Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Sull'equazione di Kolmogorov

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Andrea Barletta

Seconda Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Cerca di raggiungere la meta,
finchè puoi camminare
G.W. Heinemann

Notazioni:

Nel seguito verranno utilizzate le seguenti notazioni:

$$\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$$

$$\partial_{x_j} = \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\nabla_x = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N})$$

$A_{i,\cdot} = i$-esima riga di A

$A_{\cdot,j} = j-$esima colonna di A

$\mathsf{div} f$ = divergenza di f $= \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial f_N}{\partial x_N}$

$$\mathsf{tr} A = a_{11} + \ldots + a_{NN}$$

$I_{\mathbb{R}^N}$ è la matrice identica su $\mathbb{R}^N$

Introduzione

Lo scopo di questo lavoro è introdurre il lettore allo studio di una particolare classe di equazioni differenziali (ordinarie) alle derivate parziali; questa classe di equazioni differenziali è associata ad una classe di operatori studiata in *[LP]*, e comprende diversi prototipi di equazioni utilizzate come modellizzazione di fenomeni fisici o finanziari.
Ad esempio fanno parte di questa classe l'equazione del calore e l'equazione di Kolmogorov; quest'ultima sarà presa in analisi in dettaglio nell'ultimo capitolo, che rappresenta in qualche modo il punto d'arrivo di tutta la trattazione precedente.
L'importanza dell'equazione di Kolmogorov risiede nel suo utilizzo per descrivere l'evoluzione di alcuni processi che regolano l'andamento dei mercati; ovviamente la teoria che ci permette di ricondurre l'equazione di Kolmogorov al suo utilizzo in finanza presuppone la conoscenza di diverse nozioni che esulano da questo lavoro. Per questo motivo, come già specificato, sarà trattata solo l'equazione di Kolmogorov ordinaria, da cui, in ogni caso, non si può prescindere per un eventuale studio della teoria più generale.
Oltre al caso particolare dell'equazione di Kolmogorov vengono introdotte anche le basi per lo studio della classe più generale di equazioni differenziali di cui accennato in precedenza; tali basi consistono nella teoria dei gruppi di Lie in $\mathbb{R}^N$ ed in particolar modo dei gruppi di Lie omogenei. Si vedrà infatti che una particolare sottofamiglia di questa classe di equazioni soddisfa certe ipotesi legate proprio ai gruppi di Lie omogenei (o meglio ad una particolare sottofamiglia di tali gruppi, che chiameremo *B gruppi*); questi risultati si rivelano poi fondamentali nella costruzione di metodi risolutivi di tali equazioni.
L'idea che sta alla base di tutto lo sviluppo teorico di cui accennato è che per studiare metodi risolutivi di certe equazioni differenziali ci si possa ricondurre allo studio degli operatori ad esse associati. Il primo collegamento con la teoria dei gruppi di Lie è rappresentato dal celebre *teorema di Hörmander*, capostipite di tutta la trattazione costruita per lo studio di queste equazioni.

Il teorema di Hörmander riconduce la risolubilità di queste equazioni alla proprietà del loro operatore associato di soddisfare o meno la *condizione di Hörmander*, di cui si parlerà sempre nel terzo capitolo. Anche il teorema di Hörmander esula dagli obiettivi di questo lavoro, sebbene verrà presentata un' importante caratterizzazione della condizione di Hörmander nel caso particolare degli operatori che verranno introdotti.
L'equazione di Kolmogorov (ordinaria) sarà invece studiata più nel dettaglio; ne sarà presentata una soluzione (semplice) e sarà mostrato che effettivamente la risolve. La soluzione presentata soddisfa in realtà condizioni ben più forti, e risolve una classe di equazioni differenziali più vasta, a cui appartiene anche l'equazione di Kolmogorov, ma sarà qui trattata solo per questo caso particolare.
I primi due capitoli, come già accennato, riguarderanno lo studio dei gruppi di Lie in $\mathbb{R}^N$ e dei gruppi di Lie omogenei (in $\mathbb{R}^N$). Saranno toccati meno in profondità alcuni strumenti, molto importanti nella teoria generale dei gruppi di Lie, per lasciare spazio ad una trattazione più incentrata sugli aspetti essenziali al raggiungimento dei risultati menzionati precedentemente. In particolar modo sarà studiata in dettaglio la struttura dei gruppi omogenei, la cui conoscenza risulta essenziale per ottenere una scrittura esplicita della *base Jacobiana*, che a sua volta risulta cruciale per il riconoscimento di certe proprietà degli operatori di cui si è parlato.

Indice

Capitolo 1

Gruppi di Lie in $\mathbb{R}^N$

In questo primo capitolo si introducono le nozioni fondamentali per lo studio di campi vettoriali, algebre e gruppi di Lie, su tali nozioni si baserà poi la trattazione nei capitoli suiccessivi.

1.1 Campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $\Omega \neq \emptyset$ e siano:

$$a_j : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad j \in \underline{N}$$

N funzioni scalari; l'operatore:

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j$$

è detto ***campo vettoriale su*** $\mathbb{R}^N$ di ***componenti*** $a_1, \dots, a_N$. Siano poi $O \subseteq \Omega$ un altro aperto di $\mathbb{R}^N$ e $f : \ O \to \mathbb{R}$, useremo la seguente notazione:

$$Xf(x) := \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \partial_j f(x)$$

La definizione precedente può estendersi al caso $f : O \to \mathbb{R}^p,\ f = (f_1, \ldots, f_p)$ nel modo seguente:

$$Xf(x) := \begin{pmatrix} Xf_1(x) \\ \vdots \\ Xf_p(x) \end{pmatrix}$$

Introduciamo ora una particolare classe di campi vettoriali:

Def. Nelle notazioni precedenti, sia X un campo vettoriale di componenti $a_j \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}),\ \forall j \in \{1, \ldots, N\}$; l'operatore ottenuto dalla restrizione:

$$X|_{C^\infty(O,\mathbb{R})}$$

è detto ***campo vettoriale liscio*** su O.

Denotiamo con $T(\mathbb{R}^N)$ l'insieme dei campi vettoriali lisci su $\mathbb{R}^N$; le operazioni usuali, inducono su tale insieme una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Ogni campo vettoriale X può inoltre identificarsi con i suoi coefficienti in modo naturale:

$$X \mapsto XI$$

dove I rappresenta la funzione identica su $\mathbb{R}^N$; in tal caso:

$$XI(x) := \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}$$

è una funzione appartenente a $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.
Infine, per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, vale:

$$Xf(x) = (\nabla f(x)) \cdot XI(x)$$

mentre per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^p)$ vale:

$$Xf = (\mathcal{J}_f(x)) \cdot XI$$

1.2 Esponenziale di un campo vettoriale

Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva in $\mathbb{R}^N$ e X un campo vettoriale in $\mathbb{R}^N$; γ si dice una ***curva integrale*** di X se:

$$\gamma'(t) = XI(\gamma(t)), \ \ \forall t \in [a,b]$$

Oss Sia X un campo vettoriale liscio su $\mathbb{R}^N$; per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \gamma' = XI(\gamma) \\ \gamma(0) = x \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $\gamma_X(\cdot, x)$ sul dominio non prolungabile $\mathcal{D}(X,x)$. Ciò è diretta conseguenza del fatto che $XI \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, dunque in particolare è lipschitziana.

