

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## **Torsione nello spaziotempo e teoria di Einstein-Cartan**

**Relatore:**  
**Prof./Dott.**  
**Alexandr Kamenchtchik**

**Presentata da:**  
**Angelo Cosentino**

Anno Accademico 2016/2017

*A mamma e papà  
che hanno permesso tutto questo.  
Alle mie sorelle e a mia nipote  
che mi hanno sopportato.*

## Sommario

Lo scopo primario del presente lavoro è quello di conferire allo spazio fisico una nuova proprietà geometrica: la torsione. La mia idea per presentare gli argomenti trattati è quella di tentare di proseguire il lavoro di Albert Einstein della teoria della relatività generale ed estendere i suoi principi geometrici anche al mondo microscopico. Sfrutterò quindi appieno la sua geometrizzazione della teoria della gravitazione universale e mostrerò come aggiungere a quest'ultima la presenza del tensore di torsione rappresenti solo una leggera modifica alla teoria che nella forma rimane analoga a quella originale. Ciò da cui si discosta è certamente il contenuto; la torsione, che inizialmente è considerata una proprietà geometrica aggiuntiva dello spaziotempo sarà quanto prima caratterizzata fisicamente attraverso il legame con una proprietà quantomeccanica intrinseca della materia: lo spin.

Questo è ciò che conferisce forza e interesse alla teoria di Einstein-Cartan. Studiare la Meccanica Quantistica e la Relatività Generale lascia senza dubbio una sensazione di disorientamento. Entrambe le teorie rappresentano due monumenti dedicati all'intelletto umano ma appare chiaro che ci descrivano un mondo macroscopico e uno microscopico separati sul nascere e senza apparenti legami. La relatività di Einstein si manifesta curvando lo spaziotempo altrimenti piatto e rappresenta una teoria prettamente macroscopica. Nel mondo microscopico invece si descrivono le interazioni secondo le teorie di campo quantizzato che descrivono ogni costituente elementare della materia come un campo immerso all'interno dello spaziotempo piatto di Minkowski.

Unire questi due mondi rappresenta uno scopo primario per quella moltitudine di fisici che si sente scontentata da questa situazione precaria. Grazie a questa nuova proprietà geometrica si può effettuare un primo passo in avanti, verso una teoria unificata. Infatti introdurre la torsione vuole significare applicare la relatività generale al mondo microscopico e non c'è modo migliore di farlo se non quello di considerare, assieme alla massa, lo spin dei costituenti elementari.

Per raggiungere i miei scopi presenterò un capitolo introduttivo in cui verrà ripercorso il cammino che ha portato Einstein alla teoria della relatività generale in modo qualitativo poiché la mia attenzione riguarderà l'evoluzione della struttura geometrica dello spazio fisico.

Nel secondo capitolo proverò a motivare la necessità di proseguire ulteriormente quel cammino e studiare quindi la teoria di Einstein-Cartan.

Segue poi un capitolo di strumenti matematici, in particolare di geometria differenziale, necessari per poter studiare nel profondo la nuova geometria dello spaziotempo e la teoria nascente nel capitolo 4 in cui sono formulate le equazioni di campo necessarie per comprendere meglio ciò in cui ci stiamo addentrando. Per la loro formulazione sarà seguito un approccio di tipo variazionale.

Tali equazioni saranno poi discusse nel capitolo successivo in cui si vuole immediatamente mostrare come la teoria di Einstein-Cartan rappresenti una piccola modifica della teoria di Einstein seppur con predizioni nuove e interessanti. Nello stesso capitolo verrà stimato e discusso il dominio di validità dei risultati ottenuti e verranno presentati dei riferimenti in cui vengono discusse nel dettaglio altre importanti conseguenze della teoria, specialmente in ambito cosmologico.

Segue infine un capitolo conclusivo in cui si vuole ripercorrere quanto fatto e si vuole anche mostrare quanto ancora ci sia da fare.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Introduzione alla Relatività . . . . .	5
1.2	Da Spazio e Tempo a Spaziotempo metrico . . . . .	6
1.3	Teoria della Relatività Generale . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Lo Spaziotempo di Riemann-Cartan</b>	<b>13</b>
2.1	Perché una nuova teoria . . . . .	13
2.2	Spin e gravitazione . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Utilità di Geometria Differenziale</b>	<b>16</b>
3.1	Varietà differenziali . . . . .	16
3.1.1	Curve . . . . .	18
3.1.2	Funzioni . . . . .	18
3.1.3	Vettori e campi vettoriali . . . . .	19
3.1.4	Uno-forme . . . . .	21
3.1.5	Tensori e campi tensoriali . . . . .	22
3.2	Tensore metrico . . . . .	24
3.2.1	Forma canonica e base ortonormale . . . . .	25
3.3	Densità tensoriali . . . . .	27
3.4	P-forme . . . . .	28
3.5	Notazione astratta degli indici . . . . .	31
3.6	Derivata covariante . . . . .	31
3.7	Trasporto parallelo . . . . .	34
3.8	Curvatura . . . . .	36
3.8.1	Proprietà del tensore di Riemann . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Teoria <math>\mathcal{U}_4</math></b>	<b>40</b>
4.1	Geometria di Einstein-Cartan . . . . .	40
4.2	Equazioni di campo della teoria $U_4$ . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conseguenze della teoria <math>U_4</math></b>	<b>49</b>
5.1	Una nuova interazione di contatto . . . . .	49
5.2	Ulteriori conseguenze . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>52</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Introduzione alla Relatività

La Relatività Generale nasce dal desiderio dell'uomo di conoscere sempre meglio lo spazio in cui è ospitato e di estendere i propri confini; ogni manuale che ne tratti in modo approfondito offre la possibilità di effettuare viaggi interstellari, viaggi teorici naturalmente.

La teoria della Relatività Generale (d'ora in poi verrà chiamata solo GR dall'inglese General Relativity) è stata formulata da Albert Einstein nel primo quarto del '900. Grazie ad essa abbiamo una profonda revisione dei concetti di Spazio e Tempo e una nuova teoria della gravitazione che sorge direttamente da nuove proprietà geometriche del nostro Universo.

Nel corso dell'evoluzione scientifica geometria e fisica sono sempre rimaste intimamente legate, affrontando questo lavoro però il legame diviene sempre più illuminante fino a svelare in che modo la natura stessa operi.

Un primo importante passo in avanti è stato intrapreso con la teoria della Relatività Speciale, sempre di Einstein, in cui allo spazio Euclideo della meccanica newtoniana è stato sostituito lo spaziotempo di Minkowski, entrambi caratterizzati da una geometria piatta (euclidea) ma con metriche<sup>1</sup> differenti.

Dotando poi lo spaziotempo di Minkowski di una curvatura e di caratteristiche dinamiche giungiamo alla GR e ad allo spaziotempo di Riemann. In questo modo si delinea l'evoluzione geometrica del nostro spazio sottesa dall'intero lavoro di Einstein.

Spesso la GR richiama l'attenzione anche di persone esterne al mondo della fisica ma appare difficile e folle allo stesso tempo, da un lato spaventa il formalismo matematico adottato per scrivere le equazioni (geometria differenziale) e dall'altro penso che rifiutare il tutto sia senz'altro più semplice che digerire questi nuovi concetti e idee; affidandoci alla teoria di Einstein scopriamo infatti che i nostri concetti di spazio e di tempo derivanti dall'esperienza quotidiana siano solamente delle approssimazioni poiché abbiamo sempre a che fare con velocità molto più piccole rispetto a quella della luce, che gioca un ruolo cruciale nella teoria della relatività.

Proverò a semplificare il più possibile non essendo il tema centrale del presente lavoro e per farlo la mia idea è quella di sfruttare fin da subito la geometria per mostrare come utilizzare la fisica per caratterizzarla e come questa caratterizzazione sveli qualcosa di nuovo e profondo sul linguaggio della natura. In questo modo l'intero lavoro di Einstein è visto come una "semplice" evoluzione dello spazio fisico.

---

<sup>1</sup>Per il concetto di metrica si rimanda al capitolo 3 dedicato alle nozioni essenziali di geometria differenziale, per il momento basti sapere che è uno strumento matematico che ci permette di definire la nozione di lunghezza.

## 1.2 Da Spazio e Tempo a Spaziotempo metrico

Come anticipato nell'introduzione le difficoltà maggiori nella comprensione della teoria della relatività speciale e generale nascono dal fatto che un gran numero di nostre assunzioni sulla natura dello spazio e del tempo sono sbagliate o quantomeno approssimate. Penso che un approccio geometrico sia molto efficace possa servire a semplificare.

La geometria, brevemente, è una branca della matematica che si occupa di studiare le proprietà metriche delle figure geometriche. Anch'essa ha avuto nel corso della storia un grande sviluppo ma lo scopo fondamentale è rimasto quello di calcolare aree e volumi delle figure partendo da nozioni primarie quali la lunghezza di un segmento e l'angolo tra due linee che si incontrano in un dato punto; ciò che è cambiato nel corso della sua evoluzione è il metodo di studio come apparirà chiaro quando affronteremo la geometria differenziale. Andiamo per gradi, i concetti geometrici fondamentali sono [8]:

1. la geometria è costruita in uno *spazio* costituito da **punti**;
2. in tale spazio si introducono coordinate cartesiane  $x^1 \dots x^n$  tali che:
  - a punti distinti corrispondono coordinate diverse e con ciò, dati due punti  $P = (x^1, \dots, x^n)$  e  $Q = (y^1, \dots, y^n)$  qualsiasi, P e Q coincidono se e solo se  $x^i = y^i$  con  $i = 1, \dots, n$ ;
  - inversamente ad ogni collezione di coordinate corrisponde un solo punto dello spazio.

Uno spazio con coordinate cartesiane con le proprietà elencate è chiamato Spazio Cartesiano di dimensione  $n$  ed è identificato con  $\mathfrak{R}^n$ , dove  $n$  rappresenta la dimensione dello spazio.

Ad esempio identifichiamo con  $\mathfrak{R}^1$  la retta numerica reale, con  $\mathfrak{R}^2$  il piano (spazio bidimensionale) e con  $\mathfrak{R}^3$  lo spazio ordinario chiamato anche spazio Euclideo ( $\mathcal{E}^3$ ) per sottolineare che in esso si opera utilizzando la geometria euclidea ovvero la geometria elementare nota fin dalla scuola secondaria.

I due concetti geometrici fondamentali assumono un ruolo centrale anche nella descrizione di un fenomeno fisico ai quali se ne aggiunge subito un terzo; in ambito fisico sono chiamati rispettivamente:

1. oggetto;
2. osservatore, sistema di riferimento (s.d.r.)
3. legge di trasformazione.

Il terzo punto è utile per poter studiare lo stesso oggetto da un sistema di riferimento differente ed esprime l'*omogeneità* che, assieme all'*isotropia*, rappresenta una proprietà irrinunciabile del nostro spazio. Insieme ci dicono che le leggi fisiche non dipendono dal punto scelto come origine del nostro sistema né da una direzione specifica.

Geometricamente l'osservatore è proprio un sistema di riferimento cartesiano mentre fisicamente è un apparato di misura utilizzato per localizzare oggetti nello spazio. Sviluppo scientifico e progresso tecnologico sono andate di pari passo negli anni descrivendo in modo sempre più accurato l'oggetto e misurandone l'interazione con l'osservatore durante il processo di misura.

L'esperienza ci mostra che esistono s.d.r. detti inerziali in cui vale il Principio di Relatività che afferma che le leggi fisiche sono invarianti rispetto ad un cambiamento di s.d.r. inerziale. Così tali s.d.r. permettono di descrivere compiutamente il moto di oggetti non soggetti a forze esterne, per i quali vale allora la legge d'inerzia.

Vediamo ora come spazio e tempo intervengono nella meccanica classica; tenterò con una banale metafora.

Tutti siamo stati almeno una volta a teatro, c'è un palcoscenico su cui verrà allestito uno spettacolo e ci sono numerose poltrone su cui sedersi comodi per poterselo gustare. Le poltrone sono disposte in modo da occupare quasi la totalità della sala, a distanze e angolazioni diverse rispetto ad un punto qualsiasi del palco. Lo spettacolo è di certo lo stesso per tutti i presenti nel pubblico ma a seconda del posto a sedere trovato la nostra attenzione potrebbe essersi soffermata su alcuni particolari piuttosto che altri, della scenografia e degli attori, magari si è trovato posto così lontano che non si è riuscito a vedere e capire nulla o viceversa ci si ritiene fortunati e avvantaggiati nella comprensione della storia se si è trovato posto nelle poltrone delle prime file in posizione centrale rispetto al palcoscenico; a fine serata comunque tutti potranno discutere del medesimo spettacolo e saranno pressoché d'accordo sulla sua trama. Il palcoscenico è lo spazio, lo spettacolo è l'oggetto da studiare e su ognuna di quelle poltrone ha trovato posto un fisico classico che sedendosi ha fissato il proprio sistema di riferimento. E il tempo? Beh ignorando tutti i circa 14 Ga (Giga anni= $10^9$  anni) trascorsi dalla nascita dell'universo all'inizio dello spettacolo ognuno dei presenti concorderà sul fatto che lo spettacolo è durato un certo  $\Delta t$ , intervallo di tempo trovato sottraendo al tempo indicato sull'orologio a fine spettacolo l'orario del suo inizio; avere una diversa marca di orologio, un diverso fusorario o magari avere segnata proprio una diversa ora sul proprio quadrante non incide sul calcolo dell'intervallo temporale che rappresenta classicamente una grandezza assoluta, quindi indipendente dall'osservatore. Questa invarianza assume un ruolo cruciale per la simultaneità. Dato che tutti i sistemi di riferimento concordano sul valore di  $\Delta t$  se per un certo osservatore  $O$  si ha  $\Delta t = 0$ , ovvero i due eventi sono simultanei, avvengono nello stesso istante di tempo, ogni altro osservatore  $O'$  concorderà con il primo e troverà  $\Delta t' = 0$ . Quindi il carattere assoluto della simultaneità nella meccanica newtoniana nasce proprio dall'assolutezza dell'intervallo temporale che sottende anche la legge della conservazione dell'energia meccanica. Riassumendo, il tempo è visto come un grande orologio partito a contare i secondi subito dopo il Big Bang, una unica direzione in cui la porzione minima di tempo, l'istante, ha la stessa durata per tutti gli osservatori; geometricamente è un insieme ordinato di infiniti elementi, rappresentabile quindi con  $\mathfrak{R}^1$ . Lo spazio invece è proprio un palcoscenico in cui si inseriscono le particelle e prendono vita i fenomeni che studiamo; geometricamente lo rappresentiamo, come già anticipato, con  $\mathfrak{R}^3$  o  $\mathcal{E}^3$  ed è funzionale ai punti che lo occupano, senza punti perde quasi di utilità, così come un palcoscenico di un teatro chiuso. Classicamente un secondo invariante assoluto deriva proprio da proprietà dello spazio ed è rappresentata dalla distanza  $\Delta s^2 = \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2$  tra due punti  $P = (x^1, \dots, x^n)$  e  $Q = (y^1, \dots, y^n)$  chiamato intervallo spaziale o metrica euclidea.

Negli ultimi paragrafi ho già inserito la parola *evento* insieme a quella di punto e oggetto, questo perché è giunta l'ora di fornire un carattere relativistico al nostro spazio. Nel seguito non mi riferirò più allo spazio ( $\mathcal{E}^3$ ) e nemmeno al tempo ( $\mathfrak{R}^1$ ) ma allo spaziotempo di Minkowski ( $\mathcal{M}^4$ ), un continuo quadri-dimensionale nel quale lo spazio euclideo è rappresentato da una superficie di livello  $t = \text{costante}$ . In  $\mathcal{M}^4$  vale il Principio di Relatività Speciale di Einstein ottenuto aggiungendo al principio di relatività classico il postulato che  $|c|$  oltre ad essere il modulo della velocità di propagazione della luce nel vuoto è la velocità massima di trasmissione delle interazioni e rappresenta una costante universale. Il suo valore sperimentale è  $2.998 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$  e per questo la meccanica newtoniana, dove le velocità in gioco sono sempre molto più piccole rispetto a  $|c|$ , rappresenta sempre una ottima approssimazione (e allo stesso modo i concetti prerelativistici di spazio e tempo appaiono corretti).

Il nuovo principio di relatività segna il passaggio formale dalla meccanica newtoniana alla Relatività Speciale (SR), il passaggio limite inverso può essere effettuato facendo tendere  $c$  all'infinito,  $|c| \rightarrow \infty$ . Geometricamente abbiamo abbandonato l'oramai toppo elementare  $\mathcal{E}^3$  e siamo approdati in  $\mathcal{M}^4$ ; ignoriamo per il momento quest'ultimo e consideriamo invece  $\mathfrak{R}^4$ , spazio cartesiano a quattro dimensioni, ottenuto aggiungendo una nuova dimensione a  $\mathcal{E}^3$  per considerare anche la componente temporale. Ne

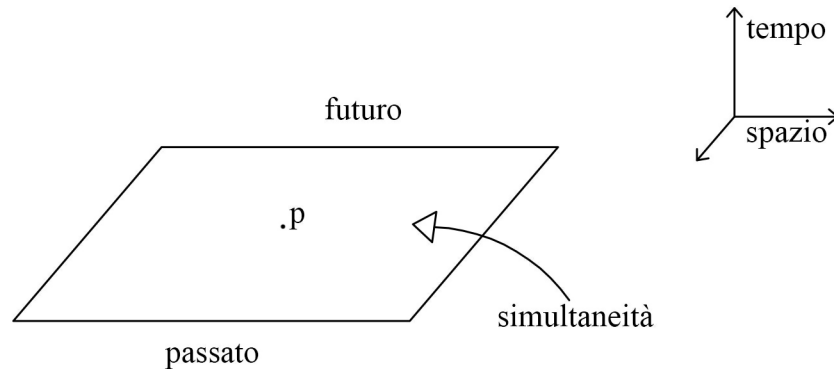


Figura 1.1: Struttura causale della fisica prerelativistica.

studieremo la struttura causale poiché è quella descritta della meccanica newtoniana e mostreremo in seguito cosa cambi imponendo la costanza di  $c$ . Manteniamo l'idea di un continuo spaziotemporale a quattro dimensioni costituito da eventi, dove ogni evento può essere visto come un punto spaziale ad un certo istante temporale e il processo di evoluzione temporale di un oggetto è descritto da una curva<sup>2</sup>  $x^\alpha(t)$  detta linea d'universo. Per identificare ciascun evento è necessario fornire quattro numeri, le sue coordinate cartesiane, chiamate per il momento  $t, x, y, z$  e per farlo è necessario un s.d.r. Dati due eventi distinti dello spaziotempo, diciamo  $p$  e  $q$ , possono presentarsi tre diverse circostanze

1. Per un osservatore o per un corpo materiale è possibile andare da  $p$  a  $q$ , quindi si dice che  $p$  è nel passato di  $q$ ;
2. è possibile andare da  $q$  e  $p$  e si dice allora che  $p$  è nel futuro di  $q$ ;
3. è possibile per un corpo materiale essere presente ad entrambi gli eventi  $p$  e  $q$ .

Nella fisica prerelativistica è assunto che gli eventi del terzo tipo formino uno spazio tridimensionale e definiscano geometricamente la simultaneità già discussa in precedenza. In questo modo si delinea la struttura causale in figura 1.1 in cui il nostro spaziotempo è descritto dall'evoluzione temporale di fogli tridimensionali di spazio  $\mathcal{E}^3$ .

Tale visione risulta errata. Introducendo nel nostro spazio i postulati della SR la simultaneità passa dall'essere una grandezza assoluta a dipendere strettamente dal moto dell'osservatore. La stessa cosa accade all'intervallo temporale e a quello spaziale che in SR perdono il carattere invariante rispetto ad un cambio di s.d.r. inerziale e subiscono deformazioni relativistiche dipendenti dalla velocità; una lunghezza in moto è vista accorciarsi se misurata in un s.d.r. a riposo mentre l'intervallo temporale appare dilatato rispetto al *tempo proprio* ovvero rispetto al tempo misurato dall'osservatore in moto.

Approdiamo ora in  $\mathcal{M}^4$  dove l'unico invariante assoluto è dato da una combinazione dei due, l'Intervallo spaziotemporale  $\mathbf{I}$  dato da

$$I = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (1.1)$$

che rappresenta la formulazione matematica dell'invarianza della velocità della luce. Possiamo riferirci a  $\mathbf{I}$  come metrica dello spaziotempo e dopo una prima occhiata può sembrare analoga alla metrica euclidea (piatta e definita positiva) ma per la presenza dei segni meno " - " si spezza subito l'analogia e geometricamente si passa da una metrica euclidea ad una pseudoeuclidea. Questa differenza di segno

<sup>2</sup>Per il concetto di curva si rimanda ancora una volta al capitolo 3.



