$
$\rho = \rho_{crit}$	$\Omega = 1$	$k = 0$
$\rho > \rho_{crit}$	$\Omega > 1$	$k = 1$

Le evidenze sperimentali mostrano che il parametro  $k$  è molto vicino allo zero e che il nostro universo sta accelerando ( $\ddot{a} > 0$ ).

<sup>6</sup>misurazione eseguita dalla sonda *Planck* dell'ESA, 2013.

Quindi, con  $\Omega \simeq 1$  si ha<sup>7</sup>, esplicitando la 1.7

$$\rho \simeq \rho_{crit} \simeq 10^{-29} g/cm^3.$$

Un altro parametro importante per la caratterizzazione della composizione dell'universo è il parametro di densità barionica  $\Omega_b$ . Uno dei modi di misurare la densità barionica è lo studio della nucleosintesi primordiale, ovvero la prima *coagulazione* di materia a seguito del *Big Bang*, fenomeno caratterizzato, tra le altre cose, dai processi di *bariogenesi*, avvenuti durante l'epoca *elettrodebole*<sup>8</sup>, iniziata dal momento in cui l'interazione forte si separò da quella debole e coulombiana, le quali non assunsero un'identità propria fino all'epoca dei *quark*<sup>9</sup>. I primi elementi ad essere formati furono <sup>2</sup>H (deuterio), tramite scontri protone-neutrone[19], quindi <sup>4</sup>He, con qualche traccia di <sup>3</sup>He, trizio, Litio e Berillio. La quantità di produzione di questi isotopi, stimabile a partire dai valori attuali, dipenderà inevitabilmente dalla densità barionica  $\Omega_b$ , infatti non è noto nessun processo di produzione stellare del deuterio, quindi quello attualmente presente deve essere primordiale [2]. Una misurazione della *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) riporta un valore di  $\Omega_b = 0,0463 \pm 0,024$ , mentre si ottiene un valore di  $\Omega_O = 0,279 \pm 0,025$  per la materia oscura.

A contribuire al valore di  $\Omega$  sono:

i) materia massiva ordinaria<sup>10</sup> [2]

$$\Omega_M \simeq 5\%;$$

ii) materia oscura

$$\Omega_O \simeq 25\%;$$

iii) energia oscura

$$\Omega_\Lambda \simeq 70\%.$$

Vale quindi la relazione

$$\Omega_M + \Omega_O + \Omega_\Lambda = 1. \tag{1.11}$$

---

<sup>7</sup> $\Omega = 1,02 \pm 0,02$

<sup>8</sup>iniziata a circa  $10^{-36}$  secondi dal *Big Bang*, ma la bariogenesi ebbe luogo più tardi.

<sup>9</sup> $10^{-12}$  secondi

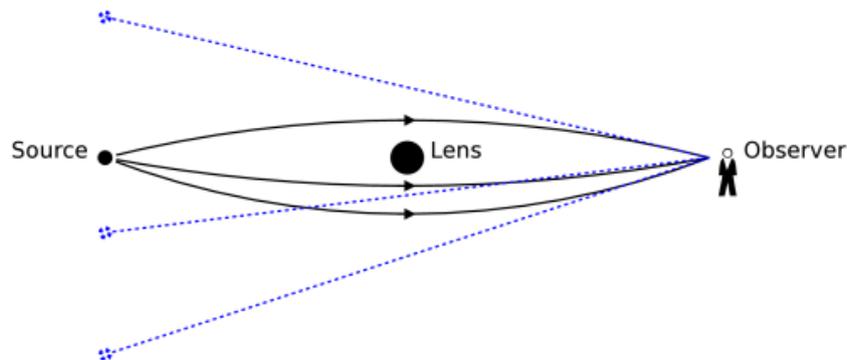
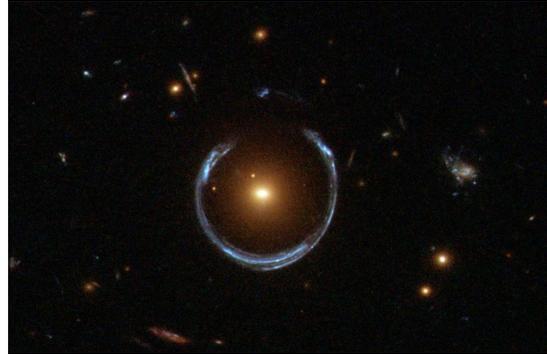
<sup>10</sup>pagina 213.

### 1.1.4 Misura della Massa

Una seconda giustificazione del punto *ii* del precedente elenco arriva da un fenomeno noto in fisica astronomica come *lensing gravitazionale*.

Nella fisica Newtoniana, l'interazione gravitazionale è fortemente legata alla *massa* dei corpi del sistema, quindi un oggetto non-massivo come la luce non dovrebbe esser deflesso nella sua traiettoria da, ad esempio, qualcosa di massivo come una stella.

Tuttavia la gravitazione, così com'è descritta dalla relatività, pone sullo stesso piano massa ed energia, prevedendo quindi che la luce, poiché energetica, possa essere deflessa dalla sola presenza di altra energia, magari sotto forma di massa, come ad esempio un pianeta, un buco nero, o una galassia.

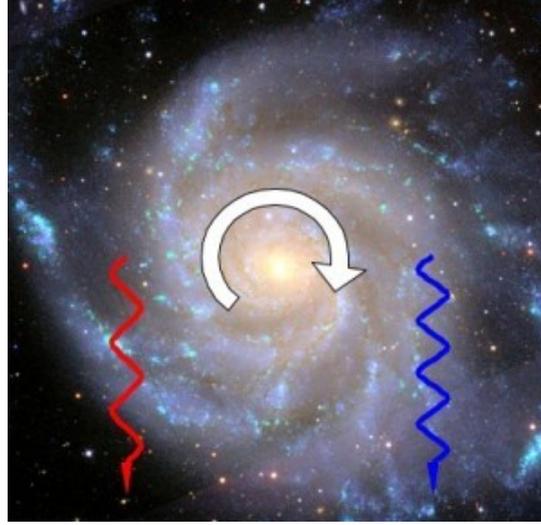


**Figura 1.2:** In figura è mostrata una semplificazione del fenomeno del *lensing* gravitazionale, la cui misura dell'angolo di deflessione consente il calcolo della massa dell'oggetto che si interpone tra la sorgente e l'osservatore.

Ecco quindi che dovrà esserci una corrispondenza tra l'angolo del quale un raggio di luce viene deflesso nel passare in prossimità di un oggetto massivo e la massa stessa dell'oggetto.

Tale corrispondenza è espressa dalla legge[7]

$$\alpha \simeq \left( \frac{G_N M}{dc^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$



**Figura 1.3:** Effetto Doppler dovuto alla rotazione anisotropa della galassia rispetto all'osservatore.

con  $M$  massa totale della galassia,  $d$  parametro l'urto, definito come<sup>11</sup>  $L/E$ , interpretabili come *momento angolare* ed *energia di legame* del sistema gravitativo.

### 1.1.5 Misura della Velocità di Rotazione delle Galassie

Le equazioni che descrivono l'*effetto Doppler*, quindi quella longitudinale<sup>12</sup>

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \quad \beta = v/c,$$

che descrive lo *shift* nello spettro di emissione di una sorgente che si avvicina o si allontana radialmente dall'osservatore, e quella trasversale

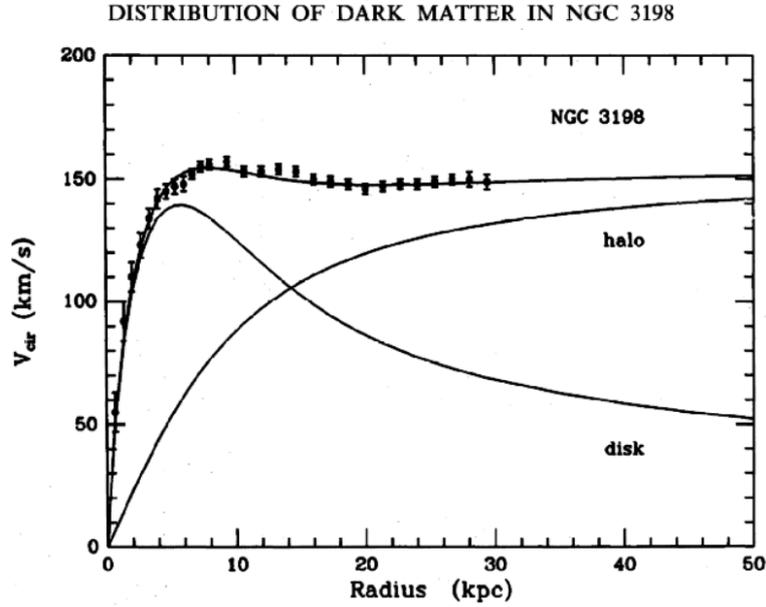
$$\nu = \frac{\nu'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

consentono di misurare direttamente la velocità di rotazione, dipendentemente dalla distanza dal centro, delle galassie, confrontando il *blue-shift* della parte che si avvicina con il *red-shift* di quella che si allontana, come mostrato dalla figura 1.3.

Ricordando che l'accelerazione di un corpo in un moto circolare uniforme è

<sup>11</sup>si veda [8], pagina 293

<sup>12</sup> $\nu'$  è la frequenza della radiazione emessa nel sistema di riferimento in moto relativamente al laboratorio, dove si misura  $\nu$ , sia nel caso longitudinale che in quello trasversale.



**Figura 1.4:** Confronto tra le dipendenze sperimentali e kepleriane (*disk*) della distanza (kpc) dal centro della galassia NGC 3198 con la velocità di rotazione (km/s).

$$a_c = v^2/R$$

si esprime la condizione dinamica di equilibrio come

$$F_g = F_{centr} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{G_N M}{R}. \quad (1.12)$$

Ci si aspetta quindi che a grandi distanze

$$v \propto R^{-\frac{1}{2}}, \quad R \gg 1,$$

cosa che effettivamente non accade se  $M$  è la massa totale della materia visibile nelle galassie, come mostrato in figura 1.4, dove è mostrato il confronto tra le previsioni teoriche (kepleriane) e i dati raccolti.

L'assunzione *ii* alla fine del paragrafo 1.1.3 giustifica tale incongruenza, se si considera la materia oscura distribuita in maniera localmente uniforme ed isotropa, proprio come le polveri o le nebulose, ma su scala galattica.

### 1.1.6 Massa Anomala del *Cluster* Coma

Se si indica  $\langle f \rangle$  la media integrale della grandezza fisica  $f$ , l'uguaglianza  $2\langle T \rangle = n\langle U \rangle$ , insieme all'ipotesi della *n-omogeneità* di  $U$  e della limitatezza di  $\sum pq$ , prende il nome di *teorema del viriale*, dimostrato in appendice A.

Per l'interazione gravitazionale  $n = -1$ , quindi

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle \quad (1.13)$$

L'astronomo Fritz Zwicky stimò nel 1933 la massa del *cluster* denominato *Coma*, conoscendo la velocità radiale delle sue galassie (§ 1.1.5), ne calcolò la media globale e, usando il teorema del viriale A.19 e conoscendo il potenziale generato dall'ammasso approssimato come una sfera, ne stimò la massa totale  $M$  (§ 1.1.4) [13].

Confrontando poi il rapporto *massa-luminosità*  $M/L$  (in unità  $M_\odot/L_\odot$ , cioè il rapporto  $M-L$  del sole) del *cluster* con quello delle singole galassie che lo costituiscono, scoprì che ognuna di queste era caratterizzata da un rapporto  $M/L$  cinquanta (circa) volte inferiore a quello del *cluster*, indice della presenza di un'enorme massa non rivelata fino ad allora, presente nel *cluster*.

### 1.1.7 Radiazione Cosmica di Fondo

La *Cosmic Microwave Background Radiation* (CMBR) è una radiazione elettromagnetica generata, secondo l'attuale teoria cosmologica, dalla ricombinazione elettroni-protoni, avvenuta a circa 378'000 anni dal *Big Bang*.

A seguito di questo evento singolare ci fu la fase adronica ( $10^{-6}$  s), durante la quale la temperatura scese abbastanza da consentire ai quark di legarsi e formare protoni.

A questo punto il libero cammino medio dei fotoni era molto breve, fatto che rendeva il plasma presente particolarmente opaco.

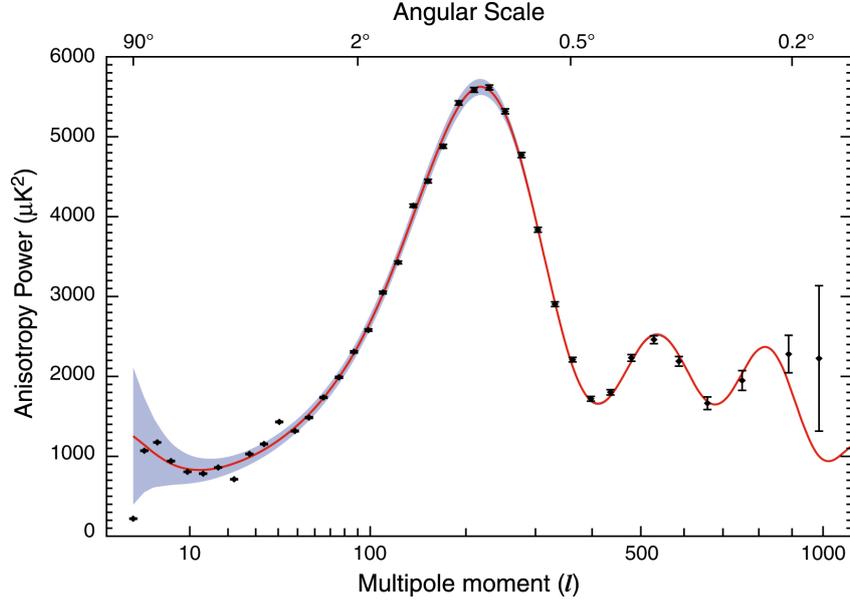
L'universo fu successivamente invaso da quella che sarebbe diventata la radiazione cosmica di fondo, associabile ad un corpo nero la cui temperatura è circa 4000 Kelvin, la quale è stata successivamente *shiftata* verso il rosso a seguito dell'espansione dell'universo.

L'attuale temperatura di corpo nero della CMBR è di  $2,72548 \pm 0,00057$  Kelvin.

La misurazione dell'energia subisce fluttuazioni dovute alla variazione di densità locale nell'universo.

### Funzioni di Correlazione

Per *Funzione di Correlazione* si fa riferimento, nella *teoria quantistica dei campi*, ad una funzione scalare espressa nella forma



**Figura 1.5:** Spettro angolare della CMBR.

$$\begin{aligned} C(x) &= \langle 0 | \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \dots \hat{A}_n | 0 \rangle \\ &= \langle \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \dots \hat{A}_n \rangle, \end{aligned} \quad (1.14)$$

cioè un prodotto triplo tra due stati<sup>13</sup> e una composizione di operatori  $\hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \dots \hat{A}_n$ .

Nel caso in questione, una funzione di correlazione viene usata per quantificare l'anisotropia della temperatura nella CMBR:

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T_0}(\hat{n}_1) \frac{\delta T}{T_0}(\hat{n}_2) \right\rangle \quad (1.15)$$

dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$ .

Le fluttuazioni della temperatura (intesa come campo) sono espresse in armoniche sferiche

$$\frac{\delta T}{T_0}(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (1.16)$$

$$Y_{lm} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \left( \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^{|m|}(\cos(\theta)) e^{im\phi} \quad (1.17)$$

<sup>13</sup>solitamente stati di vuoto o stati fondamentali

e  $C(\theta)$  in polinomi di Legendre

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos(\theta)). \quad (1.18)$$

$$P_l(x) = (2^l l!)^{-1} \frac{d^l}{dx^l} ((x^2 - 1)^l) \quad (1.19)$$

con

$$C_l = \sum_{m=-l}^l a_{lm}^* a_{lm}, \quad l \propto \theta^{-1}. \quad (1.20)$$

Questi ultimi coefficienti ( $C_l$ ) sono utili a spiegare alcune proprietà dell'universo e sono stimati dall'attuale modello cosmologico. Altrettanto utili sono i picchi mostrati in figura 1.5:

- (1) il primo picco consente una misura precisa del parametro di curvatura come descritto nel 1.1.2 [2]<sup>14</sup>;
- (2) il terzo picco viene usato per estrarre informazioni sulla densità di materia oscura;
- (3) il rapporto tra picchi *dispari* e *pari* fornisce la densità barionica[13], la quale può essere calcolata in prima approssimazione valutando il rapporto tra l'altezza del primo e del secondo picco[2].

## 1.2 WIMP

Ricapitolando:

- (A) l'universo è piatto ( $k \simeq 0$ ) e in espansione ( $H > 0$ ) (§ 1.1.3);
- (B) la materia oscura, che costituirebbe il 25% dell'energia dell'universo, spiegherebbe le anomalie delle velocità di rotazione delle galassie (§ 1.1.5).

Inoltre, considerazioni di natura fisica [2] ci portano alla conclusione che la materia ordinaria<sup>15</sup> sia costituita prevalentemente da particelle elementari con numero barionico nullo.

La materia oscura appartenente a questo gruppo, denominata con l'acronimo WIMP (Weakly Interacting Massive Particle), sarà detta *non barionica*.

<sup>14</sup>pagina 208.

<sup>15</sup>Energia e Pressione positive (gravitativamente attrattiva)

Questa dovrà essere sufficientemente stabile (per essere tuttora presente) ed avere carica nulla, perchè se così non fosse l'accoppiamento con il fotone la renderebbe visibile.

Si considerano due casistiche nel contesto della materia oscura barionica:

- Materia oscura *calda*

Con questa locuzione si fa solitamente riferimento a materia oscura non barionica e relativistica;

L'analisi del meccanismo di formazione delle galassie mostra che se queste fossero composte principalmente da materia oscura *calda* emergerebbe uno scenario denominato *top-down*, ovvero degli *ammassi*, subendo un processo di frammentazione, formerebbero le galassie stesse.

- Materia oscura *fredda*

(WIMP non relativistiche);

In questo caso il processo di formazione delle galassie sarebbe l'opposto (*bottom-up*), ovvero queste ultime andrebbero a formare ammassi aggregandosi.

Varie simulazioni numeriche [2]<sup>16</sup> dimostrano che ad avvenire è il processo *bottom-up*, quindi le galassie sarebbero prevalentemente costituite da materia oscura non barionica fredda (WIMP).

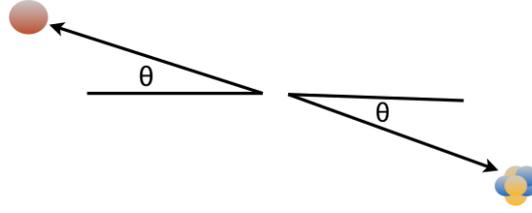
### 1.2.1 Rivelazione diretta

Qualsiasi tentativo di rivelazione diretta delle WIMP deve basarsi su alcune premesse:

- I) le WIMP avranno una certa distribuzione di velocità  $f(v)$ [9];
- II) la sezione d'urto dipenderà dalla tipologia dell'interazione, in particolare si dovrà distinguere tra urti *spin-independent* (SI) e *spin-dependent* (SD),
  - a) SI: accoppiamento (tra i momenti) di tipo scalare, la sezione d'urto aumenta con il numero di massa,
  - b) SD: accoppiamento di tipo vettoriale, la sezione d'urto è proporzionale a  $J(J+1)$ , con  $J$  momento angolare totale[7];
- III) se le WIMP interagiscono con un nucleo, si dovrà tener conto di un *fattore di forma*, che cambierà a seconda che si tratti di uno *scattering* di tipo SI o SD;
- IV) l'energia di rinculo del nucleo non sarà quella misurata, poiché l'efficienza del rivelatore non sarà ideale;

---

<sup>16</sup>pagina 216.



**Figura 1.6:**  $\theta$  rappresenta l'angolo di *scattering* rispetto al centro di massa dell'urto.

V) si dovrà fare distinzione anche tra urti elastici ed anelastici:

a) negli urti elastici le WIMP interagiscono direttamente con il nucleo, il cui rinculo può essere misurato,

b) negli urti anelastici le WIMP possono ionizzare l'atomo di cui il nucleo fa parte e lasciare lo stesso in uno stato eccitato, causando l'emissione di un fotone dopo pochi *ns* [7];

Ciò si traduce in un'equazione del tipo[9]

$$\frac{dR}{dE_r} = R_0 \cdot \overbrace{S(E_r)}^{\text{funzione spettrale}} \cdot \underbrace{F^2(E_r)}_{\text{fattore di forma}} \cdot \overbrace{I}^{\text{tipo di interazione}}, \quad (1.21)$$

con il termine a sinistra che esprime il tasso atteso dell'urto WIMP-bersaglio.

La precedente equazione può essere scritta nei termini della sezione d'urto differenziale[7]:

$$\frac{dR}{dE_r} = N_n \frac{\rho_W}{m_W} \int_{v_{min}}^{v_{max}} d\mathbf{v} f(\mathbf{v}) v \frac{d\sigma}{dE_r} \quad (1.22)$$

- (a)  $N_n$  è il numero di nuclei;
- (b)  $\rho_W$  è la densità locale delle WIMP;
- (c)  $m_W$  la loro massa;
- (d)  $\mathbf{v}$  ed  $f(\mathbf{v})$  rispettivamente velocità e distribuzione relativa nel sistema di riferimento del laboratorio.

L'energia di rinculo del bersaglio, che da adesso in poi si assumerà essere un nucleo, nel sistema di riferimento sarà espressa dall'equazione

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{p^2}{2M_n} \\
 &= \frac{\mu^2 v^2}{M_n} (1 - \cos(\theta)),
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

$$\mu = \frac{M_n m_W}{\underbrace{M_n + m_W}_{\text{massa ridotta}}},
 \tag{1.24}$$

dove  $p$  è il momento trasferito.