Oss Nelle notazioni precedenti vale:

$$\gamma_X(t,x) = x + t \cdot XI(0) + t \cdot \omega(t)$$

dove $\omega(t) \to 0, \ t \to 0$.
Tale relazione segue direttamente dallo sviluppo di Taylor del primo ordine di $\gamma_X(\cdot, x)$ attorno al punto 0.
D'ora in avanti verrà utilizzata la seguente notazione; fissato un campo vettoriale liscio $X \in T(\mathbb{R}^N)$ poniamo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t \in D(X,x)$:

$$\exp(tX)(x) := \gamma_X(t,x)$$

tale curva viene detta ***esponenziale*** di X. Definendo poi:

$$\mathcal{U}_X := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \ \mid \ x \in \mathbb{R}^N, \ t \in D(X,x)\}$$

l'applicazione:

$$\exp(X) : \mathcal{U}_X \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$(t,x) \mapsto \exp(tX)(x)$$

risulta di classe C^∞. Inoltre valgono le seguenti proprietà:

(i) Additività

$$\exp((t+\tau)X)(x) = \exp(tX)(\exp(\tau X)(x))$$

Infatti, fissato $\tau \in D(X,x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ consideriamo:

$$\begin{cases} \gamma' = XI(\gamma) \\ \gamma(0) = \exp(\tau X)(x) \end{cases}$$

ora:

$$\exp((0+\tau)X)(x) = \exp(\tau X)(x)$$

$$\exp(0 \cdot X)(x) = \gamma_X(0,x) = x$$

pertanto, poichè sono entrambe curve definite sull' intervallo non prolungabile $D(X,x)$ esse coincidono.

(ii) Invertibilità

Ponendo:

$$\exp(-tX)(x) := \exp((-t)X)(x)$$

Si ha:

$$\begin{array}{ll} \cdot & \exp(-tX)(x) = \exp(t(-X)) \\ \cdot & \exp(-tX)(\exp(tX)(x)) = x \end{array}$$

tale proprietà segue direttamente da *(i)*

(iii) Moltiplicatività

$$\exp((t\tau)(X)(x) = \exp(t(\tau X))(x)$$

anche questa proprietà segue dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo al campo vettoriale X.

Concludiamo infine questa sezione con due osservazioni che torneranno utili nel seguito:

Oss Consideriamo un campo vettoriale liscio $X \in \mathbb{R}^N$ di componenti:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2(x_1) \\ \vdots \\ a_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

In tal caso $D(X, x) = \mathbb{R}$, infatti, se $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$:

$$\gamma_1(x,t) = x_1 + ta_1, \quad \gamma_j(x,t) = x_j + \int_0^t a_j(\gamma_1(x,s), \dots, \gamma_{j-1}(x,s))ds$$

pertanto induttivamente per ogni $t \in \mathbb{R}^N$ si può definire $\gamma(t)$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ sarà:

$$\exp(tX)(x) = \begin{pmatrix} x_1 + A_1(t) \\ x_2 + A_2(x_1, t) \\ \vdots \\ x_N + A_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, t) \end{pmatrix}$$

e per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato la mappa:

$$x \mapsto \exp(tX)(x)$$

risulta un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^N$ su $\mathbb{R}^N$, con inversa:

$$y \mapsto \exp(-tX)(y)$$

Oss Siano $X \in T(\mathbb{R}^N)$ e $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$:

$$Xu(x) = \nabla u(x) \cdot XI(x) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x + tXI(x)) - u(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{u(\exp(tX)(x)) - u(x)}{t}$$

1.3 Algebra di Lie di campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$

Siano $X, Y \in T(\mathbb{R}^N)$, l'operatore definito come segue:

$$[X, Y] = XY - YX$$

risulta ancora un elemento di $T(\mathbb{R}^N)$.
Inoltre l'applicazione $[\,,\,] : T(\mathbb{R}^N) \times T(\mathbb{R}^N) \longrightarrow T(\mathbb{R}^N)$ risulta bilineare e per ogni $X, Y, Z \in T(\mathbb{R}^N)$ vale:

$$\begin{aligned} [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = \\ = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY \\ +XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ = 0 \end{aligned}$$

tale proprietà è detta ***identità di Jacobi***.
La struttura $(T(\mathbb{R}^N), [\,,\,])$ risulta pertanto un'algebra di Lie, e nel seguito sarà chiamata l'***algebra di Lie dei campi vettoriali in*** $\mathbb{R}^N$.
Allo stesso modo, ogni sottospazio vettoriale $a \subseteq T(\mathbb{R}^N)$ chiuso rispetto a $[\,,\,]$ risulta un'algebra di Lie, e verrà chiamata egualmente algebra di Lie di campi vettoriali.
Si consideri ora un insieme $U \in T(\mathbb{R}^N)$, definiamo ***algebra di Lie generata da*** U l'algebra di Lie definita come segue:

$$\mathsf{Lie}\{U\} := \bigcap_{T(\mathbb{R}^N) \supseteq \mathtt{h} \supseteq U} \mathtt{h}$$

ovvero la più piccola algebra di Lie contenente U; definiamo poi:

$$\mathsf{rg}(Lie\{U\}(x)) := \dim_{\mathbb{R}}\{ZI(x) \mid Z \in Lie\{U\}\}$$

Mostriamo ora una proposizione a cui si ricorrerà spesso nel seguito:

Prop. Sia $U \in T(\mathbb{R}^N)$ e siano:

$$U_1 := \mathsf{span}\{U\}. \qquad U_n := \mathsf{span}\{[u, v] \mid u \in U,\ v \in U_{n-1}\},\ n \geq 2$$

allora:

$$\mathsf{Lie}\{U\} = \mathsf{span}\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

inoltre:

$$[u, v] \in U_{i+j} \qquad \forall\, u \in U_i,\ v \in U_j$$

<u>*dim.*</u> Poniamo:

$$U^* := \mathsf{span}\{U_n \ \mid\ n \in \mathbb{N}\}$$

Ovviamente:

- $U^* \supseteq U$
- $\mathtt{h} \supseteq U,$ $\mathtt{h}$ algebra di Lie $\quad \Rightarrow \mathtt{h} \supseteq U^*$

Mostriamo che U^* è un' algebra di Lie; è sufficiente mostrare che fissati:

$$u_1, \ldots, u_i, v_1, \ldots, v_j \in U$$

vale:
$(\star)$

$$[u_1 \ldots [u_{i-1}, u_i] \ldots]], [v_1 \ldots [v_{j-1}, v_j] \ldots]] \in U_{i+j}$$

dalle proprietà di bilinearità di [,] seguirà che per ogni $u \in U_i$ $v \in U_j$ vale $[u., v] \in U_{i+j}$, e dunque che U^* è un' algebra di Lie.
Per mostrare $(\star)$ procederemo per induzione su $k := i + j$; l'affermazione è ovvia per $k \in \{2, 3\}$; supponiamola valida per $k \geq 4$ e mostriamo che vale per $k + 1$. Se $j \in \{1, 2\}$ l'affermazione è immediatamente verificata, pertanto supponiamo $j \geq 3$, allora, poichè vale l'identità di Jacobi:

$$[u, [v_1 \ldots [v_{j-1}, v_j] \ldots]] = -[v_1, [v_2 \ldots [v_{j-1}, v_j] \ldots], u]]] - [[v_2 \ldots [v_{j-1}, v_j] \ldots], [u, v_1]] =$$
$$\{ \text{ elemento di } U_{k+1} \} + [v_2, [v_3 \ldots [v_{j-1}, v_j] \ldots], [u, v_1]]]] + [[v_3 \ldots [v_{j-1}, v_j] \ldots], [[u, v_1], v_2]] =$$
$$\{ \text{ elemento di } U_{k+1} \} + \{ \text{ elemento di } U_{k+1} \} + [[v_2, [v_1, u]], [v_3 \ldots [v_{j-1}, v_j] \ldots]]$$

dopo un numero finito di iterazioni:

$$\{ \text{ elemento di } U_{k+1} \} + (-1)^j [v_j, [v_{j-1} \ldots [v_1, u] \ldots]] \ \in U_{k+1}$$

q.e.d

Cor. Siano $Z_1, \ldots, Z_m \in T(\mathbb{R}^N)$ fissati, allora:

$$\mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_m\} = \mathsf{span}\{[Z_{j_1} \ldots [Z_{j_{k-1}}, Z_{j_k}] \ldots] \mid j_1, \ldots, j_k \in \underline{m}, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

Più avanti faremo uso della seguente notazione; fissato $J = (j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k$ poniamo:

$$Z_J := [Z_{j_1} \ldots [Z_{j_{k-1}}, Z_{j_k}] \ldots]$$

1.4 Gruppi di Lie in $\mathbb{R}^N$

Supponiamo che su $\mathbb{R}^N$ sia definita una struttura di gruppo con l'operazione $\diamond$ e che la funzione:

$$\tilde{\diamond} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$(x, y) \mapsto x \diamond y^{-1}$$

sia di classe C^∞. Allora la struttura:

$$\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, \diamond)$$

è detta ***gruppo di Lie su*** $\mathbb{R}^N$.