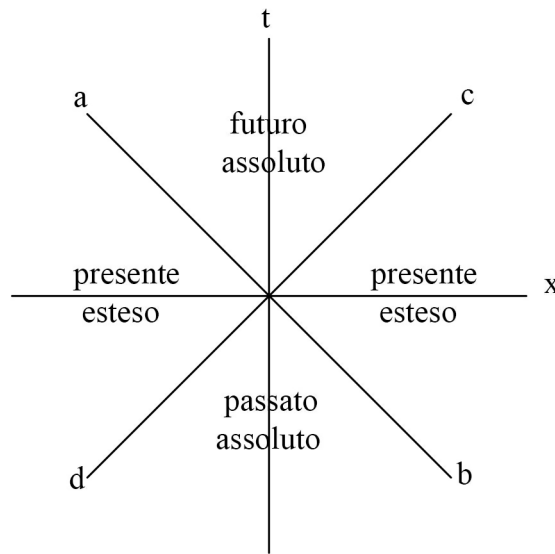


Figura 1.2: Struttura causale della fisica relativistica.

permette a  $I$  di essere maggiore o minore di zero o nullo specificando rispettivamente un intervallo di tipo tempo, spazio e luce.

Tale caratterizzazione risulta inoltre essere assoluta, indipendente dal s.d.r. adottato nello studio del fenomeno preso in considerazione e permette di identificare tre diverse regioni nello spaziotempo che ne definiscono la struttura causale mostrata in figura 1.2

Consideriamo un evento qualunque  $O$  come origine delle coordinate del sistema quadridimensionale di assi  $x, y, z$  e  $t$  anche se graficamente per fissare le idee consideriamo una sola componente spaziale e il tempo, posti su due assi ortogonali. Il moto rettilineo uniforme di una particella che si trova nel punto  $x = 0$  nel tempo  $t = 0$  è rappresentato da una retta passante per l'origine e formante con l'asse dei tempi un angolo la cui tangente è uguale al modulo della velocità della particella. La propagazione di segnali luminosi è rappresentata quindi dalle diagonali principali che sottendono l'angolo massimo con l'asse temporale e descrivono quindi graficamente la presenza di  $c$  come velocità massima. Quindi tutte le rette rappresentanti il moto di particelle materiali possono trovarsi solo all'interno delle regioni  $aOc$  e  $dOb$ . In tutti i punti della prima regione si ha  $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$ , e di conseguenza tutti gli intervalli tra un evento di questa regione e  $O$  saranno di tipo tempo e tutti gli eventi separati da un intervallo di tipo tempo non possono essere simultanei in alcun s.d.r.. In aggiunta essendo in questa regione  $t > 0$  tutti gli eventi di questa regione avvengono dopo  $O$  a prescindere dal s.d.r. scelto e per questo possiamo chiamare tale regione "futuro assoluto". In modo analogo chiameremo la regione  $dOb$  "passato assoluto" poiché tutti gli eventi di tale regione risultano precedenti rispetto ad  $O$  in ogni s.d.r.. Per quanto riguarda le regioni  $dOa$  e  $cOb$  l'intervallo tra due eventi di tali regioni è di tipo spazio e possiamo definire tali regioni "presente esteso"; eventi posizionati in queste regioni saranno sempre posti in differenti punti spaziali ma all'interno di queste regioni non è più definita una struttura causale e per ogni evento di tali regioni esistono s.d.r. in cui è posteriore ad  $O$ , altri in cui è anteriore e un altro ancora dove esso è simultaneo a  $O$ ; per cui due eventi possono essere legati da un rapporto di causalità solo se il loro intervallo è di tipo tempo poiché i concetti di "prima" e "dopo" assumono un carattere assoluto solamente in queste regioni.

Per completezza bisogna notare che considerando tutte le coordinate spaziali invece di una sola al posto delle due rette che si incontrano nell'origine si avrebbero due superfici assolute quadridimensionali  $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0$ . Su di esso gli intervalli sono sempre di tipo luce e la velocità relativa è sempre  $c$ , per questo motivo tali superfici vengono chiamati coni di luce il cui asse coincide con l'asse dei tempi e le due regioni di futuro assoluto e passato assoluto sono rappresentate da due falde interne a questo cono.

Una volta nota la struttura causale dello spazio in esame ci importa conoscere una procedura per trovare le coordinate cartesiane di un dato evento. Ogni s.d.r. inerziale può identificare gli eventi nello spaziotempo costruendosi un proprio s.d.r. rigido costituito da una terna ortonormale di regoli per poter rilevare le coordinate spaziali. Può allora posizionare un orologio in ogni punto della griglia formata dalle coordinate cartesiane  $x, y, z$  capace di rilevare la coordinata mancante  $t$  e sintonizzare ogni orologio piazzato con una procedura simmetrica. Essendo la velocità della luce una costante universale si può certamente sfruttare a dovere, ad esempio si può porre a metà della distanza tra due orologi una sorgente di onde luminose e azionare i due orologi non appena i raggi di luce sopraggiungono ai due estremi, ripetendo poi questa operazione per tutti gli orologi necessari. A causa della particolare struttura causale di  $\mathcal{M}^4$  questa procedura non è triviale come in meccanica classica in cui tutti gli orologi esistenti battono il tempo allo stesso modo indipendentemente dal moto dell'osservatore posto nell'origine del s.d.r.. Quindi anche per la meccanica classica vale lo stesso procedimento per misurare le coordinate con la sola eccezione della coordinata temporale.

Ora ogni evento nello spaziotempo può essere identificato con le tre coordinate  $x, y, z$  dei punti della griglia ai quali è accaduto l'evento e la lettura  $t$  dell'orologio sincronizzato all'evento. Coordinate  $t, x, y, z$  assegnate in questo modo sono definite coordinate globali inerziali.

Se due diversi osservatori inerziali effettuano tale procedura si possono confrontare le coordinate che i due assegnano allo stesso evento. Da qui l'importanza di una legge di trasformazione tra sistemi differenti nella descrizione di un fenomeno. Nella fisica prerelativistica se un osservatore inerziale  $O$  identifica un evento  $p$  con le coordinate  $t, x, y, z$  un secondo osservatore  $O'$ , ancora una volta inerziale, che si muove rispetto al primo con velocità  $v$  nella direzione  $x$ , attribuirà alle proprie coordinate valori numerici diversi da quelli di  $O$  ma legati ad essi con le note trasformazioni di Galileo. Supponendo che i due osservatori abbiano in comune l'evento identificato con  $t = x = y = z = 0$ ; le coordinate di  $O'$  saranno:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.2)$$

In SR invece le coordinate lette da  $O'$  saranno legate a quelle trovate da  $O$  attraverso le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.3)$$

dove  $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  e indica il fattore relativistico mentre  $\beta = \frac{v}{c}$ ;  $c$  è ancora la velocità della luce. Le trasformazioni di Lorentz contengono in se tutti i concetti chiave della SR e tutte le nuove proprietà

introdotta dalla teoria, è importante sottolineare che passando dalle trasformazioni di Galileo a quelle di Lorentz svanisce l'indipendenza delle variabili spaziali e temporali.

Prima di terminare la presente sezione per rispolverare finalmente i concetti cardini della GR vorrei sottolineare che pur avendo speso parole e tempo per spiegare come rilevare le coordinate queste in SR non hanno un significato intrinseco perché dipendono strettamente dall'osservatore e uno stesso evento studiato da s.d.r diversi sottenderà valori numerici diversi delle coordinate, pur essendo rilevate con la medesima procedura e legate tra di loro come abbiamo appena visto. Per questo motivo è di grande utilità determinare quali quantità abbiano un significato assoluto poiché veramente caratterizzano la struttura intrinseca dello spaziotempo. Ciò equivale a domandarsi quali funzioni delle coordinate siano indipendenti dalla scelta del s.d.r. inerziale. Riassumendo, nella meccanica newtoniana ne abbiamo due, gli intervalli temporale tra due eventi e l'intervallo spaziale tra due eventi simultanei. In SR ne abbiamo solamente uno, l'intervallo spaziotemporale (e funzioni di questo) e infatti le trasformazioni di Poincaré, cioè l'insieme di tutte le trasformazioni possibili tra coordinate globali inerziali aggiungendo alle trasformazioni di Lorentz le possibili traslazioni del s.d.r., consistono precisamente nelle trasformazioni che lasciano  $I$  invariato.

### 1.3 Teoria della Relatività Generale

Pur avendo introdotto nuove importanti qualità alla struttura dello spazio fisico che, come detto in precedenza, è rappresentato più correttamente dallo spaziotempo di Minkowski rispetto allo spazio Euclideo, la geometria sottesa da tale struttura rimane ancora piatta (curvatura di  $I$  è uguale a zero); questo fatto risulterà presto rilevante. Classicamente i vecchi concetti di spazio e di tempo sono stati sfruttati per poter formulare le leggi fisiche quindi dopo aver toccato nel profondo tali concetti non ci resta che modificare opportunamente le leggi note per essere consistenti con la nuova struttura dello spaziotempo relativistico.

Le leggi dell'elettromagnetismo di Maxwell non hanno bisogno di alcuna modifica in quanto la SR è stata formulata proprio scommettendo sulla loro consistenza e difatti le trasformazioni di Lorentz le lasciano invariate.

Diverso è il caso della teoria della Gravitazione Universale di Newton che non può essere corretta in quanto prevede una influenza istantanea tra i corpi interessati. Dopo aver certamente tentato di inserire anche tale teoria in un contesto relativistico, utilizzando quantomeno  $\mathcal{M}^4$  al posto di  $\mathcal{E}^3$ , Einstein seguì due idee che rielaborate prontamente segnarono una vera e propria rivoluzione per i concetti di spazio e tempo in primis e per l'intero pensiero scientifico moderno successivamente.

La prima idea è il Principio di Equivalenza che sostiene che tutti i corpi sono influenzati dalla gravità e "cadono" allo stesso modo in un campo gravitazionale.[3] Questo permette di stabilire un'analogia tra il moto dei corpi in un campo gravitazionale e il moto dei corpi che non si trovano in un campo esterno ma che sono riferiti ad un s.d.r. non inerziale, soggetti cioè ad accelerazione. Classicamente tale principio è visto più come un accidente matematico sorto dalla proporzionalità tra massa gravitazionale e massa inerziale ed è assunta senza troppe considerazioni nella meccanica newtoniana. Nel presente contesto diviene più rilevante in quanto, poiché il moto di un corpo è indipendente dalla sua natura, i percorsi nello spaziotempo di oggetti in caduta libera costituiscono un insieme di curve preferenziali, alla stregua dei s.d.r. inerziali della SR che identificavano sempre curve preferenziali ma in assenza di accelerazioni, e saranno perciò utili per le nostre descrizioni. Tutto ciò permette di attribuire proprietà del campo gravitazionale alla struttura spaziotemporale. Nella SR il moto di un oggetto è descritto dalle geodetiche (brevemente le linee di uno spazio più dritte possibile o con minore tempo di percorrenza) della metrica associata allo spaziotempo. Possiamo credere che il percorso seguito da osservatori in

caduta libera siano sempre geodetiche ma che la metrica sia diversa rispetto alla SR. Giungiamo alla conclusione che il Campo Gravitazionale sia legato proprio alla deviazione dalla geometria piatta dello spaziotempo della SR e che non sia quindi un nuovo tipo di campo da immergere nell'universo fisico.

La seconda idea che ha permesso la formulazione della GR deriva dal Principio di Mach.[1] In SR così come nella meccanica newtoniana la struttura dello spaziotempo è fornita una volta per tutte e non è alterata dalla presenza della materia; Mach invece pensava che l'inerzia di un sistema fosse il risultato dell'interazione del sistema con il resto dell'universo, in modo che ogni particella del cosmo abbia influenza su tutte le altre. Quindi anche le definizioni locali di sistema "non rotante" oppure "non accelerato" siano dipendenti da tutta la materia presente nell'universo. Einstein ne fu colpito e cercò di formulare una teoria in cui la struttura dello spaziotempo sia influenzata dalla materia stessa.

La GR trova una base fisica proprio in questi due grandi principi. Le proprietà intrinseche dello spaziotempo sono ancora descritte dalla metrica come in SR però tale metrica non sarà assunta più per forza piatta; una curvatura, cioè la deviazione dalla piattezza, rappresenta proprio quegli effetti fisici usualmente attribuiti al campo gravitazionale. In aggiunta la curvatura è legata al tensore energia-impulso,  $\sigma^{ij}$ , che è determinato da tutti gli elementi che caratterizzano i fenomeni fisici, flusso di energia, quantità di moto, densità e sforzi, e che glorifica l'idea di Mach. La struttura dello spaziotempo è intimamente legata al contenuto di materia, stimato con il tensore energia-impulso.

Ed ecco compiersi la visione geometrica dell'intero lavoro di Einstein, siamo partiti dallo spazio  $\mathcal{E}^3$  a tre dimensioni abbandonato in favore dello spaziotempo di Minkowski,  $\mathcal{M}^4$ , a quattro dimensioni, entrambi caratterizzati da una fastidiosa piattezza. Per poi riformulare propriamente la teoria della Gravitazione Universale ci è bastato abbandonare tale piattezza della metrica dello spaziotempo ove presente materia (propriamente energia-impulso). Vediamo quindi comparire proprietà non euclidee dello spazio laddove è presente un campo gravitazionale; per questo è necessario sostituire  $\mathcal{M}^4$  con uno spaziotempo sempre continuo ma descritto da una geometria riemanniana dinamica ( $\mathcal{R}^4$ ).

Siamo quindi giunti ad una comprensione intima delle leggi naturali caratterizzando pian piano in modo sempre più rigoroso (fisicamente) lo spazio geometrico e i dati sperimentali si ritrovano in perfetto accordo con le previsioni della teoria. Questa nuova visione delle cose ci dice che "lo spazio insegna alla materia come muoversi mentre la materia insegna allo spazio come incurvarsi" (J. A. Wheeler). La materia si muove nello spazio ma caratterizza anche la sua struttura geometrica, la profondità di questo ragionamento è sconcertante. Potremmo certamente accontentarci del lavoro di Einstein, così innovativo e in accordo con gli esperimenti, e tenerci tutto com'è stato formulato da Einstein poco più di un secolo fa, fino a quando non verranno rilevati errori e discrepanze rispetto alle previsioni. Possiamo però anche giocare di anticipo.

È possibile continuare a modificare la struttura del nostro spaziotempo caratterizzandolo ancora meglio?

## Capitolo 2

# Lo Spaziotempo di Riemann-Cartan

### 2.1 Perché una nuova teoria

Albert Einstein con i suoi studi ha certamente stimolato e motivato intere generazioni di fisici. La geometrizzazione della teoria della gravitazione è di grande ispirazione e la brutalità con cui ha stravolto quasi cinque secoli di concetti oramai instaurati nella mente di ogni individuo, oltre che di ogni fisico, è davvero sconvolgente, ma non così anomala come può sembrare.

La teoria newtoniana sembrava davvero quanto di più profondo potessimo comprendere della natura. La sua idea vincente è stata quella di non distinguere più i fenomeni terrestri da quelli celesti, abbattendo in questo modo un pilastro chiamato Aristotele e non deve essere stato senz'altro semplice imporsi dal momento che la fisichetta aristotelica ai suoi tempi era accettata come un dogma inconfutabile. Questa sua idea, magari oggi considerata banale, ha portato alla formulazione delle tre leggi della dinamica e alla teoria della gravitazione universale, "universale" appunto perché riusciva a spiegare il moto di una mela nel campo gravitazionale terrestre e quello della Terra nel campo del Sole, un'unica teoria valevole per ogni corpo dell'universo dotato di massa. Gli insegnamenti di Newton ci hanno permesso di studiare a fondo il nostro sistema solare e di calpestare il suolo lunare con scarponi da astronauta.

Da dove nacque il bisogno di Einstein di modificare ciò che già con molta fatica fu raggiunto dallo scienziato britannico? La risposta è semplice; la fisica non si ferma mai. Ogni nuova teoria o scoperta parte da ciò che già si conosce e per questo motivo spalanca le porte a sviluppi futuri. È questo che ho compreso durante questo mio piccolo percorso di studi, nulla in fisica è definitivo. Anche l'idea più geniale, più sofisticata, più concreta e più corretta può nascondere un dettaglio da cui partire per rinnegare tutto e ricominciare da capo, solo per quel dettaglio che non ha convinto qualche fisico testardo. Lasciatemelo dire, è strabiliante.

La GR si inserisce perfettamente in questo quadro, i suoi risultati sperimentali sono in perfetto accordo con le previsioni e la sua formulazione ha davvero aperto le nostre menti come ormai ampiamente discusso; anche qui però si nasconde un dettaglio non proprio irrilevante.

Il novecento ha visto nascere oltre alla GR anche la meccanica quantistica e se la prima ha delucidato i nostri concetti di spazio e tempo la seconda ci ha insegnato come sia fatta la materia che ci circonda e di cui siamo composti. Studiandole entrambe si ha come l'impressione che siano due pezzi di due diversi puzzle perché è come se ci presentassero due mondi differenti. Il mondo microscopico in cui regnano l'interazione forte, debole e elettromagnetica e nel quale quella gravitazionale non sembra giocare alcun ruolo specifico essendo di gran lunga più debole rispetto alle altre. Questo è il mondo dei quanti e le interazioni conosciute sono spiegate nel contesto della teoria di campo quantizzato nello spaziotempo piatto di Minkowski che rappresenta un grande traguardo della meccanica quantistica relativistica ma

che continua ad escludere dai giochi la gravitazione. Questi campi quantizzati risiedono nello spaziotempo ma sono separati da esso.

D'altro canto esiste il mondo macroscopico in cui la gravitazione funge da architetto dell'intero universo coniano stelle, pianeti, galassie e via dicendo grazie al suo carattere unipolare che permette ai corpi di attrarsi e crescere sempre più, dopo che abbiano già fatto il loro lavoro le interazioni forte e debole per la formazione di atomi e elettromagnetica capace di formare strutture composte e di renderle elettricamente neutre e suscettibili quindi solo alla gravitazione.

Questa visione delle cose lascia insoddisfatti poiché una buona parte della fisica fondamentale raggiunge i suoi innumerevoli successi in uno spaziotempo piatto e rigido mentre la gravitazione necessita di uno spazio curvo e dinamico e geometricamente ci presenta due diversi domini di applicabilità di tali teorie. Sappiamo che la GR è valida per distribuzioni macroscopiche di massa ma abbiamo ragione di pensare che essa possa aver ricoperto un ruolo significativo nelle prime fasi dell'universo e i problemi cosmologici dell'universo primordiale sono strettamente connessi alla fisica delle particelle elementari quindi al mondo microscopico. L'estensione della GR alla realtà microfisica potrebbe essere quindi quel dettaglio fastidioso da cui partire e potrebbe anche essere la strada giusta da seguire per avvicinarsi ad una teoria unificata che consideri nello stesso quadro teorico GR e QM<sup>1</sup>.

## 2.2 Spin e gravitazione

Le particelle elementari rappresentano i costituenti della materia macroscopica e, almeno localmente, obbediscono alla QM e alla SR. In accordo con la prima esse sono classificate in base alle rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Poincaré e sono caratterizzate da due parametri fondamentali e indipendenti, la massa  $m$  e lo spin  $s$ , che caratterizzano in modo intrinseco ogni particella elementare. La massa è connessa con la parte traslazionale del gruppo di Poincaré mentre lo spin è associato alla parte rotazionale. Se vogliamo considerare insieme alla GR la fisica delle particelle elementari dobbiamo considerare quindi sia la massa che lo spin.

Lo spin si presenta in natura in unità di  $\frac{\hbar}{2}$  e sembra proprio essere quella nozione fisica necessaria per un'estensione pertinente della GR alla microfisica.

Così come la massa è connessa con la curvatura dello spaziotempo, lo spin sarà connesso con un'altra proprietà geometrica legata ad un nuovo grado di libertà (rotazionale) dello spaziotempo. In una teoria di campo una distribuzione di massa nello spaziotempo è descritta da un tensore energia-momento ( $\sigma^{ij}$ ), così una distribuzione di spin sarà descritto da un tensore di momento angolare di spin ( $\tau_k^{ij}$ ). La GR di Einstein ci ha insegnato che il tensore energia-momento della materia è la sorgente del campo gravitazionale ed è accoppiato al tensore metrico  $g_{ij}$  dello spaziotempo di Riemann. Avventurandoci nel mondo microscopico troviamo che anche il momento angolare di spin gioca un ruolo nella caratterizzazione dinamica della materia. Questo ci porta a supporre che anche il momento angolare di spin sia una sorgente di campo gravitazionale intendendo con campo gravitazionale un campo inseparabilmente legato alla geometria dello spaziotempo.

La relazione dinamica tra il tensore energia-impulso e la curvatura è espressa in GR dalle equazioni di Einstein, abbiamo allora bisogno di relazioni analoghe che includono anche il tensore di spin.[10] Non essendo possibile nel contesto della GR siamo portati ad introdurre questa nuova proprietà geometrica che chiamiamo *torsione* e possiamo affermare che come la massa è responsabile della curvatura dello spaziotempo, lo spin è responsabile della sua torsione. In questo modo continuiamo il nostro percorso nella caratterizzazione dello spazio fisico modificando ulteriormente lo spaziotempo continuo e dinamico di Riemann della GR con una sua lieve generalizzazione, lo spaziotempo quadridimensionale di

---

<sup>1</sup>Da Quantum Mechanics.