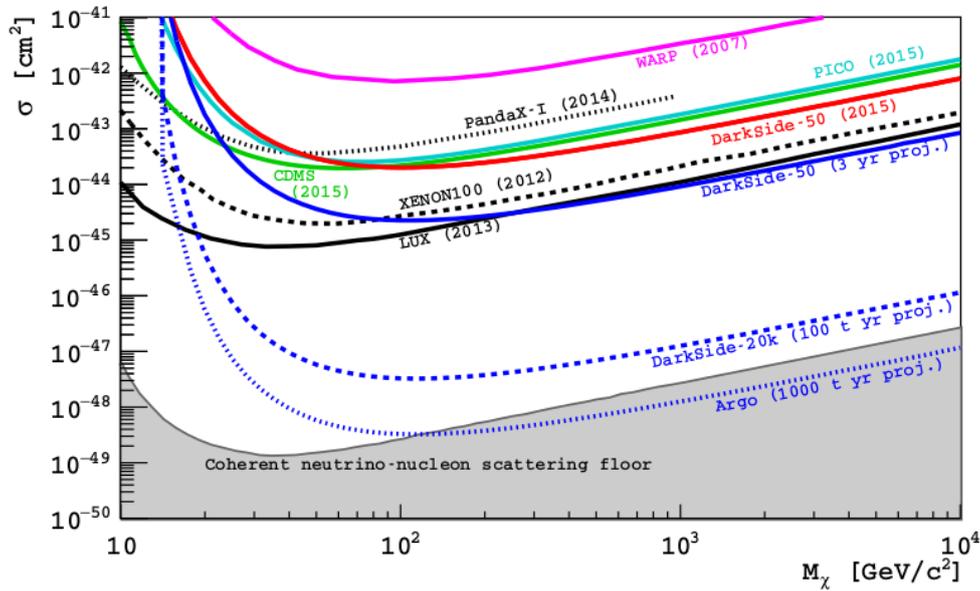
L'ordine delle velocità in gioco in questo tipo di urti è di  $10^2$  km/s e il trasferimento medio di momento è

$$\langle p \rangle \simeq \mu \langle v \rangle.$$

Infine, se  $m_W \simeq 100$  GeV, e se si assume valida una statistica del tipo *Maxwell-Boltzmann*, per la velocità delle WIMP si avranno valori centrati su circa[7] 220 km/s, quindi ci si aspetta di misurare, nei limiti della precisione e dell'efficienza dei rivelatori, un'energia di rinculo media di circa:

$$\langle E_r \rangle = \frac{m_W}{2} \langle v \rangle^2 \simeq 30 \text{ keV}$$





**Figura 2.2:** Limiti di sezione d'urto per rivelazione (o produzione) di una WIMP.

un elettrone di ionizzazione. Il fotone sarà rivelato da un apparato di misura (diverso tra i due esperimenti), mentre l'elettrone sarà trascinato verso una parete della camera (TPC) ove, in una zona di Argon in fase gassosa ed in presenza di un forte campo elettrico, l'elettrone genererà un effetto a valanga che darà luogo ad un secondo segnale.

In entrambi gli esperimenti sarà fondamentale eliminare ogni fonte di radiazione e di rumore. A tale scopo, la camera ad Argon sarà posta all'interno di uno scintillatore organico (Veto), a sua volta contenuto all'interno di una vasca d'acqua pura.

Inoltre, come sarà ricordato più avanti, l'Argon utilizzato conterrà una frazione minima del suo isotopo radioattivo.

## 2.1 Situazione Sperimentale

Il grafico in figura 2.2 riassume gli sforzi fatti finora al fine di misurare direttamente o indirettamente la materia oscura.

Le linee (colorate diversamente da un esperimento all'altro) nel grafico in figura 2.2 rappresentano, partendo dall'alto, il limite delle *zone* indagate da ciascun esperimento effettuato finora (ad esempio XENON100, nel 2012) e di quelli in fase di progettazione (ARGO).

Nell'eventualità che un certo esperimento non misuri eventi relazionati alle WIMP, esperimenti a venire avranno senso solo nel caso in cui la sezione d'urto indagata sia minore di quella considerata fino a quel momento.

Esistono altre tecniche d'indagine oltre alla diffusione elastica e alla rivelazione diretta delle WIMP, dall'osservazione astronomica per la ricerca di prodotti secondari del decadimento delle WIMP, al tentativo di creazione di coppie di WIMP attraverso collisioni *protone-protone* in acceleratori (LHC).

Alcune di queste hanno fornito risultati, ad esempio gli esperimenti PAMELA ed AMS hanno riscontrato un eccesso di positroni nei raggi cosmici, fatto che potrebbe avere come spiegazione proprio il decadimento della materia oscura[20].

## 2.2 Scintillatori

Uno *scintillatore* è un materiale in grado di emettere fotoni quando interagisce con particelle cariche, ad esempio particelle  $\alpha$ ,  $\beta^-$ , vari prodotti del decadimento, etc. . .

Si possono classificare i vari tipi di scintillatori in tre *macro-classi*:

- Scintillatori Organici;
- Scintillatori Inorganici;
- Scintillatori a gas.

L'esperimento *DarkSide*, del quale ci occupiamo, fa uso dei primi (*Veto* per i neutrini) e del terzo (nel bersaglio).

### 2.2.1 Scintillatori Inorganici

Per la realizzazione di questa particolare classe di scintillatori si utilizzano solitamente dei cristalli puri (ad esempio di NaI) i quali, interagendo con la particella da studiare tramite uno scambio energetico, vedono i propri elettroni passare dalla banda di valenza a quella di conduzione per poi, successivamente, ritornare nel loro *Ground State* (GS) tramite l'emissione di fotoni, che quali vengono misurati.

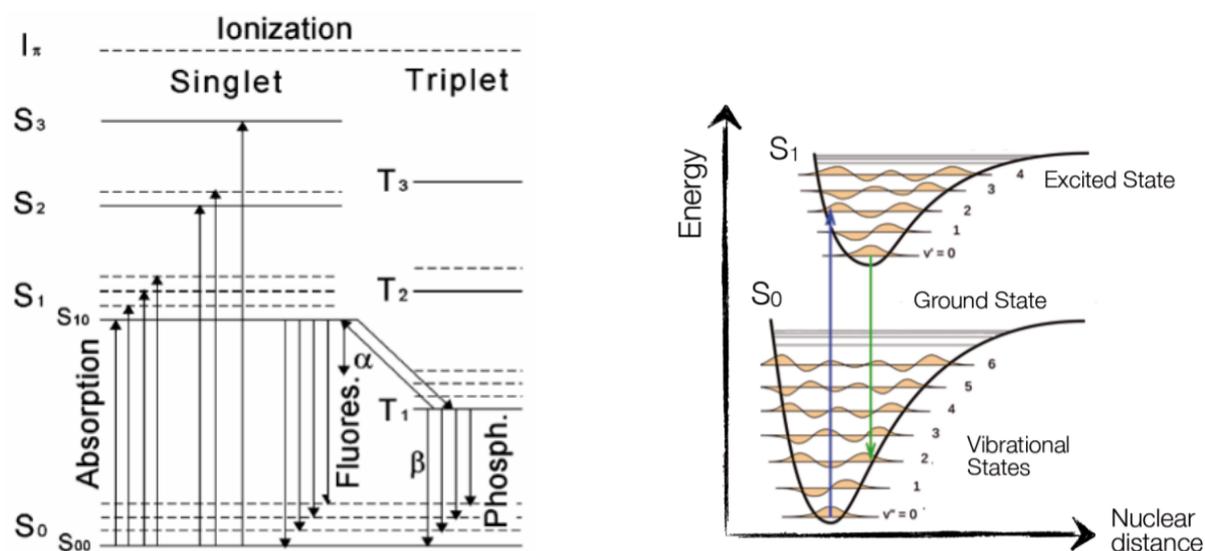
Tuttavia, in queste circostanze, lo spettro d'emissione di tali fotoni è molto distante dal *visibile*, e in generale questo processo è poco efficiente, infatti la quantità di fotoni emessa è relativamente poca.

La situazione migliora se si aggiungono quantità controllate di impurità<sup>1</sup>, le quali non modificano la struttura generale del cristallo ma solo i livelli energetici delle bande, aggiungendo *stati* possibili per l'elettrone che sarebbero stati altrimenti proibiti nella condizione di massima purezza del cristallo.

Le impurità aggiunte prendono il nome di *attivatori*.

Si noti che la possibilità di misurare le particelle incidenti dipende dallo stato fisico (eccitato o meno) del cristallo, in quanto è strettamente correlato al processo di

<sup>1</sup>Nel caso dello *Ioduro di Sodio* (NaI) si aggiunge del *Tallio* (Tl)



**Figura 2.3:** Livelli energetici di assorbimento ed emissione di stati di singoletto, tripletto, eccitati e fondamentali.

*eccitazione-diseccitazione* degli elettroni, il cui *tempo di vita medio* fuori dal GS è circa  $10^{-7}$  secondi.

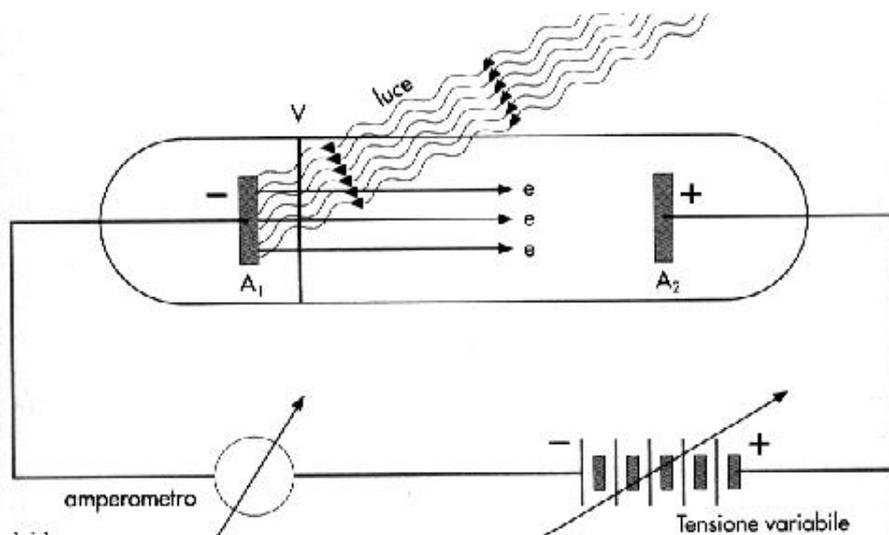
## 2.2.2 Scintillatori Organici

A differenza degli scintillatori inorganici, quelli organici si basano sull'interazione tra la particella da rivelare e l'elettrone di una qualche molecola (organica) che nella fase di *diseccitazione* ritorna nel suo *ground state* emettendo fotoni. Questo fenomeno viene chiamato *fluorescenza*.

Questa volta la misurazione delle particelle non dipende dallo stato dello scintillatore e i possibili livelli energetici non sono distribuiti in bande.

Solitamente, l'energia tra  $S_0$  (si veda la figura 2.3) e il primo stato di singoletto  $S_1$  è dell'ordine di  $3 \div 4$  eV, mentre la spaziatura dei livelli vibrazionali è tipicamente dell'ordine dei  $10^{-1}$  eV.

Si richiede inoltre che lo scintillatore abbia un buon grado di *trasparenza*, proprietà data dallo *shift* tra lo spettro di emissione e quello di assorbimento secondo il principio di *Franck-Condon*, per il quale in seguito ad un'eccitazione in stati vibrazionali energeticamente elevati a partire dal *ground state*, corrisponde una *diseccitazione* a partire dal livello vibrazionale fondamentale dello stato eccitato fino ad uno non fondamentale del *ground state*, come mostrato in figura 2.3. La *trasparenza* è richiesta al fine di migliorare le prestazioni dell'apparato di misurazione, le quali verrebbero meno se lo scintillatore continuasse a riassorbire la propria emissione.



**Figura 2.4:** Schematico *setup* dello storico esperimento che condusse Einstein a postulare l'esistenza del fotone. In questa configurazione l'elettrone viene accelerato verso il catodo.

## 2.3 Fotomoltiplicatori

In questo paragrafo saranno descritti alcuni strumenti tipicamente usati nella rivelazione di fotoni. Di ognuno di questi (PMT e SiPM) saranno descritti:

- principio fisico di funzionamento;
- struttura meccanica;
- metodologie di applicazione nei rispettivi esperimenti (DS-50 e DS-20K).

### 2.3.1 Effetto Fotoelettrico

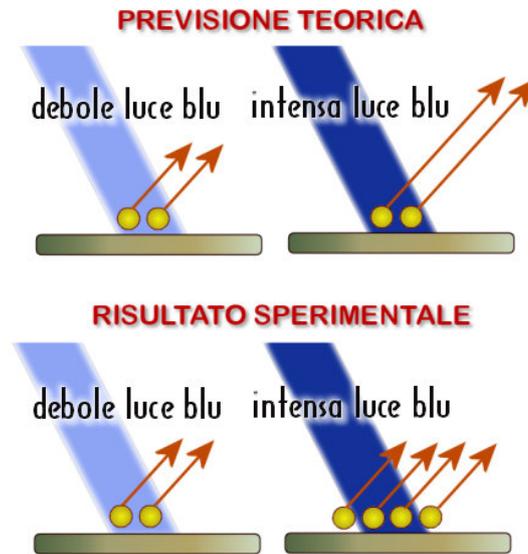
L'effetto fotoelettrico è quel fenomeno che occorre quando dei fotoni, impattando contro una lastra di metallo detta *fotocatodo*, causano emissione di elettroni.

Applicando una differenza di potenziale tra anodo e catodo, questi elettroni saranno accelerati verso quest'ultimo.

In netta contraddizione con le leggi della teoria classica dell'elettromagnetismo, si osserva sperimentalmente l'esistenza di un certo potenziale che, se applicato alle due lastre, è in grado di arrestare la totalità degli elettroni emessi, a prescindere dall'intensità della luce che impatta sul catodo (figura 2.6).

Inoltre, si osserva che l'energia cinetica massima raggiunta dagli elettroni dipende dalla frequenza  $\nu$  della radiazione.

Tale energia può essere calcolata conoscendo il potenziale  $V_0$  e moltiplicando quest'ultimo per il valore della carica dell'elettrone,  $e^- \simeq -1,602 \cdot 10^{-19}$  C, mentre esiste



**Figura 2.5:** Confronto concettuale tra le previsioni teoriche delle equazioni di Maxwell e l'effettivo risultato sperimentale.

una frequenza di soglia  $\nu_0$  al di sotto della quale l'effetto fotoelettrico viene meno. In ultimo, ma non ultimo per importanza, il numero degli elettroni prodotti è proporzionale all'intensità della radiazione, come mostrato graficamente in figura 2.5.

Il primo ad osservare questo fenomeno fu Hertz, nel 1887, ma la spiegazione definitiva arriva da Einstein, per la quale vinse un premio Nobel nel 1921.

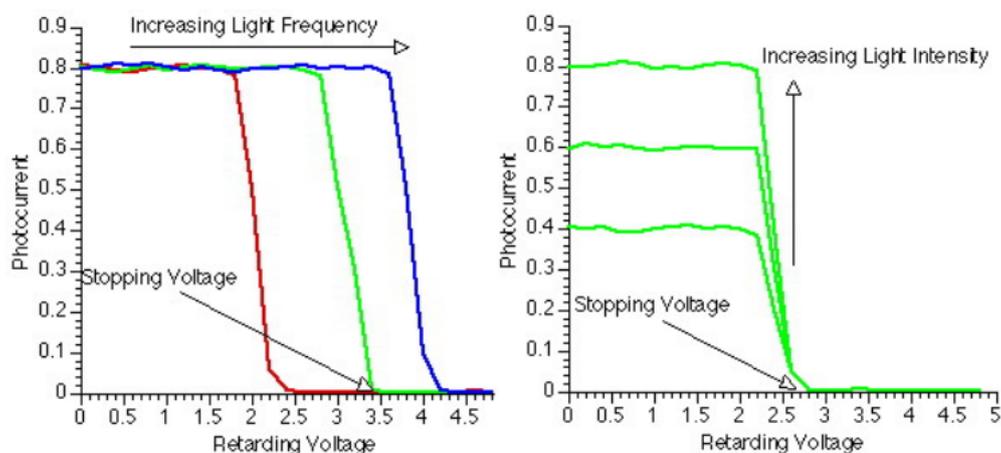
A spiegare l'effetto fotoelettrico è, secondo Einstein, l'assunzione che l'energia della luce venga ripartita e quindi trasmessa in pacchetti discreti, e pertanto che questa debba comportarsi in tale circostanza come un corpuscolo più che come un'onda continua, come invece suggeriscono le equazioni di Maxwell.

L'energia dei fotoni dipende quindi solo dalla frequenza

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \simeq \frac{1240 \text{ eV nm}}{\lambda},$$

$$\begin{aligned} h &= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \\ &= 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}, \end{aligned}$$

dove  $h$  è la costante di Planck.



**Figura 2.6:** L'esistenza di un potenziale (negativo) in grado di arrestare completamente il flusso di elettroni suggerì ai fisici del tempo che con l'aumentare dell'intensità della radiazione non era il momento trasferito al singolo elettrone ad aumentare ma il numero di elettroni liberati. L'energia doveva quindi trasferirsi attraverso la luce in pacchetti discreti: i fotoni.

### 2.3.2 Tubi Fotomoltiplicatori

L'effetto fotoelettrico trova applicazione nel funzionamento di *tubi fotomoltiplicatori*, o PMT (photomultiplier tube).

La funzionalità di tali oggetti consiste nella misura, o rivelazione, di luce (anche singoli fotoni) come mostrato in figura 2.7:

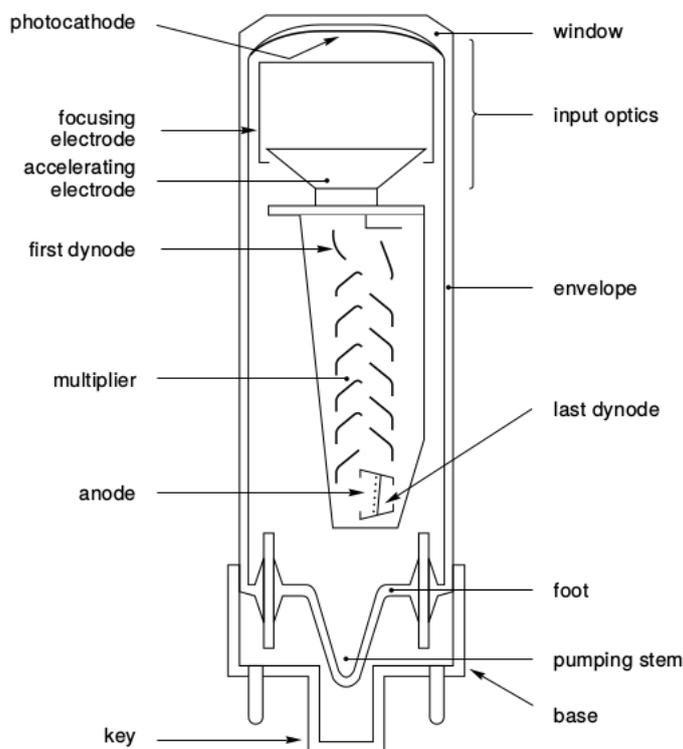
- i fotoni impattano il *fotocatodo*, provocando l'emissione di elettroni;
- gli elettroni sono accelerati verso l'anodo, passando attraverso una serie di *dinodi* (elettromoltiplicatori).

Ognuno di questi *elettromoltiplicatori*, ricevendo un singolo elettrone, è in grado di rimetterne un numero di solito compreso tra *uno* e *tre*, quindi, mettendone una quantità sufficiente *in serie* tra anodo e catodo, ed applicando tra loro un potenziale elettrico, si è in grado di generare un effetto a valanga di moltiplicazione degli elettroni innescato anche solo da un singolo fotone, consentendone quindi la relativa rivelazione.

La figura 2.7 mostra 14 elettromoltiplicatori in serie. Per dare un ordine di grandezza dell'effetto complessivo di *moltiplicazione* delle cariche, si riporta:

$$2^{14} = 16\,384 \simeq 1,6 \cdot 10^4 \quad 3^{14} = 4\,782\,969 \simeq 4,8 \cdot 10^6$$

cioè il numero di elettroni prodotti da un singolo fotone nel caso di, rispettivamente, un effetto moltiplicativo di *due* e *tre* elettroni prodotti per impatto con l'elettromoltiplicatore, assumendo la massima efficienza, quindi nel caso migliore.



**Figura 2.7:** Sezione longitudinale di un tubo fotomoltiplicatore.

Nel caso dell'effetto fotoelettrico, si definisce la *Quantum Efficiency* (QE) come la frazione tra il numero di elettroni emessi e il numero di fotoni incidenti.

## 2.4 SiPM

### 2.4.1 Fotodiodi e Fotodiodi a Valanga

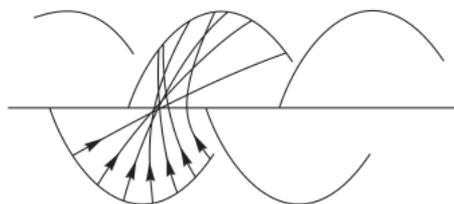
Il funzionamento di un fotodiodo è basato sul fatto che per una giunzione *p-n* inversamente polarizzata la corrente ha una dipendenza *quasi-lineare* dal flusso di luce che vi impatta, fenomeno dovuto alla generazione di coppie *elettrone-lacuna* causata proprio dall'interazione del semiconduttore drogato con la luce.