Si osserva che $\mathbb{G}$ si può identificare (a meno di isomorfismi) con un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ che abbia elemento neutro in $0 = (0, \ldots, 0)$. Se e è l'elemento neutro di $\mathbb{G}$ l'isomorfismo si ottiene inducendo una nuova operazione $*$ a partire da $\diamond$ e dal diffeomorfismo $T(x) := x - e$ nel modo seguente:

$$y * y' = T(T^{-1}(y) \diamond T^{-1}(y'))$$

Def. Siano $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, X un campo vettoriale su $\mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{G}$. Definita:

$$\tau_\alpha(x) := \alpha \diamond x$$

Si dice che X è un ***invariante sinistro*** su $\mathbb{G}$ se:

$$X(\varphi \circ \tau_\alpha) = (X\varphi) \circ \tau_\alpha$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Denoteremo con $\mathfrak{g}$ l'insieme dei campi vettoriali invarianti sinistri su $\mathbb{G}$; tale insieme risulta un sottospazio vettoriale di $T(\mathbb{R}^N)$, chiuso rispetto a $[\ ,\ ]$, pertanto è un' algebra di Lie di campi vettoriali e verrà chiamata l'***algebra di Lie*** di $\mathbb{G}$.

Caratterizzazione di $\mathfrak{g}$

Ci occuperemo nel seguito di fornire alcune caratterizzazioni di $\mathfrak{g}$:

Prop.(Caratterizzazione di $\mathfrak{g}$ - I) Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ e $X \in T(\mathbb{R}^N)$. Allora $X \in \mathfrak{g}$ se e solo se:

$$(XI)(\alpha \diamond x) = \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) \cdot (XI)(x), \qquad \forall \alpha, x \in \mathbb{G} \qquad (\star)$$

<u>*dim.*</u> Per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$X(\varphi \circ \tau_\alpha)(x) = \nabla(\varphi \circ \tau_\alpha)(x) \cdot XI(x) = \nabla\varphi(\tau_\alpha(x)) \cdot \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) \cdot XI(x)$$

D'altra parte:

$$(X\varphi) \circ \tau_\alpha = (\nabla\varphi(\tau_\alpha(x))) \cdot XI(\tau_\alpha(x))$$

Da cui $X \in \mathfrak{g}$ se e solo se:

$$\nabla\varphi(\tau_\alpha(x)) \cdot \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) \cdot XI(x) = (\nabla\varphi(\tau_\alpha(x))) \cdot XI(\tau_\alpha(x))$$

Tale condizione vale sicuramente quando vale $(\star)$; d'altra parte, se vale la condizione scritta sopra, per $\varphi = \sum_{j=1}^N h_j x_j$, $h_j \in \mathbb{R}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, N\}$, si ha:

$$h^T \cdot (XI)(\alpha \diamond x) = h^T \cdot \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) \cdot (XI)(x) \qquad \forall \alpha, x \in \mathbb{G}$$

per ogni $h^T \in \mathbb{R}^N$, e dunque necessariamente $(\star)$.

q.e.d

Scambiando x con α nella relazione precedente e ponendo $\alpha = 0$ si ha:

$$XI(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot (XI)(0) \qquad \forall x \in \mathbb{G}$$

Inoltre, fissato $\eta \in \mathbb{R}^N$ e definendo il campo vettoriale X come segue:

$$XI(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta$$

si ha che $X \in \mathsf{g}$.
Infatti, fissati $\alpha, x \in \mathbb{G}$:

$$XI(\alpha \diamond x) = \mathcal{J}_{\tau_{\alpha \diamond x}}(0) \cdot \eta$$

D'altra parte, poichè $\tau_{\alpha \diamond x} = \tau_\alpha \circ \tau_x$, si ha:

$$XI(\alpha \diamond x) = \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) \cdot \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta = \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(x) \cdot XI(x)$$

$$\Rightarrow X \in \mathsf{g}$$

Sulla base di queste osservazioni è possibile esibire una seconda caratterizzazione di g:

Prop.(Caratterizzazione di g - II) Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, g l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ e $X \in T(\mathbb{R}^N)$. Allora $X \in \mathsf{g}$ se e solo se:

$$XI(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot (XI)(0) \qquad \forall x \in \mathbb{G}$$

Da questa seconda caratterizzazione si evince che g dipende **esclusivamente** dalla struttura dell'operazione $\diamond$ definita su $\mathbb{G}$.
Vediamo poi un'ulteriore caratterizzazione di g, come spazio vettoriale:

Prop.(Caratterizzazione di g - III) Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, g l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ e $X \in T(\mathbb{R}^N)$. Allora l'applicazione:

$$J : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathsf{g}$$
$$J(\eta)I(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta$$

è un isomorfismo tra spazi vettoriali; in particolare:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{g} = N$$

<u>*dim.*</u> Dalla proposizione precedente abbiamo:

$$\cdot\ J(\eta) \in \mathsf{g}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N$$
$$\cdot\ J(\mathbb{R}^N) = \mathsf{g}$$

La linearità di J segue dalla proprietà:

$$A \cdot (v + w) = (A \cdot v) + (A \cdot w)$$

Resta da dimostrare che $ker(J) = \{0\}$; sia dunque $\eta \in \mathbb{R}^N$ tale che:

$$J(\eta)I(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

allora, per $x = 0$:

$$0 = \mathcal{J}_{\tau_0}(0) \cdot \eta = I_{\mathbb{R}^N} \cdot \eta = \eta$$

q.e.d

Prop.(Caratterizzazione di g - IV) Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, g l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ e $X \in T(\mathbb{R}^N)$. Allora $X \in \mathsf{g}$ se e solo se $\exists\, \eta \in \mathbb{R}^N$ tale che, per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$:

$$(X\varphi)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(x \diamond (t\eta)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

<u>*dim.*</u> Sia $X \in \mathsf{g}$, allora $XI(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta$ e $\eta = (XI)(0)$, pertanto:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(x \diamond (t\eta)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\tau_x(t\eta)) =$$
$$= \nabla\varphi(x) \cdot \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta = \nabla\varphi(x) XI(x) =$$
$$= (X\varphi)(x)$$

D'altra parte, se esiste $\eta \in \mathbb{R}^N$ come nelle ipotesi:

$$(X\varphi)(\alpha \diamond x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi((\alpha \diamond x) \diamond (t\eta)) =$$
$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\alpha \diamond (x \diamond (t\eta))) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ \tau_\alpha)(x \diamond (t\eta)) =$$
$$= (X(\varphi \circ \tau_\alpha))(x)$$

q.e.d

Nelle ipotesi della proposizione precedente si ha inoltre:

$$\eta = XI(0)$$

infatti, ponendo $\varphi(x) = x_j = I_j$ per $x = 0$ si ha:

$$X(I_j)(0) = (XI)_j(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi((t\eta)_j) = \eta_j$$