Riemann-Cartan ( $\mathcal{U}^4$ ). Studieremo da un punto di vista formale in che modo si possa modificare la GR e come questa rappresenti una piccola modifica alla teoria di Einstein. Il punto chiave sarà quello di considerare una connessione affine con una parte antisimmetrica al posto della connessione simmetrica della GR; la torsione è connessa proprio a questa come vedremo tra poco.

La corrente di spin trova una base dinamica in questa nuova struttura teorica, la teoria  $\mathcal{U}^4$  della gravitazione; talvolta chiamata anche teoria di Einstein-Cartan(Sciama-Kibble)<sup>2</sup>. Cartan propose di legare il tensore di torsione alla densità di momento angolare di spin nel 1922, prima ancora della formulazione moderna dello spin, per questo motivo tale teoria non ha trovato un grande successo ed è stata ignorata per molti anni. Vedremo quali sono le nuove le nuove conseguenze portate da questa estensione teorica ma fin da subito vorrei sottolineare che con l'introduzione della torsione le equazioni di campo nel vuoto sono le stesse della GR così che la maggior parte delle conseguenze verificabili sperimentalmente nel nostro sistema solare non possono essere distinte dalle previsioni della GR.

---

<sup>2</sup>Sciama e Kibble hanno contribuito dagli inizi degli anni sessanta con una formulazione alternativa in termini di principi di invarianza locale di gauge rispetto al gruppo di Poincaré. Si veda [11].

## Capitolo 3

# Utilità di Geometria Differenziale

In questo capitolo entreremo finalmente nello specifico poiché per proseguire con lo studio intrapreso ci occorrono gli strumenti formali forniti dalla geometria differenziale. Il mio obiettivo non è quello di una trattazione completa dell'argomento ma tenterò di essere esaustivo per i nostri scopi. Per un maggiore approfondimento si veda ad esempio [5] e [8].

### 3.1 Varietà differenziali

La geometria differenziale ci permette di modellizzare lo spaziotempo tramite gli strumenti del calcolo infinitesimale e di escludere una volta per tutte la dipendenza delle leggi fisiche dal sistema di coordinate scelto, come richiesto dalla GR.

Abbiamo già incontrato nel primo capitolo  $\mathfrak{R}^n$  e l'abbiamo identificato come un spazio costituito da coordinate cartesiane, ogni punto in esso è caratterizzato quindi con un n-upla di numeri reali. Diciamo qualcosa in più.

$\mathfrak{R}^n$  è uno spazio vettoriale i cui vettori sono definiti dagli spostamenti tra due punti differenti  $v^i = x^i - y^i$  con  $i = 1, \dots, n$ . Per i vettori esiste una operazione chiamata prodotto scalare

$$v^i w_i = \sum_{i=1}^n v^i w^i \quad (3.1)$$

in modo che  $\mathfrak{R}^n$  sia anche uno spazio di Hilbert finito dimensionale. Il prodotto scalare induce nello spazio la nozione di norma (euclidea)

$$\|x - y\|^2 = \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \quad (3.2)$$

che ci permette di definire una *palla* come un insieme aperto

$$\|x - y\| < R. \quad (3.3)$$

Questi insieme aperti donano a  $\mathfrak{R}^n$  le proprietà di uno spazio topologico. Uno spazio topologico è un insieme in cui è definita la nozione di *vicinanza*; due elementi dello spazio sono detti vicini se appartengono entrambi allo stesso sottoinsieme aperto, indicato solitamente con *intorno* degli elementi considerati.



Più precisamente uno spazio topologico è definito da un insieme di punti  $\mathcal{M}$  e da una famiglia di aperti  $\{A_i\}$  tali che l'insieme vuoto  $\emptyset$  e  $\mathcal{M}$  stesso appartengono a  $\{A_i\}$ , allo stesso modo vi appartengono una unione arbitraria di insiemi aperti  $\cup_i A_i$  e l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti  $\cap_i A_i$ <sup>1</sup>.

Per i nostri scopi è importante inoltre la definizione di spazio topologico separabile (o di Hausdorff) nel quale per ogni due punti arbitrari  $P = (x^1 \dots x^n)$  e  $Q = (x'^1 \dots x'^n)$  esistono rispettivamente due insiemi aperti  $U$  e  $V$  tali che  $P \in U$  e  $Q \in V$  con  $U \cap V = \emptyset$ .

Alla base della geometria differenziale vi è la nozione di varietà differenziale. Una varietà differenziale è uno spazio topologico che localmente appare come  $\mathbb{R}^n$  ma che globalmente smarrisce questa caratterizzazione.

Vediamo cosa ci serve per poter navigare ogni tipo di mare, i grandi navigatori si sono certamente serviti di mappe, cartine e atlanti, possono tornare utili anche a noi? Non prima di averli definiti in modo formale.

Una *mappa* è un'applicazione da un insieme aperto  $D \subseteq \mathcal{M}$ , detto dominio dell'applicazione, ad un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ :

$$\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Una mappa è detta *iniettiva* se manda ogni elemento di  $D$  in al massimo un elemento di  $\mathcal{M}$ , mentre è detta *suriettiva* se mappa ogni elemento di  $D$  in almeno un elemento di  $\mathcal{M}$ . L'insieme degli elementi che dal dominio dell'applicazione giungono nello spazio di arrivo attraverso  $\phi$  formano l'*immagine* dell'applicazione, o meglio l'immagine di  $D$  attraverso  $\phi$ ,  $\phi(D)$ , e se ogni sottoinsieme aperto  $A \subseteq D$  è mandato in un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  la mappa è detta *continua*.

Una coppia  $(A, \phi)$ , in cui  $A \subseteq \mathcal{M}$  e  $\phi$  è una mappa continua e invertibile,  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , è chiamata *carta*, spesso denotata semplicemente con  $\phi(P) = x^i(P)$  o tralasciando la dipendenza dal punto  $\phi = x^i$ . La mappa di una carta è ciò che fino ad ora abbiamo chiamato sistema di coordinate, un insieme di  $n$  numeri reali che identifica l'insieme aperto  $A \subseteq \mathcal{M}$ . Una collezione  $\mathcal{A}$  di carte è definita un *atlante* se copre tutta la varietà  $\mathcal{M}$ , così che  $\mathcal{A} = \{(A_i, \phi_i) : \cup_i A_i \subseteq \mathcal{M}\}$ .

Considerando un punto qualunque  $P \in A_1 \cap A_2$ , dove  $A_1$  e  $A_2$  sono due insiemi aperti di due carte  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , deve inoltre esistere una applicazione invertibile  $f : \phi_1(A_1) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_2(A_2) \subseteq \mathbb{R}^n$  tale che

$$f(\phi_1(P)) = \phi_2(P) \quad o \quad (\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1) = \mathbb{1} \quad (3.4)$$

dove  $\mathbb{1}$  rappresenta la matrice identità in  $\mathcal{M}$ . Equivalentemente si può richiedere

$$f^{-1}(\phi_2(P)) = \phi_1(P) \quad o \quad (\phi_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \phi_2) = \mathbb{1} \quad (3.5)$$

Per quanto detto nel primo capitolo  $f$  è una legge di trasformazione delle coordinate in  $\mathbb{R}^n$  (si veda figura 3.1a) perciò la dimensione di tutte le carte di una data varietà  $\mathcal{M}$  deve corrispondere con la dimensione di  $\mathcal{M}$  stessa, in questo caso  $n$ . Possiamo assumere  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  in modo da poter differenziare queste funzioni tutte le volte necessarie, tali funzioni sono spesso dette *lisce*.

Tutto ciò fornisce una base matematica all'idea di uno spazio geometrico come un insieme di punti nel quale possono essere introdotte coordinate cartesiane (d'ora in poi saranno chiamate solamente coordinate per raggiungere la maggiore generalità possibile) ma le cui proprietà non dipendono dalla scelta delle coordinate che usiamo per specificare i suoi punti.

Per provare che un determinato spazio sia una varietà differenziale è sufficiente trovare un atlante che lo copra.

<sup>1</sup>Si può procedere alla definizione di spazio topologico utilizzando, in alternativa agli insiemi aperti, gli insiemi chiusi, definito come i complementari degli insiemi aperti  $B_i = \mathcal{M} \setminus A_i$ , la trattazione non risulterebbe compromessa.

Fino ad ora abbiamo introdotto solamente il foglio di lavoro, siamo infatti capaci solamente di identificare i punti (di un sottoinsieme) della varietà con le coordinate scelte; cominciamo a introdurre varie strutture geometriche sulla varietà per poter comprendere e sfruttare sempre più quest'ultima e magari per imparare a muoverci su di essa.

### 3.1.1 Curve

Una *curva* è una mappa continua da  $I \subseteq \mathbb{R}$  alla varietà  $\mathcal{M}$

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \quad (3.6)$$

così che, data una carta  $\phi$  per la porzione di  $\mathcal{M}$  che include la curva<sup>2</sup>,

$$\phi \circ \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

come mostrato in figura 3.1b e usualmente scritta come

$$x^i = x^i(\lambda) \quad (3.8)$$

dove  $\lambda$  è il parametro reale che identifica i punti sulla curva e  $x^i$  sono le sue coordinate nella carta usata. Se le  $n$  funzioni  $x^i = x^i(\lambda) \in C^p(\mathbb{R})$ , la  $\gamma$  è detta *p*-differenziabile.

Una diversa parametrizzazione della curva  $\lambda' = \lambda'(\lambda)$  definisce una diversa curva  $\gamma'$  sebbene  $\gamma$  e  $\gamma'$  abbiano la stessa immagine su  $\mathcal{M}$ .<sup>3</sup>

### 3.1.2 Funzioni

Una funzione  $f$  su una varietà è un'applicazione

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Data l'esistenza di carte sulla varietà, le funzioni possono essere studiate sfruttando la composizione  $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\phi$  è una carta che ricopre il dominio di  $f$  o parte di esso.

Da questa definizione nasce spontaneamente la notazione utilizzata comunemente per identificare una funzione

$$f = f(x^i) \quad (3.10)$$

che, per contro, non distingue più  $f$  dalla composizione  $f \circ \phi^{-1}$ .

Tutte le funzioni di cui ci occuperemo saranno assunte continue e differenziabili quante volte necessario, ovvero lisce, in simboli scriviamo  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  o in modo più rigoroso

$$f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(\phi(A_i) \subseteq \mathbb{R}^n) \quad (3.11)$$

per tutte le carte  $(A_i, \phi_i)$  della varietà  $\mathcal{M}$ .

<sup>2</sup>Ricordo che il circoletto "o" rappresenta la composizione tra due (o più) funzioni, in questo caso specifico la composizione tra la curva e la carta.

<sup>3</sup>Fisicamente questo ci permette di distinguere due particelle che percorrono lo stesso percorso con velocità diverse.

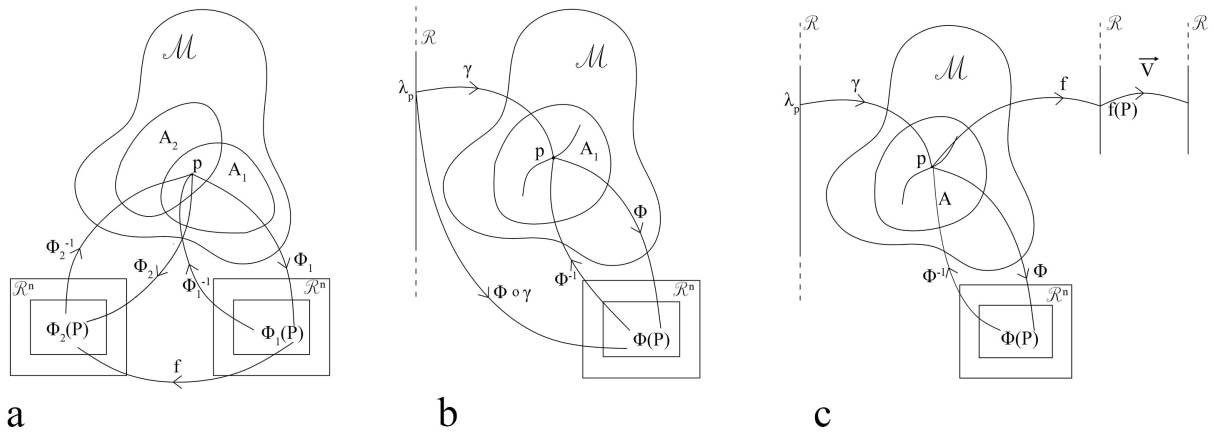


Figura 3.1: a Rappresentazione grafica di due mappe  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  con annessa legge di trasformazione  $f$  tra le due; b Rappresentazione grafica di una curva  $\gamma$  e della sua composizione con la mappa  $\Phi$ ; c Rappresentazione grafica di un vettore  $\vec{v}$  passante per le nozioni di curva e funzione.

### 3.1.3 Vettori e campi vettoriali

Funzioni e curve definite in precedenza sono necessarie per definire sulla nostra varietà oggetti utili e noti da tempo, i *vettori*.

In  $\mathfrak{R}^n$  un vettore può essere identificato come uno spostamento, ovvero una linea retta orientata tra due punti distinti, o come la tangente ad una curva.

La prima interpretazione è difficile da generalizzare ad una varietà qualsiasi poiché la nozione di linea retta non è necessariamente fornita su di essa.

Possiamo invece estendere il concetto di vettore tangente ad una curva e definire un vettore  $\vec{v}^4$  al punto P di una varietà M come una applicazione che associa ad una funzione differenziabile  $f$  definita in un intorno di P la derivata di quella funzione lungo la curva, o meglio

$$\vec{v} : f \rightarrow \vec{v}_\gamma(f) = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_P} \in \mathfrak{R} \quad (3.12)$$

dove  $\gamma$  è una curva passante per P tale che  $\gamma(\lambda_P) = P$  e  $f$  corrisponde a  $f \circ \gamma = f(\lambda)$ , si veda figura 3.1c. Dal momento che in ogni intorno di P esiste una carta  $\phi$  a valori in  $\mathfrak{R}^n$ , possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} \vec{v}_\gamma(f) &= \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_P} = \left. \frac{d}{d\lambda} (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma) \right|_{\lambda=\lambda_P} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} [f(x^i) \circ x^i(\lambda)] \right|_{\lambda=\lambda_P} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} f(x^i(\lambda)) \right|_{\lambda=\lambda_P} \\ &= \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_P} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Se adesso omettiamo la funzione generica  $f$  e il punto P e se assumiamo che gli indici ripetuti presenti in una espressione al numeratore e al denominatore sottendano una sommatoria<sup>5</sup>, possiamo scrivere

<sup>4</sup>Manteniamo ancora il contatto con il passato scrivendo un vettore utilizzando una lettera con una freccia sopra, tale notazione non verrà più sfruttata addentrandoci nel formalismo tensoriale.

<sup>5</sup>Notazione introdotta da Einstein.

l'espressione sopra

$$\vec{v}_\gamma = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d}{d\lambda} \quad (3.14)$$

che fornisce un significato matematico preciso e indipendente dalle coordinate alla nozione di un vettore come tangente alla curva  $\gamma$  nel punto P e nasce spontaneamente un'associazione tra un concetto analitico, la derivata, e un concetto geometrico, il vettore.

La definizione 3.14 implica direttamente che i vettori agiscono linearmente sulle funzioni

$$\vec{v}_\gamma(af + bg) = \frac{d}{d\lambda}(af + bg) = a \frac{df}{d\lambda} + b \frac{dg}{d\lambda}, \quad \forall a, b \in \mathfrak{R} \quad (3.15)$$

per tutte le funzioni  $f$  e  $g$  definite in un intorno del punto P.

Nota la definizione di vettore ci interessa studiare come esso si comporta rispetto ad una trasformazione di coordinate.

Riscrivendo l'equazione 3.14 come

$$\vec{v} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \vec{e}_i \quad (3.16)$$

possiamo leggerne la scomposizione in coordinate e vettori di base, dove gli  $\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , rappresentano i vettori di base, detta base coordinata e  $v^i$  le coordinate associate.

Proviamo ora che davvero tali vettori ammettono una base. Ricordo prima che una base è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti che combinandosi linearmente generano l'intero spazio vettoriale.

Consideriamo due curve che si incontrano nel punto P, parametrizzate rispettivamente con  $\lambda$  e  $\sigma$ , che generano in P due diversi vettori tangenti  $\vec{v} = \frac{d}{d\lambda}$  e  $\vec{w} = \frac{d}{d\sigma}$ . Vediamo che una loro combinazione lineare può essere espressa in termini degli stessi vettori di base  $\vec{e}_i$ ,

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\sigma} = \left( a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\sigma} \right) \vec{e}_i \quad \forall a, b \in \mathfrak{R} \quad (3.17)$$

ed abbiamo così mostrato che i vettori ad un dato punto sono generati dagli  $\vec{e}_i$ ; bisogna ora verificare che questi ultimi siano linearmente indipendenti. Per provarlo basta verificare che lo Jacobiano  $J$ , ovvero il determinante della matrice Jacobiana, di un generico cambio di coordinate  $y^i = y^i(x^j)$ <sup>6</sup> con  $i = 1, \dots, n$  sia non nullo, cioè

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.18)$$

Studiando ancora quel generico cambio di coordinate in un intorno di P otteniamo le leggi di trasformazione per le coordinate del vettore e per la sua base sfruttando solamente la "regola della catena", nota dai corsi di analisi

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{d\lambda} \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{dy^j}{d\lambda} = w^i \\ \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} = \vec{e}_i \end{cases} \implies \vec{v} = (v^i \vec{e}_i)' = w^j \vec{e}_j = \vec{v} \quad (3.19)$$

<sup>6</sup>Questa uguaglianza significa che ad ogni punto possiamo associare sia le coordinate vecchie  $x^i$  che le nuove  $y^i$  in modo che le nuove coordinate siano esprimibili tramite le vecchie. E viceversa.

e impariamo che il vettore rimane lo stesso nonostante la trasformazione poiché i valori delle componenti e dei vettori di base variano in modo opportuno.

Dalle nostre definizioni notiamo che ogni curva ha un unico vettore tangente al punto P studiato ma al contrario ogni vettore è tangente ad un numero infinito di curve passante per P, ad esempio esistono certamente curve tangenti ad altre curve e in tal modo avranno anche lo stesso vettore tangente.

In una varietà n-dimensionale  $\mathcal{M}$  avremo per ciascun punto P un insieme di  $n$  famiglie di curve indipendenti e di parametri che definiscono un spazio vettoriale chiamato *spazio tangente*  $T_P$ . I vettori propriamente non appartengono a  $\mathcal{M}$  bensì proprio a  $T_P$  e dipendono strettamente dal punto in questione. In particolare possiamo sommare soltanto i vettori che appartengono allo stesso spazio tangente, vettori (tangenti) a due diversi punti della varietà non hanno, ancora, relazioni utili.

### Campi vettoriali

Dato un insieme aperto  $U \subseteq \mathcal{M}$ , un campo vettoriale è un'applicazione che mappa ogni punto  $p \in U$  in un vettore  $\vec{v}(P) \in T_P$ . Data una carta  $\phi$  in U, possiamo anche scrivere

$$\vec{v} \circ \phi^{-1} = \vec{v}(x^i) \quad (3.20)$$

e con questa notazione non si distingue più il vettore geometrico dalla sua rappresentazione in coordinate.

Tutte le coordinate  $\phi = x^i$  sono definite in insiemi aperti, si può estendere quindi lo stesso definizione delle basi coordinate per definire basi coordinate per campi vettoriali nella carta  $\phi$ .

### Fibrato tangente

Chiamiamo *fibrato tangente*  $\mathcal{F}_T$  l'insieme di tutti gli spazi tangenti ad ogni punto della varietà. Ogni punto di  $\mathcal{F}_T$  è composto da una coppia  $(P \in \mathcal{M}, \vec{v} \in \{T_P : \forall P \in \mathcal{M}\})$ , un punto della varietà in questione e il vettore tangente al punto stesso. Le "fibre" del fibrato tangente sono proprio gli spazi tangenti  $T_P$ ; si può mostrare che  $\mathcal{F}_T$  rappresenta una varietà e i campi vettoriali definiti in precedenza possono essere visti come sezioni di  $\mathcal{F}_T$ .

#### 3.1.4 Uno-forme

Dati un punto P sulla varietà  $\mathcal{M}$  e lo spazio tangente  $T_P$ , una 1-forma  $\tilde{w}$  è un funzionale lineare agente sui vettori in  $T_P$ ,  $\tilde{w} : T_P \rightarrow \mathfrak{K}$  tale che

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) &= \alpha\tilde{w}(\vec{v}) + \beta\tilde{w}(\vec{u}) \\ (\alpha\tilde{w})\vec{v} &= \alpha\tilde{w}(\vec{v}) \\ (\tilde{w} + \tilde{\sigma})(\vec{v}) &= \tilde{w}(\vec{v}) + \tilde{\sigma}(\vec{v}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Uno-forme agenti su uno stesso  $T_P$  formano uno spazio vettoriale  $T_P^*$ , duale di  $T_P$  e l'insieme di tutti i  $T_P^*$  forma il fibrato cotangente  $\mathcal{F}_T^*$  in analogia con quanto già detto; le stesse uno-forme sono talvolta chiamate *vettori duali*.