Si possono considerare i fotoni in questione come iniettori di carica minoritaria rispettivamente in ogni giunzione.

In una tale circostanza, la caratteristica *Corrente-Tensione* della giunzione diventa

$$I = I_s + I_0 \left(1 - e^{\frac{V}{\eta V_T}}\right) \quad (2.1)$$

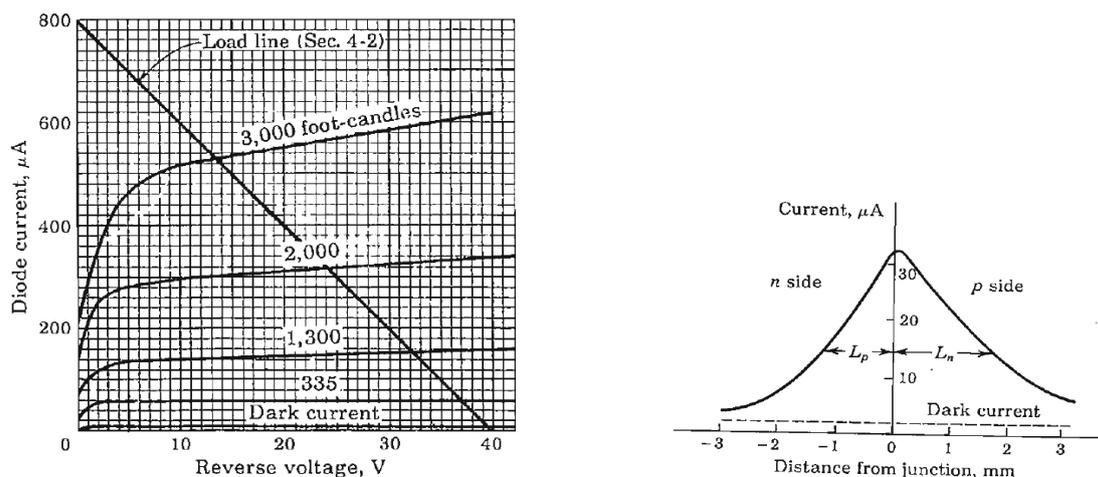
- $\eta = 1$  per il germanio;  $\eta \simeq 2$  per il silicio;



**Figura 2.8:** Effetto di moltiplicazione delle cariche ad opera di dinodi messi in serie.

- $I$ ,  $I_0$ ,  $I_s$  sono i moduli delle correnti *inverse*;
- $V$  è positivo per la polarizzazione diretta del semiconduttore e negativo per quella inversa;
- $V_T = T/11\,600$  [10];

come mostrato in figura 2.9.



**Figura 2.9:** Grafici caratteristici dei fotodiodi.

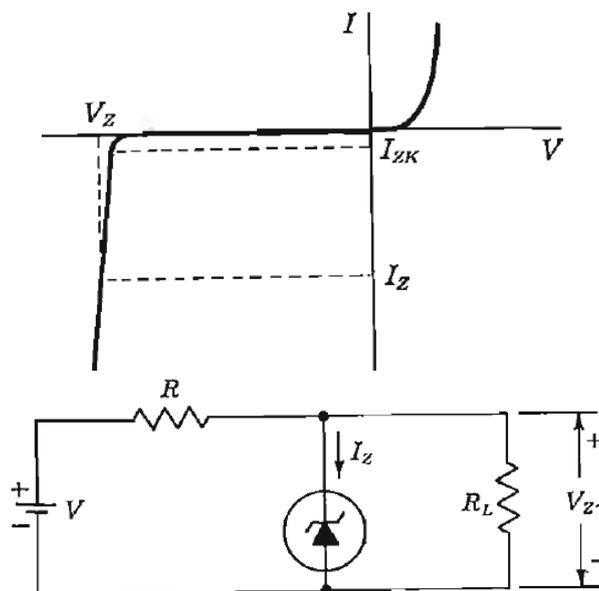
Con *Dark Current* ci si riferisce ad una corrente inversa di saturazione dovuta alla generazione termica di portatori minoritari di carica.

La figura 2.9 mostra anche la dipendenza *Corrente-Distanza* tipica del fotodiode, intendendo la *distanza* tra il *centro* della radiazione e la giunzione *p-n*.

Un fotodiode *a valanga* (o *Avalanche Photodiode*) è un dispositivo simile a quello appena descritto, in particolare:

- (i) usa portatori di carica *negativi*;

- (ii) questi portatori di carica, quando accelerati da un campo, sono in grado di creare ulteriori coppie *elettrone-lacuna* (effetto a valanga);



**Figura 2.10:** ALTO: Curva caratteristica *Corrente-Tensione* di un fotodiode. BASSO: Esempio di una minimale configurazione circuitale che potrebbe essere usata per misurare la caratteristica *Corrente-Tensione* di un fotodiode.

L'effetto di *elettromoltiplicazione* desiderato avviene in questo modo: avendo applicato una *d.d.p.* in polarizzazione inversa nella zona di *breakdown*, un elettrone generato termicamente (insieme ad una lacuna) viene accelerato, acquisendo ad un certo punto un'energia sufficiente a rompere un legame covalente del cristallo e generare un'ulteriore coppia *elettrone-lacuna*.

Il processo si ripete per i due elettroni ora presenti, e l'insieme di questi effetti (di natura esponenziale) è detto *effetto a valanga*.

Questi diodi, quando polarizzati inversamente, forniscono un'amplificazione del segnale dalle cinquanta alle duecento volte maggiore dei fotodiodi descritti in precedenza.

In figura 2.10 sono mostrati, dall'alto in basso, la caratteristica *Corrente-Tensione* di questi oggetti e una tipica configurazione circuitale, nella quale  $V$  e  $R$  sono scelti in modo che il diodo operi nella zona di *breakdown*, dove a grandi variazioni di corrente corrispondono piccole variazioni di tensione. Questa caratteristica può essere usata, ad esempio, per regolare la tensione in caso di un aumento della corrente o, nel nostro caso, per generare un'enorme variazione di corrente a causa di piccoli cambi di tensione, quindi per dare il massimo di amplificazione (della corrente) senza andare nella zona di *break-down* del rivelatore.

Detta quindi  $A$  l'amplificazione del diodo a valanga, si ha[11]:

$$A \simeq \frac{C}{e^- \cdot \Delta V}, \quad \Delta V = V - V_{breakdown},$$

dove  $e^-$  è la carica dell'elettrone e  $C$  è la capacità del diodo.

## 2.4.2 Fotomoltiplicatori al Silicio

Un *Fotomoltiplicatore al Silicio*, o *Silicon Photomultiplier* (SiPM), è una matrice di fotodiodi a valanga al silicio ( $\eta \simeq 2$ ) collegati ad un output comune. Questa contiene di solito dalle  $10^2$  alle  $10^3$  unità, e la sua efficienza (in questo caso nella misurazione e nella rivelazione di fotoni) è strettamente correlata al *fattore di riempimento*  $g$  che dipende dalle variabili:

- area di ogni cella  $A_c$ ;
- numero di celle  $N$ ;
- spaziatura tra due celle adiacenti  $d$ ;

ed è definito dalla relazione [11]

$$g = \frac{A_c}{\left(\sqrt{A_c} + \frac{N-1}{N} \cdot d\right)^2}.$$

Se  $d = 0$ ,  $g = 1$  ed è massimo, visto che il dominio di  $d$  è  $[0, \infty)$ , dove  $g$  è monotona e decrescente. Se invece  $N \gg 1$  (il caso d'interesse),  $g \approx A_c/(\sqrt{A_c} + d)^2$ . In queste circostanze il fattore di riempimento dipende solamente dalla distanza tra due celle adiacenti in relazione all'area coperta.

## 2.5 DarkSide-50

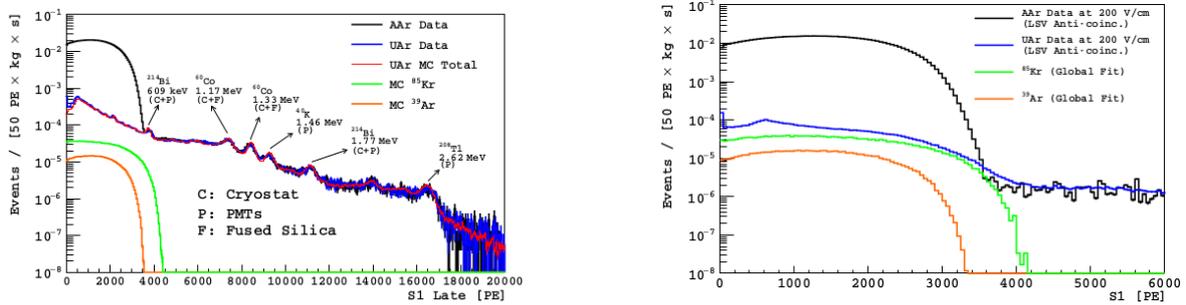
### 2.5.1 Time Projection Chamber

Una *Time Projection Chamber* (o TPC) è una camera, solitamente riempita con del materiale in forma gassosa o liquida.

Nel caso specifico dell'esperimento *DarkSide* è stato scelto l'Argon, viste le sue capacità *auto-schermanti*, e la sua propensione a produrre segnali *simultanei* di scintillazione e di ionizzazione.

L'Argon sarà presente in *doppia fase*, quindi sia liquida che gassosa.

L'interno della TPC, sia nel caso dell'esperimento *DarkSide-50* che *DarkSide-20k*, i cui dettagli saranno forniti nei prossimi paragrafi, consiste essenzialmente in:



**Figura 2.11:** SINISTRA: Spettri Argon di origine *underground*; DESTRA: Come a sinistra, ma con un campo di *drift*.

- (1) una regione di Argon attivo, sul quale è applicato un campo di 200 V/cm;
- (2) una sottile *tasca* di gas, di circa 7 mm, con un *campo di estrazione* di 2.8 kV/cm e un campo di *moltiplicazione di luminescenza* nell'ordine di 4,2 kV/cm;
- (3) una fitta griglia posta a 3 mm sotto la superficie dell'Argon, atta ad isolare i sovracitati campi, in particolare è utile ad isolare il campo elettrico nell'Argon (debole) dagli altri due (molto più intensi).

## 2.5.2 Setup Esperimento

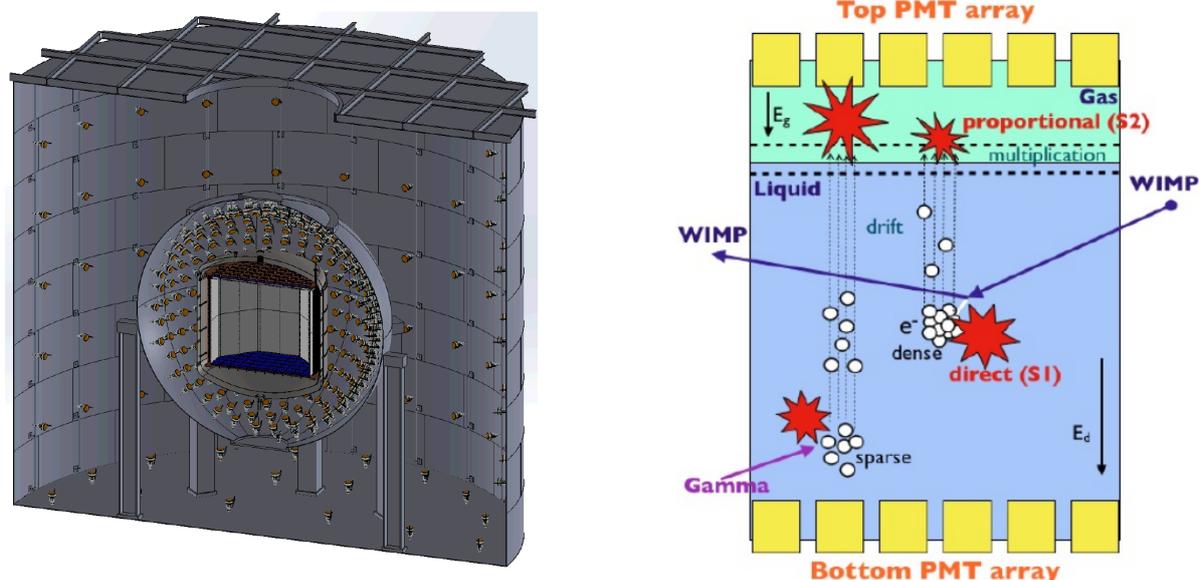
L'esperimento *DarkSide-50* ha sede nell'LNGS (*Laboratori Nazionali del Gran Sasso*), e il suo scopo è la rivelazione diretta della materia oscura, in particolare delle WIMP.

La struttura dell'apparato (fig.2.12) utilizzato consiste in una *Time Projection Chamber* riempita con  $46,4 \pm 0,7$  kg di Argon di tipo *Underground* (UAr), dalla sua fonte di estrazione, piuttosto che quello di origine atmosferica, vista la ridotta presenza del suo isotopo radioattivo  $^{39}\text{Ar}$ .

La camera avrà posizionati nelle sue estremità un totale di trentotto PMT di circa 7,62 centimetri di diametro l'uno.

La TPC ad Argon liquido (LAr TPC) sarà immersa in un apparato di scintillazione di acciaio inossidabile di forma sferica, il cui diametro è 4,0 metri, contenente una soluzione composta da pseudocumene (PC), un idrocarburo aromatico, ed un 5%(vol) di trimetil borato, un composto organico contenente boro, entrambi scintillatori organici (§ 2.2.2). Lo scintillatore, detto *Liquid Scintillator Veto* (LSV), è attrezzato con centodieci fotomoltiplicatori, come quelli descritti nel § 2.3.2, e il suo scopo sarà quello di schermare la TPC da neutroni, muoni e raggi  $\gamma$  cosmici.

A sua volta, questo cilindro d'acciaio sarà immerso in un'altra struttura cilindrica piena di acqua, detta *Water Cherenkov Detector* (WCD), con un alto grado di purezza,



**Figura 2.12:** **SINISTRA:** La TPC è all'interno di una sfera piena di liquido di scintillazione inserita a sua volta in una WCD, come spiegato nel § 2.5.2. **DESTRA:** Si ripropone la figura 2.1 a pagina 17 per comodità.

al fine di migliorare la schermatura generale della LAr TPC dai muoni di origine cosmica. Anche questo sarà attrezzato con dei PMT.

### 2.5.3 Principi di Funzionamento

L'interazione di una particella con l'Argon all'interno della TPC è misurata attraverso la rivelazione di due segnali distinti:

**S1:** segnale dato dalla scintillazione primaria, ovvero quella direttamente causata dalla collisione;

**S2:** è il segnale dato dagli elettroni di ionizzazione.

Chiameremo S1 *segnale di scintillazione*, ed S2 *segnale di ionizzazione*.

La proporzione tra questi due, quindi il rapporto tra scintillazione e ionizzazione, nonché il loro *profilo temporale (pulse-shape)*, costituiscono una sorta di *firma* della particella energetica che impatta il nucleo di Argon, fatto che ne consente quindi l'identificazione.

Inoltre, lo studio del profilo temporale sopprimerà nell'esperimento *DS-20k* i *background* di tipo  $\beta$  e  $\gamma$  di un fattore di  $1,5 \cdot 10^7$ .

Poiché gli elettroni liberati vengono trasportati verticalmente nella TPC, e visto che la zona di scintillazione secondaria (Argon gassoso) è relativamente piccola rispetto alla

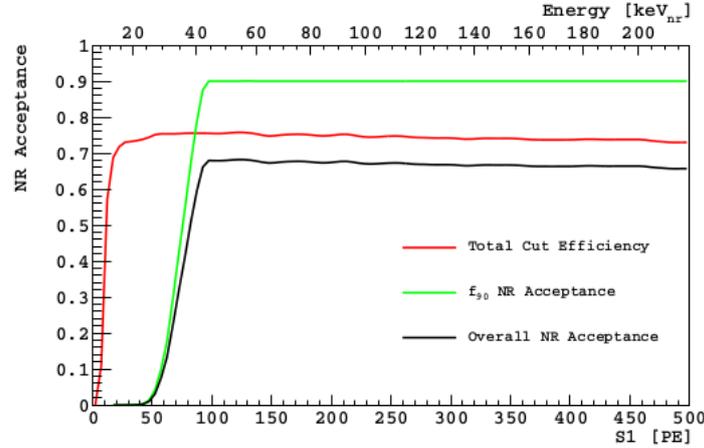


Figura 2.13: Dipendenza *accettanza*-S1.

zona attiva, il segnale di scintillazione (S2) consentirà la localizzazione  $x$ - $y$  dell'evento, mentre la componente verticale sarà determinata dallo scarto temporale tra S1 ed S2, conoscendo la velocità di *drift* dello ione.

Queste misurazioni saranno effettuate grazie a dei tubi fotomoltiplicatori posti alle estremità della camera.

## 2.6 DarkSide-20k

*DarkSide-20k* è invece un progetto in via di sviluppo, motivato dal successo ottenuto da *DarkSide-50*, analogo allo stesso per quello che concerne il principio di funzionamento nonché lo scopo. La sua LAr TPC avrà una capacità efficace di circa venti tonnellate, contro i cinquanta (circa) Kg del suo predecessore

Anch'esso collocato ai *Laboratori Nazionali del Gran Sasso*, sarà in grado di misurare il proprio background *in situ*, migliorando la precisione delle misure di un fattore di  $10^3$  rispetto a quella attualmente disponibile.

Un altro elemento di innovazione del prototipo *20k* è senz'altro l'utilizzo di *Silicon PhotoMultipliers* (SiPM) in luogo dei *tubi fotomoltiplicatori* (PMT) della versione *50*. Questa scelta è stata dettata da:

- i *silicon PM* sono più economici dei PMT;
- i PMT si sono rivelati essere problematici alle basse temperature (87 K) raggiunte nella TPC, in termini di performance, a differenza dei SiPM;

- una combinazione di massa minore e una più alta *purezza* intrinseca del materiale porta ad una riduzione significativa del *background* radioattivo all'interno del rivelatore nel caso in cui questo sia attrezzato con SiPM;
- l'efficienza dei SiPM per singoli fotoni nella parte *blu* dello spettro elettromagnetico ad 87 K è superiore di quella dei PMT;
- infine, la ragione principale per la quale i SiPM sono stati preferiti ai loro predecessori nella versione dell'esperimento con 20 tonnellate di Argon, è una maggiore *segmentazione* della zona *viva*, cioè esposta alla luce, dell'apparato di fotomoltiplicazione.

L'ultimo punto del precedente elenco è essenziale per la comprensione delle ragioni di tale scelta. Una maggiore *piastrellatura* delle parti atte alla rivelazione dei fotoni consente non solo di localizzare spazialmente l'origine dell'evento (in combinazione con la misura dei tempi di volo dell'elettrone), ma anche di determinare il numero di fotoni misurati, cosa non altrimenti possibile con i PMT.

Il sistema di rivelamento dei fotoni consiste in 2605 canali di misura per lato (5210 in totale), ognuno dei quali è cablato ad una *mattonella* di  $5 \times 5 \text{ cm}^2$ , costituita da un numero appropriato di SiPM.

Tali *mattonelle* sono disposte in due tipi diversi di unità meccaniche: una triangolare (TRB, *triangular board*) ed una quadrata (SQB, *square board*), come mostrato in figura 2.14.

Sarà necessario discriminare gli eventi indotti dai nuclei cosmici da quelli causati da *scattering* WIMP-nucleo. Il *Liquid Scintillator Veto* serve allo scopo.

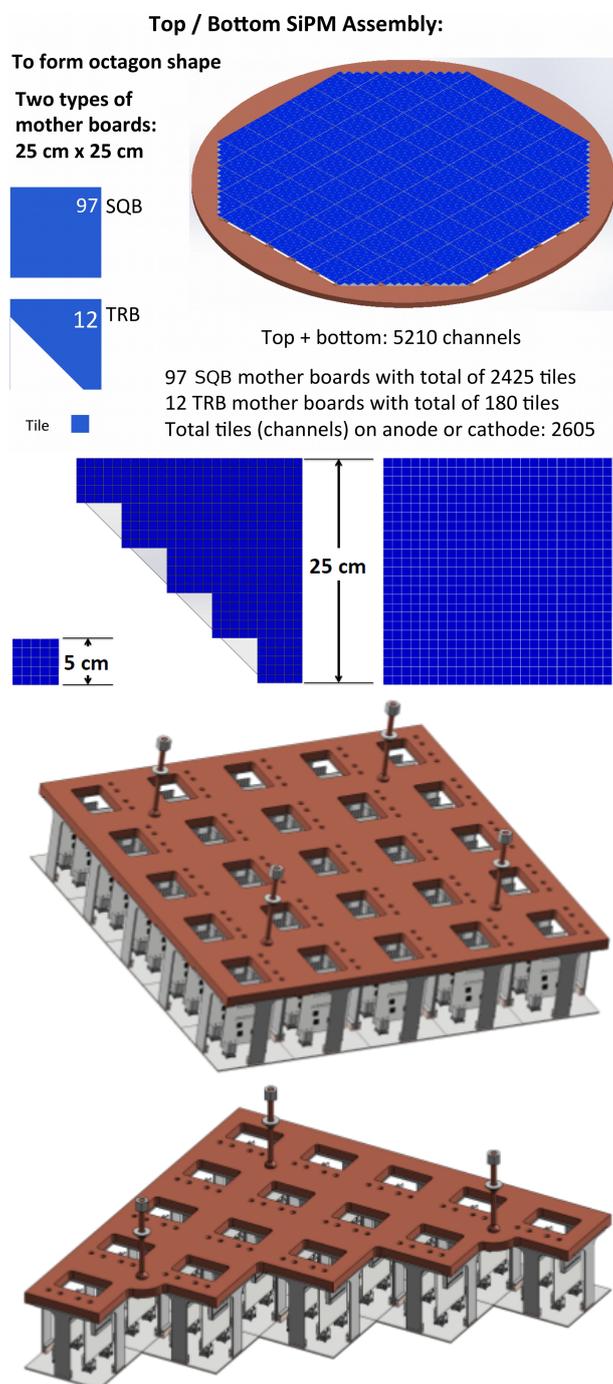
In figura 2.11 a pagina 28 sono comparati gli spettri delle versioni *underground* ed atmosferica dell'Argon sia in assenza (sinistra) che in presenza (destra) di campo di *drift*, dove nell'asse delle ascisse è posto l'integrale del *segnale di ionizzazione* da 90 ns ( $9 \cdot 10^{-8}$  secondi) a  $7 \mu\text{s}$  ( $7 \cdot 10^{-6}$  secondi), il quale include il 70% della *luce* del sovracitato segnale indotto dal rinculo degli elettroni, evitando al contempo distorsioni del digitalizzatore per alti valori del segnale.