Oss Nelle notazioni precedenti, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $X \in \mathfrak{g}$ vale il seguente sviluppo:

$$\exp(tX)(x) = x \diamond (t\eta) + t \cdot \omega(t)$$

Infatti:

$$x \diamond (t\eta) = x + \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta + t \cdot \omega_1(t)$$

Da quanto già visto, poichè $\mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot \eta = XI(x)$, si ha:

$$\exp(tX)(x) = x + tXI(x) + t \cdot \omega_2(t) = x \diamond (t\eta) + t \cdot \omega(t)$$

Vogliamo infine preoccuparci della lineare indipendenza di elementi di g; a tal proposito introduciamo la seguente:

Prop. Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ e $X \in \mathbb{R}^N$. Siano poi $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{g}$ allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) $X_1, \ldots, X_m$ sono linearmente indipendenti in $\mathfrak{g}$

(ii) $X_1I(0), \ldots, X_mI(0)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$

(iii) $\exists x_0 \in \mathbb{R}^N : X_1I(x_0), \ldots, X_mI(x_0)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$

(iv) $X_1I(x), \ldots, X_mI(x)$ sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$\underline{dim.}$ Innanzitutto, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $j \in \underline{m}$ abbiamo che:

$$X_j I(x) = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot X_j I(0)$$

pertanto, essendo $\mathcal{J}_{\tau_x}(0)$ invertibile, *(ii),(iii),(iv)* sono equivalenti; d'altra parte essendo ogni vettore $X_j I(0)$ immagine del vettore X_j mediante un isomorfismo tra spazi vettoriali, vettori linearmente indipendenti vengono portati in vettori linearmente dipendenti, pertanto è provata anche l'equivalenza tra *(i)* e *(ii)*

q.e.d

1.5 Base Jacobiana

È già stato osservato che ogni base di $\mathfrak{g}$ può essere vista come immagine, mediante l'isomorfismo J, di una base di $\mathbb{R}^N$. In particolar modo possiamo definire una base di $\mathfrak{g}$ in modo naturale nel seguente modo:

Def. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie; denotando con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^N$ definiamo ***base Jacobiana*** di $\mathfrak{g}$ la base:

$$Z_1, \ldots, Z_n \qquad Z_j := J(e_j),\ \forall j \in \underline{N}$$

Dalla definizione appena introdotta abbiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$:

$$Z_j = \mathcal{J}_{\tau_x}(0) \cdot e_j = j\text{−esima colonna di } \mathcal{J}_{\tau_x}(0)$$

1.6 Funzione esponenziale di $\mathbb{G}$

Al fine di introdurre la nozione di funzione esponenziale da $\mathfrak{g}$ a $\mathbb{G}$ vengono introdotte alcune:

Premesse:

I - Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ un gruppo di Lie e sia $\mathbf{g}$ la sua algebra di Lie; siano poi $X \in \mathbf{g}$ e $\gamma: [t_0, t_0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una sua curva integrale. Allora:

(i) $\alpha \diamond \gamma$ è una curva integrale di X per ogni $\alpha \in \mathbb{G}$

(ii) γ può essere prolungata ad una curva integrale di X sull'intervallo $[t_0 - T, t_0 + 2T]$

<u>*dim.*</u> *(i)* Sia $t \in [t_0, t_0 + T]$ allora:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha \diamond \gamma(t)) &= \frac{d}{dt}(\tau_\alpha(\gamma(t))) = \\ = \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(\gamma(t)) \cdot \gamma^{'}(t) &= \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(\gamma(t)) \cdot XI(\gamma(t)) \\ &= XI(\alpha \diamond \gamma(t)) \end{aligned}$$

(ii) Definendo $\Gamma: [t_0 - T, t_0 + 2T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ come segue:

$$\Gamma(t) := \begin{cases} \gamma(t_0) \diamond (\gamma(t_0 + T))^{-1} \diamond \gamma(t + T) & t_0 - T \leq t \leq t_0 \\ \gamma(t) & t_0 \leq t \leq t_0 + T \\ \gamma(t_0 + T) \diamond (\gamma(t_0))^{-1} \diamond \gamma(t - T) & t_0 + T \leq t \leq t_0 + 2T \end{cases}$$

si ha la curva cercata; una conseguenza immediata di quest'ultima osservazione è che per ogni $X \in \mathbb{G}$ la mappa:

$$(x, t) \mapsto \exp(tX)(x)$$

è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy abbiamo inoltre il seguente risultato:

$$\cdot\ x \diamond \exp(tX)(y) = \exp(tX)(x \diamond y)$$
$$\cdot\ \exp(tX)(x) = x \diamond \exp(tX)(0)$$

Possiamo ora introdurre la definizione di funzione esponenziale di un gruppo di Lie:

Def. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Definiamo ***funzione*** (o ***mappa***) ***esponenziale*** di $\mathbb{G}$ la funzione:

$$\begin{aligned}&\mathsf{Exp}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{G}\\&\mathsf{Exp}(X) := \exp(1 \cdot X)(0)\end{aligned}$$

Dall'osservazione precedente e da quanto già visto nella sezione (1.2), per ogni $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{Exp}(-X) \diamond \mathsf{Exp}(X) &= \mathsf{Exp}(-X) \diamond \exp(1 \cdot X)(0) =\\ \exp(1 \cdot X)(\mathsf{Exp}(-X)) &= \exp(1 \cdot X)(exp(-1 \cdot X)(0)) = 0\\ &\Rightarrow \mathsf{Exp}(-X) \diamond \mathsf{Exp}(X) = 0\end{aligned}$$

Oss. (Invertibilità locale della mappa esponziale) Sia $\{X_1, \ldots, X_N\}$ una base di $\mathfrak{g}$; per ogni $X \in \mathfrak{g}$ avremo una rappresentazione del tipo:

$$X = \sum_{j=0}^{N} \xi_j X_j$$

con $\xi_j \in \mathbb{R}$, $\forall j \in \underline{N}$. Pertanto possiamo scrivere Exp in funzione dei coefficienti di X nel modo seguente:

$$X \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto \mathsf{Exp}(\sum_{j=0}^{N} \xi_j X_j) = \exp(\sum_{j=0}^{N} \xi_j X_j)(0)$$

In particolare, poichè la funzione:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto \exp(\sum_{j=0}^{N} \xi_j X_j)(0)$$

risulta di classe C^∞ su $\mathbb{R}^N$ (lo si può dedurre dai risultati della teoria classica delle equazioni differenziali ordinarie), considerando il suo sviluppo di Taylor avremo:

$$\begin{aligned}\mathsf{Exp}(X) &= 0 + \sum_{j=0}^{N} \xi_j X_j I(0) + \mathcal{O}(\mid \xi \mid^2)\\ &= \sum_{j=0}^{N} \xi_j \eta_j + \mathcal{O}(\mid \xi \mid^2)\end{aligned}$$

Dunque, scegliendo come base $\{X_1, \ldots, X_N\}$ la base Jabobiana $\{Z_1, \ldots, Z_N\}$ si ha:

$$\mathcal{J}_{\mathsf{Exp}}(0) = I_{\mathbb{R}^N}$$

Per il teorema dell'invertibilità locale si può affermare che Exp è un diffeomorfismo da un intorno di $0 \in \mathsf{g}$ ad un intorno di $0 \in \mathbb{G}$; in tale intorno denotiamo con Log la funzione inversa di Exp.