Un esempio caratteristico di 1-forma è rappresentato dal gradiente di una funzione ad un punto P della varietà.

Sia  $\{\vec{e}_i; i = 1, 2, \dots, n\}$  una base dello spazio tangente  $T_P$ ; in generale una base di  $T_P^*$  non necessita di alcuna relazione con tale base. Tuttavia, dal momento che l'azione di una data 1-forma su un generico

vettore è completamente definita dalla sua azione su una base di  $T_P$ , è conveniente introdurre una *base duale* per la 1-forma in  $T_P^*$  dalla condizione

$$\tilde{e}^i(\vec{v}) = \tilde{e}^i(v^j \vec{e}_j) = v^i, \quad (3.22)$$

ovvero l' $i$ -esimo elemento della base duale  $\tilde{e}^i$  associa al vettore la sua  $i$ -esima componente. In tal modo la dimensione di  $T_P^*$  eguaglia quella di  $T_P$  e di  $\mathcal{M}$ .

Equivalentemente avrei potuto scrivere l'equazione 3.22

$$\tilde{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i, \quad (3.23)$$

dove  $\delta_j^i$  è la delta di Kronecker e rappresenta geometricamente la matrice identità, per  $i = j$  vale 1 mentre si annulla per  $i \neq j$ .

Vediamo quale sia l'azione di una 1-forma su un generico vettore. Data una qualunque 1-forma  $\tilde{w} \in T_P^*$  abbiamo

$$\tilde{w}(\vec{v}) = \tilde{w}(v^i \vec{e}_i) = v^i \tilde{w}(\vec{e}_i) = \tilde{e}^i(\vec{v}) \tilde{w}(\vec{e}_i) = v^i w_i \quad (3.24)$$

che, ricordando la sommatoria sottintesa dalla notazione, rappresenta il prodotto scalare tra vettore e uno-forma, quindi un numero reale.

Bisogna altresì notare che sotto un cambiamento qualsiasi di coordinate, vettori e uno-forme non cambiano, variano solamente le loro componenti in modo da mantenere il loro prodotto scalare invariato.

### 3.1.5 Tensori e campi tensoriali

Giungiamo finalmente alla definizione generale di tensore come oggetto generico su di una varietà. Un tensore  $T$  di tipo  $(m, n)$  ad un punto  $P$  di una varietà  $\mathcal{M}$  è un funzionale lineare agente su  $n$  uno-forme e  $m$  vettori;

$$T : \overbrace{T_P^* \otimes \dots \otimes T_P^*}^m \otimes \overbrace{T_P \otimes \dots \otimes T_P}^n \rightarrow \mathfrak{R} \quad (3.25)$$

dove  $\otimes$  è l'usuale prodotto cartesiano di spazi vettoriali.

Possiamo interpretare un tensore generico come una combinazione lineare di vettori e uno-forme, combinandoli attraverso il *prodotto esterno*, denotato ancora con  $\otimes$ .

Così un generico tensore di tipo  $(m, n)$  è rappresentato in termini delle sue componenti con

$$T = T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} \tilde{e}_{i_1} \otimes \tilde{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \tilde{e}_{i_m} \otimes \tilde{e}^{j_1} \otimes \tilde{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_n}, \quad (3.26)$$

dove a loro volta le componenti sono definite dall'azione del tensore sui vettori e sulle uno-forme di base,

$$T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = T(\tilde{e}^{i_1}, \tilde{e}^{i_2}, \dots, \tilde{e}^{i_m}, \tilde{e}_{j_1}, \tilde{e}_{j_2}, \dots, \tilde{e}_{j_n}) \quad (3.27)$$

Nota la forma generale di un tensore e di una sua base, vediamo ora come effettuare un generico cambio di base. Per farlo studieremo i cambi di base in  $T_P$  e in  $T_P^*$ .

Consideriamo ancora un generico punto  $P$  su una varietà  $\mathcal{M}$  e il suo spazio tangente  $T_P$ , con  $\{\tilde{e}_i\}$ <sup>7</sup> come base. Un cambio di base in  $T_P$  è determinato da una matrice  $n \times n$  appartenente a  $GL(n)$ , gruppo delle matrici quadrate rappresentanti una trasformazione lineare<sup>8</sup>.

Quindi, sia  $\{\tilde{e}_i\} \rightarrow \{\tilde{e}_{i'}\}$  il cambio di base, la nuova base sarà legata alla prima attraverso una matrice quadrata,

$$\tilde{e}_{i'} = \Lambda^i_{i'} \tilde{e}_i. \quad (3.28)$$

<sup>7</sup>Le parentesi graffe indicano l'insieme degli elementi di base  $\tilde{e}_i$  con  $i = 1, \dots, n$ .

<sup>8</sup>GL sta infatti per "General Linear" e  $n$  indica la dimensione.

Considerando ora lo spazio duale  $T_p^*$  e una sua base  $\{\tilde{e}^i\}$  vediamo come ricavare una relazione analoga a quella precedente ma riferita alla base duale,  $\tilde{e}^i(\tilde{e}_j) = \delta_j^i$ .

Possiamo scrivere

$$\tilde{e}^i(\tilde{e}_k)\Lambda^k_{j'} = \delta_k^i\Lambda^k_{j'} = \Lambda^i_{j'}. \quad (3.29)$$

Dato che le uno-forme agiscono linearmente, l'espressione sopra definisce l'azione degli  $\tilde{e}^i$  sui vettori di base trasformati,

$$\tilde{e}^i(\tilde{e}_k)\Lambda^k_{j'} = \tilde{e}^i(\tilde{e}_k\Lambda^k_{j'}) = \tilde{e}^i(\tilde{e}_{j'}). \quad (3.30)$$

Denotiamo  $\Lambda^{-1}$ , l'inversa di  $\Lambda$ , con  $\Lambda^{i'}$ , così che

$$\Lambda^{i'}\Lambda^j_{k'} = \delta_{k'}^{i'}, \quad \Lambda^i_{j'}\Lambda^{j'}_k = \delta_k^i \quad (3.31)$$

Operando da sinistra con  $\Lambda^{-1}$  sulle equazioni 3.29 e 3.30 e eguagliando i risultati, si ottiene che la base duale trasformata è data da

$$\tilde{e}^{k'} = \Lambda^{k'}_i \tilde{e}^i \quad (3.32)$$

ovvero la base duale di una uno-forma si trasforma sfruttando la matrice inversa  $\Lambda^{-1}$ .

Da notare che  $\Lambda^{-1}$  è anche la matrice che trasforma le componenti dei vettori mentre le componenti delle uno-forme si trasformano utilizzando  $\Lambda$ . Per questo motivo i primi sono anche detti vettori *controvarianti* e i secondi vettori *covarianti* o *covettori*.

Possiamo mostrare quest'ultima affermazione introducendo due diverse carte  $\phi = x^i$  e  $\psi = y^{i'}$  dal medesimo punto P della varietà, connesse da una funzione biettiva  $f$ . Introduciamo quindi due basi coordinate per lo spazio tangente  $T_P$ ,  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  e  $\{\frac{\partial}{\partial y^{i'}}\}$ . Come abbiamo visto prima tra queste due basi esiste una trasformazione lineare e la sua inversa, rispettivamente

$$\Lambda^i_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \quad e \quad \Lambda^{i'}_j = \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^j}. \quad (3.33)$$

Dalla scomposizione del vettore in componenti e base e sfruttando la trasformazione inversa della base otteniamo

$$\vec{v} = v^{i'} \tilde{e}_{i'} = v^i(\tilde{e}_i) = v^i(\Lambda^{k'}_i \tilde{e}_{k'}) = \Lambda^{k'}_i v^i \tilde{e}_{k'} \quad (3.34)$$

ovvero

$$v^{i'} = \Lambda^{k'}_i v^i \quad (3.35)$$

che esprime la relazione cercata per le componenti del vettore controvariante. In modo analogo si ottiene la trasformazione delle componenti di un covettore,

$$\tilde{w}_{i'} = \Lambda^k_{i'} \tilde{w}_k \quad (3.36)$$

Applichiamo quanto appena scoperto ai tensori e una trasformazione generale delle sue componenti avrà la forma

$$T^{i'_1 \dots i'_m}_{j'_1 \dots j'_n} = \Lambda^{i'_1}_{i_1} \dots \Lambda^{i'_m}_{i_m} \Lambda^{j_1}_{j'_1} \dots \Lambda^{j_n}_{j'_n} T^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}, \quad (3.37)$$

con le  $\Lambda$  definite dalle equazioni 3.33. Alcuni libri di testo forniscono direttamente questa legge di trasformazione come definizione di tensore, chiaramente la definizione data in precedenza caratterizza il tensore come una entità geometrica indipendente dalla scelta del sistema di coordinate ed è molto più vicina ai nostri scopi<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Analogamente si può definire un vettore e una 1-forma come oggetti le cui componenti si trasformano secondo le equazioni 3.35 e 3.36 rispettivamente

### Operazioni sulle componenti di un tensore

Passerò a rassegna tutte le operazioni possibili che mappano un tensore  $T$  di tipo  $(m, n)$  in un tensore definito nello stesso punto ma magari di tipo differente.

$$\text{Moltiplicazione per uno scalare : } T^{(m,n)} \rightarrow aT^{(m,n)}, \forall a \in \mathfrak{K} \quad (3.38)$$

$$\text{Addizione tra tensori : } T^{(m,n)} + Q^{(m,n)} = R^{(m,n)} \quad (3.39)$$

$$\text{Prodotto esterno : } T^{(m,n)} \otimes Q^{(m',n')} = R^{(m+m',n+n')} \quad (3.40)$$

$$\text{Contrazione con vettore : } T^{(m,n)}(\dots, \vec{v}, \dots) = T^{(m,n-1)} \quad (3.41)$$

$$\text{Contrazione con 1-forma : } T^{(m,n)}(\dots, \vec{w}, \dots) = T^{(m-1,n)} \quad (3.42)$$

Le ultime due operazioni possono anche essere generalizzate ad una contrazione con un tensore di tipo  $(p, q)$ , con  $p < n$  e  $q < m$ , che produce un tensore di tipo  $(m - q, n - p)$ .

Ci sono poi due modi per manipolare gli indici del tensore fornendogli una determinata simmetria e possono essere effettuate su un numero arbitrario di componenti controvarianti e covarianti, sono

$$\text{Simmetrizzazione :} \quad (3.43)$$

$$T_{(j_1 j_2 \dots j_n)}^{i_1 \dots i_m} = \frac{1}{n!} (T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} + \text{somme con gli indici } j_1, \dots, j_n \text{ permutati})$$

$$\text{Antisimmetrizzazione :} \quad (3.44)$$

$$T_{[j_1 j_2 \dots j_n]}^{i_1 \dots i_m} = \frac{1}{n!} (T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} + \text{somme alterne con gli indici } j_1, \dots, j_n \text{ permutati})$$

dove con "somme alterne" viene indicato che le permutazioni che sono il risultato di un numero dispari di scambi avranno un segno meno. Queste due operazioni permettono di ottenere un tensore simmetrico e/o antisimmetrico rispetto agli indici a cui sono applicate.

Sfruttando la notazione di Shouten [7] se uno o più indici sono esclusi da queste ultime due proprietà saranno scritti tra due barrette verticali, così ad esempio

$$T_{[j_1 j_2] j_3 j_4}^{i_1} = \frac{1}{6} (T_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{i_1} + T_{j_2 j_4 j_3 j_1}^{i_1} + T_{j_4 j_1 j_3 j_2}^{i_1} \quad (3.45)$$

$$- T_{j_1 j_4 j_3 j_2}^{i_1} - T_{j_4 j_2 j_3 j_1}^{i_1} - T_{j_2 j_1 j_3 j_4}^{i_1}), \quad (3.46)$$

in cui l'antisimmetrizzazione riguarda solo gli indici  $j_1, j_2$  e  $j_4$ . In modo analogo si procede per il caso simmetrico.

## 3.2 Tensore metrico

Per poter proseguire con la nostra trattazione geometrica dobbiamo poter definire sulla nostra varietà innanzitutto le nozioni di lunghezza (distanza tra due punti della varietà) e angolo. Entrambe sono ottenute dal prodotto scalare tra due vettori in  $T_p$ , il quale a sua volta è introdotto sulla varietà facendo uso di un tensore metrico.

Un tensore metrico è un tensore di tipo  $(0,2)$  che mappa due vettori in un numero reale con le seguenti proprietà:

1. simmetria

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = g(\vec{w}, \vec{v}) = g_{ij} v^i w^j = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (3.47)$$

dove  $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ ;



## 2. non degenerazione

$$[ g(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in T_P \Leftrightarrow \vec{v} = 0 ] \Leftrightarrow \det(g_{ij}) \neq 0. \quad (3.48)$$

La metrica euclidea e la metrica di Minkowski sono due esempi di tensore metrico, il primo definito da  $g_{ij} = \delta_{ij}$  e il secondo da  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ <sup>10</sup>, entrambi utilizzati in incognito nel primo capitolo. Utilizzando una nuova notazione per le coordinate nello spaziotempo  $\mathcal{M}^4$ ,  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ , possiamo scrivere l'equazione (1.1) più semplicemente come

$$I = \Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu, \quad (3.49)$$

che rappresenta sempre l'intervallo spaziotemporale.

Ogni tensore metrico definisce automaticamente un prodotto scalare tra vettori appartenenti allo stesso  $T_P$  come espresso dall'equazione 3.47 e definisce anche l'angolo  $\theta$  tra essi con

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta. \quad (3.50)$$

Anche il modulo quadro di un vettore è definito dalla metrica

$$v^2 = g(\vec{v}, \vec{v}) = g_{ij} v^i v^j \quad (3.51)$$

## 3.2.1 Forma canonica e base ortonormale

Operando con un cambio di base nello spazio tangente  $T_P$  le componenti di ogni tensore metrico cambiano sfruttando la matrice  $\Lambda$  introdotta in precedenza,

$$g' = \Lambda^T g \Lambda, \quad (3.52)$$

dove il "T" in apice in  $\Lambda^T$  ne indica la trasposizione. Essendo descritto da una matrice simmetrica può sempre essere posto in forma diagonale moltiplicandolo per una matrice ortogonale,  $O^{-1} = O^T$ , e una matrice simmetrica,  $S = S^T$ , ovvero

$$g' = S^T O^T g O S = S^T g(\text{diag}) S = S g(\text{diag}) S. \quad (3.53)$$

Con una scelta opportuna di  $S$  possiamo porci nella condizione  $|g'_{ij}| = 1$  e in tal modo otteniamo la *forma canonica* del nostro tensore metrico

$$g_{ij} = \pm \delta_{ij}. \quad (3.54)$$

In forma canonica  $g$  definisce implicitamente nel punto  $P$  una base ortonormale  $\vec{e}_i$  per i vettori e una base ortonormale duale  $\tilde{e}^i$  per le uno-forme.

Una varietà in cui è definito dappertutto un tensore metrico è detta *varietà metrica*. È sempre possibile porre il tensore metrico in forma canonica in un generico punto  $P$  appartenente alla varietà, in generale non è però possibile farlo nell'intorno di tale punto. In ogni punto della varietà esiste infatti un sistema di coordinate  $x^{\hat{\mu}}$  in cui  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  è scritto in forma canonica, le sue derivate prime  $\partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  si annullano mentre non si può fare annullare simultaneamente tutte le derivate seconde, avremo:

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(P) = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}; \quad \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0. \quad (3.55)$$

<sup>10</sup>Si è utilizzata la convenzione per i segni della metrica in cui la componente temporale è positiva,  $\eta_{00} > 0$  e le componenti spaziali lungo la diagonale principale negative,  $\eta_{ii} < 0$ .

Tali coordinate sono chiamate *coordinate inerziali locali* e i vettori di base associati costituiscono un sistema di riferimento di Lorentz locale, i "cappelli" sopra gli indici indicano proprio un sistema con le proprietà specificate sopra.[2] Da notare che nello coordinate inerziali locali la metrica al primo ordine somiglia a quella di uno spazio piatto e questa è il modo rigoroso per affermare che regioni sufficientemente piccole dello spaziotempo somigliano allo spazio piatto di Minkowski  $\mathcal{M}^4$ ; vedremo che tale proprietà risulta supportata da evidenze sperimentali.

La somma dei segni degli elementi sulla digonale del tensore metrico è detta *segnatura* e caratterizzano la metrica dello varietà. Se i segni sono tutti positivi (negativi) la metrica è definita positiva (negativa) ed è detta *Riemanniana*. La matrice euclidea è un esempio particolare e speciale di metrica Riemanniana poiché può essere posta in forma diagonale simultaneamente in tutti i punti della varietà.

Se sulla diagonale del tensore metrico appaiono entrambi i segni, la metrica è detta avere una segnatura *Lorentziana* o *pseudoriemanniana*, come per la metrica di Minkowski.

In ogni caso una volta introdotta la metrica lo spazio considerato risulta completamente caratterizzato dal punto di vista geometrico.

### Innalzamento e abbassamento degli indici

Il tensore metrico ci permette di definire una mappa tra lo spazio tangente  $T_P$  al suo duale  $T_P^*$ . Dato un vettore  $\vec{v}$  possiamo infatti definire una 1-forma da:

$$\tilde{v} = g(\vec{v}, \cdot) \in T_P^* \quad (3.56)$$

le cui componenti sono date da

$$v_i = \tilde{v}(\vec{e}_i) = g(v^j \vec{e}_j, \vec{e}_i) = v^j g_{ji} = g_{ij} v^j \quad (3.57)$$

e in termini pratici possiamo dire che la metrica è stata usata per abbassare gli indici

$$v_i = g_{ij} v^j. \quad (3.58)$$

Il tensore metrico è invertibile e la sua inversione é scritta

$$g_{ij}^{-1} = g^{ij}, \quad (3.59)$$

dove  $g^{-1}(\vec{e}^i, \vec{e}^j) = g^{ij}$ , in modo che

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (3.60)$$

Questo ci permette di passare da una 1-forma ad un vettore

$$v^i = g^{ij} v_j. \quad (3.61)$$

Possiamo quindi concludere che ad ogni punto della varietà in cui è definito un tensore metrico, vettori e uno-forme sono equivalenti. Nel caso della metrica euclidea abbiamo  $g_{ij} = \delta_{ij}$  e  $v^i = v_i$ , negli spazi euclidei le componenti di vettori e 1-forme, se riferite a una base ortonormale, sono le medesime. E questo il motivo per cui nella fisica e nella geometria elementari si tralasciano i covettori e si introducono solamente i vettori (controvarianti). Ma ciò non è più possibile in relatività speciale, in cui si considera lo spaziotempo riferito a una metrica pseudoeuclidea. Infatti, ciò significa che nelle basi ortonormali la metrica e la sua inversa hanno la forma  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , ovvero  $g_{00} = g^{00} = 1$ ,  $g_{ii} = g^{ii} = -1$  con  $i = 1, 2, 3$ , mentre tutte le altre componenti sono nulle. Dunque nello spaziotempo l'innalzamento o l'abbassamento di un indice spaziale comporta un cambiamento di segno, mentre non

cambia il segno se si abbassa o alza l'indice temporale.

L'operazione di abbassamento e innalzamento degli indici può essere generalizzato facilmente ad un tensore di qualsiasi tipo (o rango).

Ad esempio

$$T^{ij}g_{jk} = T_k^i. \quad (3.62)$$

rappresenta una mappa tra le componenti di un tensore (2,0) alle componenti di un tensore (1,1). In generale un generico tensore (m,n) con l'utilizzo opportuno della metrica può produrre tensori di tipo (m-2,n) o (m,n-2) oppure anche (m-1,n-1).

### Lunghezza di una curva

Possiamo ora definire la lunghezza, in modulo, di uno spostamento infinitesimo lungo un campo vettoriale  $\vec{v}$

$$dl^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\vec{v}d\lambda) \cdot (\vec{v}d\lambda) = g(\vec{v}d\lambda, \vec{v}d\lambda) = g(\vec{v}, \vec{v})d\lambda^2 \quad (3.63)$$

che rappresenta uno scalare dal momento che  $\vec{v}$  è un vettore,  $d\lambda$  è uno scalare e  $g$  è un tensore (0,2).

Ora integrando lungo una curva  $\gamma$  del campo vettoriale  $\vec{v}$  otteniamo la lunghezza del percorso tra due punti di parametri  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})}d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij}(\lambda)v^i(\lambda)v^j(\lambda)}d\lambda. \quad (3.64)$$

Introducendo una carta che copre la regione interessata dall'integrale possiamo scrivere

$$l(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij}(\lambda) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \quad (3.65)$$

dove si è utilizzata la definizione delle componenti di un vettore  $v^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$

### 3.3 Densità tensoriali

Alle volte può essere utile definire sulla varietà oggetti non propriamente tensoriali. Perdendo un po' di rigore formale possiamo dire che un tensore è un oggetto definibile su di una varietà che si trasforma secondo 3.37. Ci sono però oggetti che si trasformano in modo molto simile e sono definiti *densità tensoriali*.