Si definisce il parametro  $f_{90}$  come la frazione di S1 rivelata nei primi 90 ns della scintillazione di ionizzazione, il quale definisce la *WIMP search region*, ovvero quella frazione di S1 con un alta *accettabilità* per i rinculi nucleari e piccola dispersione per gli eventi di rinculo elettronico.

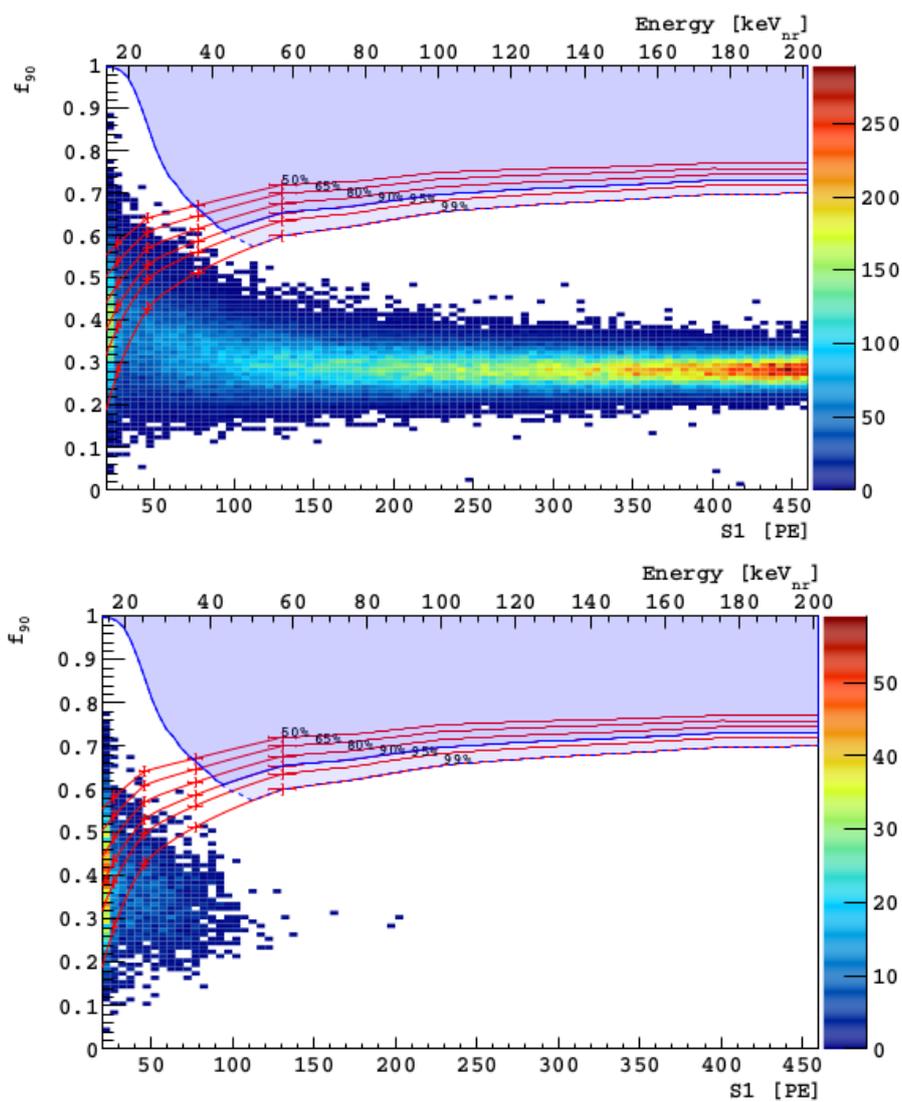
L'*accettanza* è messa in ordinata in figura 2.13 ed è confrontata con S1 sulle ascisse.

In figura 2.15 (alto) è mostrato il *taglio* operato dal parametro  $f_{90}$  su S1.

Sempre in figura 2.15 (basso) si osserva lo stesso set di dati (con relativi errori, identificabili graficamente con la granularità della parte colorata) includendo il rigetto dei segnali basato sulla discriminazione S2/S1.



**Figura 2.14:** Disposizione delle matrici di SiPM. In basso, in particolare, è riportato il dettaglio della configurazione finale della struttura meccanica di interfaccia tra i rivelatori (SiPM) e la relativa elettronica.



**Figura 2.15:** Confronto  $S1-f_{90}$  sui dati raccolti nell'esperimento *DarkSide-50*. **SOPRA:** senza discriminazione  $S2/S1$ ; **SOTTO:** stessi dati, ma è stato operato un *taglio* tramite *pulse shape discrimination*.

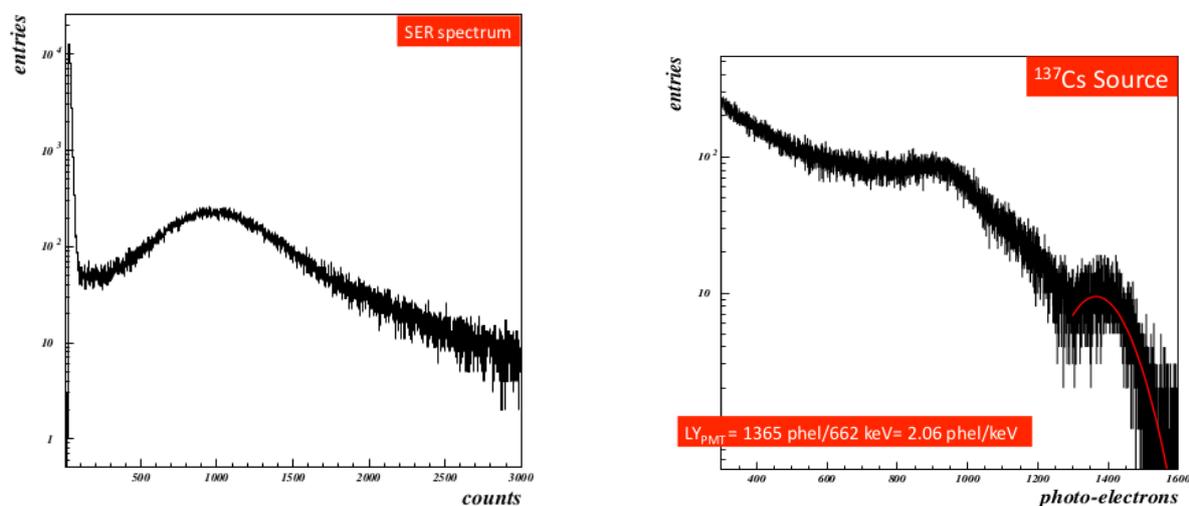


Figura 2.16: *Single electron response* (SER).

## 2.7 Calibrazione PMT

La calibrazione dell'apparato di rivelazione, in particolare dei SiPM e dei PMT è stata fatta ponendo nelle vicinanze della strumentazione fonti radiogeniche di diversa natura con l'obiettivo di misurarne la sensibilità luminosa (*Light Yields*, LY) e quindi di paragonarne la resa.

**PMT** I PMT, la cui *Quantum Efficiency* (QE) è circa del 32%, usati come riferimento erano posti ad una tensione di 1400 Volt.

In fig.2.16 è mostrato a sinistra lo spettro *Single Electron Response* (SER), la cui misurazione ha consentito di ricavarsi il *Light Yields* atteso, mentre a destra è mostrato lo spettro nel caso di esposizione al  $^{137}\text{Cs}$ .

Il valore di *resa luminosa* (LY) stimato nel picco di assorbimento completo a 662 keV era  $LY_{PMT} = 2,06 \text{ phel/keV}$  ed è consistente con le osservazioni (fig.2.16)[12].

# Capitolo 3

## Attenuazione e Crosstalk *Motherboard*

Il capitolo finale conterrà i dettagli delle misure effettuate su una componente circuitale (*motherboard*) destinata a far parte dell'insieme di presa dati dell'esperimento DS-20k. In particolare saranno utilizzate tecniche riflettometriche per l'analisi strutturale e funzionale della parte, nonché misure di *crosstalk* nella stessa.

La presentazione sarà completata da un'ampia introduzione teorica<sup>1</sup> dalla quale saranno estratti i concetti necessari a giustificare le strategie e le metodologie di misurazione.

### 3.1 Linee di Trasmissione

#### 3.1.1 Trasmissione su Lunghe Distanze

Samuel Finley Breese Morse (1791-1872), l'inventore del rinomato codice nonché del telegrafo come lo si conosce oggi, subì nel 1825 il lutto della moglie mentre si trovava a *Washington* (DC) per lavoro.

Giunta la notizia dell'aggravarsi repentino delle condizioni di salute della sua consorte tramite corriere, Morse si precipitò a *New Haven, Connecticut* dove scoprì infine di non essere arrivato in tempo neppure per la sepoltura.

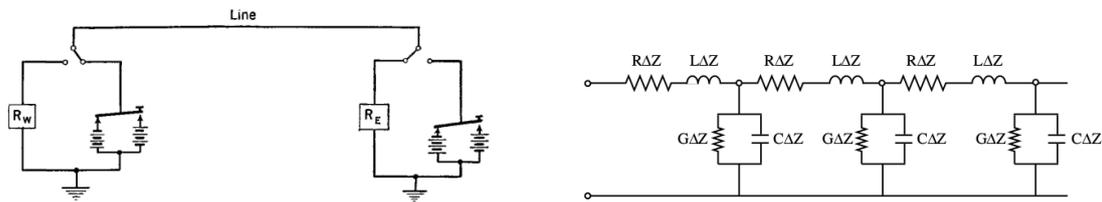
Di fatto, a seguito di questo evento, Samuel Morse si interessò allo studio dei sistemi di comunicazione a distanza, i quali, ad onor del vero, esistevano già all'epoca in forme o poco efficienti o troppo costose.

La sua idea consisteva essenzialmente in un circuito realizzato come in figura 3.1 (sinistra), dove la linea di trasmissione (*Line* in figura) percorreva lunghissime distanze.

Nella stazione ricevente, il segnale veniva amplificato con dei *relè*, vista l'attenuazione subita durante la propagazione sulla linea data dagli effetti dissipativi non più trascurabili del cavo notevolmente esteso.

---

<sup>1</sup>riportata in appendice



**Figura 3.1:** **Sinistra:** schema rappresentativo del funzionamento del telegrafo; **Destra:** circuito equivalente del canale di trasmissione.

Morse si accorse anche di una sconveniente distorsione del segnale originale, talvolta tanto accentuata da causare la perdita di informazioni.

Tale fenomeno viene studiato dalla teoria delle *Linee di Trasmissione*, accennata in questo capitolo ed approfondita in appendice B, ed è dovuto alla capacità e induttanza intrinseche del canale di trasmissione.

Le conclusioni tratte nel § B.1 vanno arricchite con nuove idee che tengano conto della propagazione di segnali lungo grandi distanze.

Tipicamente, per le applicazioni ingegneristiche di telecomunicazioni, gli effetti della *trasmissione* vengono presi in considerazione a cominciare dal caso in cui

$$10 \cdot D \simeq \lambda,$$

con  $D$  distanza da percorrere e  $\lambda$  lunghezza d'onda del segnale.

Nei calcolatori, ad esempio, la condizione diventa  $100 \cdot D \simeq \lambda$ , quindi molto più restrittiva rispetto a  $\lambda$ .

La limitata velocità di propagazione ( $v_p = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ ) del segnale e gli effetti di distorsione, possono essere entrambi spiegati modellizzando il canale di trasmissione come una serie di induttori, capacitori e resistori cablati come in figura 3.1 (destra), lungo tutto il cavo.

L'eliminazione totale degli effetti di *trasmissione* implicherebbe l'istantanea propagazione del segnale, eventualità in netto contrasto con i postulati della relatività ristretta.

Proprio come un'onda che si trasmette in una corda subisce riflessioni al variare della densità del mezzo di propagazione, allo stesso modo il segnale può essere riflesso nel caso in cui il materiale che costituisce il canale non sia perfettamente omogeneo.

L'effetto di *riflessione* avviene anche nel caso in cui la parte *ricevente* sia equivalente ad un interruttore aperto o chiuso. Nel caso in cui ci sia invece un potenziometro, questo può essere modulato per annullare (quasi del tutto) tale effetto.

Nella trattazione teorica che modellizza questo comportamento dei conduttori si studia un circuito ideale di tipo LC (quindi non dissipativo) per casi particolari, come ad esempio quello in cui la resistenza della linea è trascurabile, mentre nel caso dissipativo il modello utilizzato è un circuito di tipo RLC.

Il metodo tipicamente utilizzato nella risoluzione dei circuiti di questo tipo è detto *dei fasori*. Consiste nell'applicare una trasformata integrale alle equazioni differenziali associate trasformandole in un problema polinomiale, per poi *antitrasformare* la soluzione trovata per tornare nel dominio temporale.

Tale metodologia risulta comoda poiché le variabili considerate in questo caso (RLC) sono in *quadratura*, cioè sono descritte da funzioni periodiche la cui differenza di fase è un multiplo intero di  $\pi/2$ , fatto che consente di sfruttare alcune proprietà di queste trasformate per semplificare notevolmente i conti. Sarà infatti possibile ridurre le leggi caratteristiche per induttori e capacitori a semplici equazioni complesse dette *Leggi di Ohm Generalizzate*.

Ricavate le equazioni telegrafiche a partire dalla forma reale delle leggi di Ohm generalizzate, si è in grado di confrontarle con l'equazione di D'Alembert

$$a_{ij}\partial^i\partial^j\psi = 0, \quad a_{ij} = \text{diag}(v^{-2}, -1, -1, -1), \quad (3.1)$$

e giustificare quanto detto poco fa sulla velocità di propagazione del segnale ( $v_p = 1/\sqrt{LC} < \infty$ ).

Ricavato il cosiddetto *coefficiente di riflessione* reale  $\rho_V$  dalle soluzioni delle equazioni telegrafiche, si procede verso una generalizzazione dei concetti di impedenza e di riflessione stessa, ottenendo relazioni utili tra queste ultime e il rapporto tra i picchi massimi e minimi del segnale ( $V_{max}/V_{min}$ ).

Questi risultati sono riportati e giustificati in appendice, e saranno usati più avanti nella presentazione della teoria delle linee di trasmissione.

## 3.2 Tecniche di Misura ed Applicazioni

### 3.2.1 Metodi Grafici

#### Misura della Lunghezza del Canale di Trasmissione

Una delle applicazioni più semplici dei risultati ottenuti in appendice B è la misura della lunghezza del canale di trasmissione.

Se<sup>2</sup>  $v_p = c/n$  si ha che  $2L = v_p T = cT/n \simeq 3T \cdot 10^8/n$ , da cui  $L \simeq \frac{3T}{2n} \cdot 10^8$ . Se come nel caso considerato  $1/n \simeq 0,7$  si ha

$$L \simeq T \cdot 1,05 \cdot 10^9 = \left(T + \frac{T}{20}\right) \cdot 10^9 \simeq T \cdot 10^9$$

dove  $T$  è il tempo che il segnale impulsivo impiega a percorrere il canale e a tornare indietro tramite riflessione, espresso in secondi. In tal caso  $L$  sarà espresso in metri.

Quella appena descritta è una tecnica di *riflettometria nel dominio temporale*, concetto che sarà approfondito nel § 3.2.2.

<sup>2</sup> $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo.

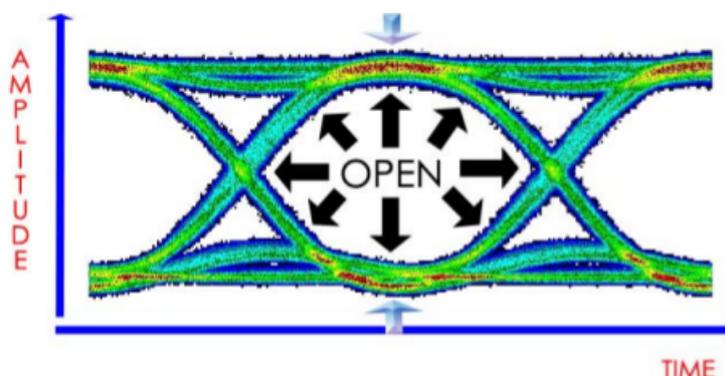


Figura 3.2: esempio di *Eye Diagram*

### Eye Diagram

Il *diagramma ad occhio*, o *eye diagram*, è uno strumento grafico che fornisce informazioni visive sulla qualità di un segnale usato in trasmissioni digitali [17].

Intuitivamente, sovrapponendo gli stati 0 e 1 logici di due segnali all'interno dello stesso canale come in figura 3.2 e normalizzando a due bit l'asse di lettura temporale dell'oscilloscopio, si possono facilmente apprezzare le transizioni logiche di un segnale, solitamente ad alte frequenze.

Generalmente parlando, l'*apertura dell'occhio* è una condizione desiderabile, poiché è essenzialmente garanzia del fatto che gli stati logici non siano di facile interscambiabilità.

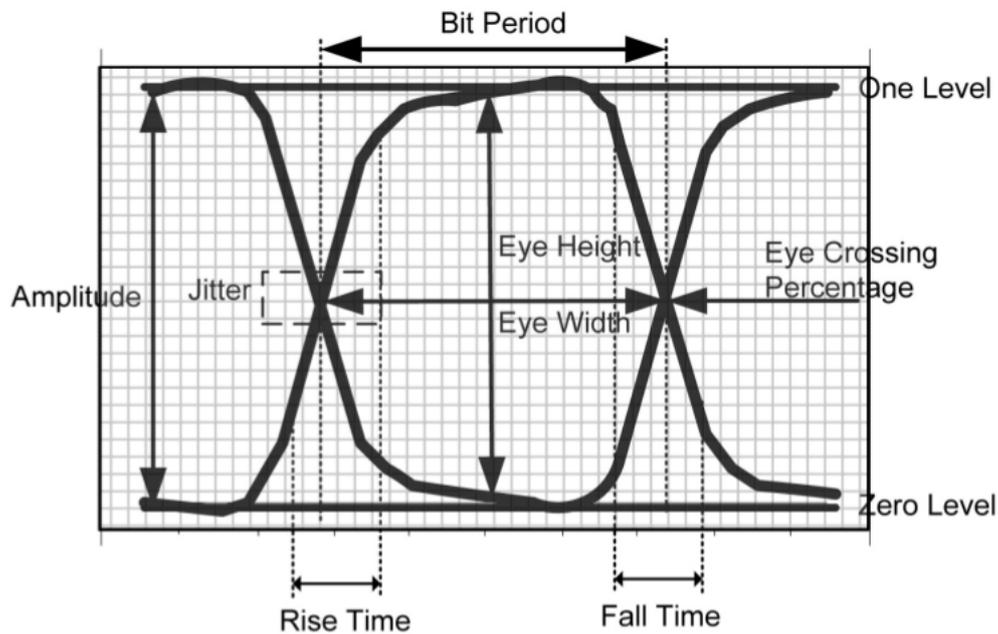
Si definisce a questo scopo il parametro *BER* (*Bit Error Rate*) come rapporto tra il numero di errori di lettura dei bit e il numero totale di questi ultimi.

Nella pratica, un generatore di funzioni fornisce un *pattern* arbitrario di onde quadre e il *diagramma ad occhio* è la sovrapposizione dei segnali osservati dall'oscilloscopio.

In figura 3.2 si apprezza inoltre uno *spessore* della sovrapposizione di questi segnali, indice della presenza di *rumore*.