Oss. (Operazione di Campbell-Hausdorff su g) Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ un gruppo di Lie, su cui siano definite globalmente le funzioni:

$$\mathsf{Exp}: \ \mathsf{g} \longrightarrow \mathbb{G}, \ \ \mathsf{Log}: \ \mathbb{G} \longrightarrow \mathsf{g}$$

allora $\diamond$ induce su g un'operazione $\bar{\diamond}$ nel modo seguente:

$$X \bar{\diamond} Y = \mathsf{Log}(\mathsf{Exp}(X) \diamond \mathsf{Exp}(Y)) \qquad \forall X, Y \in \mathsf{g}$$

In tal caso $(\mathsf{g}, \bar{\diamond})$ è un gruppo di Lie, e la mappa: $\mathsf{Exp}: (\mathsf{g}, \bar{\diamond}) \longrightarrow \mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ risulta un isomorfismo di gruppi.

Capitolo 2

Gruppi di Lie omogenei su $\mathbb{R}^N$

Sia $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^N$ e sia, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, δ_λ la *dilatazione* così definita:

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad \delta_\lambda(x_1, \ldots, x_N) = (\lambda^{\sigma_1} x_1, \ldots, \lambda^{\sigma_N} x_N)$$

Un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ si dice ***omogeneo*** se $\exists \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^N$, $1 \leq \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_N$ tale che ogni elemento della famiglia di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ risulti un *automorfismo* di $\mathbb{G}$. Formalmente:

(H.1)

$$\delta_\lambda(x \diamond y) = \delta_\lambda(x) \diamond \delta_\lambda(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{G} \; \forall \lambda > 0$$

in tal caso la famiglia $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ è un gruppo di automorfismi di $\mathbb{G}$; denoteremo con $\mathbb{G}$ la terna $(\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$

Oss Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ un gruppo di Lie omogeneo, con elemento neutro e, allora per ogni $\lambda > 0$:

$$\delta_\lambda(e) = e \Leftrightarrow e = 0$$

Oss Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, d_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo; l'ipotesi $1 \leq \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_N$ non è restrittiva (a meno di permutazioni delle variabili di $\mathbb{R}^N$)

inoltre è sempre possibile ricondursi al caso $\sigma_1 = 1$ scegliendo come famiglia di dilatazioni la famiglia:

$$\delta_\lambda := d_{\lambda^{1/\sigma_1}}$$

2.1 Funzioni e operatori differenziali δ_λ omogenei

Presentiamo nel seguito qualche nozione sulle funzioni omogenee e sugli operatori differenziali omogenei, necessarie per caratterizzare l'operazione $\diamond$ nel caso di gruppi di Lie omogenei. Questa trattazione è valida in generale, senza considerare $\mathbb{R}^N$ con una struttura di gruppo di Lie. Sia dunque δ_λ una famiglia di dilatazioni del tipo:

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad \delta_\lambda(x_1, \dots, x_N) = (\lambda^{\sigma_1} x_1, \dots, \lambda^{\sigma_N} x_N)$$

dove σ_j è un numero positivo fissato per ogni $j \in \underline{N}$.

Def. Sia $m \in \mathbb{R}$ e sia $a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione non identicamente nulla; essa si dice δ_λ***-omogenea*** di grado m se, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\lambda > 0$ vale:

$$a(\lambda_\delta(x)) = \lambda^m a(x)$$

Def. Sia $n \in \mathbb{R}$ e sia X un operatore differenziale lineare non identicamente nullo; esso si dice λ_δ***- omogeneo*** di grado n se, per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\lambda > 0$ vale:

$$X(\varphi(\delta_\lambda(x))) = \lambda^n (X\varphi)(\delta_\lambda(x))$$

Oss Nelle notazioni precedenti, se $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e Xa non è identicamente nullo allora è δ_λ-omogeneo di grado $m - n$. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\lambda^n Xa(\delta_\lambda(x)) = X(a(\delta_\lambda(x))) = \lambda^m X(a(x))$$

Def. Sia $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N,\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$; definiamo δ_λ***-lunghezza*** di α:

$$| \alpha |_\sigma := \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \alpha_j$$

Se $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ è un gruppo di Lie, talvolta denoteremo la δ_λ-lunghezza di α con $| \alpha |_{\mathbb{G}}$

Oss La funzione $x \mapsto x_j$ e l'operatore differenziale ∂_{x_j} sono δ_λ-omogenei di grado σ_j; allo stesso modo la funzione $x \mapsto x^\alpha$ e l'operatore differenziale D^α sono δ_λ-omogenei di grado $| \alpha |_\sigma$.

Prop. Sia $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ una funzione δ_λ-omogenea di grado $m \in \mathbb{R}$; allora:

(i)
$$m = 0 \Rightarrow a(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

(ii)
$$m > 0 \Rightarrow a(x) = \sum_{|\alpha|_\sigma = m} a_\alpha x^\alpha \qquad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

<u>*dim.*</u> Innanztitutto mostriamo che $m \geq 0$; sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$, dalla relazione:

$$a(\delta_\lambda(x_0)) = \lambda^m a(x_0)$$

abbiamo:

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^m = \lim_{\lambda \to 0} \frac{a(\delta_\lambda(x_0))}{a(x_0)} = \frac{a(0)}{a(x_0)} < +\infty$$

dunque $m \geq 0$. Supponiamo ora $m = 0$, in tal caso:

$$a(x) = a(\delta_\lambda(x)) = \lim_{\lambda \to 0} a(\delta_\lambda(x)) = a(0)$$

pertanto a è costante. Consideriamo ora un operatore differenziale D^α, la funzione $D^\alpha a$ è δ_λ-omogenea di grado $m - |\alpha|_\sigma$, e da quanto visto al punto precedente:

$$D^\alpha a \equiv 0 \qquad \forall \alpha,\ |\alpha|_\sigma > m$$

Ciò prova che a è una funzione polinomiale, precisamente sarà della forma:

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha x^\alpha$$

e poichè è δ_λ-omogenea di grado m:

$$\begin{aligned}
\lambda^m a(x) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda^m a_\alpha x^\alpha = \\
a(\delta_\lambda(x)) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda^{|\alpha|_\sigma} a_\alpha x^\alpha \\
&\Rightarrow \lambda^{|\alpha|_\sigma} a_\alpha = \lambda^m a_\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathcal{A} \\
&\Rightarrow \lambda^{|\alpha|_\sigma} = \lambda^m \\
&\Rightarrow |\alpha|_\sigma = m \qquad \forall \alpha \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

q.e.d

Cor. Le funzioni $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, δ_λ-omogenee di grado m sono *tutte* e *sole* le funzioni polinomiali del tipo:

$$a(x) = \sum_{|\alpha|_\sigma = m} a_\alpha x^\alpha \qquad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

con almeno un $a_\alpha \neq 0$. Denoteremo l'insieme delle funzioni di questo tipo con $P_m(\mathbb{R}^N)$.