Per un generico oggetto di questo tipo, vale la legge di trasformazione 3.37 moltiplicata per lo Jacobiano<sup>11</sup> del generico cambio di coordinate utilizzato, elevato ad una certa potenza che indica l'ordine della densità tensoriale. Per cui, sia  $D_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$  una densità tensoriale di ordine  $k$  definita su una varietà  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M}$ , avremo per un generica trasformazione delle coordinate  $y^i(x^i)$  con  $i = 1, \dots, n$

$$D_{j'_1 \dots j'_n}^{i'_1 \dots i'_m} = J^k \Lambda_{i_1}^{i'_1} \dots \Lambda_{i_m}^{i'_m} \Lambda_{j'_1}^{j_1} \dots \Lambda_{j'_n}^{j_n} D_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}, \quad (3.66)$$

con  $J$  definito da 3.18 e le varie  $\Lambda$  espresse da 3.33. Vediamo a colpo d'occhio che differisce da 3.37 proprio solo per il termine  $J^k$ . Se nella 3.66 si pone  $k = 0$  si torna alla legge di trasformazione di un tensore che quindi è identificabile come densità tensoriale di ordine 0 (zero).

<sup>11</sup>Ricordo che per Jacobiano si intende il determinante della matrice Jacobiana definita in 3.18.

### 3.4 P-forme

Il tensore metrico ci ha già permesso di definire sulla varietà lunghezze e angoli non ci resta che fare un ulteriore passo avanti per arrivare a definire altre due quantità geometriche importanti, area e volume, e possibilmente legarle ancora alla metrica definita sulla varietà.

Prima di tutto chiamiamo  $p$ -forma un tensore antisimmetrico di tipo  $(0, p)$ . Come abbiamo visto nel caso generale possiamo rendere antisimmetrico un tensore qualunque sfruttando la manipolazione degli indici in 3.44. Quindi l'espressione generale per una  $p$ -forma  $\tilde{w}$  sarà esprimibile semplicemente come

$$\tilde{w}_{[j_1 j_2 \dots j_p]} = \frac{1}{p!} (\tilde{w}_{j_1 j_2 \dots j_p} + \text{permutazioni alterne degli indici}^{12}). \quad (3.67)$$

Il numero  $p$  rappresenta il grado della forma e  $p = 1$  rappresenta le già note 1-forme che, coinvolgendo un solo indice covariante, non presenta alcuna antisimmetrizzazione.

Il numero di componenti indipendenti  $C_p^n$  di una  $p$ -forma in una varietà  $\mathcal{M}$  di dimensione  $n$  si calcola contando i possibili modi di scegliere  $p$  numeri all'interno di un insieme di  $n$  numeri totali, ovvero è esprimibile facendo uso del coefficiente binomiale:

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad (3.68)$$

con  $p \leq n$ , infatti per  $p > n$  tale costruzione fallisce.

Per specificare una base di una  $p$ -forma facciamo uso del prodotto esterno antisimmetrico, detto prodotto "wedge" e indicato con  $\wedge$ , delle 1-forme di base, ovvero

$$\tilde{w} = \frac{1}{p!} w_{j_1 j_2 \dots j_p} \tilde{e}^{j_1} \wedge \tilde{e}^{j_2} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{j_p}, \quad (3.69)$$

che avrà naturalmente dimensione  $C_p^n$ . Quindi ad esempio una generica 2-forma può essere espressa come

$$\tilde{w} = \frac{1}{2!} w_{ik} \tilde{e}^i \wedge \tilde{e}^k = \frac{1}{2} w_{ik} (\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^k - \tilde{e}^k \otimes \tilde{e}^i). \quad (3.70)$$

Il prodotto wedge è usato anche per combinare una  $p$ -forma con una  $q$ -forma per ottenere una  $(p+q)$ -forma, sempre con  $p + q \leq n$ .

A breve tornerà utile applicare una  $p$ -forma  $\tilde{w}$  ad un vettore  $\vec{V} \in T_P$  ottenendo

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\vec{V}) &= \left( \frac{1}{p!} w_{j_1 j_2 \dots j_p} \tilde{e}^{j_1} \wedge \tilde{e}^{j_2} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{j_p} \right) (V^k \tilde{e}_k) \\ &= \frac{1}{p!} (w_{j_1 j_2 \dots j_p} V^k \tilde{e}^{j_1}(\tilde{e}_k) \otimes \tilde{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_p} + \text{permutazioni}) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} V^k w_{kj_2 \dots j_p} \tilde{e}^{j_2} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{j_p}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

che rappresenta una  $(p-1)$ -forma e in cui abbiamo usato la base duale della 1-forma.

Vediamo ora come sfruttare tutto questo per giungere alle nozioni di area e volume.

Data una coppia di vettori linearmente indipendenti  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  appartenenti allo stesso  $T_P$  possiamo definire l'area del parallelogramma identificato da essi come

$$A = \vec{v} \wedge \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \theta \quad (3.72)$$

<sup>12</sup>Vedi nota 8 pagina 27.

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  la cui definizione richiede una metrica. L'area definita in 3.72 è naturalmente uno scalare ( $A \in \mathfrak{K}$ ) ma può essere sia positiva che negativa, quindi rappresenta un'area *orientata* a seconda del proprio segno; inoltre richiediamo che sia additiva rispetto alla somma di vettori,

$$A(\vec{v}, \vec{w}) + A(\vec{v}, \vec{w}') = A(\vec{v}, \vec{w} + \vec{w}'), \quad (3.73)$$

e antisimmetrica nei suoi argomenti

$$A(\vec{v}, \vec{w}) = -A(\vec{w}, \vec{v}). \quad (3.74)$$

La seconda proprietà è necessaria per assicurare che l'area di due vettori linearmente dipendenti sia nulla, cioè

$$A(\vec{v}, a\vec{v}) = aA(\vec{v}, \vec{v}) = 0, \quad (3.75)$$

$\forall a \in \mathfrak{K}$  e per tutti i  $\vec{v}$ .

Considerando ora su una generica varietà  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M}$ ,  $n$  vettori linearmente indipendenti e appartenenti allo stesso  $T_P$  definiscono un generico poliedro infinitesimo, il cui volume sarà sempre un numero reale; possiamo generalizzare quanto detto prima e associare il volume ad un tensore di tipo  $(0, n)$ . In particolare, richiedendo che il volume si annulli se almeno due di tali vettori siano linearmente dipendenti, torniamo a parlare di  $n$ -forme. Vediamo come.

Scriviamo gli  $n$  vettori come  $\Delta\vec{x}_{(k)}$  con  $k = 1, \dots, n$ . Dal momento che essi appartengono allo stesso  $T_P$  possiamo espanderli sulla stessa base coordinata,

$$\Delta\vec{x}_{(k)} = dx_{(k)}^i \vec{e}_i = dx_{(k)}^i \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (3.76)$$

Tutte le  $n$ -forme sono proporzionali<sup>13</sup> e saranno date da

$$\tilde{w} = f \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{e}^n \quad (3.77)$$

dove  $f \in \mathfrak{K}$ . Definiamo allora il volume di un poliedro infinitesimo come

$$\tilde{w}(\Delta\vec{x}_{(1)}, \Delta\vec{x}_{(2)}, \dots, \Delta\vec{x}_{(n)}) = f \tilde{e}^1(\vec{x}_{(1)}) \tilde{e}^2(\vec{x}_{(2)}) \dots \tilde{e}^n(\vec{x}_{(n)}) + \text{permutazioni}. \quad (3.78)$$

Se ora scegliamo le  $n$  facce del poliedro lungo i vettori coordinati, ovvero  $dx_{(k)}^i = \delta_k^i$ , e la base duale per la 1-forma,  $\tilde{e}^i = \tilde{d}x^i$ , otteniamo un risultato noto (elemento infinitesimo di volume):

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\Delta\vec{x}_{(1)}, \Delta\vec{x}_{(2)}, \dots, \Delta\vec{x}_{(n)}) &= f dx_{(1)}^1 dx_{(2)}^2 \dots dx_{(n)}^n + 0 + \dots + 0 \\ &= f dx^1 dx^2 \dots dx^n \equiv dV. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Se è definita una carta ( $U \subseteq \mathcal{M}$ ,  $\phi = x^i$ ) in cui la  $n$ -forma forma<sup>14</sup> un campo, ovvero è definita in ogni punto del sottospazio  $U$ , possiamo definire il volume di  $U$  come

$$V = \int_U \tilde{w} = \int_{\phi(U)} f dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (3.80)$$

dove ora  $f = f \circ \phi^{-1} = f(x^i)$  per tutti i  $P(x^i) \in U$ .

Considerando un cambio di coordinate  $y^i = y^i(x^i) = \phi' \in U$  si ha, assumendo per semplicità  $n = 2$

$$\int_U \tilde{w} = \int_{\phi(U)} f(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = \int_{\phi'(U)} \left( \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right) f(y^1, y^2) dy^1 dy^2, \quad (3.81)$$

<sup>13</sup>Poiché lo spazio vettoriale generato da una  $n$ -forma è 1-dimensionale per definizione.

<sup>14</sup>Mi scuso per il gioco di parole.

o, per  $n \geq 2$

$$V = \int_U \tilde{w} = \int_{\phi'(U)} f(y)J(y)d^m y, \quad (3.82)$$

dove  $J$  è lo Jacobiano della matrice di trasformazione  $\frac{\partial x}{\partial y}$ , che mostra che  $V$  è indipendente dalle coordinate scelte.

Data ora una sottovarietà  $\mathcal{S}$  di dimensione  $n-1$  ci aspettiamo di poter definire l'area infinitesima di una ipersuperficie  $(n-1)$ -dimensionale attorno al punto  $P$  attraverso una  $(n-1)$ -forma.

Applichiamo il volume  $\tilde{w}$  appena definito ad un vettore  $\vec{v} \in T_P^{(\mathcal{M})} \notin T_P^{(\mathcal{S})}$ , ovvero  $\vec{v}$  non è rappresentato da una combinazione lineare di vettori in  $T_P^{(\mathcal{S})}$ .

Abbiamo già ricavato l'espressione di una  $(n-1)$ -forma  $\tilde{A} = (\tilde{w}(\vec{v}, \cdot, \dots, \cdot))$  tramite l'equazione 3.71, la quale se applicata a  $n-1$  vettori  $\vec{s}_{(k)} \in T_P^{(\mathcal{S})}$ , ci restituisce l'area della superficie infinitesima

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\vec{v}, \vec{s}_{(1)}, \vec{s}_{(2)}, \dots, \vec{s}_{(n-1)}) &= \tilde{A}(\vec{s}_{(1)}, \vec{s}_{(2)}, \dots, \vec{s}_{(n-1)}) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} v f \tilde{e}^1(\vec{s}_{(1)}) \wedge \tilde{e}^2(\vec{s}_{(2)}) \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{n-1}(\vec{s}_{(n-1)}) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} v f dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1} \equiv dA, \end{aligned} \quad (3.83)$$

in cui abbiamo assunto  $\vec{v} = v\vec{e}_n$  e ancora la base duale per semplicità. L'area del sottospazio  $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$  è data dall'integrale

$$A = \int_{\Sigma} \tilde{A} = \int_{\phi(\Sigma)} f v dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1}. \quad (3.84)$$

Effettuando un generico cambio di coordinate tale quantità rimane invariata, avremo

$$\tilde{A} \rightarrow J^{n-1} \tilde{A}', \quad (3.85)$$

dove, ancora,  $J^{n-1}$  è il Jacobiano della trasformazione ristretta alla ipersuperficie  $\mathcal{S}$ .

Si possono rendere gli elementi di volume e di area compatibili con la metrica sostituendo  $\sqrt{|\det(g')|}$  al posto del Jacobiano. Infatti assumendo la presenza sulla varietà  $\mathcal{M}$  un campo tensoriale metrico in forma canonica ( $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ ), abbiamo, direttamente dalla legge di trasformazione  $g' = \Lambda^T g \Lambda$ ,

$$\det(g') = \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(g) \det(\Lambda^T \Lambda) = \det(g) \det^2(\Lambda) = \det(g) \det J^2 = \pm J^2, \quad (3.86)$$

dal momento che il determinante del tensore metrico in forma canonica è uguale a  $\pm 1$ , dalla quale otteniamo

$$J = \sqrt{|\det(g')|}. \quad (3.87)$$

Possiamo quindi scrivere il volume di ogni sottospazio  $U \subseteq \mathcal{M}$  come

$$V = \int_U \tilde{w}_g = \int_{\phi(U)} \sqrt{|\det(g')|} d^m y, \quad (3.88)$$

dove  $\tilde{w}_g$  è chiamato volume naturale, ovvero la  $n$ -forma di volume in cui  $f = 1$ , e dove ora  $\phi = y^i$  è una generica carta per  $U$ .

Analogamente l'area di una ipersuperficie  $\Sigma$  non contenente  $\vec{e}_n$

$$A = \int_U \tilde{A}_g = \int_{\phi(\Sigma)} \sqrt{|\det(g^{(n-1)})|} dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1}. \quad (3.89)$$

Giungiamo quindi all'importante conclusione che il tensore metrico ci permette di definire tutte le nozioni geometriche di grande interesse, dalla lunghezza di una curva al volume di ogni insieme aperto della varietà.

### 3.5 Notazione astratta degli indici

A rigore di una maggiore chiarezza è utile specificare una notazione astratta degli indici che nella forma è soltanto una trascrizione delle componenti di un tensore ma può risultare utile e immediata.[1] L'idea generale è quella di evitare di dover definire una base per i tensori ma usare comunque una notazione che ne rispecchi le componenti delle basi dei tensori.

Un tensore di tipo  $(m,n)$  sarà denotata con una lettera seguita da  $m$  indici latini controvarianti e  $n$  indici latini covarianti,  $T^{a_1, \dots, a_m}_{b_1, \dots, b_n}$ . Gli indici latini ci dicono il numero e il tipo di oggetti su cui agisce il tensore, non più le componenti della base. Ogni lettera minuscola latina può essere posta in qualsiasi posizione ma in un'equazione la stessa lettera deve essere usata a rappresentare la stessa posizione in entrambi i lati dell'equazione. Possiamo denotare la contrazione di un tensore utilizzando la stessa lettera e ripetendo l'indice nelle slot da contrarre. Così  $T^{ijk}_{jl}$  rappresenta un tensore di tipo  $(2,1)$ , ottenuto contraendo il secondo indice controvariante col primo covariante.

Utilizzando questa notazione astratta possiamo scrivere vere equazioni tensoriali pur non introducendo alcuna base. Se al contrario una base è stata introdotta possiamo considerare le componenti e scrivere equazioni per esse. Per distinguere il tensore dalle sue componenti, quest'ultime saranno scritte nelle equazioni utilizzando lettere greche. Quindi  $T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\lambda}$  rappresenta le componenti di base del tensore  $T^{ijk}_{lm}$ . Come si nota questa notazione non si riflette sulla forma delle equazioni che appare inalterata ma il vero vantaggio di questa notazione è che non si è obbligati a fornire una base magari non necessaria e si è comunque assicurati che tutte le equazioni scritte con la notazione indiciale valgano per i tensori, dal momento che solo equazioni tensoriali possono essere scritte in questa notazione.

Detto ciò non dovrà scaturire alcun dubbio trovandosi di fronte ad un vettore espresso solamente da  $T^\mu$ , in cui è chiaro che si stia parlando di un tensore  $(1,0)$ , un vettore appunto, e in cui la base e la freccia sopra il simbolo di vettore sono sottintese ai fini di una notazione più coincisa.

### 3.6 Derivata covariante

Sfruttando la sola definizione di varietà siamo giunti a poter definire su di essa diverse nozioni utili; abbiamo definito carte, funzioni, vettori e, generalizzando sempre più, tensori. Necessitiamo a questo punto di una ulteriore struttura formale sul nostro spaziotempo. Come già detto nella sezione 3.1.3 possiamo per il momento combinare linearmente solo vettori appartenenti allo stesso spazio tangente del punto della varietà considerato; caratterizzare una varietà con una *connessione* significa fornire un modo di poter trasportare i vettori da uno spazio tangente ad un altro. La sua utilità diverrà presto chiara, per il momento riteniamo necessaria l'estensione del concetto di derivata a quantità tensoriali.

In generale pensiamo che l'operazione di derivata quantifichi il cambiamento di qualcosa rispetto alla variazione (infinitesima) di un determinato parametro.

In uno spazio piatto, in coordinate ineziali<sup>15</sup>, l'operatore di derivata parziale  $\partial_\mu$  è una mappa da tensori di tipo  $(m, n)$  a tensore di tipo  $(m, n+1)$  che agisce linearmente sui suoi argomenti e obbedisce alle regole di Leibniz sul prodotto tra tensori; il problema è che la mappa fornita dalla derivata parziale dipende dal sistema di coordinate usato. Altro difetto non meno rilevante risiede nel fatto che la derivata parziale non si trasforma seguendo le regole espresse in precedenza del formalismo tensoriale.

Abbiamo quindi bisogno di un operatore che nello spazio piatto di riduca ad una derivata parziale ma che in una generica varietà si trasformi come un tensore e in aggiunta che sia indipendente dalle coordinate. Lo indichiamo con  $\nabla$  ed è chiamato **derivata covariante**; le sue proprietà sono una stesura formale del comportamento che ci si aspetta da questo nuovo operatore.

<sup>15</sup>Ovvero con  $g_{\mu\nu}$  in forma canonica in modo che  $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ .

Iniziamo richiedendo che  $\nabla$  sia una mappa da tensori di tipo  $(p, q)$  a tensori di tipo  $(p, q + 1)$  con le due seguenti proprietà:

1. linearità:

$$\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S; \quad (3.90)$$

2. regola di Leibniz:

$$\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T(\nabla S). \quad (3.91)$$

Se  $\nabla$  obbedisce alle regole di Leibniz può sempre essere scritto come una derivata parziale più una correzione sotto forma di trasformazione lineare. [2] Consideriamo inizialmente la derivata covariante di un vettore  $V^\mu$ . Per ogni direzione  $\mu$ , la derivata covariante  $\nabla_\mu$  sarà fornita quindi dalla derivata parziale  $\partial_\mu$  più una correzione data da un insieme di  $n$  matrici quadrate ( $n \times n$  dove  $n$  è la dimensione della varietà)  $(\Gamma_\mu)^\nu{}_\sigma$ . Solitamente le parentesi non sono trascritte e scriviamo tali matrici, dette *coefficienti di connessione*, con una disposizione casuale degli indici  $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$  che richiama la notazione tensoriale ma ciò non deve confondere poiché vedremo a breve che non si tratta di un tensore. Abbiamo allora

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma. \quad (3.92)$$

Nota la forma della derivata covariante di un vettore in termini della derivata parziale studiamo le proprietà di trasformazione di  $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$ . Riconosciamo nella parte sinistra dell'equazione un tensore (1,1), quindi, con un generico cambio di coordinate  $x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} x^\mu = \Lambda^{\mu'}{}_\mu x^\mu$ , si trasformerà

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \nabla_\mu V^\nu \quad (3.93)$$

Ora sfruttiamo prima la parte sinistra di questa espressione, la espandiamo utilizzando l'equazione 3.92 e trasformiamo le parti che conosciamo, lasciando inalterato il termine  $\Gamma_{\mu'\sigma'}^{\nu'}$ . Otteniamo così

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'\sigma'}^{\nu'} V^{\sigma'} \\ &= \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \partial_\mu V^\nu + \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \Lambda^{\sigma'}{}_\nu + \Gamma_{\mu'\sigma'}^{\nu'} \Lambda^{\sigma'}{}_\nu V^\sigma. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Allo stesso modo possiamo espandere  $\nabla_\mu V^\nu$  nel lato destro della 3.93:

$$\Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \nabla_\mu V^\nu = \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \partial_\mu V^\nu + \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma. \quad (3.95)$$

Eguagliando le ultime due equazione e manipolando con pochi passaggi algebrici otteniamo la legge di trasformazione per i coefficienti di connessione:

$$\Gamma_{\mu'\sigma'}^{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\sigma'}{}_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\sigma'}{}_\nu \partial_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\sigma \quad (3.96)$$

che, come anticipato, non rappresenta una legge di trasformazione tensoriale<sup>16</sup>, a causa del secondo termine che però fa sì che la nuova derivata introdotta si trasformi seguendo le leggi tensoriali.

In modo analogo a quanto detto nel caso di un vettore, la derivata covariante di una 1-forma sarà espressa come una derivata parziale più una trasformazione lineare. In generale non c'è alcun motivo

<sup>16</sup>Vedi 3.37



di supporre che le matrici rappresentanti la trasformazione siano legate ai coefficienti  $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$  introdotti per il vettore controvariante. Avremo perciò

$$\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma w_\sigma, \quad (3.97)$$

dove  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma$  è il nuovo insieme di matrici per ogni  $\mu$ , ed è immediato verificare che per esse valgono le stesse leggi di trasformazione trovate per  $\Gamma$  in 3.96 con l'unica differenza nel segno che da meno ("-") diventa più ("+").