Le tipiche misure effettuate in questa circostanza sono:

- il valore di tensione corrispondente agli stati logici  $V_0$  e  $V_1$ ;
- la *distanza* tra questi (ampiezza dell'occhio, EA);
- l'altezza dell'occhio (EH), che non coincide con l'ampiezza se non in casi ideali a causa del rumore, il quale tende a *chiuderlo*;
- *eye crossing percentage* (ECP) che, senza entrare in dettagli matematici, rappresenta l'altezza percentuale nella quale avviene l'*incrocio* degli stati logici transienti. Ad esempio, se si incontrano a metà tra  $V_0$  e  $V_1$  si avrà  $ECP \simeq 50\%$ , che è anche la situazione ideale, cioè quella in cui l'occhio è più aperto;



**Figura 3.3:** Rappresentazione grafica dei parametri tipici dell'*eye diagram*.

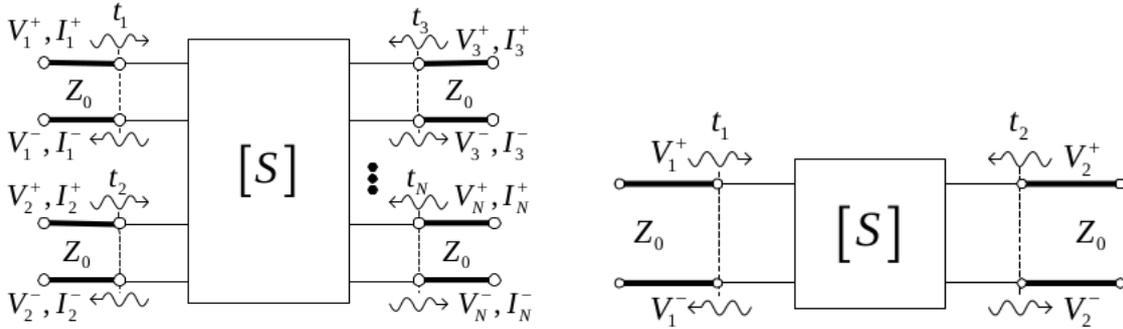
- il periodo dei *bit* ( $T_{bit}$ ), cioè la misura dell'apertura orizzontale dell'occhio, definita come la distanza (temporale) media tra i momenti in cui i segnali si *incrociano* due volte consecutive. Questa grandezza è solitamente misurata in picosecondi nel caso di segnali ad alta frequenza.  $T_{bit}$  è spesso chiamato UI (*Unit Interval*) e viene usato come unità di misura allo scopo di facilitare il confronto tra diversi *data rate*, definiti come l'inverso di  $T_{bit}$ . È facile convincersi del fatto che ad un occhio più aperto corrisponda un periodo di bit maggiore a parità di frequenza del segnale;
- l'ampiezza dell'occhio (EW), simile a  $T_{bit}$ , calcolato sulla media, EW è la distanza *minimale* tra gli *incroci* menzionati, cioè la distanza<sup>3</sup> tra la più lenta delle transizioni  $0 \rightarrow 1$  e la più veloce di quelle  $1 \rightarrow 0$ ;
- i tempi di *caduta* e di *salita*, misurati tipicamente tra il 10 ed il 90% della discesa (o della salita).

Il *bit error rate* (BER) coincide con la probabilità che un bit subisca un'errore di lettura. Tipici valori di tale parametro sono riportati in tabella 3.1 per diversi sistemi di trasmissione.

<sup>3</sup>misurata sull'oscilloscopio

Tipologia di Trasmissione	Tipico <i>Bit Error Rate</i> ( $10^N$ )
ideale	$-\infty, 0$
fibra ottica	-12
comunicazioni <i>wireless</i>	$-4 \div -7$
collegamento molto rumoroso	$-2 \div -3$
caso peggiore	$\log_{10} \left( \frac{1}{2} \right) \simeq -0,3$

**Tabella 3.1:** Paradossalmente, se ogni bit venisse letto in modo scorretto l'informazione trasmessa sarebbe perfetta, mentre il caso peggiore risiede laddove l'informazione diventa aleatoria, cioè quando  $P(\text{che l}'n\text{-esimo bit venga corrotto}) = \frac{1}{2}$ . Infatti è come se tutto il *messaggio* fosse stato crittato con una funzione **NOT**, fatto che non lede in alcun modo la quantità o la qualità delle informazioni trasmesse.



**Figura 3.4:** Sinistra: N linee di trasmissione; Destra: Due linee.

### Matrici di Scattering

Nel caso in cui la configurazione circuitale studiata sia quella della figura 3.4 (sinistra), cioè una *scatola nera* (rappresentata dall'elemento  $S$ ) cablata ad N linee di trasmissione, conviene definire i cosiddetti *Parametri di Scattering* (*S-parameters*) dati dai rapporti tra le ampiezze di tensione dei segnali riflessi con quelli incidenti.

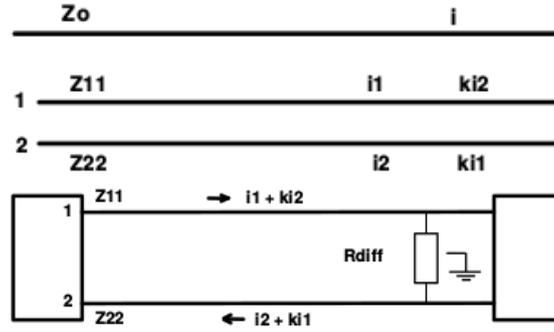
In questo modo il sistema sarà descritto da N equazioni lineari

$$V_i^- = \sum_j S_{ij} V_j^+, \quad (3.2)$$

con  $\mathbf{S}$  *matrice di scattering*.

Nel caso particolare in cui N dovesse essere uguale a due (come in figura 3.4, destra) si ha, ricordando la B.22,

$$S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = (\rho_V)_{11}, \quad (3.3)$$



**Figura 3.5:** Alto: Canale singolo; Centro: canale doppio; Basso: canale doppio differenziale.

dove  $\rho_{11}$  è il coefficiente di riflessione della linea 1, cioè l'ampiezza di  $V_1^-$ . La 3.3 è vera nel momento in cui  $V_2^+ = 0$ .

Si noti che in questo caso (si veda l'appendice B)

$$|S_{11}| = \frac{\text{VSWR}_{11} - 1}{\text{VSWR}_{11} + 1}. \quad (3.4)$$

Inoltre, se  $V_2^+ = 0$ ,

$$S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} \stackrel{\text{(B.33)}}{=} (\tau_V)_{21}. \quad (3.5)$$

### Impedenza Differenziale, Comune, Pari, Dispari

La figura 3.5 mostra in alto un canale singolo di impedenza  $Z_0$  attraversato da una corrente  $I$ , da cui si deduce che ai capi debba esserci una tensione  $V = Z_0 I$ .

Al centro della stessa figura è mostrato un *canale doppio*, le cui linee di trasmissione hanno rispettivamente le impedenze  $Z_{11}$  e  $Z_{22}$  e sono attraversati dalle correnti  $I_1$  ed  $I_2$ . Queste correnti si *accoppiano* vicendevolmente tramite una costante di proporzionalità  $\kappa$ , quindi

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}(I_1 + \kappa I_2) \\ V_2 &= Z_{22}(I_2 + \kappa I_1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definendo  $Z_{12} = \kappa Z_{11}$  e  $Z_{21} = \kappa Z_{22}$  le equazioni precedenti diventano

$$V_i = \sum_j Z_{ij} I_j, \quad (3.7)$$

cioè assumono una forma facilmente generalizzabile ad un numero arbitrario di linee di trasmissione.

Nella figura 3.5 è invece mostrato in basso un accoppiamento *differenziale* accuratamente bilanciato di due canali, in cui vengono posti a tale scopo  $Z_{11} = Z_{22} = Z_0$ , quindi

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_0 I_1 (1 - \kappa) \\ V_2 &= -Z_0 I_1 (1 - \kappa) = -V_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le linee *accoppiate* sono solitamente progettate per operare in maniera *differenziale*, in tal caso i segnali che si propagheranno sulla linea incontreranno un'impedenza che prende lo stesso nome. Quest'ultima avrà un valore più basso di quella della linea, poiché la propagazione dei segnali in polarizzazione inversa impone al sistema un comportamento equivalente al caso in cui fosse stato messo un piano GND tra le due linee.

Non tutti i segnali che si propagheranno nelle linee saranno differenziali, ad esempio il rumore elettrico non sentirà l'influenza della parete GND virtuale, e avrà pertanto stessa intensità e polarizzazione in entrambi i canali. Essendo quindi uguale in entrambe le linee il suo effetto sarà quello di aumentare leggermente l'impedenza di queste ultime, mentre l'impedenza che incontrerà sarà detta *pari* (*even mode impedance*, definita in tabella 3.2).

La tabella 3.2 riporta vari tipi di *impedenza* misurabili in diverse circostanze.

Se la tensione  $V_1$  è riferita al GND, il calcolo dell'impedenza effettiva del canale<sup>4</sup> sarà semplicemente

$$\begin{aligned} Z_{odd/even} &= V_1/I_1 = Z_0(1 - \kappa), \quad Z_0 = Z_{11}, \quad \kappa = Z_{12}/Z_{11} \\ &= Z_{11} - Z_{12}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Al fine di eliminare la riflessione della linea, dovrà essere  $Z_{odd/even} = Z_L$  (definita in appendice B), a seconda del caso considerato.

Per com'è definita, l'impedenza differenziale sarà la somma delle due impedenze (*dispari o pari*) delle linee considerate, quindi

$$Z_{diff} = 2Z_0(1 - \kappa) = 2(Z_{11} - Z_{12}) = 2Z_{odd/even}. \quad (3.10)$$

Nel caso differenziale vale la relazione  $I_1 = -I_2$ , mentre in quello *comune* è vero  $I_1 = I_2$ , quindi le 3.8 diventano

$$V_1 = V_2 = Z_0 I_1 (1 - \kappa), \quad (3.11)$$

con le parti terminali di entrambi i canali messe a GND, attraverso una resistenza, in modo che la corrente *sentita* dal GND sembri quella proveniente da due resistori in parallelo ( $I_1 + I_2$ ), da cui

$$Z_{com} = \frac{1}{2} Z_0 (1 + \kappa) = \frac{1}{2} (Z_{11} + Z_{12}) \simeq \frac{1}{4} Z_{diff}. \quad (3.12)$$

<sup>4</sup>vale sia nel caso *dispari* (*odd mode*) che *pari*, così come sono descritti nella tabella 3.2.

Tipo di Impedenza		
Simbolo	Nome	
$Z_0$	intrinseca	Impedenza misurata quando la singola linea non è accoppiata a nessun altro canale di trasmissione.
$Z_{diff}$	differenziale	Impedenza misurata tra due linee di trasmissione i cui segnali hanno polarizzazione opposta o uguale.
$Z_{com}$	comune	Impedenza misurata tra le due linee quando sono attraversate da segnali polarizzati identicamente.
$Z_{odd}$	dispari	Impedenza misurata su una linea accoppiata con un'altra con segnali polarizzati inversamente.
$Z_{even}$	pari	Impedenza misurata su una linea accoppiata con un'altra con segnali identici.

**Tabella 3.2:** Definizione dei vari tipi di impedenza.

### 3.2.2 Riflettometria

Con il termine *riflettometria* si fa solitamente riferimento ad un insieme di tecniche atte all'analisi strutturale di un componente circuitale, nel caso d'interesse di questa tesi di un canale di trasmissione.

Nell'eventualità di un danno o di un'imperfezione nella linea, misurando il *ritardo di fase* tra il segnale incidente e quello riflesso è possibile localizzare spazialmente il difetto, mentre l'intensità del segnale riflesso fornisce l'impedenza della discontinuità.

La riflettometria è una tecnica estremamente efficace nell'individuare difetti di discontinuità e di cortocircuito (*Hard Faults*), mentre risulta inadeguata per difetti minori ma potenzialmente molto dannosi come, ad esempio, isolanti danneggiati (*Soft Fault*).

Alcune di queste metodologie d'indagine sono [16]:

(A) R. nel dominio temporale (TDR);

la *riflettometria nel dominio temporale* (*time domain reflectometry*) fa uso di *funzioni gradino* come input di tensione incidente. Nota la velocità di propagazione  $v_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  e lo *scarto* temporale tra il segnale entrante e quello riflesso può essere calcolata la lunghezza del canale, mentre l'ampiezza e la polarizzazione della tensione riflessa forniscono insieme l'impedenza dell'eventuale discontinuità (circuito aperto o in corto, parzialmente o totalmente).

(B) R. nel dominio delle frequenze (FDR);

la *frequency domain reflectometry* si serve invece di funzioni sinusoidali a frequenza variabile. La variabilità di quest'ultima è anch'essa di tipo *step graded function*.

(C) R. a segnali misti (*Mixed Signal Reflectometry*, MSR);

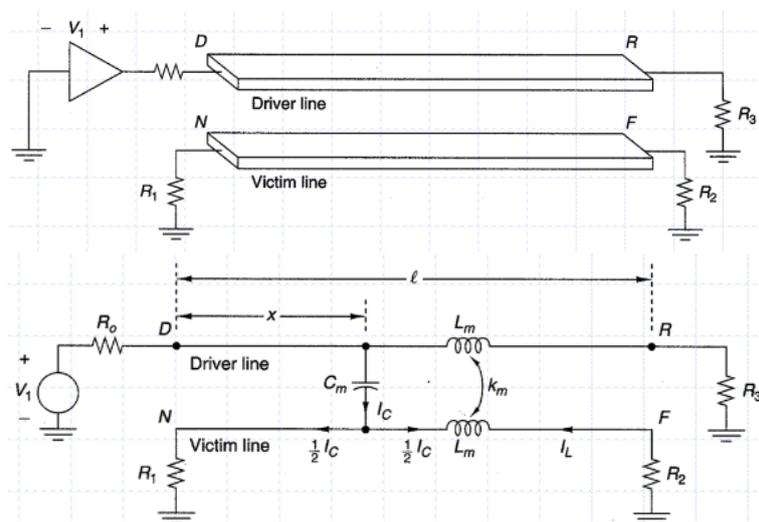
(D) R. sequenziale nel dominio temporale (*Sequence Time Domain Reflectometry*, STDR);  
usa uno *pseudo-rumore*.

(E) R. nel dominio temporale ad ampio spettro (*Spread Spectrum Time Domain Reflectometry*, SSTDR);

### 3.2.3 Tecniche Riflettometriche, Misurazione di Crosstalk

Il *crosstalk* è un fenomeno di disturbo che occorre dal momento in cui due canali di trasmissione, essendo caratterizzati da induttanza e capacità elettrica intrinseca e mutua, *interferiscono* l'uno con l'altro a causa del passaggio di un segnale in uno dei due, il quale induce una perturbazione misurabile nell'altro.

Si distinguono due classi di accoppiamento, o di *crosstalk*, nel caso di due linee di trasmissione appaiate come in figura 3.6:



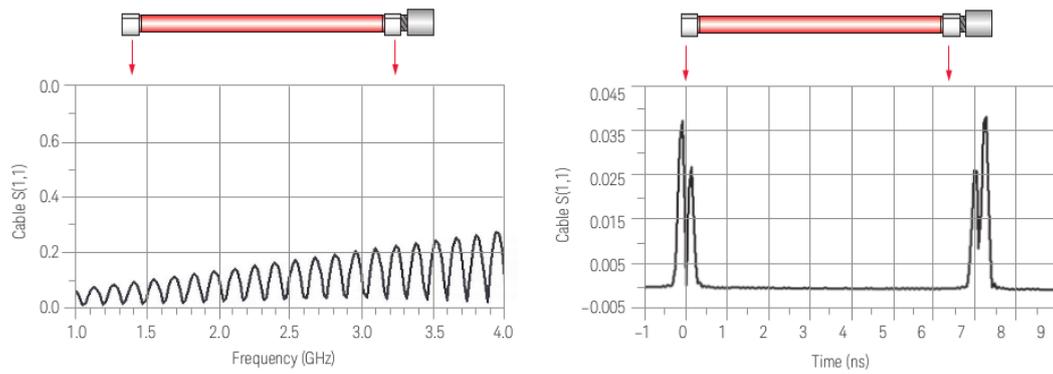
**Figura 3.6:** **Alto:** Schema rappresentativo di due linee di trasmissione accoppiate; **Basso:** come prima, ma sono stati evidenziati gli effetti capacitivi ed induttivi.

- (i) *crosstalk* induttivo;
- (ii) *crosstalk* capacitivo.

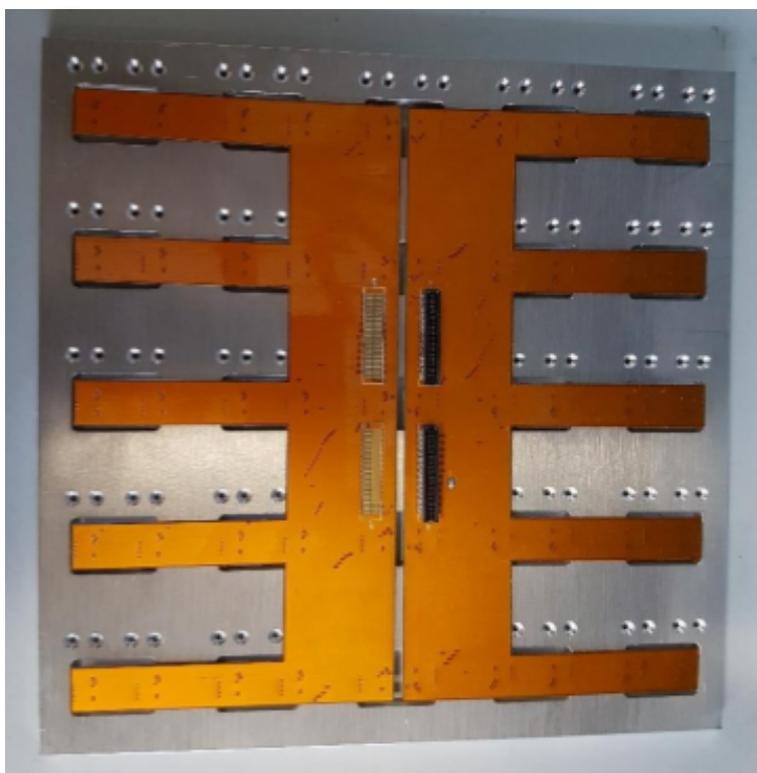
In entrambi i casi, i quali non si escludono vicendevolmente, si farà una distinzione tra *driver line* (linea attiva) e *victim line* (linea passiva o aggredita)[18].

Le tecniche TDR ed FDR possono essere utilizzate per studiare questo tipo di fenomeno.

È noto che la *trasformata di Fourier* sia un operatore integrale lineare ed invertibile, e che se applicata ad una funzione (opportuna) di dominio temporale, ne restituisca una nel dominio delle frequenze. È il caso del *coefficiente di riflessione*  $\rho_V$  (o  $S_{11}$ ), il quale se espresso in funzione del tempo e trasformato diventa una funzione delle frequenze angolari e viceversa, infatti è possibile predeterminare il risultato di una misurazione TDR a partire da una di tipo FDR utilizzando questo strumento matematico.



**Figura 3.7:** Esempi di FDR ed TDR effettuate sullo stesso canale, legate tra loro da una trasformata integrale.



**Figura 3.8:** Il circuito rivestito in kapton in figura sarà posizionato dietro i SiPM nel sistema di presa dati e collocato come mostrato.

## 3.3 Misure

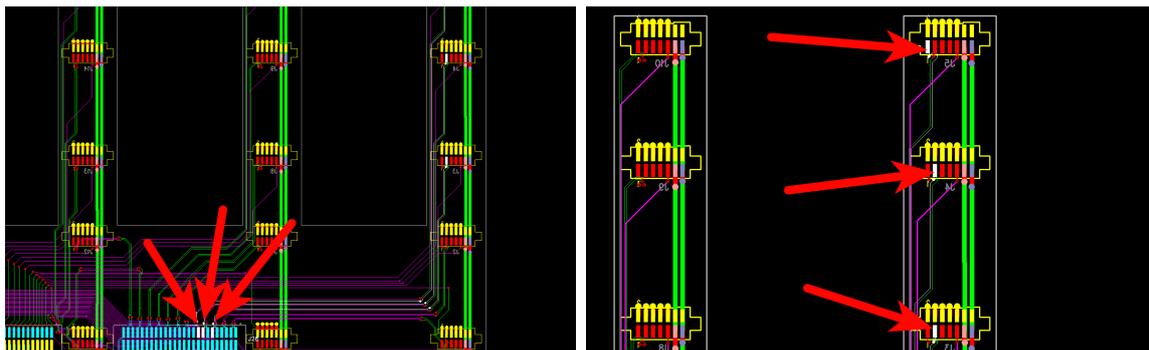
### 3.3.1 Misura di Crosstalk tra le Linee di Trasmissione

La figura 3.8 riporta un'immagine di una *motherboard* con sovrapposto il circuito di kapton che porta i segnali dai SiPM ai connettori centrali per poi condurli alle successive schede di lettura. Lo schema circuitale del kapton è riportato in figura 3.9. Essendo quindi essenziale garantirne l'integrità strutturale e funzionale, saranno effettuate su questa misure di *crosstalk* ed *attenuazione*.

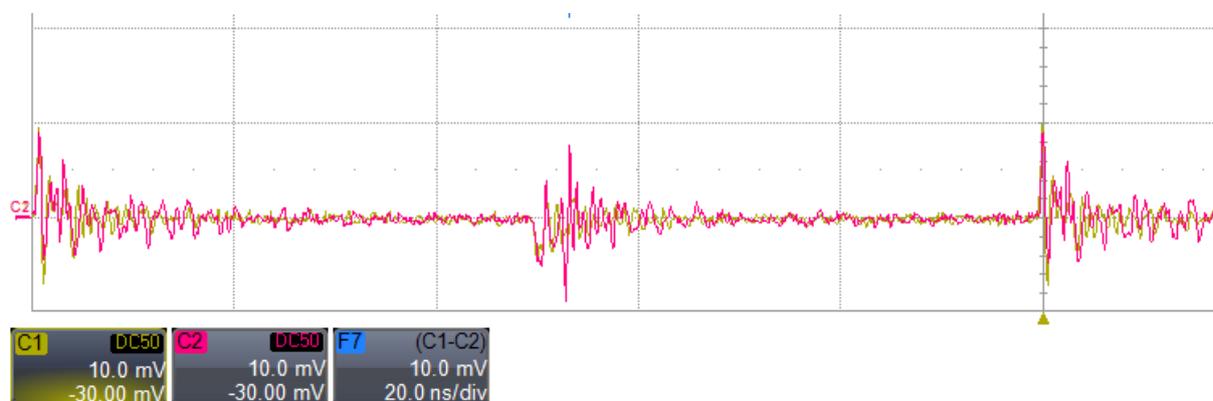
Un primo *test* preliminare è stato effettuato nelle condizioni più sfavorevoli. Ad esempio, il test sul *crosstalk* sarà effettuato sulle linee più lunghe e con maggior possibilità di dar luogo a tale disturbo, quindi tra due linee sufficientemente vicine. A tal proposito, in figura 3.10 sono riportati due dettagli della 3.9. Le linee bianche sono quelle sulle quali sono stati effettuati i *test* di *crosstalk*, infatti tra tutte quelle presenti sono quelle che percorrono una distanza maggiore mantenendo una piccola distanza mutua, identificandosi quindi come caso peggiore.