Prop. (Caratterizzazione dei campi vettoriali lisci δ_λ-omogenei) Sia X un campo vettoriale liscio su $\mathbb{R}^N$:

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_{x_j}$$

Allora X è δ_λ-omogeneo di grado n se e solo se:

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^N : \; a_j(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; a_j \in P_{\sigma_j - n}(\mathbb{R}^N)$$

Oss. Sia X un campo vettoriale liscio su $\mathbb{R}^N$ e δ_λ-omogeneo di grado $n > 0$:

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_{x_j}$$

allora, poichè ogni a_j non identicamente nulla è una funzione polinomiale δ_λ-omogenea di grado $\sigma_j - n < \sigma_j$, e poichè $\sigma_j < \sigma_{j+1} \ldots < \sigma_N$, necessariamente:

$$a_j(x) = a_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$$

Prop. Siano $X_1, \ldots, X_k \in T(\mathbb{R}^N)$ campi vettoriali δ_λ-omogenei di grado rispettivamente $n_1, \ldots, n_k$. Se $i \neq j \Rightarrow n_i \neq n_j$ e $X_j I(0) \neq 0$, $\forall j \in \underline{k}$ allora $X_1, \ldots, X_k$ sono linearmente indipendenti.

dim. Siano $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j X_j = 0$$

allora per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$:

$$0 = \sum_{j=1}^{k} c_j X_j(\varphi(\delta_\lambda(x)) = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda^{n_j} (X_j \varphi)(\delta_\lambda(x))$$

D'altra parte, per ogni $h \in \mathbb{R}^N$, posto $\varphi(x) =< h, x >$ si ha, per $x = 0$:

$$0 = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda^{n_j} < X_j I(0), h > = \left\langle \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda^{n_j} X_j I(0), h \right\rangle$$

e poichè ciò vale per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ necessariamente:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda^{n_j} X_j I(0) = 0$$

Infine, essendo $n_i \neq n_j \; \forall i \neq j$:

$$c_j X_j I(0) = 0 \quad \forall j \in \underline{k}$$

e poichè per ipotesi $X_j I(0) \neq 0 \; \forall j \in \underline{k}$:

$$c_j = 0 \quad \forall j \in \underline{k}$$

q.e.d

Cor. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie; siano poi $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$ campi vettoriali non identicamente nulli δ_λ-omogenei di grado rispettivamente $n_1, \ldots, n_k$, allora sono linearmente indipendenti.

Prop. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie; siano poi $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ campi vettoriali non identicamente nulli δ_λ-omogenei di grado rispettivamente n_1, n_2, allora $[X_1, X_2]$ è δ_λ-omogeneo di grado $n_1 + n_2$ (se non è identicamente nullo).
<u>*dim.*</u> Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, e sia $Y_1 = X_1 X_2$, allora:

$$\begin{aligned}(Y_1)(\varphi(\delta_\lambda(x))) = (X_1)(X_2(\varphi(\delta_\lambda(x))) = \lambda^{n_2} X_1((X_2\varphi)(\delta_\lambda(x))) =\\ = \lambda^{n_1}\lambda^{n_2}(X_1(X_2\varphi))(\delta_\lambda(x)) = \lambda^{n_1}\lambda^{n_2}(Y_1\varphi)(\delta_\lambda(x))\end{aligned}$$

Allo stesso modo si procede per $Y_2 = X_2 X_1$ e dunque $[X_1, X_2] = Y_1 - Y_2$ risulta δ_λ-omogeneo di grado $n_1 + n_2$.

q.e.d

2.2 Struttura dei gruppi di Lie omogenei

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo; per caratterizzare l'operazione $\diamond$ ci serviremo dei due lemmi seguenti:

Lemma 1 Sia δ_λ una famiglia di dilatazioni e sia $P : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ *non identicamente nulla* e tale che $\exists\, j \in \underline{N}$ per cui:

$$P(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda^{\sigma_j} P(x, y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ \forall \lambda > 0$$

Nell'ulteriore ipotesi che: $P(x, 0) = x_j, \quad P(0, y) = y_j$ Si ha che $P(x, y) = x_1 + y_1$ se $j = 1$ altrimenti:

$$P(x, y) = x_j + y_j + \tilde{P}(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_1, \ldots, y_{j-1})$$

dove $\tilde{P}$ è una funzione polinomiale nelle variabili $x_1, \ldots, x_{j-1}, y_1, \ldots, y_{j-1}$ tale che:

$$\tilde{P}(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda^{\sigma_j} \tilde{P}(x, y)$$

dim. Poichè P è δ_λ-omogenea di grado σ_j sarà del tipo:

$$\sum_{|\alpha|_\sigma+|\beta|_\sigma=\sigma_j} c_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta, \quad c_{\alpha,\beta}\in\mathbb{R}$$

D'altra parte:

$$P(x,0)=\sum_{|\alpha|_\sigma=\sigma_j} c_{\alpha,0}x^\alpha = x_j$$
$$P(0,y)=\sum_{|\beta|_\sigma=\sigma_j} c_{0,\beta}y^\beta = y_j$$

Da cui:

$$P(x,y)=x_j+y_j+\sum_{|\alpha|_\sigma+|\beta|_\sigma=\sigma_j,\,\alpha,\beta\neq 0} c_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta$$

Il termine:

$$\tilde{P}(x,y)=\sum_{|\alpha|_\sigma+|\beta|_\sigma=\sigma_j,\,\alpha,\beta\neq 0} c_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta$$

è una funzione polinomiale δ_λ-omogenea di grado σ_j che dipende solo dalle variabili x_k, y_k tali che $\sigma_k < \sigma_j$ ovvero dalle variabili $x_1,\ldots,x_{j-1},y_1,\ldots,y_{j-1}$

q.e.d

Lemma 2 Sia δ_λ una famiglia di dilatazioni e sia $Q:\ \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che esista $m\geq 0$ per cui:

$$Q(\delta_\lambda(x),\delta_\lambda(y))=\lambda^m Q(x,y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^N,\ \forall\lambda>0$$

allora se la funzione:

$$x\mapsto \frac{\partial Q}{\partial y_j}(x,0)$$

non è identicamente nulla è δ_λ-omogenea di grado $m-\sigma_j$.

dim. Da quanto già visto Q sarà della forma:

$$Q(x,y)=\sum_{|\alpha|_\sigma+|\beta|_\sigma=m} c_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta, \quad c_{\alpha,\beta}\in\mathbb{R}$$

denotando con e_j il j-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^N$ si ha:

$$\frac{\partial Q}{\partial y_j}(x,y)=\sum_{|\alpha|_\sigma+|\beta|_\sigma=m} \beta_j c_{\alpha,\beta}x^\alpha y^{\beta-e_j}$$

poichè $|e_j|_\sigma = \sigma_j$, per $y = 0$ si ha:

$$\frac{\partial Q}{\partial y_j}(x,0) = \sum_{|\alpha|_\sigma = m-\sigma_j,\, \beta = e_j} c_{\alpha,\beta} x^\alpha$$

q.e.d

Teor. (Struttura dei gruppi di Lie omogenei su $\mathbb{R}^N$) Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo; le componenti di $\diamond$ sono funzioni polinomiali, più precisamente:

$$(x \diamond y)_1 = x_1 + y_1, \quad (x \diamond y)_j = x_j + y_j + Q_j(x,y), \quad 2 \leq j \leq N$$

inoltre:

(i) Q_j è funzione delle variabili $x_1 \ldots, x_{j-1}$ e $y_1, \ldots, y_{j-1}$

(ii) Q_j è polinomiale nelle variabili x, y

(iii) $Q_j(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda^{\sigma_j} Q_j(x,y)$

dim. Definiamo, per ogni $j \in \underline{N}$:

$$P_j : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P_j(x,y) = (x \diamond y)_j$$

Per ipotesi δ_λ è un automorfismo su $\mathbb{G}$, dunque:

$$P_j(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = (\delta_\lambda(x \diamond y))_j = \lambda^{\sigma_j}(x \diamond y)_j = \lambda^{\sigma_j} P_j(x,y)$$

Inoltre, poichè $x \diamond 0 = x$ e $y \diamond 0 = y$ si ha:

$$P_j(x,0) = x_j, \qquad P_j(0,y) = y_j$$

La dimostrazione del teorema segue direttamente dal *Lemma 1.*

q.e.d

Base Jacobiana di un gruppo di Lie omogeneo

Cor. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo, allora:

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^{(1)} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_N^{(1)} & \dots & a_N^{(N-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

dove $a_i^{(j)}$ è una funzione polinomiale δ_λ-omogenea di grado $\sigma_i - \sigma_j$.
<u>*dim.*</u> Dal teorema precedente $a_i^{(j)}$ sarà della forma:

$$a_i^{(j)}(x) = \frac{\partial Q}{\partial y_j}(x, 0)$$

pertanto, dal *Lemma 2*, $a_i^{(j)}$ risulta polinomiale, δ_λ-omogenea di grado $\sigma_i - \sigma_j$