Per proseguire con la trattazione aggiungiamo altre due proprietà che vogliamo siano verificate dalla derivata covariante, essa

3. commuta con le contrazioni:

$$\nabla_\mu (T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_\mu^\lambda{}_{\lambda\rho}, \quad (3.98)$$

4. applicata a scalari si riduce alla derivata parziale:

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \quad (3.99)$$

Guardiamo subito cosa implicano. Data un campo di 1-forme  $w_\mu$  e un campo vettoriale  $V^\mu$  possiamo calcolare la derivata covariante dello scalare definito da  $w_\mu V^\mu$  per ottenere così

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (w_\lambda V^\lambda) &= (\nabla_\mu w_\lambda) V^\lambda + w_\lambda (\nabla_\mu V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu w_\lambda) V^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma w_\sigma V^\lambda + w_\lambda (\partial_\mu V^\lambda) + w_\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\lambda V^\rho. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Ma, essendo  $w_\lambda V^\lambda$  uno scalare, la derivata covariante deve ridursi a derivata parziale:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (w_\lambda V^\lambda) &= \partial_\mu (w_\lambda V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu w_\lambda) V^\lambda + w_\lambda (\partial_\mu V^\lambda). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Questo si verifica se i termini contenenti i coefficienti di connessione nella 3.100 si annullano. Mettendo a posto gli indici otteniamo:

$$0 = \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma w_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma w_\sigma V^\lambda. \quad (3.102)$$

In questa espressione  $w_\sigma$  e  $V^\lambda$  sono completamente arbitrari, così

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma = -\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma. \quad (3.103)$$

Quindi le due proprietà aggiunte ci permettono di definire la derivata covariante di una 1-forma utilizzando gli stessi coefficienti di connessione usati per la derivata del vettore, con il segno cambiato:

$$\nabla_\mu w_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda w_\lambda. \quad (3.104)$$

A questo punto non ci sorprenderà scoprire che i coefficienti di connessione contengono tutte le informazioni necessarie per poter studiare la derivata covariante di un tensore di rango<sup>17</sup> qualsiasi.

La formula appare complicata ma è invece abbastanza immediata dopo quanto già discusso, per ogni indice controvariante del tensore si introdurrà un termine con un solo  $+\Gamma$ , per ogni indice basso (covariante) un termine con un singolo  $-\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} - \dots \end{aligned} \quad (3.105)$$

<sup>17</sup>Rango è utilizzato qui come sinonimo di tipo di tensore

Questa è l'espressione generale per la derivata covariante, alle volte si utilizza una notazione più concisa; viene utilizzata la virgola al posto della derivata parziale e il punto e virgola al posto della derivata covariante:

$$\nabla_{\sigma} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l; \sigma}. \quad (3.106)$$

Nel capitolo 4 sarà utilizzata una forma leggermente differente di derivata covariante detta derivata covariante modificata espressa graficamente da un "circoletto" sopra il simbolo di derivata

$$\overset{\circ}{\nabla}_k = \nabla_k + 2S_{kl}{}^l \quad (3.107)$$

con un termine aggiuntivo rispetto a quanto studiato finora derivante da una contrazione del tensore di torsione definito nella prossima sezione in 3.115.

### 3.7 Trasporto parallelo

Per definire una derivata covariante abbiamo quindi bisogno di equipaggiare il nostro spazio fisico con una connessione, specificata, nel sistema di riferimento adottato, da un insieme di coefficienti  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ ; in quattro dimensioni avrà ad esempio  $n^3 = 64$  componenti indipendenti. Una varietà in cui è definita una connessione diviene uno *spazio linearmente connesso* e indicato con  $\mathcal{L}_4$ , in cui il 4 rappresenta la dimensione considerando qui lo spaziotempo.

Dato un operatore di derivata  $\nabla_a$  possiamo definire sulla varietà la nozione di *trasporto parallelo* di un generico tensore T lungo una certa curva  $\gamma = x^{\mu}(\lambda)$ .

Il trasporto parallelo è considerato la generalizzazione a spazi curvi del concetto di mantenere un vettore costante spostandolo lungo la curva. La differenza cruciale tra spazi piatti e curvi risiede nel fatto che per i secondi il risultato di un trasporto parallelo di un generico tensore, tra due punti della varietà, dipende dal percorso seguito.

In uno spazio piatto, data una curva  $x^{\mu}(\lambda)$ , la richiesta che un tensore  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$  sia costante lungo tale curva si ripercuote sulle sue componenti che devono essere costanti:

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0 \quad (3.108)$$

Per far sì che questa sia una espressione tensoriale sostituiamo semplicemente le derivate parziali con quelle covarianti e in tal modo definiamo la derivata direzionale covariante

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \nabla_{\mu} \quad (3.109)$$

che rappresenta una mappa da tensori di tipo (m,n) a tensori di tipo (m,n) definita lungo la curva. Allora possiamo definire il trasporto parallelo di un generico tensore T lungo la curva  $x^{\mu}(\lambda)$  richiedendo che la derivata covariante di T si annulli lungo tutta la curva:

$$\left( \frac{D}{d\lambda} T \right)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} \nabla_{\sigma} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0 \quad (3.110)$$

Nel caso di un vettore  $V^{\mu}$ , esplicitando la definizione di derivata covariante si ottiene:

$$\frac{d}{d\lambda} V^{\mu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} V^{\rho} = 0 \quad (3.111)$$

Possiamo notare che l'equazione per il trasporto parallelo è un'equazione differenziale al primo ordine; quindi dato un tensore ad un certo punto della curva ci sarà un unico modo di muoverlo in modo

continuo lungo la curva in modo che sia sempre verificata l'equazione 3.110.

La nozione di trasporto parallelo è visivamente dipendente dalla connessione. Introducendo una metrica si può richiedere che la connessione sia compatibile con la metrica imponendo la condizione  $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$  e ciò porta a dire che la metrica è trasportata sempre in modo parallelo rispetto a questa connessione, cioè

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.112)$$

in cui viene preservata la norma dei vettori trasportati.

In aggiunta la nozione di trasporto parallelo ci porta direttamente a discutere di *geodetiche*. Una geodetica è la generalizzazione della nozione di linea retta in spazi curvi. Possiamo certamente dire che la linea retta è il percorso tra due punti della varietà avente distanza minima e quindi applicare la stessa definizione alle geodetiche; in alternativa possiamo però affermare che una geodetica è una curva il cui vettore tangente è sempre trasportato in modo parallelo<sup>18</sup>. Utilizzando quest'ultima, data una curva  $x^\mu(\lambda)$  e il suo vettore tangente  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , la condizione richiesta diviene semplicemente

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad (3.113)$$

o in alternativa

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (3.114)$$

Questa è l'equazione che definisce una geodetica che fisicamente in GR rappresenta la traiettoria seguita da una particella materiale in presenza di un campo gravitazionale; nel caso in cui possiamo scegliere coordinate in cui  $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = 0$  riproduce l'equazione di una linea retta,  $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0$ . Evidentemente possiamo definire un grande numero di connessioni sulla varietà e ognuna di queste produrrà una diversa nozione di derivata covariante; in GR questa libertà non produce grandi preoccupazioni poiché ogni metrica definisce una unica connessione.

Data una connessione specificata da  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  si può trovare immediatamente un'altra connessione solamente permutando gli indici covarianti. Infatti l'insieme dei coefficienti  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  si trasforma in accordo con la legge di trasformazione 3.96 dal momento che le derivate parziali dell'ultimo termine commutano. In particolare possiamo associare ad ogni connessione il *tensore di torsione* definito considerando la parte antisimmetrica della connessione

$$S_{ij}{}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \equiv \Gamma_{[ij]}^k. \quad (3.115)$$

Questa combinazione dei coefficienti di connessione si trasforma come un tensore ed è fondamentale per i nostri scopi poiché con l'esistenza di tale tensore ci distacciamo dalla teoria della relatività generale di Einstein e approdiamo in quella di Einstein-Cartan.

Nella teoria originale infatti la connessione è assunta essere simmetrica, quindi libera da torsione, e compatibile con la metrica. Queste due condizioni permettono di poter derivare una unica connessione direttamente dalla metrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (3.116)$$

chiamata con diversi nomi: connessione di Christoffel, connessione di Levi-Civita o anche connessione di Riemann. Talvolta i coefficienti della connessione metrica sono chiamati simboli di Christoffel e sono espressi da  $\{\mu\nu\}^\lambda$ .

<sup>18</sup>Studieremo che le due definizioni non si equivalgono introducendo una torsione allo spaziotempo.

Equipaggiando lo spaziotempo  $\mathcal{M}^4$  con una connessione abbiamo ottenuto uno spazio linearmente connesso (o  $\mathcal{L}^4$ ), come già menzionato; più nello specifico se tale connessione è simmetrica diremo di trovarci nello spaziotempo di Riemann indicato con  $\mathcal{V}_4$ , mentre se è introdotta una connessione antisimmetrica denoteremo lo spazio come spaziotempo di Riemann-Cartan, in simboli  $\mathcal{U}_4$ , come verrà esplicitato nel capitolo 4.

### 3.8 Curvatura

La derivata covariante e il trasporto parallelo ci forniscono una struttura matematica capace di formalizzare il concetto di *curvatura*. La nostra nozione intuitiva di curvatura dipende dalla geometria estrinseca della varietà, che caratterizza lo spazio immergendolo in uno più grande<sup>19</sup>, mentre la curvatura che ci accingiamo a definire è una proprietà della geometria intrinseca dello spazio e può essere misurata da osservatori confinati nella varietà.

La curvatura (intrinseca) è quantificata numericamente dal tensore di Riemann e deriva, come vedremo, dalla connessione. L'utilità di avere una quantità tensoriale risiede nel fatto che sarà quindi possibile avere una descrizione locale della curvatura ad ogni punto della varietà. Senza entrare troppo nei dettagli vediamo che forma dovrà avere questo tensore. Se la varietà appare piatta in una regione sufficientemente piccola possiamo definire un loop (percorso chiuso) utilizzando solamente due vettori  $A^\mu$  e  $B^\nu$  che specificano due direzioni. Se immaginiamo di trasportare parallelamente un vettore  $V^\sigma$  prima lungo la direzione di  $A^\mu$ , poi lungo quella di  $B^\nu$ , poi torniamo indietro lungo  $A^\mu$  e  $B^\nu$ , ci ritroviamo nel punto da cui siamo partiti. Se effettuando un percorso chiuso non si ritorna al punto iniziale diciamo che la varietà è curva e dovrà esserci un tensore che quantifichi il cambiamento del vettore trasportato (parallelamente) con un loop verso il punto iniziale, sarà quindi una trasformazione lineare sul vettore che coinvolgerà quindi sia indici covarianti che controvarianti. Come prima cosa notiamo che dovrà dipendere da i due vettori  $A$  e  $B$  che definiscono il loop; quindi il tensore cercato avrà sicuramente due indici covarianti da contrarre con quelli di  $A^\mu$  e  $B^\nu$ . Scambiare l'ordine dei due vettori corrisponde a percorrere il loop nella direzione opposta e questo fornirà una risposta inversa rispetto a quella iniziale; quindi il tensore dovrà essere antisimmetrico rispetto a questi due indici. Ci aspettiamo quindi che l'espressione che quantifichi il cambiamento subito dal vettore considerato,  $\delta V^p$ , quando trasportata lungo un loop sia della forma

$$\delta V^p = R_{\mu\nu\sigma}{}^p A^\mu B^\nu V^\sigma \quad (3.117)$$

dove  $R_{\mu\nu\sigma}{}^p$  è un tensore(1,3) chiamato *tensore di Riemann*, o semplicemente tensore di curvatura.

Per ricavare l'espressione del tensore di Riemann in funzione della connessione sfruttiamo il commutatore di due derivate covarianti. La derivata covariante di un tensore in una certa direzione quantifica il cambiamento subito da questo quando trasportato parallelamente, il commutatore<sup>20</sup> di due derivate covarianti misura la differenza tra il trasportare il vettore prima lungo una direzione e poi lungo l'altra

<sup>19</sup>Con almeno una dimensione in più.

<sup>20</sup>Il commutatore è un operatore differenziale che quantifica lo scostamento dalla proprietà commutativa del prodotto degli elementi a cui è associato. Se è nullo si dice che i due elementi commutano.

e il trasportarlo seguendo l'ordine opposto. Considerando un vettore  $V^\rho$  abbiamo

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\
&= \partial_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\nu V^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho V^\sigma \\
&\quad + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho
\end{aligned} \tag{3.118}$$

dove nell'ultimo passaggio sono stati messi in ordine gli indici e cancellati alcuni termini che sono eguali dopo la sostituzione ( $\mu \leftrightarrow \nu$ ). Nell'ultimo termine riconosciamo subito il tensore di torsione. Riscriviamo con

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho V^\sigma - S_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \tag{3.119}$$

dove il tensore di Riemann è stato identificato con

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda = 2\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\sigma}^\rho + 2\Gamma_{[\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu]\sigma}^\lambda \tag{3.120}$$

che rappresenta la relazione cercata.

Possiamo notare che il tensore di Riemann misura la parte del commutatore delle derivate covarianti proporzionale al campo vettoriale stesso mentre il tensore di torsione misura la parte proporzionale alla derivata covariante del campo e in assenza di torsione l'azione del commutatore sul campo è semplicemente una trasformazione moltiplicativa.

Entrambi i tensori di cui sopra possono essere viste come mappe multilineari, il tensore di torsione come una mappa che va da due campi vettoriali ad un terzo

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{3.121}$$

e il tensore di Riemann come una mappa da tre campi vettoriali ad un quarto, cioè

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \tag{3.122}$$

Sottolineo che in queste espressioni  $\nabla_X$  indica la derivata covariante lungo il campo X, in componenti sarebbe  $\nabla_X = X^\mu \nabla_\mu$ . L'ultimo termine della 3.122 coinvolge il commutatore  $[X, Y]$  e si annulla quando X e Y sono basi coordinate dei campi vettoriali.

Nel caso in cui la connessione è derivata dalla metrica, la curvatura associata può essere attribuita alla metrica stessa; questa identificazione ci permette di attribuire un senso alla nozione informale che uno spazio la cui metrica è euclidea (o è la metrica di Minkowski) è piatto. Infatti se esiste un sistema di coordinate in cui le componenti della metrica sono costanti, il tensore di Riemann si annullerà. Ovvero se siamo in un sistema di riferimento in cui  $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$  ovunque allora  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$  e  $\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$  e dalla definizione del tensore di Riemann otteniamo  $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = 0$ . Essendo questa una equazione tensoriale, è indipendente dalle coordinate quindi se vale in un sistema di coordinate deve valere in tutti gli altri e quindi la condizione che il tensore di Riemann si annulli è necessaria per poter trovare un sistema di coordinate in cui le componenti della metrica siano costanti dappertutto.

### 3.8.1 Proprietà del tensore di Riemann

Direttamente dalla definizione abbiamo che il tensore di Riemann soddisfa

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = -R_{\nu\mu\sigma}{}^\rho, \tag{3.123}$$

ovvero è antisimmetrico negli primi due indici covarianti.

Le altre proprietà sono strettamente legate al tipo di simmetria della connessione. Affrontiamo in questo contesto il caso specifico di connessione simmetrica, studiamo quindi la geometria detta Riemanniana. Generalizzeremo le proprietà qui elencate al caso di una connessione antisimmetrica nel prossimo capitolo in cui sarà necessario passare allo studio della geometria di Riemann-Cartan.

Conosciamo già la grande utilità della metrica e vogliamo sfruttarla anche qui poiché nella trattazione fisica delle varietà si definisce sempre su di essa un campo tensoriale metrico, vista la necessità di compiere misure su di essa. Consideriamo quindi una connessione metrica oltre che simmetrica per poter sfruttare il tensore di Riemann con tutti gli indici in basso, ottenuto da

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu\sigma}{}^{\lambda}. \quad (3.124)$$

Direttamente dalla definizione fornita della curvatura deriva che il tensore di Riemann è antisimmetrico nei suoi primi due indici e negli ultimi due,

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\sigma\rho} \quad (3.125)$$

e

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.126)$$

la seconda di queste è equivalente a 3.123 ed è valida nel anche nel caso più generale. Scambiando la prima coppia di indici con la seconda rimane invariato:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\sigma\rho\mu\nu}. \quad (3.127)$$

La antisimmetrizzazione di tre indici annulla la curvatura,

$$R_{[\mu\nu\sigma]\rho} = 0, \quad (3.128)$$

detta *seconda identità*<sup>21</sup> (v. [7]) ed è verificata l'identità di Bianchi

$$\nabla_{[\lambda} R_{\mu\nu]\sigma\rho} = 0 \quad (3.129)$$

Sfruttando tutte queste simmetrie riduciamo le componenti indipendenti del tensore di curvatura dalle  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$  iniziali a "sole" 20. [4]

Può essere utile manipolare il nostro tensore, ad esempio contraendo un indice si ottiene il tensore di Ricci

$$R_{\nu\sigma} := R_{\rho\nu\sigma}{}^{\rho}, \quad (3.130)$$

il quale se associato alla connessione di Christoffel risulta automaticamente simmetrico:

$$R_{\nu\sigma} = R_{\sigma\nu}. \quad (3.131)$$

La traccia del tensore di Ricci è detta scalare di Ricci (o curvatura scalare),

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.132)$$

Definiamo infine il tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (3.133)$$

<sup>21</sup>L'antisimmetrizzazione nei primi due indici covarianti è detta *prima identità* [7].

che è simmetrico essendo costituito dal tensore di Ricci e dalla metrica, entrambi simmetrici. Detto ciò considero terminata questa parte preliminare in cui sono state presentate le basi necessarie per studiare in modo formale la teoria della relatività generale di Einstein. La sua teoria sfrutta la geometria Riemanniana per descrivere le proprietà dello spazio. Il nostro scopo primario è però quello di deviare da tale teoria per cui nel prossimo capitolo approdiamo finalmente nello studio della geometria di Riemann-Cartan che come sarà presto chiaro comporta una leggera modifica alla geometria di Riemann.

## Capitolo 4

# Teoria $\mathcal{U}_4$

### 4.1 Geometria di Einstein-Cartan

Come già anticipato nel capitolo precedente il tensore di torsione è definito sulla varietà come la parte antisimmetrica della connessione  $\Gamma_{ij}^k$ , ovvero

$$S_{ij}{}^k := \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \equiv \Gamma_{[ij]}^k, \quad (4.1)$$

detto anche tensore di torsione di Cartan in nome di colui che per primo l'ha introdotto sullo spaziotempo. Le componenti indipendenti del tensore di Cartan sono 24 e sono ottenute specificando l'antisimmetria della connessione, la quale porta con se 64 componenti indipendenti. Il passaggio logico successivo consiste nel legare questo tensore allo spin quantomeccanico e studiare se può essere considerato, alla stregua del tensore energia-impulso  $\sigma^{ij}$ , una sorgente di campo gravitazionale, quindi una nuova caratterizzazione dello spaziotempo.

Da un punto di vista prettamente geometrico possiamo dire che la torsione fa sì che tentando di effettuare un percorso chiuso, sfruttando, in analogia con lo studio della curvatura, il trasporto parallelo di un campo vettoriale, non si ritorna nel punto iniziale. Ovvero, nel caso di uno spazio curvo abbiamo trovato che il vettore trasportato parallelamente lungo il percorso chiuso cambia direzione tornando nel punto iniziale, nel caso di uno spazio che presenta torsione il vettore trasportato risulta invece traslato rispetto al punto di partenza; naturalmente se in uno spazio sono presenti entrambe (curvatura e torsione) il vettore presenterà una traslazione e una rotazione; il tutto è schematizzato in figura 4.1. Quindi tentando di costruire un percorso chiuso (infinitesimo), in generale questo non si chiuderà e il fallimento di tale chiusura risulta proporzionale al tensore di torsione.

Nel seguito sarà utile una ulteriore definizione, quella del tensore di torsione modificato

$$T_{ij}{}^k := S_{ij}{}^k + 2\delta_{[i}^k S_{j]l}{}^l \quad (4.2)$$

che differisce con la sua traccia dal tensore di torsione.

In ogni punto dello spazio<sup>1</sup> è presente un campo tensoriale metrico  $g_{ij} = g_{ji}(x)$  con le proprietà stabilite nel paragrafo 3.2. In  $\mathcal{M}_4$  in particolare abbiamo la metrica di Minkowski  $\eta$  espressa in forma canonica con  $g_{ij} = \eta_{ij} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ <sup>2</sup>. Denoteremo quindi lo spazio con  $(\mathcal{L}^4, g)$ . Definisco ora il tensore di *nonmetricità*

$$Q_{\mu\nu\lambda} := -\nabla_{\mu}g_{\nu\lambda}, \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>Più propriamente dal momento che è stata introdotta una connessione lo spazio è detto spazio linearmente connesso,  $\mathcal{L}^4$ .

<sup>2</sup>Quindi con segnatura uguale a -2.