**Figura 3.9:** Schema rappresentativo dei circuiti nei vari *layer* della *motherboard* ottenuta dal progetto CAD.



**Figura 3.10:** Dettagli *motherboard*. I *pin* e le linee di trasmissione considerati sono evidenziati in bianco.



**Figura 3.11:** Misura preliminare del *crosstalk*.

### Linea Attiva Singola

Il circuito generale assomiglierà a quello di figura 3.6, con un generatore di impulsi ad un'estremità della linea e un oscilloscopio dall'altra.

È di seguito elencata la strumentazione utilizzata per la misura di *crosstalk*:

- (1) due resistenze da  $47,0 \pm 0,4 \Omega$ ;
- (2) un multimetro digitale (FLUKE 70 series II );
  - (a) Ohmetro:  $\pm(0,5\%+2)$ ;
- (3) un oscilloscopio digitale (TELEDYNE LECROY WaveRunner 610Zi);
 

**SPECIFICHE** : 1 GHz, 10 GS/s,
- (4) un generatore di segnali (HEWLETT PACKARD Pulse Generator Hp 8131A);
 

**SPECIFICHE** : 50MHz
- (5) cavi RF (radio-frequenza,  $50\Omega$ ): RG 316
- (6) adattatori SMA to BNC.

Le resistenze, il cui valore è fornito dal costruttore ed accertato da una misurazione del multimetro ( $Z_{odd} \simeq 50 \Omega$ ,  $Z_{diff} \simeq 100 \Omega$ ), sono state poste nelle parti terminali dei canali per annullare gli effetti di riflessione.

Una misura preliminare è stata effettuata generando un segnale di onde quadre di ampiezza 3V, tempi di salita di 422 ps e 10 MHz di frequenza, consentendo una misurazione del *crosstalk* in quelle a 10 GS/s, il cui effetto è riportato in figura 3.11.

Seppur presente, il disturbo costituisce una frazione irrisoria dell'impulso originario ( $< 1\%$ , come indicato in tabella 3.3).

		Misure	<i>setup</i>	
		Ampiezze	Offset	mV/div
Segnale	(V)	3	-	-
<i>Crosstalk</i>	(mV)	15	-30,0	10
Frazione percentuale				
<i>C./Segnale</i>	(%)	<1		
C. in Decibel	(dBmV)	23,5		

**Tabella 3.3:** Tabella riassuntiva misure primo test. Gli errori assegnati alle tensioni sono valutati come metà dell'ampiezza della sottodivisione. Sulla riga del segnale non sono riportati offset e il parametro mV/div in quanto la misura non è stata effettuata con l'oscilloscopio ma tramite una lettura diretta del *display* del generatore di segnali. La misura del *crosstalk* è di tipo *picco-picco*.

Un secondo *test*, atto ad avvicinarsi sempre di più alle condizioni sperimentali reali dell'esperimento DS-20k, è stato successivamente effettuato riducendo la tensione dell'impulso iniettato. La strumentazione della precedente prova è rimasta invariata, fatta eccezione per il seguente:

- oscilloscopio digitale (LECROY 3010 Serial Data Analyzer);

**SPECIFICHE :**

- DUAL : 20 GS/s;
- QUAD : 10 GS/s.

Questa volta l'ampiezza del segnale era di  $\simeq 1$  V, valore determinato attraverso il generatore di impulsi e confermato da una misura *picco-picco* nell'oscilloscopio. Il tempo di salita è stato ridotto a 160 ps, mentre la frequenza era di 10 MHz.

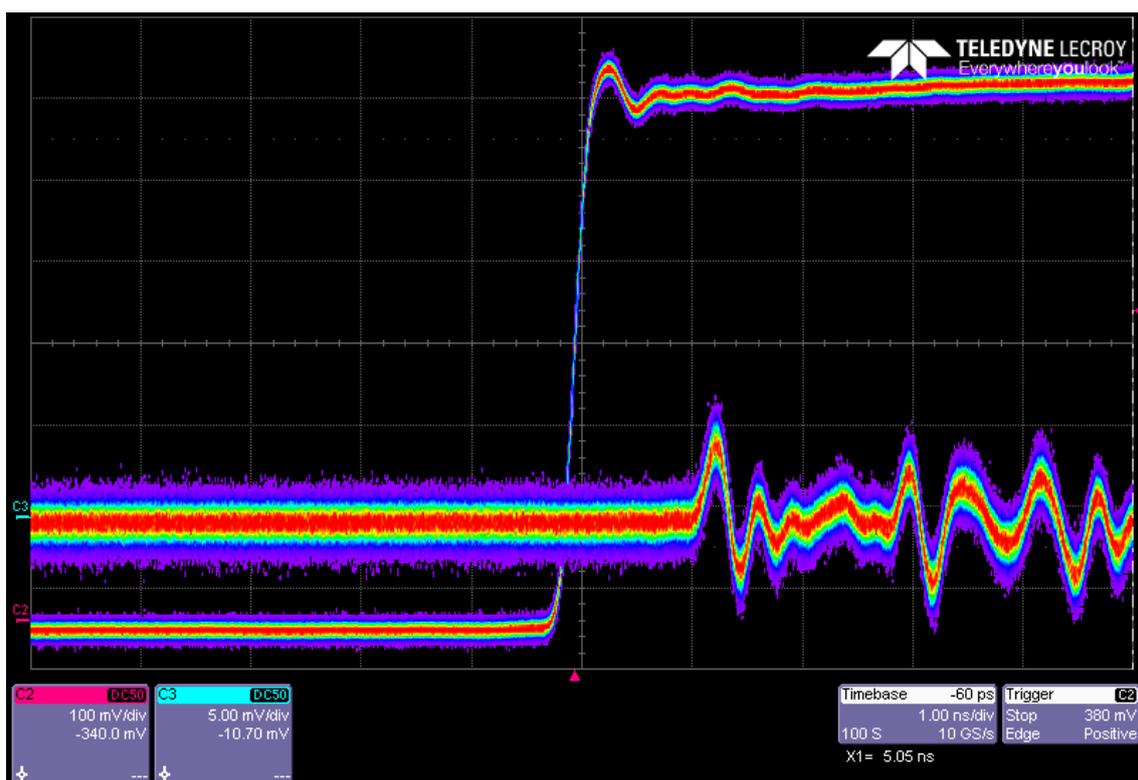
Il *crosstalk* misurato in una configurazione circuitale analoga alla precedente aveva un'ampiezza massima *picco-picco* di circa 10 mV, cioè l'1% del segnale *attivo* (tabella 3.4), mentre il rumore della strumentazione usata per la misura era intorno al 0,5% dello stesso segnale.

Si può trovare conferma di quanto detto finora in figura <sup>5</sup> 3.12. Nella stessa, che riporta una presa dati in *persistenza analogica*, si nota anche un ritardo nel *crosstalk*

<sup>5</sup>Sebbene non sia rilevante nel contesto delle misure riportate in questo paragrafo, si può provare ad applicare la nozione di *eye diagram* al segnale in figura 3.12 e notare che se si provasse ad immaginarlo sovrapposto al suo complementare si osserverebbe un'ottima qualità del segnale (un occhio molto aperto), visti i brevi tempi di salita. Il segnale reale di misurazione sarà molto più *blando* e meno repentino.

Rumore $\simeq 5$ mV		Misure <i>setup</i>		
		Ampiezza	Offset	mV/div
Segnale	(mV)	1000	-340	100
<i>Crosstalk</i>	(mV)	10	-10,7	5
Frazione percentuale				
<i>C.</i> /Segnale	(%)	1		
Rumore/ <i>C.</i>	(%)	50		
<i>C.</i> in Decibel	(dBmV)	20		

**Tabella 3.4:** Tabella riassuntiva misure secondo test. Gli errori sono stati valutati come nel caso precedente, ma questa volta l'ampiezza del segnale è stata misurata con l'oscilloscopio.



**Figura 3.12:** In figura è mostrato un fermo immagine della seconda misura del *crosstalk*. La funzione gradino rappresenta il segnale entrante, mentre la perturbazione del rumore (banda spessa a sinistra) ci consente la misura *picco-picco* del *crosstalk*.

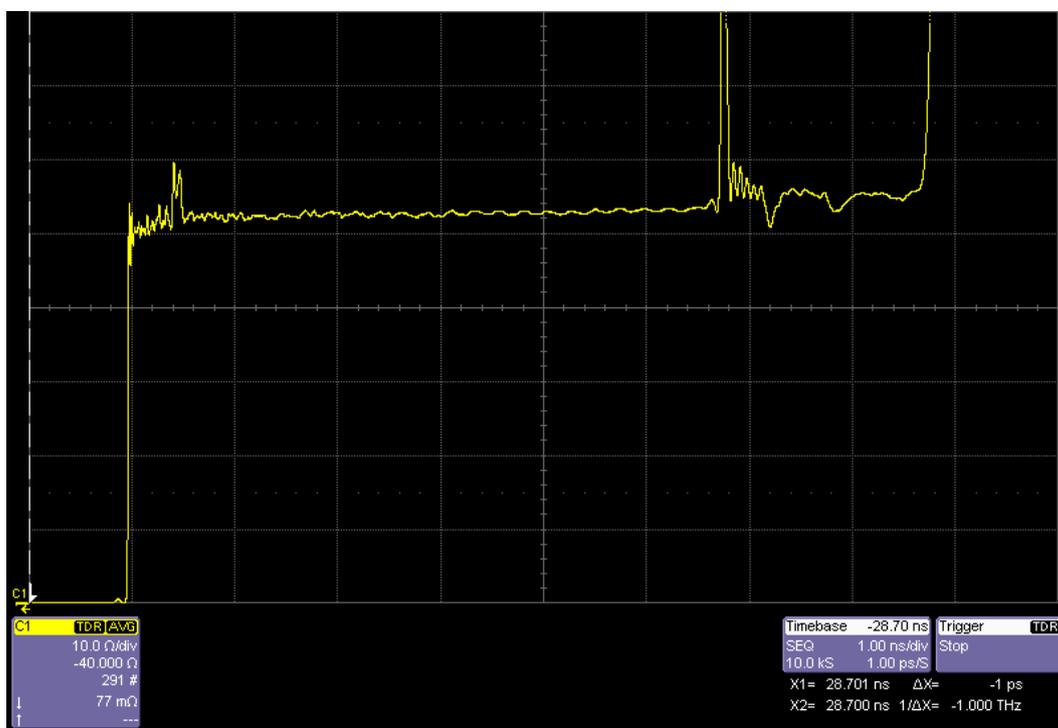


Figura 3.13: Misura dell'impedenza *odd* tramite tecnica TDR.

rispetto al segnale, che è comunque dovuto unicamente al circuito usato per la misura con il segnale iniettato anche direttamente all'oscilloscopio.

I dati sono stati presi in *QUAD-MODE*, quindi a 10 GS/s.

### Misura dell'Impedenza Differenziale

Una veloce misura dell'impedenza *dispari* ( $Z_{odd}$ ) della *motherboard* è stata effettuata con un'oscilloscopio, come mostrato in figura 3.13.

Si contano circa 5 divisioni su 10  $\Omega$ /div, quindi  $Z_{odd} \simeq 52 \div 53 \Omega$  a cui si associa un'incertezza di mezza sottodivisione, da cui si ricava, grazie alla 3.10,  $Z_{diff} \simeq 105 \Omega$ , con incertezza doppia. Quindi  $Z_{odd} = 52,5 \pm 1,0 \Omega$  e  $Z_{diff} = 105,0 \pm 2,0 \Omega$ , risultato in linea con quello di progettazione (100  $\Omega$ ).

### Linea Attiva Doppia

L'ultimo test di *crosstalk* effettuato sul circuito kapton consisterà nella misura dell'effetto di una duplice *aggressione* su un canale posto tra due linee che saranno rese attive da impulsi sincroni di onde quadre di ampiezza 3V. I *pin* collegati alla strumentazione sono colorati di bianco in figura 3.14 e la linea aggredita è quella centrale.

Strumentazione:

- (1) un multimetro digitale (FLUKE 70 series II );
- (2) un generatore di segnali (HEWLETT PACKARD Pulse Generator Hp 8131A);

**SPECIFICHE** : 50MHz

- (3) cavi RF (radio-frequenza, 50 $\Omega$ ): RG 316
- (4) adattatori SMA to BNC.
- (5) oscilloscopio digitale (LECROY 3010 Serial Data Analyzer);

**SPECIFICHE** :

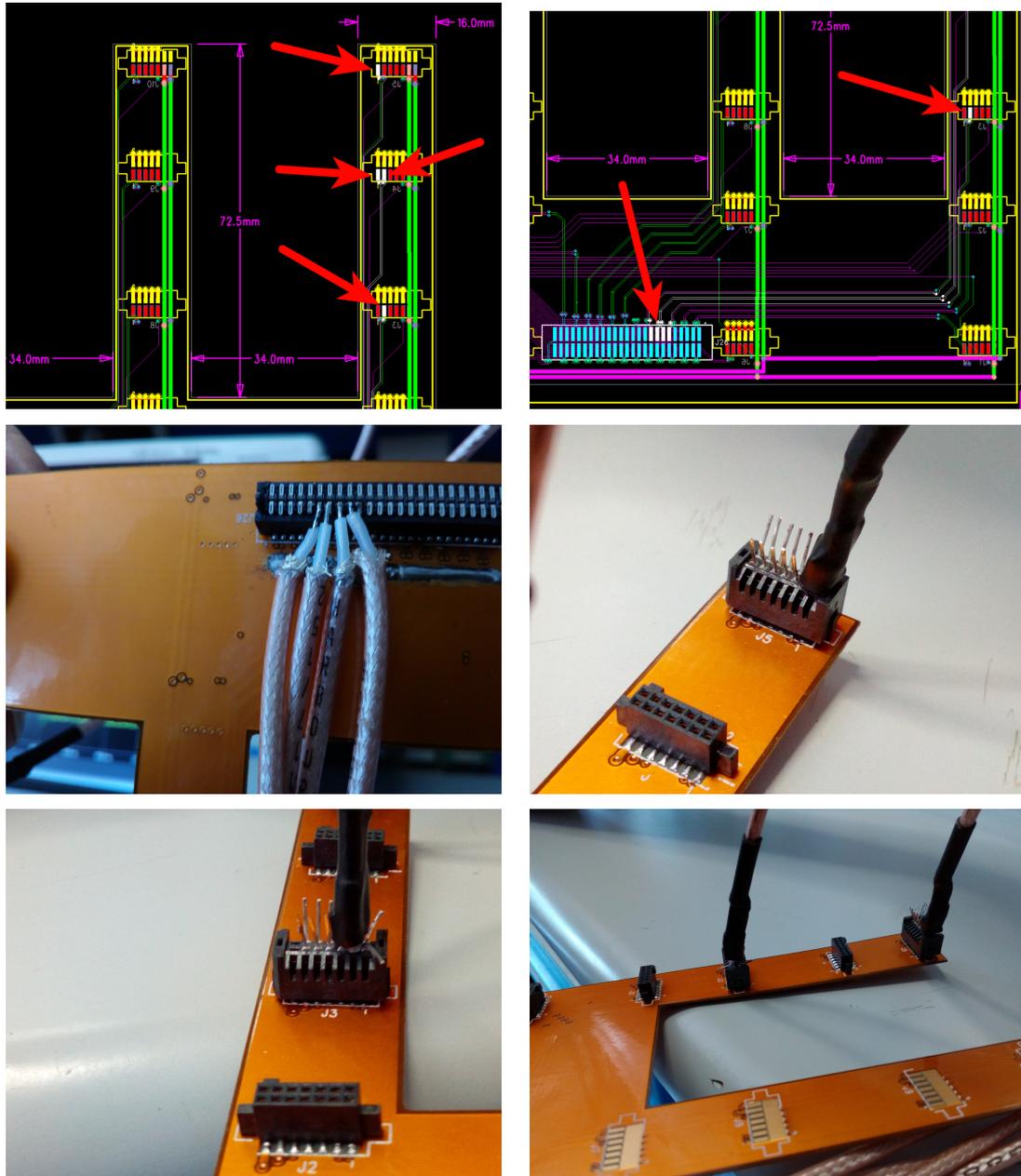
- DUAL : 20 GS/s;
- QUAD : 10 GS/s.

Il foglio **CAD** utilizzato per la progettazione della scheda ha fornito i *tempi di transito* o *delay* delle linee attive. Per la linea più lunga si aveva un *delay* di 985 ps, per quella più corta di 645 ps. Quindi, imponendo un *skew* o ritardo del secondo segnale impostando adeguatamente il generatore (340 ps) è stato possibile sincronizzare i segnali. La sincronia è stata successivamente perfezionata con l'ausilio dell'oscilloscopio.

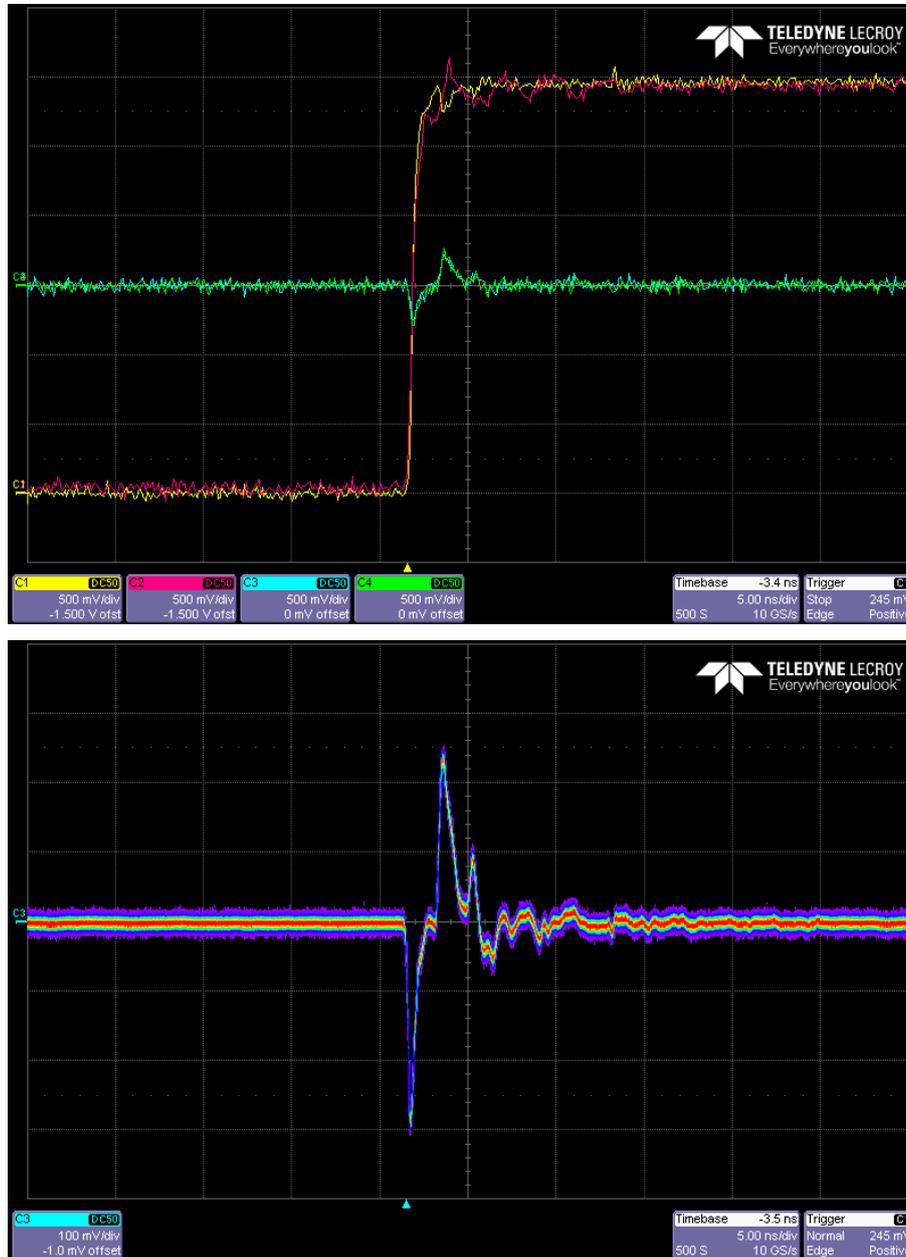
Le figure 3.15 e 3.16 ci consentono di ricavare il *crosstalk* e di confrontarlo direttamente con il segnale. Il disturbo (3.15 sopra) ha un'ampiezza *picco-picco* di 550 mV, contributo dato dal picco inferiore con 300 mV e da quello superiore con 250 mV. Questa volta il *crosstalk* ha raggiunto ampiezze pari a circa un quinto di quelle del segnale.

In alto in figura 3.16 sono mostrati tre segnali, in alto è mostrato un confronto diretto in *persistenza analogica* tra segnale e disturbo rispettivamente a 500 ed a 100 mV/div, mentre in basso sono rappresentati varie misure di disturbo in un fermo immagine. Il segnale **C3** è il canale aggredito (colorato in bianco in figura 3.14), **C4** il *crosstalk* del canale adiacente (molto vicino) sul pin a sinistra del canale misurato con C3. **C3-C4**: è una funzione implementata con l'oscilloscopio nel tentativo di cancellazione parziale del *crosstalk*.