Caso particolare: nelle ipotesi del corollario precedente supponiamo che $\sigma_1 = \ldots = \sigma_N$, abbiamo già osservato nella dimostrazione del *Lemma 1* che:

$$(\tau_x(y))_j = P(x, y)_j = x_j + y_j + \sum_{|\alpha|_\sigma + |\beta|_\sigma = \sigma_j,\, \alpha, \beta \neq 0} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta = x_j + y_j + \tilde{P}(x, y)$$

e che $\tilde{P}(x, y)$ dipende dalle componenti x_i tali che $i < j$, $\sigma_i < \sigma_j$; in tal caso nessuna componente soddisfa tale ipotesi, pertanto:

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{\mathbb{R}^N}$$

Oss. Nelle ipotesi precedenti, se $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$, la base Jacobiana ad essa associata è della forma:

$$Z_j = \partial_{x_j} + \sum_{i=j+1}^{N} a_i^{(j)} \partial_{x_i}$$

se $1 \leq j \leq N-1$, altrimenti:

$$Z_N = \partial_{x_N}$$

Inoltre Z_j risulta un campo vettoriale δ_λ-omogeneo di grado σ_j per ogni $j \in \underline{N}$, infatti:

$$\begin{aligned} Z_j(\varphi(\delta_\lambda(x))) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ \delta_\lambda)(x \diamond (te_j)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi(\delta_\lambda(x) \diamond \delta_\lambda(te_j))) = \\ = \lambda^{\sigma_j} \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} (\varphi(\delta_\lambda(x) \diamond (re_j)) = \lambda^{\sigma_j}(Z_j\varphi)(\delta_\lambda(x)) \end{aligned}$$

2.3 Algebra di Lie di un gruppo di Lie omogeneo

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie; consideriamo i coefficienti $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ relativi alla famiglia di dilatazioni δ_λ, e ricordiamo che consideriamo verificata l'ipotesi $\sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_N$. In tal caso possiamo definire una partizione $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\underline{r}}$ di $\{1, \ldots, N\}$ nel modo seguente:

$$\mathcal{F}_1 = \{i \in \underline{N} \mid \sigma_i = \sigma_1\}$$

Poniamo poi:

$$n_1 := \sigma_1, \quad N_1 := \max \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}_2 := \{i \in \underline{N} \mid \sigma_i = \sigma_{N_1+1}\}$$

Successivamente poniamo:

$$n_2 := \sigma_{N_1+1}, \quad N_2 := \max \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_3 := \{i \in \underline{N} \mid \sigma_i = \sigma_{N_2+1}\}$$

Iterando questo procedimento possiamo definire $n_1, \ldots, n_r$ e $N_1, \ldots, N_r$ tali che:

$$n_1 \leq \ldots \leq n_r, \qquad N_1 + \ldots + N_r = N$$

Sia poi $Z_1, \ldots, Z_N$ la base Jacobiana di g; definiamo una famiglia di algebre di Lie $\{\mathsf{g}_i\}_{i \in \underline{r}}$, sottoalgebre di g come segue:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{g}_1 := \mathsf{span}\{Z_j \mid 1 \leq j \leq N_1\} \\
&\vdots \\
&\mathsf{g}_i := \mathsf{span}\{Z_j \mid N_1 + \ldots + N_{i-1} \leq j \leq N_1 + \ldots + N_i\} \\
&\vdots \\
&\mathsf{g}_r := \mathsf{span}\{Z_j \mid N_1 + \ldots + N_{r-1} \leq j \leq N_1 + \ldots + N_r\}
\end{aligned}$$

In tal modo, per ogni $i \in \underline{r}$, i generatori di g_i sono campi vettoriali lisci, invarianti sinistri, δ_λ-omogenei di grado σ_j; inoltre si ha:

$$\mathsf{g} = \mathsf{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{g}_r$$

2.4 Funzione esponenziale di un gruppo di Lie omogeneo

I gruppi di Lie omogenei su $\mathbb{R}^N$ costituiscono un esempio di gruppi di Lie in cui la mappa esponenziale (definita nella sezione *(1.6)*) risulta un diffeomorfismo globale. Infatti gli elementi Z_j della base Jacobiana di g saranno del tipo:

$$Z_j = \sum_{k=j}^{N} a_k^{(j)}(x_1, \ldots, x_{k-1}) \partial_{x_k}$$

Pertanto se $Z \in \mathsf{g}$ sarà:

$$Z = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j a_k^{(j)}(x_1, \ldots, x_{k-1}) \right) \partial_{x_k}$$

Il sistema di equazioni alle derivate parziali, fissati $\xi_1, \ldots \xi_N$, che definisce $\mathsf{Exp}(Z)$ è del tipo introdotto a *pag.6*, e ha sempre soluzione; e risulta in questo caso un diffeomorfismo globale.
In particolare poichè:

$$\mathsf{Exp}: \mathsf{g} \longrightarrow \mathbb{G}, \quad \mathsf{Log}: \mathbb{G} \longrightarrow \mathsf{g}$$

sono funzioni di classe C^∞ definite globalmente, allora mediante l' *operazione di Campbell-Hausdorff*:

$$X \bar{\diamond} Y = \mathsf{Log}(\mathsf{Exp}(X) \diamond \mathsf{Exp}(Y)) \qquad \forall X, Y \in \mathsf{g}$$

la mappa: $\mathsf{Exp} : (\mathsf{g}, \bar{\diamond}) \longrightarrow \mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ risulta un isomorfismo di gruppi; vogliamo mostr che δ_λ è un automorfismo anche su g per ogni $\lambda > 0$, e a tale scopo ci serviremo della seguente:

Notazione: Per ogni $X \in \mathsf{g}$, $X = \sum_{j=1}^N \xi_j Z_j$ denotiamo:

$$\delta_\lambda X := \sum_{j=1}^N \lambda^{\sigma_j} \xi_j Z_j$$

e del seguente:

Lemma Nelle notazioni precedenti, per ogni $Z \in \mathsf{g}$:

$$\mathsf{Exp}(\delta_\lambda(Z)) = \delta_\lambda(\mathsf{Exp}(Z)), \quad \mathsf{Log}(\delta_\lambda(\mathsf{Z})) = \delta_\lambda(\mathsf{Log}(x))$$

<u>*dim.*</u> Innanzitutto per ogni elemento Z_j della base Jacobiana di g:

$$\delta_\lambda(Z_j I(x)) = (\lambda^{\sigma_1} a_1^{(j)}(x), \ldots, \lambda^{\sigma_n} a_n^{(j)})^T$$

Poichè ogni $a_i^{(j)}$ è δ_λ-omogenea di grado $\sigma_i - \sigma_j$:

$$(\lambda^{\sigma_1} a_1^{(j)}(x), \ldots, \lambda^{\sigma_n} a_n^{(j)})^T = \lambda^{\sigma_j}(a_1(\delta_\lambda(x))), \ldots, a_n(\delta_\lambda(x))) = (\delta_\lambda Z_j)(I(\delta_\lambda(x)))$$

Dunque $\delta_\lambda(Z_j I(x)) = (\delta_\lambda Z_j)(I(\delta_\lambda(x)))$; da ciò, se $Z = \sum_{j=1}^N \xi_j Z_j$:

$$\delta_\lambda(Z I(x)) = \sum_{j=1}^N \lambda^{\sigma_j} \xi_j Z_j$$

pertanto:

$$\delta_\lambda(Z I(x)) = (\delta_\lambda Z) I(\delta_\lambda(x)) \qquad (\star)$$