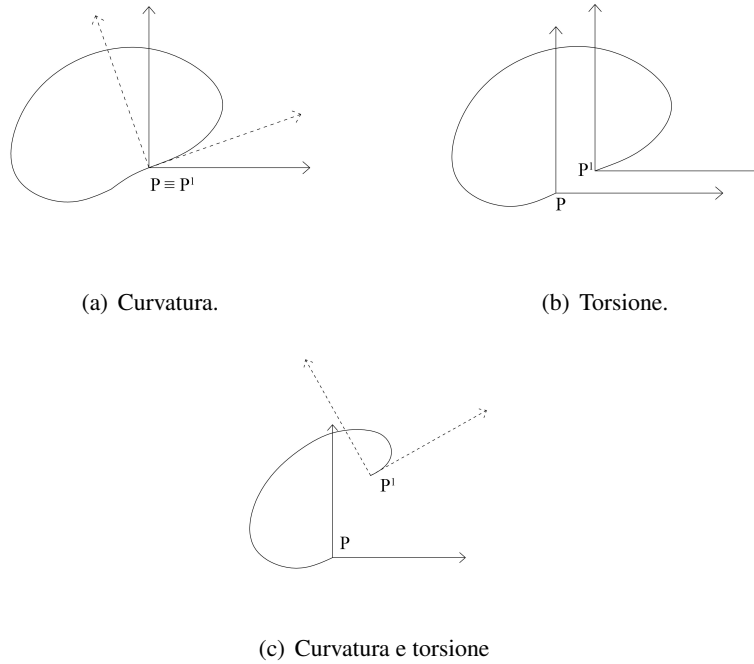


Figura 4.1: Rappresentazione grafica della curvatura e delle torsione in un loop infinitesimo nello spaziotempo.

che indica quanto la connessione non sia metrica<sup>3</sup>.

L'utilità di aver definito un tensore metrico in ogni punto della varietà ci permette di effettuare misure locali di distanze e angoli, come discusso, infatti l'intervallo infinitesimo  $ds^2$  tra due punti  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  è determinato da

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{4.4}$$

Questo però rimane invariante trasportandolo in modo parallelo lungo la varietà solo se la connessione è compatibile con la metrica, ovvero se il tensore metrico è sempre trasportato parallelamente  $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$ ; possiamo quindi dire che il tensore di nonmetricità deve necessariamente annullarsi

$$Q_{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{4.5}$$

Ciò garantisce che lunghezze e angoli sono preservati dopo uno spostamento parallelo. Anche le evidenze sperimentali che supportano la teoria della relatività speciale confermano questa struttura locale di Minkowski dello spaziotempo.[11] Esplicitando questa equazione con la definizione di derivata covariante si ottiene

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\nu\rho} = 0, \tag{4.6}$$

ovvero

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\nu\rho}, \tag{4.7}$$

ora permutando gli indici  $\mu, \nu, \lambda$ , si ottengono immediatamente due espressioni analoghe

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\lambda\rho} \tag{4.8}$$

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} \tag{4.9}$$

<sup>3</sup>Infatti il tensore di non metricità quantifica la variazione subita dalla metrica se trasportata in modo parallelo.

Sommando le equazioni 4.7 e 4.8 e sottraendo la 4.9 abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\nu\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \\ &= g_{\rho\lambda}(\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\rho) + g_{\nu\rho}(\Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho) + g_{\rho\mu}(\Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho) \\ &= 2g_{\rho\lambda}\Gamma_{(\mu\nu)}^\rho + 2g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda}{}^\rho + 2g_{\rho\mu}S_{\nu\lambda}{}^\rho\end{aligned}\quad (4.10)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata introdotta la parte simmetrica della connessione ed è stata sfruttata due volte la definizione del tensore di torsione 4.1.

Ora si isola la parte simmetrica della connessione e si moltiplica tutti i termini per  $g^{\alpha\lambda} = g^{\alpha\lambda}$

$$\delta_\rho^\alpha \Gamma_{(\mu\nu)}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + g_{\nu\rho}g^{\lambda\alpha}S_{\lambda\mu}{}^\rho + g_{\rho\mu}g^{\lambda\alpha}S_{\lambda\nu}{}^\rho \quad (4.11)$$

in cui è stata sfruttata l'antisimmetria del tensore di torsione per mantenere i segni positivi nei termini che lo contengono.

Considerando ora che la connessione è scomponibile nella sua parte simmetrica e in quella antisimmetrica

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha + \Gamma_{[\mu\nu]}^\alpha \\ &= \Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha + S_{\mu\nu}{}^\alpha\end{aligned}\quad (4.12)$$

e notando che tutto il primo termine a secondo membro della 4.11 è analogo all'espressione 3.116 che definisce una connessione metrica e simmetrica<sup>4</sup> ed è esprimibile in forma concisa come

$$\{\mu\nu\}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (4.13)$$

possiamo scrivere la 4.11 come

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \{\mu\nu\}^\alpha + S_{\mu\nu}{}^\alpha + g_{\nu\rho}g^{\lambda\alpha}S_{\lambda\mu}{}^\rho + g_{\rho\mu}g^{\lambda\alpha}S_{\lambda\nu}{}^\rho \quad (4.14)$$

che esprime l'espressione della connessione lineare metrica in funzione del tensore metrico e del tensore di torsione. Una ulteriore definizione ci permette di raggruppare i termini correttivi rispetto all'espressione 3.116 in un unico tensore

$$\begin{aligned}K_{\mu\nu}{}^\alpha &= S_{\mu\nu}{}^\alpha + g_{\nu\rho}g^{\lambda\alpha}S_{\lambda\mu}{}^\rho + g_{\rho\mu}g^{\lambda\alpha}S_{\lambda\nu}{}^\rho \\ &= S_{\mu\nu}{}^\alpha + S_{\mu\nu}{}^\alpha + S_{\nu\mu}{}^\alpha \\ &= S_{\mu\nu}{}^\alpha + 2S_{(\mu\nu)}{}^\alpha\end{aligned}\quad (4.15)$$

detto tensore di *contorsione* che contiene una parte antisimmetrica derivata dal tensore di torsione e una parte simmetrica. L'equazione 4.14 esprime una forma più generale della connessione lineare attribuita allo spaziotempo, in cui viene aggiunta la dipendenza rispetto alla parte antisimmetrica della connessione stessa, frutto del tensore di torsione nella 4.15, e ne viene inoltre modificata la parte simmetrica con i restanti termini del tensore di contorsione. Se lo spaziotempo è equipaggiato con una connessione contenenti termini antisimmetrici viene detto spaziotempo di Riemann-Cartan ( $\mathcal{U}_4$ ).  $\mathcal{U}_4$  è quindi lo spazio in cui approdiamo se introduciamo la torsione come nuova proprietà dello spaziotempo di Riemann. A sua volta lo spaziotempo di Riemann  $\mathcal{R}_4$  è stato ottenuto introducendo a quello di Minkowski  $\mathcal{M}_4$

<sup>4</sup>Quindi libera da torsione.

una curvatura. Torsione e curvatura sono espressi entrambi come quantità tensoriali,  $S_{ij}{}^k$  e  $R_{ijk}{}^l$  rispettivamente; un altro tensore introdotto nello spaziotempo è quello di nonmetricità  $Q_{ijk}$ . Inversamente possiamo dire che solo uno spazio linearmente connesso  $\mathcal{L}_4$  sfrutta sulla varietà tutte queste proprietà e su di essa sono automaticamente definiti il tensore metrico, il tensore di curvatura, quello di torsione e quello di nonmetricità (gli ultimi tre attraverso l'introduzione della connessione lineare come struttura portante della varietà), per via di evidenze sperimentali riteniamo pertinente considerare la connessione metrica escludendo dalla varietà  $Q_{ijk}$ , eccoci subito approdare in  $\mathcal{U}_4$ . Non considerare neanche la torsione,  $S_{ij}{}^k = 0$ , ci porta direttamente in  $\mathcal{R}_4$  e per ultimo ritenendo la varietà piatta,  $R_{ijk}{}^l = 0$ , giungiamo in  $\mathcal{M}_4$ , che esclude quindi l'esistenza di tutti i tensori descritti tranne che di quello metrico, dal quale è definito<sup>5</sup>.

Dal punto di vista matematico per ricavare le nuove equazioni di campo si procederà come nel caso della GR; l'unica differenza riguarderà la connessione  $\Gamma$  introdotta che non è più quella simmetrica studiata da Einstein ma sarà espressa dalla 4.14 e che possiamo riscrivere come

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \{\alpha_{\mu\nu}\} + K_{\mu\nu}{}^{\alpha} . \quad (4.16)$$

Questa differenza ci porta subito a dover distinguere le due definizioni di geodetica descritte nel capitolo precedente. Approdando nella geometria di  $\mathcal{U}_4$  l'equazione 3.114 porta direttamente a descrivere curve dette *autoparallele*, quelle curve lungo le quali il vettore tangente alla curva è trasportato sempre in modo parallelo, considerando solo la parte simmetrica della connessione<sup>6</sup>,

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{(\rho\sigma)}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0. \quad (4.17)$$

Questa espressione seppur simmetrica continua ad essere dipendente dal tensore di torsione, infatti  $\Gamma_{(\rho\sigma)}^{\mu} = \{\mu_{\nu}^{\lambda}\} + 2S_{(\rho\sigma)}^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}$ .

La seconda tipologia descrive curve dette *estremali* poiché sono ricavabili con il principio variazionale

$$\delta \int (g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu})^{1/2} = 0 \quad (4.18)$$

in cui si minimizza l'intervallo spaziotemporale  $ds^2$ . In questo caso l'espressione contiene solamente i simboli di Christoffel e coincide con l'equazione delle geodetiche in  $\mathcal{R}_4$ ,

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \{\mu_{\nu}^{\lambda}\} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0. \quad (4.19)$$

Curve estremali e autoparallele coincidono in  $\mathcal{U}_4$  se il tensore di torsione è completamente antisimmetrico,  $S_{ijk} = S_{[ijk]}$ .

Bisogna anche aggiungere che nessuna delle due tipologie di curve rappresenta nella teoria  $\mathcal{U}_4$  l'equazione del moto per una particella materiale per cui curve estremali e autoparallele non ricoprono un ruolo centrale come in GR.

Non ci resta che inserire la connessione più generale anche nella definizione del tensore di curvatura che riporto per chiarezza,

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\sigma}^{\rho} + 2\Gamma_{[\mu|\lambda}^{\rho}\Gamma_{|\nu]\sigma}^{\lambda}, \quad (4.20)$$

<sup>5</sup>Ricordo infatti che  $\mathcal{M}_4$  è stato ricavato da  $\mathcal{L}$  (spazio cartesiano a 3 dimensioni) aggiungendo una dimensione e definendo la metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  al posto di quella euclidea.

<sup>6</sup>Tale restrizione deriva dalla simmetria del prodotto  $dx^{\mu} dx^{\nu} = dx^{\nu} dx^{\mu}$ .

e utilizzando l'espressione esplicita per i coefficienti di connessione la proprietà descritta dall'equazione 3.128 diviene

$$R_{[\mu\nu\sigma]}{}^\rho = 2\nabla_{[\mu}S_{\nu\sigma]}{}^\rho - 4S_{[\mu\nu}{}^\lambda S_{\sigma]\lambda}{}^\rho, \quad (4.21)$$

mentre l'identità di Bianchi diventa ora

$$\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\sigma}{}^\rho = 2S_{[\lambda\mu}{}^\gamma R_{\nu]\gamma\sigma}{}^\rho. \quad (4.22)$$

Il tensore di Ricci definito dalla contrazione  $R_{\nu\sigma} = R_{\rho\nu\sigma}{}^\rho$  rimane di grande utilità anche in  $\mathcal{U}_4$  e il tensore di Einstein continua ad assumere la stessa forma definita in (3.110) tenendo però a mente che questa volta  $G_{\mu\nu}$  e  $R_{\mu\nu}$  non sono più tensori simmetrici. Questa nuova caratteristica discende direttamente dalla nuova connessione utilizzata nello spaziotempo.

A questo punto siamo pronti a definire una lagrangiana opportuna e derivare da questa le equazioni di campo in  $\mathcal{U}_4$  che vanno a sostituire le equazioni di campo di Einstein della GR introdotte in  $\mathcal{R}_4$ . Questo è proprio lo scopo della sezione successiva.

## 4.2 Equazioni di campo della teoria $U_4$

Deriveremo le equazioni di campo della teoria di Einstein-Cartan da un principio variazionale che è l'estensione del principio di minima azione di Hamilton. La teoria dei campi classica è infatti una estensione a molte variabili continue della meccanica classica del punto in cui le funzioni di campo  $\Psi$  e le loro derivate temporali  $\dot{\Psi}$ , ad ogni punto dello spaziotempo, assumono rispettivamente i ruoli delle coordinate generalizzate e dei momenti coniugati.[9]

Utilizzando questa strada non ci resta che cercare la giusta densità di lagrangiana che rende l'azione stazionaria. Come discusso nel primo capitolo la gravitazione agisce dinamicamente sullo spaziotempo curvandolo ove presente materia. Immaginiamo inizialmente solo un campo materiale classico  $\Psi(x^k)$  inserito nello spaziotempo di Minkowski  $\mathcal{M}_4$ . La densità lagrangiana relativistica di materia è assunta dipendere dalla metrica di Minkowsky  $\eta$ , dal campo materiale stesso e dal suo gradiente;  $\mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi; \eta)$ . Tenendo conto della gravitazione dovremo accoppiare la nostra densità di lagrangiana relativistica alla geometria dello spaziotempo come descritto dal principio di equivalenza. Considereremo una sostituzione minima in modo da accoppiare la connessione  $\Gamma$  di  $\mathcal{U}_4$  al campo materiale  $\Psi$  sfruttando la definizione di derivata covariante del paragrafo 3.6:

$$\partial\Psi \longrightarrow \nabla\Psi. \quad (4.23)$$

Questo ci conduce da  $\mathcal{M}_4$  a  $\mathcal{U}_4$  tenendo conto della connessione 4.14 nella definizione di derivata covariante.

Il funzionale d'azione del campo materiale che interagirà con la gravitazione diviene quindi:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(\Psi, \nabla\Psi; g) \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi, g, \partial g, S) \end{aligned} \quad (4.24)$$

che dipende ora da dal campo  $\Psi$ , dalla metrica  $g_{ij}$  che porta con se 10 componenti indipendenti e dal tensore di torsione  $S_{ij}{}^k$  che ne porta altre 24;  $c$  è la velocità della luce e  $d^4x$  rappresenta l'elemento di volume (siamo in quattro dimensioni).

In accordo con 4.16 potremmo considerare come variabile indipendente al posto del tensore di torsione

S il tensore di contorsione  $K$  funzione di  $S$  e di  $g$ , tuttavia la scelta di  $S$  è più fondamentale dal momento che esso è indipendente dalla metrica.

Secondo il principio di Hamilton l'azione appena descritta risulta stazionaria rispetto alla variazione infinitesima delle proprie variabili e in particolare facendo variare in modo indipendente il tensore metrico e il tensore di torsione possiamo definire immediatamente il tensore energia-impulso metrico  $\sigma^{ij}$  e un tensore  $\mu_k^{ji}$  con il significato di tensore di energia potenziale di spin.

Tenuto conto della derivata variazionale espressa in modo conciso  $\frac{\delta \mathcal{L}(Q, \partial Q)}{\delta Q} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \partial_k \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k Q)} \right]$  tali tensori vengono definiti nel modo seguente:

$$g\sigma^{ij} := 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ij}}, \quad (4.25)$$

$$g\mu_k^{ji} := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta S_{ij}^k} \quad (4.26)$$

dove  $g := \sqrt{-\det(g_{ij})}$ .

Secondo la teoria di Cartan lo spin è associato al tensore di contorsione piuttosto che al tensore di torsione. Definisco quindi il tensore canonico di momento angolare di spin  $\tau$  in modo analogo a prima:

$$g\tau_k^{ji} := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{ij}^k}. \quad (4.27)$$

Quest'ultimo può essere espresso in funzione del tensore di energia potenziale di spin  $\tau$  sfruttando la definizione 4.15 e la "regola della catena". Riporto per comodità la definizione 4.15 che dalla 4.14 può anche essere espresso come,

$$K_{ij}^k = S_{ij}^k + S_{ij}^k - S_j^k{}_i, \quad (4.28)$$

e abbassandone gli indici sfruttando la metrica abbiamo immediatamente

$$K_{ijk} = S_{ijk} + S_{kij} - S_{jki}. \quad (4.29)$$

Ora partendo dalla definizione 4.26 si giunge direttamente alla relazione cercata

$$\begin{aligned} g\mu^{kji} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta S_{ijk}} \\ &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{lmn}} \frac{\delta K_{lmn}}{\delta S_{ijk}} \\ &= g\tau^{nml} (+\delta_i^l \delta_j^m \delta_k^n + \delta_i^n \delta_j^l \delta_k^m - \delta_i^m \delta_j^n \delta_k^l) \end{aligned} \quad (4.30)$$

che, ordinando in modo opportuno gli indici, porta a

$$\mu^{ijk} = \tau^{ijk} + \tau^{kij} - \tau^{jki}. \quad (4.31)$$

Di grande utilità è a questo punto la relazione di Belinfante-Rosenfeld che ci permette di aggiungere al tensore energia-impulso metrico (simmetrico per definizione) un termine dovuto allo spin per costituire un tensore antisimmetrico noto come tensore energia-impulso canonico  $\Sigma$ :

$$\Sigma^{ij} = \sigma^{ij} - \overset{\circ}{\nabla}_k \mu^{ijk} = \sigma^{ij} - \overset{\circ}{\nabla}_k (\tau^{ijk} - \tau^{jki} + \tau^{kij}), \quad (4.32)$$

in cui si è utilizzata la derivata covariante modificata  $\overset{\circ}{\nabla}$  definita in 3.107. Nella teoria originale della relatività generale si è alla ricerca di un tensore energia-impulso simmetrico e tale relazione è sfruttata

per raggiungere lo scopo mentre nella teoria di Einstein-Cartan si interpreta  $\Sigma^{ij}$  come il tensore di energia-impulso totale la cui l'antisimmetria è legata alla parte di spin.

In analogia con la GR ora non ci resta che costruire un funzionale d'azione totale che comprenda il campo materiale e la sua interazione con il campo gravitazionale e otterremo poi le equazioni di campo cercate facendo variare l'azione totale  $S_t$  rispetto alle variabili indipendenti.

L'azione per il campo gravitazionale  $S_g$  sarà ancora una volta un integrale su un generico elemento di volume di una densità tensoriale di lagrangiana. Dal momento che il tensore di Ricci è l'unica contrazione utile del tensore di Riemann in  $\mathcal{U}_4$ , così come in GR, scriveremo tale azione sfruttando la densità scalare di curvatura  $\mathcal{R} := gg^{ij}R_{ij}$  in perfetta analogia con la GR.

Abbiamo allora:

$$S_t = S_m + S_g = \left(\frac{1}{c}\right) \int d^4x [\mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi, g, \partial g, S) + \left(\frac{1}{2k}\right)\mathcal{R}(g, \partial g, S, \partial S)] \quad (4.33)$$

che rappresenta il funzionale d'azione totale del campo materiale interagente con il campo gravitazionale che contribuiscono rispettivamente nel primo e nel secondo termine dell'integrale.

Nel termine gravitazionale vi è la presenza di una costante universale  $k := 8\pi c^{-4}G$  con  $G$  che rappresenta la costante gravitazionale di Newton.  $\mathcal{R}$  ha le dimensioni di una lunghezza<sup>-2</sup>.

Come già anticipato le equazioni di campo verranno dedotte dal principio di Hamilton che assume la forma  $\delta S_t = \delta(S_m + S_g) = 0$ . Facendo variare l'azione rispetto alle variabili indipendenti  $\Psi$ ,  $g$  e  $S$  otteniamo:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi} = 0 \quad (4.34)$$

$$-\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{ij}} = kg\sigma^{ij} \quad (4.35)$$

$$-\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta S_{ij}{}^k} = 2kg\mu_k{}^{ji} \quad (4.36)$$

dove la prima è detta equazione di materia ed è analoga alle equazioni del moto di Eulero Lagrange della meccanica classica mentre le 4.35 e 4.36 costituiscono un insieme di 10 e 24 equazioni di campo indipendenti. Sfruttando le equazioni 4.27 e 4.32 otteniamo al posto di 4.35 e 4.36, sfruttando anche quest'ultima:

$$-\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{ij}} - \left(\frac{g^{li}}{2}\right)\overset{\circ}{\nabla}_k\left(\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta S_{jk}{}^l}\right) = kg\Sigma^{ij} \quad (4.37)$$

$$-\left(\frac{g^{li}}{2}\right)\left(\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta S_{jlk}{}^i}\right) = kg\tau^{ijk}. \quad (4.38)$$

Infatti isolando il tensore energia-impulso metrico dalla 4.32 e inserendolo nella 4.35 abbiamo subito

$$-\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{ij}} = kg\Sigma^{ij} + kg\overset{\circ}{\nabla}_k\mu^{ijk}, \quad (4.39)$$

L'ultimo termine può essere riscritto sfruttando la 4.36

$$\begin{aligned} kg\overset{\circ}{\nabla}_k\mu^{ijk} &= kg\overset{\circ}{\nabla}_k g^{li}\mu_l{}^{jk} = \\ &= +\left(\frac{g^{li}}{2}\right)\overset{\circ}{\nabla}_k\left(\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta S_{jk}{}^l}\right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

che portato a primo membro porta direttamente alla 4.37; con sostituzioni algebriche analoghe si ottiene la seconda relazione 4.38.