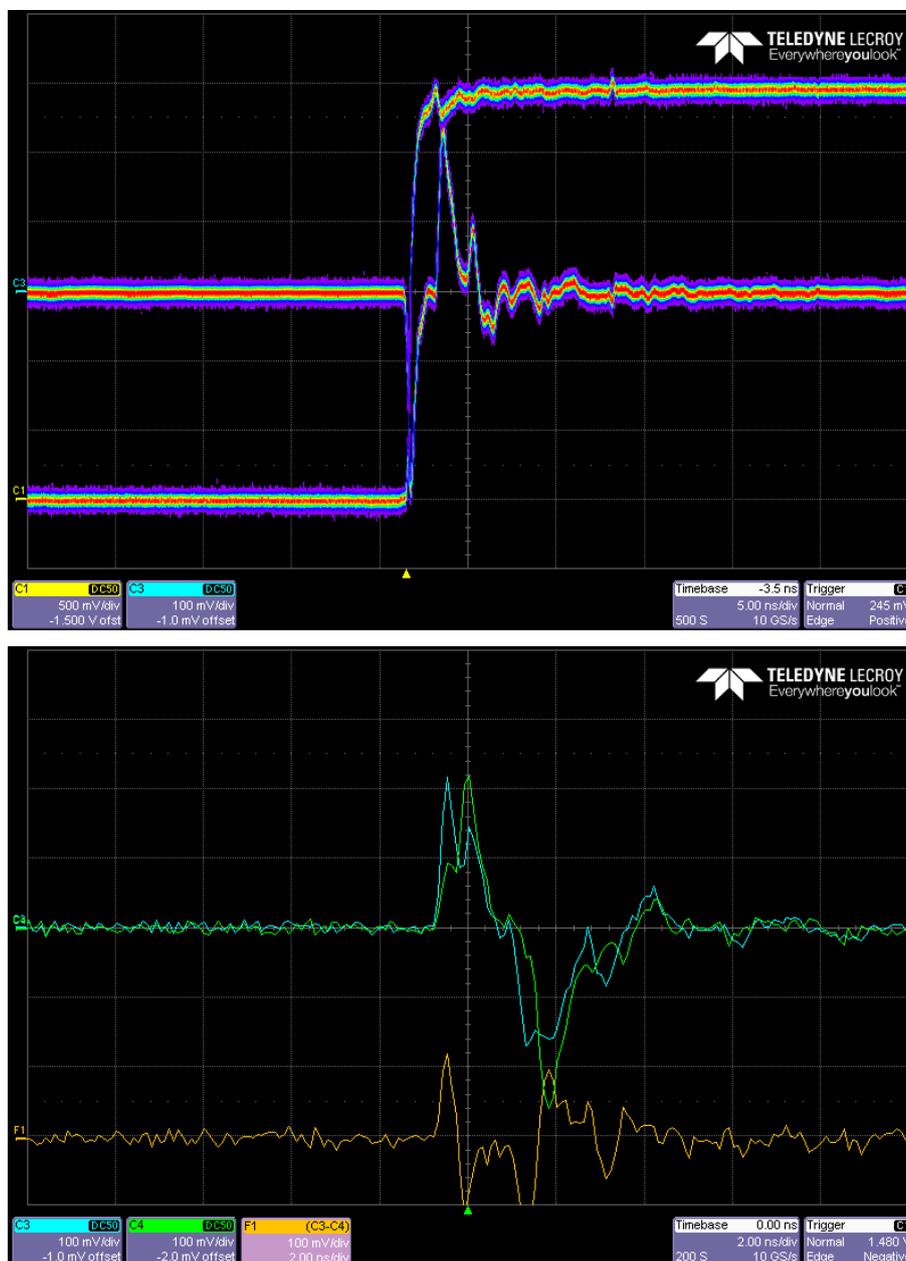
Le misure sono riportate in sintesi in tabella 3.5.



**Figura 3.14:** Dettagli *motherboard*. I *pin* ed i canali analizzati sono evidenziati in bianco. Quello centrale sarà aggredito dagli altri due.



**Figura 3.15:** ALTO: è mostrato un confronto segnale-crosstalk mantenendo 500 mV/div in ogni canale. Il quarto canale (linea verde) mostra una misurazione ausiliaria del crosstalk nel canale adiacente (subito a sinistra, figura 3.14) a quello aggredito. BASSO: Misura effettiva del crosstalk in *persistenza analogica* a 100 mV/div.



**Figura 3.16:** ALTO: Confronto diretto in *persistenza analogica* tra segnale e disturbo rispettivamente a 500 ed a 100 mV/div. BASSO: Nell'immagine sono rappresentati varie misure di disturbo in un fermo immagine. C3:(blu) canale aggredito (colorato in bianco in figura 3.14); C4:(verde) *crosstalk* canale adiacente (molto vicino) sul pin a sinistra del canale misurato con C3; C3-C4:(giallo) funzione implementata con l'oscilloscopio nel tentativo di cancellazione parziale del *crosstalk*.

Rumore $\simeq 3$ mV		Ampiezza	Offset	mV/div
Segnale	(mV)	3000	-1500	500
<i>Crosstalk</i>	(mV)	550	-1	100
Frazione percentuale				
<i>C.</i> /Segnale	(%)	18		
Rumore/ <i>C.</i>	(%)	<1		
<i>C.</i> in Decibel	(dBmV)	55		

**Tabella 3.5:** Tabella riassuntiva misure linea doppia attiva.

### Linea Attiva Doppia, Bassa Tensione



**Figura 3.17:** *Crosstalk* a bassa tensione linea doppia attiva.

In figura 3.17 è mostrato il fermo immagine dello schermo dell'oscilloscopio durante la presa dati di una prova del tutto analoga a quella descritta nel paragrafo precedente. Questa volta il segnale d'ingresso aveva un'ampiezza di 200 mV, contro i 3V di prima. Si vuole fare un confronto tra questi due casi, in particolare si vuole stimare l'andamento netto di *C.*/Segnale (%) tra due tensioni: la prima *grande* e la seconda *piccola*.

Il *crosstalk* misurato è di circa 33,65 mV, quindi il 16,8% (30,5 dBmV), contro il 18% dell'esperimento a 3 V.

Si potrà quindi assumere che la percentuale di *crosstalk* rispetto ai segnali *aggressori* non scenda sotto il 16% a prescindere dall'ampiezza di questi ultimi, a parità di tempi di salita.

L'oscilloscopio usato per questa misura era un KEYSIGHT DSO-S 104A, 1 GHz, 20 GS/s, 10-bit ADC, e il resto della strumentazione è rimasto inalterato.

Riassumendo, per quanto riguarda la misura del *crosstalk* tra linee di trasmissione adiacenti si ottiene, con un'ampiezza di segnale di 3V e tempi di salita di 150 ps, un valore del 18%. Questo valore è consistente con il 15% ottenuto con una simulazione Hyperlink con le stesse impostazioni del segnale iniettato (linea doppia attiva).

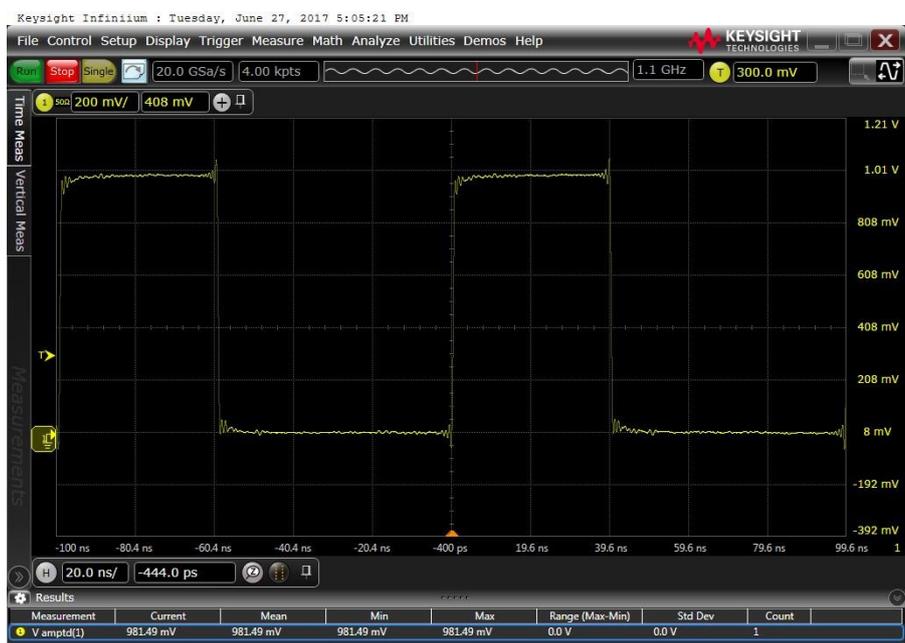


Figura 3.18: Misura attenuazione PINsx.

### 3.3.2 Misura di Attenuazione dei Segnali

In appendice B è possibile trovare delle delucidazioni riguardo l'origine teorica del fenomeno di attenuazione del segnale nelle linee di trasmissione e la sua relazione con la frequenza dello stesso dovuta al cosiddetto *skin effect*, il quale aumenta l'impedenza effettiva del canale nel caso di ridotte periodicità.

La strumentazione è rimasta invariata dall'esperimento con doppia linea di aggressione a 3V:

- (1) un multimetro digitale (FLUKE 70 series II );
- (2) un generatore di segnali (HEWLETT PACKARD Pulse Generator Hp 8131A);
- (3) cavi RF (radio-frequenza,  $50\Omega$ ): RG 316
- (4) adattatori SMA to BNC.
- (5) oscilloscopio digitale (LECROY 3010 Serial Data Analyzer);

**SPECIFICHE :**

- DUAL : 20 GS/s;
- QUAD : 10 GS/s.

Le modalità di esecuzione delle misure sull'attenuazione della *motherboard*, sono state scelte sulla base delle seguenti priorità:

- 1- eliminazione dell'attenuazione dovuta ai cavi della circuiteria;
- 2- considerazione del caso peggiore;

Il punto **2** del precedente elenco è stato facilmente soddisfatto eseguendo la misura sul *pin* associato al canale più lungo, dove il fenomeno di attenuazione è massimo. Tuttavia sono state eseguite prove su ulteriori *pin* "a rischio" al fine di convalidare la precedente scelta.

Due cavi identici<sup>6</sup> sono stati utilizzati. Al fine di ridurre l'errore finale di misura si è adottata una strategia che non dovesse considerare la lunghezza e l'attenuazione degli stessi.

Il segnale uscente dal generatore è stato *settato* ad un Volt, e con il primo di questi cavi è stato iniettato direttamente nell'oscilloscopio, dove è stato misurato. Successivamente, usando il secondo cavo tagliato a metà<sup>7</sup> e saldato volta per volta su diversi PIN, è stata interposta la *motherboard* tra il generatore e l'oscilloscopio. La differenza tra le ampiezze forniva quindi l'attenuazione netta, misurata in mV.

Il primo PIN, considerato sarà denominato PIN<sub>sx</sub>, e coinciderà con il canale di trasmissione più lungo (quello a sinistra in alto nella figura 3.9). Questa informazione è stata fornita dal programma CAD con cui è stata progettata la scheda.

Il secondo PIN (PIN<sub>dx</sub>) sarà lo *specchiato* del precedente, cioè lo stesso su cui sono state effettuate le misure di *crosstalk* esposte nei precedenti paragrafi.

In tabella 3.6 sono riportate le misure ed i risultati. L'errore sulle tensioni è stato valutato come significativo sull'ultima cifra che rimaneva stabile sulla misura fornita dall'oscilloscopio come mostrato in figura 3.18.

---

<sup>6</sup>stessa lunghezza, fornita dal costruttore.

<sup>7</sup>una parte collegava il generatore al circuito kapton, l'altra quest'ultimo con l'oscilloscopio

Segnale iniettato (V)	1,0018±0,0001
PINsx	PINdx
Segnale attenuato (mV)	
981,5±0,1	988,1±0,1
Attenuazione (mV)	
20,3±0,1	13,7±0,1
Attenuazione (%)	
2,03	1,37

**Tabella 3.6:** Misure di attenuazione scheda. Entrambi i PIN considerati sono quelli rispettivamente a sinistra e a destra in alto.

# Conclusioni ed Osservazioni

In questa tesi sono riportate le misure dell'analisi di *crosstalk* ed attenuazione di un circuito di trasmissione dei segnali, destinato a far parte del sistema di presa dati dell'esperimento DarkSide-20K, il cui obiettivo ultimo è la rivelazione diretta della materia oscura.

Il circuito presenta un'attenuazione (misurata sul canale di trasmissione soggetto ad un maggiore *crosstalk*) molto ridotta, circa del 2%, risultato in linea con quanto atteso vista la lunghezza modesta delle linee.

Anche la misura dell'impedenza differenziale è soddisfacente, poiché su un valore atteso di circa  $100 \Omega$  si è ottenuto  $Z_{diff} = 105,0 \pm 2,0 \Omega$ .

Per quanto riguarda la misura del *crosstalk* tra linee di trasmissione adiacenti (linea doppia attiva) si è ottenuto un valore del 18 % del segnale iniettato sulla scheda nel caso di un'ampiezza di 3V ed un fronte di salita di 150 ps.

Il *crosstalk*, essendo un effetto induttivo, è fortemente dipendente dai tempi di salita del segnale. Nelle misure effettuate in questa tesi, la scheda è stata sottoposta a condizioni ben peggiori di quelle operative per cui è stata progettata e dunque potrebbe risultare adeguata con pochi accorgimenti, tra cui un'ottimizzazione delle dimensioni e *layout* delle piste.

Le prove effettuate su questo prototipo del circuito di trasmissione serviranno come punto di partenza per future ottimizzazioni da implementare nelle versioni successive.

# Appendices

# Appendice A

## Dimostrazioni Primo Capitolo

### A.1 Metrica FRW

Poiché la condizione di isotropia (su grandi scale) è equivalente a  $g_{0i} = g_{i0} \equiv 0$ , la metrica è data da

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \underbrace{c^2 dt^2}_{= d(c^2 t^2)} - g_{ij} dx^i dx^j = dw^2 - dl^2, \quad (\text{A.1})$$

$= dw^2$   
 $= (dx^0)^2$

e passando in coordinate polari sferiche (k=1)  $(x^1, x^2, x^3) \mapsto (\rho, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} x^1 &= \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ x^2 &= \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ x^3 &= \rho \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$dx^i dx^i = dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 + dw^2 \quad (\text{A.3})$$

con  $\Omega$  definito come nell'equazione 1.2.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + w^2 = \rho^2 + w^2 = a^2 \quad (\text{A.4})$$

$a$  è in generale una funzione del tempo, tuttavia si assume che vari lentamente rispetto ad esso, quindi

$$\rho d\rho + w dw = 0, \quad (\text{A.5})$$

pertanto

$$dw^2 = \frac{1}{w^2} (\rho^2 d\rho^2) = \frac{1}{a^2 - \rho^2} (\rho^2 d\rho^2). \quad (\text{A.6})$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 dl^2 &= \frac{\rho^2 d\rho^2}{a^2 - \rho^2} + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 \\
 &= \rho^2 d\Omega^2 + d\rho^2 \left( \frac{\rho^2}{a^2 - \rho^2} + 1 \right) \\
 &= a^2 \left( \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 d\Omega^2 + d\rho^2 \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Definendo  $r = \rho/a$  si ha infine la 1.2 per  $k=1$ .

$$\begin{aligned}
 dl^2 &= a^2 \left( r^2 d\Omega^2 + (adr + rda)^2 \left( \frac{1}{1 - r^2} \right) \right) \\
 &\simeq a^2 \left( r^2 d\Omega^2 + (adr)^2 \left( \frac{1}{1 - r^2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Analogamente si ottengono le versioni per  $k=0,-1$ .

Per isolare  $a(t)$  si fa la seguente sostituzione

$$r = \begin{cases} a(t)\sin\chi, & k = 1 \\ a(t)\chi, & k = 0 \\ a(t)\cos\chi, & k = -1 \end{cases}, \tag{A.9}$$

da cui

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2) \tag{A.10}$$

con

$$\Sigma(\chi) = \begin{cases} \sin\chi \approx \chi, & k = 1 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh\chi \approx \chi, & k = -1 \end{cases} \tag{A.11}$$

dove le approssimazioni valgono per piccoli valori di  $\chi$ .

## A.2 Equazioni di Friedmann

Per un fluido perfetto comovente si ha

$$u^t = 1 = u_t, \quad u^i = -u_i \tag{A.12}$$

e visto che  $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ , l'equazione di Einstein 1.1 diventa

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = 8\pi G_N T_{\nu}^{\mu}. \quad (\text{A.13})$$

Contraendo gli indici si ottiene

$$-R = 8\pi G_N T, \quad (\text{A.14})$$

risultato che consente di riscrivere l'equazione 1.1 nella forma

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\mu} = T &= -(\rho + p) + 4p = -\rho + 3p, \\ R_{\nu}^{\mu} &= 8\pi G_N \left( T_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}T \right) \\ &= 8\pi G_N \left( (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + \frac{1}{2}(\rho - p)\delta_{\nu}^{\mu} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Il calcolo diretto dell'equazione precedente porta a

$$\begin{aligned} R_0^0 &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_i^0 &= 0, \\ R_j^i &= \frac{\delta_j^i}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Sostituendo nell'equazione di Einstein si ottengono le equazioni di Friedmann 1.3 e 1.4.

### A.3 Teorema del Viriale

Se un sistema fisico è descritto da un potenziale omogeneo di grado  $n$  sulle coordinate ( $V(\lambda\vec{q}) = \lambda^n V(\vec{q})$ ) e se  $\|\vec{q}\|^2$  è superiormente limitato, si può sempre trovare una relazione tra le medie temporali delle energie cinetica  $T$  e potenziale  $U$  [14].

L'energia cinetica è una funzione quadratica delle  $\dot{q}_i$ , quindi vale

$$2T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i p_i \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i q_i \right) - \sum_i q_i \dot{p}_i. \quad (\text{A.17})$$

Per una funzione  $f$ , per la quale vale una relazione del tipo

$$f(t) = \frac{dF}{dt}(t)$$

si ha che se  $F(t)$  è limitata, il valore medio di  $f(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  è nullo, infatti

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dF = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t) - F(0)}{t} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Quindi, se  $\sum pq$  è limitata e  $\dot{p}_i + \partial U / \partial q_i = 0$ ,

$$\begin{aligned} 2\langle T \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \underbrace{\int_0^t \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i q_i \right) dt}_{\text{nullo al limite}} - \int_0^t \sum_i (q_i \dot{p}_i) dt \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_i \left( q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dt = \sum_i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} dt \\ &= \sum_i \left\langle q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \right\rangle = \sum_i \left\langle q_i \frac{\partial}{\partial q_i} (\alpha q_i^n) \right\rangle \\ &= n \langle U \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

che è la tesi da dimostrare.

# Appendice B

## Sviluppo Teorico Linee di Trasmissione

### B.1 Trasformata di Steinmetz

Se  $f(t)$  è una funzione nulla agli estremi e definita sull'insieme  $D = [-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$  (magari periodica di frequenza angolare  $\omega$ ), si definisce la *trasformata integrale di Steinmetz* come

$$\mathfrak{s}\{f\}(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_D dt f(t) e^{-i\omega t}. \quad (\text{B.1})$$

Questa trasformata è lineare e ammette inversa

$$\mathfrak{s}^{-1}\{f\}(t) = \Re\{f(\omega) e^{i\omega t}\}. \quad (\text{B.2})$$

Vale inoltre la proprietà

$$\mathfrak{s}\left\{\frac{df}{dt}\right\}(\omega) = i\omega \mathfrak{s}\{f\}(\omega), \quad (\text{B.3})$$

infatti, integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_D dt \frac{d}{dt} f(t) e^{-i\omega t} &= f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} + i\omega \int_D dt f(t) e^{-i\omega t} \\ &= i\pi \mathfrak{s}\{f\}(\omega), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

che prova la tesi, la quale consente di ricavare facilmente la trasformata  $\mathfrak{s}$  per la funzione

$$F(t) = \int_0^t ds f(s).$$

$$\mathfrak{s}\left\{\frac{dF}{dt}\right\}(\omega) = \mathfrak{s}\{f\}(\omega) = i\omega \mathfrak{s}\{F\}(\omega) = i\omega \mathfrak{s}\left\{\int_0^t ds f(s)\right\}(\omega), \quad (\text{B.5})$$

da cui

$$\mathfrak{F}\left\{\int_0^t ds f(s)\right\}(\omega) = -\frac{i}{\omega}\mathfrak{F}\{f\}(\omega). \quad (\text{B.6})$$

La trasformata  $\mathfrak{F}$  trova applicazione nello studio dei circuiti in corrente alternata e nella risoluzione di particolari equazioni integro-differenziali, infatti, usando la notazione  $\mathfrak{F}\{V\} = \mathbf{V}$  per le trasformate di tensione e corrente, nel caso di capacitori ed induttanze si ha, rispettivamente

$$\begin{array}{l} \text{Leggi di Ohm} \\ \text{Generalizzate} \end{array} \begin{cases} I(t) = C\dot{V}(t) \rightarrow \mathbf{I} = i\omega C\mathbf{V} = Z_c^{-1}\mathbf{V} \\ V(t) = L\dot{I}(t) \rightarrow \mathbf{V} = i\omega L\mathbf{I} = Z_l\mathbf{I} \end{cases}$$

che riduce il problema ad una serie di equazioni polinomiali nel caso in cui le variabili trasformate siano in *quadratura*, quindi alla reiterazione delle *leggi di Ohm generalizzate*, dove le "Z" sono dette *impedenze*.