Il passo direttamente successivo per trovare le equazioni cercate consiste nel calcolo della variazione della densità scalare di curvatura  $\mathcal{R}$ , scriviamo innanzitutto

$$\delta\mathcal{R} = (g\delta g^{ij} + g^{ij}\delta g)R_{ij} + gg^{ij}\delta R_{ij}. \quad (4.41)$$

Il primo termine a secondo membro può essere riscritto semplicemente come

$$(g\delta g^{ij} + g^{ij}\delta g)R_{ij} = g(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R)\delta g^{ij} = gG_{ij}\delta g^{ij} = -gG^{lm}\delta g_{lm} = -gG^{ij}\delta g_{ij}; \quad (4.42)$$

dal momento che  $\delta g = -\frac{1}{2}gg_{ij}\delta g^{ij}$  e  $\delta g^{ij} = -g^{il}g^{mj}\delta g_{lm}$ .  $G^{ij}$  rappresenta il noto tensore di Einstein che assume la stessa forma in  $\mathcal{U}_4$  ma che non è più simmetrico in generale.

Per valutare il secondo termine a secondo membro della 4.41 ricordo che si ottiene il tensore di Ricci dal tensore di Riemann contraendo il primo indice covariante con l'unico controvariante e dalla 4.20 si ottiene

$$\begin{aligned} R_{ij} = R_{kij}{}^k &= 2\partial_{[k}\Gamma_{i]j}^k + 2\Gamma_{k[m}^k\Gamma_{i]j}^m \\ &= \partial_k\Gamma_{ij}^k - \partial_i\Gamma_{kj}^k + \Gamma_{km}^k\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{im}^k\Gamma_{kj}^m, \end{aligned} \quad (4.43)$$

valutandone la variazione si ha

$$\delta R_{ij} = \partial_k(\delta\Gamma_{ij}^k) - \partial_i(\delta\Gamma_{kj}^k) + \Gamma_{ij}^m(\delta\Gamma_{km}^k) + \Gamma_{km}^k(\delta\Gamma_{ij}^m) - \Gamma_{kj}^m(\delta\Gamma_{im}^k) - \Gamma_{im}^k(\delta\Gamma_{kj}^m). \quad (4.44)$$

Per proseguire notiamo che sebbene le quantità  $\Gamma_{ij}^k$  non sono un tensore, le sue variazioni  $\delta\Gamma_{ij}^k$  costituiscono un tensore in quanto rappresenta la differenza di due vettori trasportati parallelamente da un generico punto ad un altro infinitamente vicino e la differenza di due vettori nello stesso punto è a sua volta un vettore.[3]

Direttamente dalla definizione di derivata covariante troviamo

$$\nabla_k(\delta\Gamma_{ij}^k) = \partial_k(\delta\Gamma_{ij}^k) + \Gamma_{km}^k\delta\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ki}^m\delta\Gamma_{mj}^k - \Gamma_{kj}^m\delta\Gamma_{im}^k \quad (4.45)$$

e

$$\nabla_i(\delta\Gamma_{kj}^k) = \partial_i(\delta\Gamma_{kj}^k) + \Gamma_{im}^k\delta\Gamma_{kj}^m - \Gamma_{ik}^m\delta\Gamma_{mj}^k - \Gamma_{ij}^m\delta\Gamma_{km}^k. \quad (4.46)$$

Sostituendole opportunamente nella 4.44 giungiamo alla relazione di Palatini generalizzata

$$\begin{aligned} \delta R_{ij} &= \nabla_k(\delta\Gamma_{ij}^k) + \Gamma_{ki}^m\delta\Gamma_{mj}^k - \nabla_i(\delta\Gamma_{kj}^k) - \Gamma_{ik}^m\delta\Gamma_{mj}^k \\ &= 2\nabla_{[k}\Gamma_{i]j}^k + 2S_{ki}{}^l\delta\Gamma_{lj}^k. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Possiamo ora riscrivere la 4.41 sostituendovi all'interno le espressioni ottenute in 4.42 e 4.47 ignorando in quest'ultima il primo termine che essendo una divergenza totale non contribuisce alle equazioni del moto poiché, per il teorema di Stokes, l'integrale di una divergenza totale diventerebbe un integrale esteso alla frontiera del dominio di integrazione e dal momento che si assume che la variazione del campo sia nulla sulla frontiera l'integrale in questione si annullerebbe. Risulta

$$\left(\frac{1}{g}\right)\delta\mathcal{R} = -G^{ij}\delta g_{ij} + 2T_k{}^{jl}\delta\Gamma_{lj}^k \quad (4.48)$$

avendo anche inserito il tensore di torsione modificato definito in 4.2 al posto del tensore di torsione poiché il termine aggiuntivo nella si annulla moltiplicandolo per il tensore metrico.

Rimane ora da valutare la variazione della connessione  $\delta\Gamma$  che può essere espressa in termini di  $\delta g$  e  $\delta S$  sfruttando ancora le equazioni 4.14 e 4.15, si ottiene

$$\left(\frac{1}{g}\right)\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{ij}} = -G^{ij} + \overset{\circ}{\nabla}_k(T^{ijk} - T^{jki} + T^{kij}) \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta S_{ij}^k} = -2(T_k^{ij} - T_k^{ij} + T_k^{j i}). \quad (4.50)$$

Se sostituiamo quest'ultime all'interno di 4.37 e 4.38 con qualche semplice manipolazione algebrica abbiamo infine le equazioni di campo della teoria di Einstein-Cartan

$$G^{ij} = k\Sigma^{ij} \quad (4.51)$$

$$T^{ijk} = k\tau^{ijk}. \quad (4.52)$$

L'equazione 4.51 rappresenta l'equazione di campo di Einstein generalizzata poiché esteticamente si presenta in modo analogo a quella originale formulata da Einstein, la seconda equazione 4.52 è invece una relazione algebrica lo spin al tensore di torsione modificato.

Prima di procedere nella discussione delle equazioni studiando le novità portate rispetto alla GR è utile combinare le due equazioni in una unica andando a sostituire 4.52 nella 4.51. Splittando il tensore di Einstein  $G^{ij}$  della teoria  $\mathcal{U}_4$  nella sua parte Riemanniana  $G^{ij}(\{ \})$  che rappresenta il tensore di Einstein in GR e nella sua parte non-Riemanniana e sostituendo in quest'ultima il tensore di spin over presente il tensore di torsione secondo l'equazione 4.52 possiamo scrivere l'equazione di campo combinata della teoria  $\mathcal{U}_4$

$$G^{ij}(\{ \}) = k\tilde{\sigma}^{ij} \quad (4.53)$$

con il tensore energia-impulso combinato espresso da

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} + k[-4\tau_{[l}^{ik}\tau_{k]}^{jl} - 2\tau^{ikl}\tau_{kl}^j + \tau^{kli}\tau_{kl}^j + \frac{1}{2}g^{ij}(4\tau_m^k{}_{[l}\tau_{k]}^{ml} + \tau^{mkl}\tau_{mkl})] \quad (4.54)$$

che risulta simmetrico per definizione e ci mostra immediatamente che in caso di torsione nulla, e di conseguenza tensore di spin nullo, le equazioni di campo si riconducono a quelle della relatività generale.



## Capitolo 5

# Conseguenze della teoria $U_4$

### 5.1 Una nuova interazione di contatto

La seconda equazione di campo 4.52 rappresenta una relazione algebrica tra il tensore di torsione modificato e il tensore di spin. Il fatto che tale relazione sia algebrica piuttosto che differenziale non vuole rappresentare una mera caratteristica matematica, al contrario porta immediatamente ad una importante conseguenza della teoria: non può esistere torsione dello spaziotempo ove non è presente una distribuzione di materia dotata di spin non nullo. Così la torsione dello spaziotempo è intrinsecamente legata alla materia e non può perciò propagarsi nel vuoto attraverso ad esempio onde di torsione. Nel vuoto si ha spin nullo quindi la teoria di Einstein-Cartan si riduce direttamente alla GR.

Tuttavia l'equazione di campo combinata 4.53 ci mostra che sia la massa che lo spin modificano la metrica dello spaziotempo. Infatti sul lato sinistro dell'equazione abbiamo la presenza del tensore di Einstein, lo stesso operatore differenziale di secondo ordine della GR che agisce sulla metrica, mentre sono ridefinite le sorgenti a secondo membro attraverso il tensore energia-impulso combinato  $\tilde{\sigma}^{ij}$  che ingloba i termini dovuti al tensore energia-impulso canonico e al tensore di spin (canonico). Quindi un cambiamento nella distribuzione di spin  $\tau^{ijk}$  determina un cambiamento in  $\tilde{\sigma}^{ij}$ , il quale, attraverso le equazioni di campo combinate, determina a sua volta un cambiamento nel tensore metrico che si propaga nello spaziotempo.

Dal punto di vista teorico è quindi possibile prevedere la generazione di onde gravitazionali da una variazione temporale di una distribuzione di spin. Purtroppo i valori tipici per lo spin totale associato ad oggetti astronomici sono molto più piccoli rispetto ai valori tipici del momento angolare orbitale e tale rilevazione risulta altamente compromessa.<sup>1</sup>

Tornando alla definizione di  $\tilde{\sigma}^{ij}$  si può notare immediatamente che i termini aggiuntivi dovuti allo spin sono presenti sotto forma di interazione spin-spin ( $\tau\tau$  omettendo gli indici) ed essendo confinata all'interno della distribuzione di materia stessa rappresenta una nuova interazione di contatto predetta dalla teoria  $\mathcal{U}_4$  senza alcuna nuova assunzione aggiuntiva. Quindi sebbene il comportamento della teoria a grandi distanze corrisponde a quello della GR, a causa di questa nuova interazione universale di contatto di origine gravitazionale e legata allo spin il comportamento a brevi distanze risulta differente.

Proviamo a stimare in range nel quale ci aspettiamo delle deviazioni significative rispetto alla relatività generale di Einstein.

---

<sup>1</sup>Ad esempio una stella di neutroni di una massa solare completamente polarizzata e con un periodo rotazionale di un secondo ha un momento angolare orbitale  $10^{16}$  volte più grande del momento angolare di spin; quindi processi che coinvolgono lo spin non risultano di grande rilevanza per le osservazioni astronomiche.

Nella teoria  $\mathcal{U}_4$  la materia è trattata come un continuo. Le masse e gli spin<sup>2</sup> delle particelle elementari che costituiscono la materia sono descritte sullo spaziotempo da funzioni continue così come le relative densità. Identifichiamo con  $\rho_m = nm$ , dove  $m$  è la massa della particella, la densità di massa e con  $\rho_s = n\frac{\hbar}{2}$  la densità di spin<sup>3</sup>,  $n$  è la densità di numero che descrive la concentrazione di particelle nella distribuzione considerata<sup>4</sup>.

Come discusso poc'anzi la correzione a  $\tilde{\sigma}^{ij}$  e quindi alla densità di massa dovuta dall'interazione di contatto di spin è dell'ordine di  $ks^2$  così che gli effetti dovuti allo spin sono dello stesso ordine di grandezza dei termini legati alle masse se  $\rho_m = k\rho_s^2$ , ovvero se

$$nm \approx k\hbar^2 n^2 \longrightarrow \bar{n} = \frac{m}{k\hbar^2} \quad (5.1)$$

oppure, in termini di densità

$$\bar{\rho} = m\bar{n} \approx \frac{m^2}{k\hbar^2} = \frac{m}{\lambda l^2} \approx \begin{cases} 10^{48} \text{ g cm}^{-3} \text{ per elettroni} \\ 10^{54} \text{ g cm}^{-3} \text{ per neutroni} \end{cases} \quad (5.2)$$

con  $\bar{\rho}$  detta densità critica di massa,  $\lambda = \hbar/mc$  è la lunghezza compton ridotta e  $l = \sqrt{\hbar ck}$  rappresenta la lunghezza di Planck a meno del fattore  $8\pi$  portato dalla costante  $k = 8\pi c^{-4}G$  (introdotta nella formulazione delle equazioni di campo)<sup>5</sup>.

Si tratta certamente di valori molto elevati di densità di massa e ci mostra che le correzioni alla teoria di Einstein sono trascurabili anche alle densità nucleari; le correzioni causate dallo spin sono da cercare quindi a densità elevatissime come vicino alla singolarità finale di un collasso gravitazionale, vicino al big bang presente nei modelli cosmologici e nello studio di processi di gravità quantistica in cui si incontrano valori persino più elevati; bisogna considerare quindi eventi straordinari o catastrofici per potere apprezzare differenze rispetto alla teoria originale.

Piuttosto rilevante è la presenza della costante di Planck  $l$  che entra nella dinamica della teoria di Einstein-Cartan come una sorta di parametro di "cutoff" per le brevi distanze, cosa che si discosta dalla GR in cui non emerge tale costante universale e fondamentale per il mondo microscopico. Allo stesso modo la densità critica  $\bar{\rho}$  agisce come un cutoff per le densità, oltre questa soglia il comportamento della teoria cambia radicalmente.

In tutta la discussione precedente abbiamo supposto la distribuzione di spin polarizzata per potere così massimizzare l'effetto dell'interazione spin-spin, tuttavia ci si aspetta che ciò non avvenga nella maggior parte delle situazioni macroscopiche in cui gli spin sono orientati casualmente oppure la polarizzazione soffre di rapide fluttuazioni nel tempo. Quando consideriamo una distribuzione macroscopica, per applicare le equazioni di campo dobbiamo effettuare una media del tensore energia-impulso combinato e in tale media gli spin e i gradienti di spin possono effettivamente annullarsi, tuttavia i termini di spin sono quadratici e questo fa sì che la loro media non si annulli. Per questo ci si aspetta una discrepanza dalla GR anche nel limite macroscopico. Questo offre la possibilità di poter testare la teoria anche in relazione ad un modello cosmologico, esaminandone ancora una volta le differenze con la teoria di Einstein. Chiaramente la densità di spin al quadrato di una distribuzione completamente polarizzata scala come l'inverso del volume al quadrato, se ci si appresta a studiare distribuzioni macroscopiche non polarizzate si dovrà studiare come questa correzione quadratica scali con l'aumentare del volume.

<sup>2</sup>Ricordo che stiamo trattando lo spin intrinseco che si manifesta in natura in multipli di  $\frac{\hbar}{2}$  che non ha a che vedere con un moto rotazionale reale come ad esempio il moto di rotazione dei pianeti attorno al proprio asse.

<sup>3</sup>Assumiamo che tutti gli spin all'interno dell'elemento di volume studiato siano polarizzati.

<sup>4</sup>La densità di numero è infatti definita dal rapporto tra il numero di particelle totali e il volume della regione che le ingloba.

<sup>5</sup>La lunghezza di Planck è definita essere uguale a  $\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ .

## 5.2 Ulteriori conseguenze

Studi recenti hanno accettato appieno l'emergere della torsione nella teoria della gravitazione e sono stati formulati diversi modelli cosmologici atti a comprenderla. La discussione dettagliata di tali modelli è certamente interessante e importante per effettuare uno studio completo della teoria, tuttavia ciò devierebbe notevolmente rispetto agli scopi prefissati e a mio personale parere richiederebbe un intero nuovo lavoro dedicato. Lo stesso dicasi per alcune affascinanti speculazioni che aprono le porte a ricerche future (e presenti).

Vorrei comunque presentare almeno un elenco di alcune importanti possibilità aperte dall'introduzione della torsione in GR, come utilità per un lettore interessato.

1. Un modello cosmologico che tiene conto della torsione è descritto in [12] in cui ne risulta un Universo omogeneo isotropo e in espansione, in accordo anche con i modelli studiati in relatività generale.
2. In [13] e [14] Nikodem J. Poplawski tenta di spiegare le più rilevanti conseguenze cosmologiche considerando la torsione accoppiata al campo gravitazionale. In particolare la sua discussione tenta di spiegare come con la teoria di Einstein-Cartan sia possibile eliminare la singolarità del Big Bang presente in GR per poterla sostituire con un Bounce non singolare. L'autore tenta inoltre di spiegare come considerare la gravitazione con la torsione possa risolvere molti altri problemi cosmologici quali ad esempio l'asimmetria nell'universo tra materia e antimateria e la natura della materia e dell'energia oscura.
3. In [15] sono descritti tre diversi casi in cui è studiata materia dotata di spin e sono analizzate le conseguenze cosmologiche studiandone in particolare i termini quadratici dovuti allo spin. Ancora una volta vengono a mancare singolarità nei modelli studiati.
4. Un interessante articolo in [16] tenta di spiegare la violazione della parità dal punto di vista geometrico, sfruttando proprio la presenza del tensore di torsione.

## Capitolo 6

# Conclusioni

Queste non sono vere conclusioni poiché ancora è tanto il lavoro da compiere. Sono rimasto affascinato da questa teoria fin dalla prima lettura dell'articolo di Hehl, Heyde e Kerlick ([11]). Partire da quel singolo articolo e costruirci attorno tutto il resto mi ha coinvolto appieno e per di più mi è sembrato di poter sfiorare uno dei problemi massimi della fisica per cui ho voluto mettere in gioco tutto me stesso per riuscire quantomeno a crearmi una solida base per affrontare il problema.

La teoria di Einstein-Cartan sembra davvero essere una modifica necessaria della relatività generale, quasi solo uno step successivo, e provare ad includere la meccanica quantistica sfruttando ancora una volta la geometria è stato qualcosa di altamente stimolante.

Lo ammetto, ho saputo muovermi in questo mare effettuando un passo indietro prima di allungare appena il naso in avanti. Mi piaceva l'idea di tentare un modo prettamente geometrico di discutere di relatività e seppur non pienamente soddisfatto penso di aver raggiunto il mio scopo. Aggiungere alla teoria di Einstein una così leggera modifica può realmente significare un'intera vita dedicata al suo studio e un intero universo da coniare ed è questa la grande lezione che porterà con me dopo tutto questo lavoro.

Non starò a ripetere gli argomenti trattati come ho fatto all'inizio nel sommario, quel che vorrei sottolineare è piuttosto quello che non ho potuto trattare. Dai modelli cosmologici alle speculazioni sulla teoria fino a giungere a discussioni di gravità quantistica perché è questa la realtà intima che si indaga con la teoria di Einstein-Cartan e questo deve essere il vero fine di un tale studio. Estendere al microscopico ciò che sembra chiaro al macroscopico ed utilizzare per farlo ogni modello possibile. Per ora ho dalla mia parte l'approccio geometrico e sono soddisfatto per ciò che ho ottenuto, magari un giorno sarò capace di proseguire da dove ho interrotto sfruttando altre conoscenze e idee nuove.

# Bibliografia

- [1] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, (1984)
- [2] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, (2004)
- [3] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšits, *Fisica teorica. Vol. 2: Teoria dei campi*, Editori Riuniti, (1976)
- [4] Hans C. Ohanian, Remo Ruffini, *Gravitazione e spaziotempo*, Zanichelli (1997)
- [5] B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (1980), Cambridge University
- [6] Ruben Aldrovandi, José Geraldo Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics*, World Scientific Publishing, (2016)
- [7] J.A. Shouten, *Ricci Calculus*, Springer, (1954)
- [8] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, *Geometria contemporanea I. Geometria delle superfici dei gruppi di trasformazioni e dei campi*, Editori Riuniti (1999)
- [9] E.M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*, Blackie, (1953)
- [10] Venzo de Sabbata, C. Sivaram, *Spin and Torsion in gravitation*, World Scientific Publishing, (1994)
- [11] Friedrich W. Hehl, Paul von der Heyde, G. David Kerlick, *General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects*, Rev. Mod. Phys., Rev. Mod. Phys. 48, 393-416, DOI: 10.1103/RevModPhys.48.393, (1976)
- [12] Antonio Zecca, *Homogeneous and Isotropic Expanding Universe with Unconventional Role of Torsion*, Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 2, no. 15, 741 - 749, (2008)

- [13] Nikodem J. Poplawski, *Cosmological consequences of gravity with spin and torsion*, *Astronomical Review*, 8:3, 108-115, DOI: 10.1080/21672857.2013.11519725, (2013)
  
- [14] Nikodem J. Poplawski, *Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling*, Indiana University, DOI: 10.1103/PhysRevD.85.107502, (2012)
  
- [15] Jia-An Lu, *R + S2 theories of gravity without big-bang singularity*, Sun Yat-sen University, (2015)
  
- [16] Biswarup Mukhopadhyaya, Soumitra Sengupta, *A geometrical interpretation of parity violation in gravity with torsion*, *Phys.Lett.B458:8-12*, DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00605-X, L. Alvarez-Gaumé, (1998)