Essendo  $\mathfrak{F}$  lineare, il problema circuitale (di tipo RLC) sarà risolto come se tutti i componenti (generatori esclusi) fossero resistori di impedenza R,  $Z_c$  o  $Z_l$ .

Il processo terminerà con l'applicazione di  $\mathfrak{F}^{-1}$  alla soluzione trovata sul dominio  $\omega$ .

## B.2 Equazioni Telegrafiche

Le considerazioni fatte nei paragrafi a seguire saranno valide sotto le seguenti condizioni:

- (i) il canale di trasmissione è spazialmente e temporalmente omogeneo, quindi

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial t} = 0; \quad (\text{B.7})$$

- (ii) la topologia del canale non cambia, quindi se ad esempio la sezione di questo è circolare, rimane tale dall'inizio alla fine.

### B.2.1 Mezzo Non Dissipativo

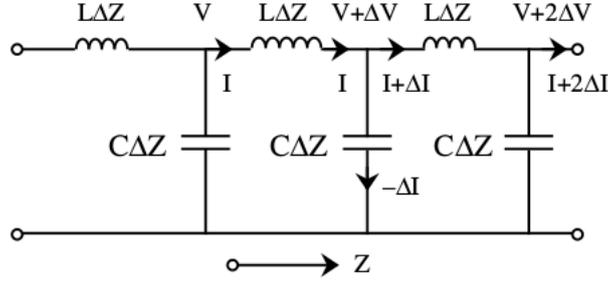
È possibile ottenere un modello del canale di trasmissione che non tenga conto delle dissipazioni. Un esempio è rappresentato in figura B.1.

Le relazioni tra tensione e corrente sono date, in questo caso, da

$$\Delta V = -L\Delta z \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \Delta I = -C\Delta z \frac{\partial}{\partial t}(V + \Delta V) \simeq -C\Delta z \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (\text{B.8})$$

con  $L$  e  $C$  induttanza e capacità per unità di lunghezza rispettivamente, che nel limite  $\Delta z \rightarrow 0$  diventano

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (\text{B.9})$$



**Figura B.1:** Modello non dissipativo.

Queste ultime vengono dette *equazioni telegrafiche* [15] e possono essere usate per ricavare l'equazione d'onda del segnale, infatti

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial I}{\partial t} = -C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{L} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(z, t) = 0.$$

Con passaggi analoghi si ottiene

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) I(z, t) = 0, \quad (\text{B.10})$$

la quale ci dà informazioni sulla velocità di propagazione  $v_p$ , che come già accennato sarà uguale a  $1/\sqrt{LC}$ .

Le soluzioni per tensione e corrente saranno quindi nella forma

$$V(z, t) = f(z - vt) \quad I(z, t) = \frac{1}{Z_0} f(z - vt), \quad (\text{B.11})$$

dove  $Z_0$  è l'impedenza intrinseca del canale.

Inoltre, se si sostituisce la prima delle equazioni B.11 nelle B.9 si ottiene

$$I(z, t) = \frac{1}{Lv} f(z - vt), \quad (\text{B.12})$$

da cui

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{B.13})$$

## B.2.2 Mezzo Dissipativo

In questo caso, invece, le equazioni telegrafiche diventano

$$\frac{d\mathbf{V}}{dz} = -i\omega L\mathbf{I}, \quad \frac{d\mathbf{I}}{dz} = -i\omega C\mathbf{V}. \quad (\text{B.14})$$

Dette quindi  $Z$  e  $Y$  impedenza ed ammettenza dell'unità di lunghezza si ha

$$Z = i\omega L + R, \quad Y = i\omega C + G, \quad (\text{B.15})$$

con  $R$  e  $G$  resistenza e conduttanza. Le B.14 diventano, insieme alle equazioni d'onda

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}}{dz} = -Z\mathbf{I} \\ \frac{d\mathbf{I}}{dz} = -Y\mathbf{V} \end{cases} \quad \begin{cases} \left( \frac{d^2}{dz^2} - ZY \right) \mathbf{V}(z, t) = 0 \\ \left( \frac{d^2}{dz^2} - ZY \right) \mathbf{I}(z, t) = 0 \end{cases} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}. \quad (\text{B.16})$$

### B.2.3 Coefficiente di Riflessione

Detto  $\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(i\omega L + R)(i\omega C + G)} = \alpha + i\beta$  si riscrivono le B.16 nella forma

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right) \mathbf{V}(z, t) = 0 \\ \left( \frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right) \mathbf{I}(z, t) = 0 \end{cases}, \quad (\text{B.17})$$

cioè delle equazioni agli autovalori per la derivata seconda rispetto a  $z$ , che ammettono soluzione generale per la tensione

$$\mathbf{V} = V_+ e^{-\gamma z} + V_- e^{\gamma z}. \quad (\text{B.18})$$

$\alpha$  e  $\beta$  sono dette rispettivamente costante di attenuazione (db/m) e di fase.

Se  $V_+ = |V_+|e^{i\phi_+}$  e  $V_- = |V_-|e^{i\phi_-}$  l'applicazione di  $\mathfrak{R}^{-1}$  porta a

$$\begin{aligned} V(z, t) &= \mathfrak{R}\{ \mathbf{V} e^{i\omega t} \} \\ &= |V_+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_+) + |V_-| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi_-). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Il primo termine nel membro destro dell'ultima equazione rappresenta il segnale, mentre il secondo la parte riflessa.

Si noti che se  $G = R = 0 \rightarrow \alpha = 0$  e ci si riconduce al modello non dissipativo.

In tal caso la B.18 diventa

$$\mathbf{V} = V_+ e^{-\beta z} + V_- e^{\beta z}, \quad (\text{B.20})$$

mentre per la corrente si ha

$$\mathbf{I} = \frac{V_+}{Z_0} e^{-\beta z} + \frac{V_-}{Z_0} e^{\beta z}, \quad (\text{B.21})$$

con  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  e  $\beta = \omega\sqrt{LC}$ .

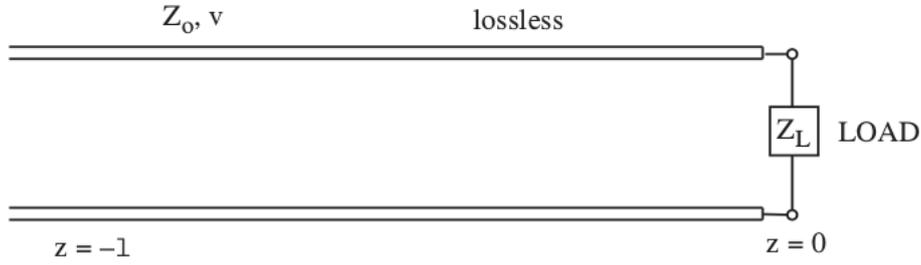


Figura B.2

Detto quindi  $Z_L$  il carico al quale la linea di trasmissione è collegata (come in figura B.2), in  $z = 0$  si ha

$$\frac{\mathbf{V}(z=0)}{\mathbf{I}(z=0)} = Z_L = \frac{V_+ + V_-}{V_+ - V_-} Z_0 \quad V_- = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_+ = \rho_V V_+. \quad (\text{B.22})$$

A questo punto

$$\mathbf{V} = V_+ (e^{-\beta z} + \rho_V e^{\beta z}), \quad (\text{B.23})$$

con  $\rho_V$  *coefficiente di riflessione* della tensione ( $0 \leq |\rho_V| \leq 1$ ).

Ragionamenti del tutto analoghi portano alla definizione del *coefficiente di riflessione* della corrente

$$\rho_I = \frac{I_-}{I_+} = -\frac{V_-}{V_+} = -\rho_V. \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_+}{Z_0} (e^{-\beta z} - \rho_V e^{\beta z}), \quad (\text{B.25})$$

#### B.2.4 Impedenza e Coefficiente di Riflessione Generalizzati

Poiché tensione e corrente dipendono generalmente da  $z$  e da  $t$  (o da  $z$  nel caso delle loro trasformate) si definisce l'*impedenza generalizzata*

$$Z(z) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = Z_0 \frac{e^{-i\beta z} + \rho_V e^{i\beta z}}{e^{-i\beta z} - \rho_V e^{i\beta z}} \quad (\text{B.26})$$

che a  $z = -l$  (come in figura B.2) diventa

$$Z(-l) = Z_0 \frac{e^{i\beta l} + \rho_V e^{-i\beta l}}{e^{i\beta l} - \rho_V e^{-i\beta l}} \stackrel{(\text{B.22})}{=} Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + iZ_L \tan(\beta l)}, \quad (\text{B.27})$$

$$Z_L = \begin{cases} 0, & \text{cortocircuitato} \\ \infty, & \text{circuito aperto} \end{cases} \implies Z(-l) = \begin{cases} iZ_0 \tan(\beta l) \\ -iZ_0 \cot(\beta l) \end{cases}, \quad (\text{B.28})$$

e il *coefficiente di riflessione generalizzato*

$$\Gamma(z) = \frac{\rho_V V_+ e^{i\beta z}}{V_+ e^{-i\beta z}} = \rho_V e^{2i\beta z}, \quad (\text{B.29})$$

da cui

$$V(z) = V_+ e^{-i\beta z} (1 + \Gamma(z)) \implies |V(z)| = |V_+| |1 + \Gamma(z)|. \quad (\text{B.30})$$

Dalla disuguaglianza triangolare e dalla B.29 segue che

$$\begin{aligned} |V_+|(1 - |\Gamma|) &\leq |V| \leq |V_+|(1 + |\Gamma|), & |\Gamma| &\stackrel{(\text{B.29})}{=} |\rho_V|, \\ |V_+|(1 - |\rho_V|) &\leq |V| \leq |V_+|(1 + |\rho_V|). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Si definisce il parametro *Voltage Standing Wave Ratio* (VSWR) come  $V_{max}/V_{min}$ , e vista la B.31 si può scrivere

$$\begin{cases} \text{VSWR} = \frac{V_{max}}{V_{min}} \stackrel{(\text{B.31})}{=} \frac{(1 + |\rho_V|)}{(1 - |\rho_V|)} & \implies 1 \leq \text{VSWR} \leq \infty \\ 0 \leq |\rho_V| \leq 1 \end{cases}$$

$$|\rho_V| = \begin{cases} 0, & \text{VSWR} = 1 \text{ nessuna onda riflessa e } Z_L \stackrel{(\text{B.22})}{=} Z_0 \\ 1, & \text{VSWR} = \infty \end{cases}$$

VSWR è una grandezza adimensionale e misurabile<sup>1</sup>, quindi usando anche la B.22, per la quale  $Z_L = Z_0$  se VSWR è minimizzata, è possibile determinare sperimentalmente il carico da applicare alla linea di trasmissione per marginare i fenomeni di riflessione, condizione desiderabile nella quasi totalità dei contesti.

## B.2.5 Coefficiente di Trasmissione

Si menziona a questo punto l'esistenza del *coefficiente di trasmissione* (in contrapposizione a quello di riflessione), sebbene non sia fondamentale ai fini di una trattazione generale del problema. Valutando l'equazione B.23 in  $z = 0$  si ha

$$V(z = 0) = V_+(1 + \rho_V), \quad (\text{B.32})$$

e poiché l'ampiezza del segnale incidente è  $V_+$  si definisce il coefficiente di trasmissione  $\tau_V$  come

$$\tau_V = \frac{V(z = 0)}{V_+} = 1 + \rho_V \stackrel{(\text{B.22})}{=} \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0} \quad (\text{B.33})$$

$$0 \leq |\tau_V - 1| \leq 1 \implies 0 \leq |\tau_V| \leq 2 \quad (\text{B.34})$$

<sup>1</sup>misurabile tramite tecniche FDR, come spiegato nel § 3.2.2

### B.3 Skin Effect

Se la resistenza elettrica ( $\Omega$ ) è la grandezza fisica propria di un oggetto che si *oppon*e al passaggio di corrente continua (DC), l'induttanza (H) *ostacola* il passaggio di corrente alternata. In tali circostanze (AC), nel caso di elevate frequenze, la *densità* di corrente è concentrata sulla superficie del conduttore. Tale fenomeno è detto *effetto pelle* (*skin effect*) ed è causato dall'induttanza intrinseca del canale di trasmissione, *sentita* maggiormente all'interno dello stesso rispetto alle zone periferiche.

L'*effetto pelle* risulta più pronunciato, a parità di conduttività, per conduttori ferromagnetici, ad esempio, per il *ferro* attraversato da una corrente alternata a 60 Hz la *profondità di penetrazione*<sup>2</sup> è circa 0,5 mm.

È utile scrivere le equazioni di Maxwell usando i risultati del § B.1.

$$\begin{aligned} H = \mathfrak{s}^{-1}\{\mathbf{H}\} &= \Re\{\mathbf{H}e^{i\omega t}\} & \Re\{\nabla \times \mathbf{H}e^{i\omega t}\} &= \Re\left\{\frac{\partial}{\partial t}\epsilon\mathbf{E}e^{i\omega t}\right\} \\ E = \mathfrak{s}^{-1}\{\mathbf{E}\} &= \Re\{\mathbf{E}e^{i\omega t}\} & \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega\epsilon\mathbf{E} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si ottengono

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \end{aligned}$$

Applicando il rotore alla seconda delle equazioni di Maxwell scritte e sostituendo il risultato nella prima si ottiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} \implies \nabla^2\mathbf{E} = -\omega^2\mu\epsilon\mathbf{E}. \quad (\text{B.35})$$

Allo stesso modo

$$\nabla^2\mathbf{H} = -\omega^2\mu\epsilon\mathbf{H}. \quad (\text{B.36})$$

Le ultime due sono le *equazioni d'onda di Helmholtz*.

In un mezzo dissipativo, dove  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$  è la corrente indotta, si ha

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} = i\omega \underbrace{(\epsilon - i\sigma/\omega)}_{\text{permittività complessa}} \mathbf{E} = i\omega\epsilon'\mathbf{E}, \quad (\text{B.37})$$

in tal caso le equazioni B.35 e B.36 diventano

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{E} &= -\omega^2\mu\epsilon'\mathbf{E} \\ \nabla^2\mathbf{H} &= -\omega^2\mu\epsilon'\mathbf{H} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

---

<sup>2</sup>cioè la lunghezza caratteristica della parte della sezione del canale interessata dal passaggio di maggior corrente

che, nel caso d'interesse monodimensionale, ammettono soluzione

$$\mathbf{E}(z) = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z}, \quad (\text{B.39})$$

con  $\gamma$ <sup>3</sup> definito dalla relazione

$$\gamma = i\omega\sqrt{\mu\epsilon'} = \alpha + i\beta, \quad (\text{B.40})$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono le stesse costanti di attenuazione e di fase definite nei paragrafi precedenti.

Assumendo per semplicità di calcolo  $C_2 = 0$ , la soluzione diventa

$$E(z, t) = |C_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi), \quad C_1 = |C_1| e^{i\phi}. \quad (\text{B.41})$$

che è un'onda la cui velocità di propagazione è  $v_p = \omega/\beta$ .

Essendo la quantità  $\sigma/\omega\epsilon$  il rapporto tra le correnti di conduzione e di spostamento si devono distinguere due casi.

$$1 \gg \sigma/\omega\epsilon$$

Il materiale che costituisce la linea di trasmissione si comporta come un dielettrico e non è quindi il caso d'interesse.

$$1 \ll \sigma/\omega\epsilon$$

Il materiale è un conduttore e poiché

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha + i\beta &= i\omega\sqrt{\mu(\epsilon - i\sigma/\omega)} = i\omega\sqrt{\mu\epsilon(1 - i\sigma/\omega\epsilon)} \\ &\stackrel{1 \ll \sigma/\omega\epsilon}{\simeq} i\omega\sqrt{-i\mu\sigma/\omega} = \sqrt{i\omega\mu\sigma} = \sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\sqrt{\omega\mu\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

si ha

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}. \quad (\text{B.43})$$

La quantità  $\delta$  così definita prende il nome di *costante di profondità di penetrazione* o *skin depth*, e permette di riscrivere la B.41 in una forma più conveniente.

$$E(z, t) = |C_1| e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \phi). \quad (\text{B.44})$$

Si noti che nello stesso mezzo conduttore

$$\delta \propto \omega^{-\frac{1}{2}},$$

---

<sup>3</sup>chiamato talvolta *costante di propagazione*

Rame	
Resistività ( $\mu\Omega \cdot cm$ )	Permeabilità relativa
1,678	0,99999
Frequenze (GHz)	<i>Skin Depth</i> ( $\mu m$ )
0,001	65,2
0,01	10,6
0,1	6,52
1	2,06
10	0,652
100	0,206

**Tabella B.1:** Dipendenza di  $\delta$  da  $\nu = \omega/2\pi$  a diversi ordini di grandezza della frequenza misurata in GHz per il rame. In basso sono *graficati* i valori di  $E(z)$  a  $t=0$  variando  $\delta$ .

fatto che giustifica quanto affermato all'inizio di questo paragrafo, infatti nell'equazione B.44 il termine dominante ( $z \rightarrow \infty$ ) è quello esponenziale.

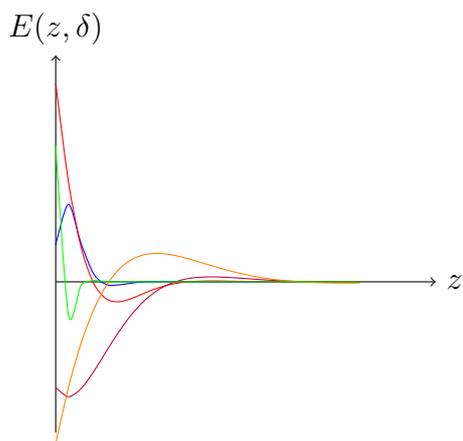
$$\cos(z) = o(e^{-z}), \quad z \gg 1. \quad (\text{B.45})$$

In pratica, lo *skin effect* riduce efficacemente la sezione trasversale del canale, aumentandone di fatto la resistenza al passaggio di corrente nel caso di elevate frequenze angolari.

Il fenomeno è matematicamente analogo a quello del *riscaldamento periodico del semispazio*, dove quest'ultimo viene messo a contatto diretto con una fonte termica non costante il cui andamento temporale è di tipo sinusoidale. Ad esempio, l'alternarsi del giorno e della notte ha un effetto molto diverso in termini di profondità di penetrazione, sulle temperature del sottosuolo rispetto a quello causato dal cambiamento stagionale, che raggiunge

profondità molto più elevate essendo la frequenza molto minore[19].

L'intuizione può essere aiutata dal confronto delle differenti definizioni del parametro  $\delta$  nei diversi casi



$$\delta = \omega^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma}}, \quad \delta_{risc} = \omega^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2D}. \quad (\text{B.46})$$

Qui  $D$  è la *diffusività termica*, definita dalla relazione  $D = k/\rho c_p$ , dove  $k$  è la conducibilità termica.

Se per la superficie terrestre  $D \simeq 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , una variazione diurna, dove la frequenza angolare è  $\omega \simeq 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$  è caratterizzata da una *skin depth*  $\delta_{risc} \simeq 0,17 \text{ m}$ , mentre per quelle annuali ( $\omega \simeq 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$ ) si ha  $\delta_{risc} \simeq 3,2 \text{ m}$ .

# Bibliografia

- [1] Roberto Casadio *Elements of Relativity* (Lecture Notes), 2015
- [2] Marco Roncadelli *Aspetti Astrofisici della Materia Oscura*. BIBLIOPOLIS 2014.
- [3] S. Bonometto, J.R. Primack, A. Provenzale *Dark Matter in the Universe*. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXXXII, Società Italiana di Fisica 1995.
- [4] S. Davini, P. Agnes, L. Agostino, I.F.M. Albuquerque, T. Alexander, A.K. Alton, K. Arisaka, H. O. Back, B. Baldin, K. Biery *The DarkSide awakens* 2016  
<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/718/4/042016?fromSearchPage=true>
- [5] *Collaborative Research: DarkSide-20K*
- [6] Sean Carrol *Lecture Notes on General Relativity* 1997 **arXiv:grqc/9712019**
- [7] Stefano Mari, Maria Bossa *Studio della rivelazione di materia oscura mediante apparati criogenici per la rivelazione diretta: l'esperimento DarkSide* 2012
- [8] Bernard Schutz *A First Course in GENERAL RELATIVITY*
- [9] Laura Baudis *Dark Matter Lecture 2: Principles of direct WIMP detection* Universität Zürich, 2012 Dark matter lectures
- [10] Jacob Millman, Christos Halkias *Integrated Electronics*
- [11] Johannes Schumacher, Thomas Hebbeker *Characterization Studies of Silicon Photomultipliers: Noise and Relative Photon Detection Efficiency* 2011
- [12] N. Canci, C. Cattadori, 2013 JINST 8 C10007
- [13] Debasish Majumdar *DARK MATTER, An Introduction*
- [14] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšits *Fisica Teorica 1*

- [15] W.C.Chew *ECE 350 Lecture Notes*
- [16] Cynthia Furse, You Chung Chung, Chet Lo, Praveen Pendayala *A critical comparison of reflectometry methods for location of wiring faults*, 2006
- [17] Gary Breed *Analyzing Signals Using the Eye Diagram*, 2005
- [18] Tzong-Lin Wu *Crosstalk*, National Taiwan University, Dept. of Electrical Engineering
- [19] Maurizio Bonafede *Fisica del Sistema Terra (Appunti)*, 2014
- [20] O. Adriani et al., *Nature* 458, 607 (2009)