Ora, dalla definizione di $\mathsf{Exp}(Z)$ si ha $\gamma(1) = \mathsf{Exp}(Z)$; poniamo $\Gamma = \delta_\lambda(\gamma)$, essa risulta una curva integrale di $\delta_\lambda(Z)$, infatti:

$$\Gamma' = \delta_\lambda(\gamma') = \delta_\lambda(Z I(\gamma)) =^{(\star)} (\delta_\lambda Z) I(\delta_\lambda(\gamma)) = (\delta_\lambda Z) I(\Gamma)$$

Inoltre $\Gamma(0) = \delta_\lambda(\gamma(0)) = \delta_\lambda(0) = 0$, pertanto $\Gamma(1) = \mathsf{Exp}(\delta_\lambda(Z))$, e dunque:

$$\mathsf{Exp}(\delta_\lambda(Z)) = \Gamma(1) = \delta_\lambda(\gamma(1)) = \delta_\lambda(\mathsf{Exp}(Z))$$

la dimostrazione è analoga per $\mathsf{Log}(Z)$.

q.e.d

Utilizzando questo lemma, per ogni $X, Y \in \mathsf{g}$:

$$\begin{aligned}\delta_\lambda(X \bar{\diamond} Y) = \delta_\lambda(\mathsf{Log}(\mathsf{Exp}(X) \diamond \mathsf{Exp}(Y))) = \\ = \mathsf{Log}(\delta_\lambda(\mathsf{Exp}(X) \diamond \mathsf{Exp}(Y))) = \mathsf{Log}(\delta_\lambda(\mathsf{Exp}(X)) \diamond \delta_\lambda(\mathsf{Exp}(Y))) = \\ \mathsf{Log}(\mathsf{Exp}(\delta_\lambda(X)) \diamond \mathsf{Exp}(\delta_\lambda(Y))) = (\delta_\lambda(X)) \bar{\diamond} (\delta_\lambda(Y))\end{aligned}$$

In tal modo, identificando g in modo naturale con $\mathbb{R}^N$ mediante l'isomorfismo $\pi(X) = XI(0)$ e definendo per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ l'operazione:

$$\xi * \eta = \pi(\pi^{-1}(\xi) \bar{\diamond} \pi^{-1}(\eta))$$

Si ottiene un nuovo gruppo:

$$\mathsf{C} - \mathsf{H}(\mathbb{G}) = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$$

che risulta ancora un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$.

2.5 Gruppi omogenei di Carnot

Introduciamo ora una particolare classe di gruppi di Lie omogenei (su $\mathbb{R}^N$); sia dunque $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, esso si dice un ***gruppo*** (***omogeneo***) ***di Carnot*** o ***gruppo omogeneo graduato*** se gode delle seguenti proprietà:

(C.1) Esistono $N_1, \dots, N_r$ tali che $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_r}$ e che la dilatazione:

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \dots, \lambda^r x^{(r)}), \quad x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$$

sia un automorfismo su $\mathbb{R}^N$ per ogni $\lambda > 0$

(C.2) Se, per ogni $j \in \underline{N_1}$, Z_j è il campo vettoriale invariante sinistro tale che $Z(0) = \partial_{x_j}|_0$, vale:

$$\mathsf{rg}(\mathsf{Lie}\{Z_1, \dots, Z_{N_1}\}(x)) = N, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

in tal caso si dirà che $\mathbb{G}$ ha ***passo*** r e N_1 ***generatori***, inoltre si denoterà $x \in \mathbb{G}$ nel modo seguente:

$$x = (x_1, \dots, x_N) = (x^{(1)}, \dots, x^{(r)})$$

con:

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_{N_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{N_i}$$

infine, con il termine ***generatori Jacobiani*** di $\mathbb{G}$ indicheremo gli elementi $Z_1, \dots, Z_{N_1}$. Sulla base di quanto già visto per i gruppi di Lie otteniamo la seguente osservazione sull'operazione $\diamond$ definita su un gruppo omogeneo di Carnot:

Oss. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo di Carnot, allora denotando $(x \diamond y) = ((x \diamond y)^{(1)}, \dots, (x \diamond y)^{(r)})$ si ha:

$$(x \diamond y)^{(1)} = x^{(1)} + y^{(1)}, \quad (x \diamond y)^{(i)} = x^{(i)} + y^{(i)} + Q^{(i)}(x, y), \quad 2 \le i \le r$$

inoltre:

(i) $Q^{(i)}$ è funzione delle variabili $x^{(1)} \dots, x^{(i-1)}$ e $y^{(1)}, \dots, y^{(i-1)}$

(ii) $Q^{(i)}$ è polinomiale nelle variabili x, y

(iii) $Q^{(i)}(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda^i Q^{(i)}(x, y)$

Oss. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo di Carnot, allora:

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^{N_1}} & 0 & \dots & 0 \\ J_2^{(1)}(x) & I_{\mathbb{R}^{N_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ J_r^{(1)}(x) & \dots & J_r^{(r-1)}(x) & I_{\mathbb{R}^{N_r}} \end{pmatrix}$$

dove $I_{\mathbb{R}^{N_i}}$ è la matrice identica su $\mathbb{R}^N$ e $J_j^i(x)$ è una matrice $N_j \times N_i$ le cui componenti sono funzioni polinomiali δ_λ-omogenee di grado $j-i$; la dimostrazione si basa sull'osservazione fatta a *pag. 29*

Oss. Nelle notazioni precedenti:

$$\mathsf{g} = \mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}\}$$

infatti, poichè $Z_1, \ldots, Z_{N_1} \in \mathsf{g}$, $\mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}\} \subseteq \mathsf{g}$. D'altra parte, poichè vale (C.2), $\exists\, X_1, \ldots, X_N \in \mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}\}$ tali che le loro immagini $X_1 I(0), \ldots, X_N I(0)$ risultino linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^N$. Per la proposizione a *pag. 16* $X_1, \ldots, X_N$ risultano linearmente indipendenti, pertanto:

$$N \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}\} \geq N$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Teor. (Definizione equivalente di gruppo omogeneo di Carnot) Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ un gruppo di Lie; le condizioni *(C.1)* e *(C.2)* sono equivalenti alle:

(i) Esistono $\tau_1, \ldots, \tau_N$ tali che $0 < \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_N$ e che la dilatazione:

$$d_\lambda : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$d_\lambda(x) = (\lambda^{\tau_1} x_1, \ldots, \lambda^{\tau_N} x_N)$$

sia un automorfismo su $\mathbb{R}^N$ per ogni $\lambda > 0$

(ii) Se g è l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ e g_1 è il sottospazio vettoriale di g generato dai campi vettoriali invarianti sinistri d_λ-omogenei di grado τ_1 vale:

$$\mathsf{g} = \mathsf{Lie}\{\mathsf{g}_1\}$$

dim. Innanzitutto se valgono *(C.1)* e *(C.2)* ponendo:

$$\begin{array}{ll} \tau_j = 1 & 1 \leq j \leq N_1 \\ \tau_j = 2 & N_1 \leq j \leq N_2 \\ \vdots & \\ \tau_j = r & N_1 + \ldots + N_{r-1} \leq j \leq N_1 + \ldots N_r \end{array}$$

si verifica immediatamente *(i)*; inoltre, per l' osservazione precedente è verificata anche *(ii)*. Supponiamo ora che siano verificate *(i)* e *(ii)*, allora definiamo la famiglia di dilatazioni:

$$\delta_\lambda = d_{\lambda^{1/\tau_1}}$$

e $\sigma_j := \tau_j/\tau_1$ in tal modo $X \in \mathsf{g}_1$ se e solo se è δ_λ-omogeneo di grado 1; ponendo poi:

$$\nu := \max\{k \in \underline{N} \mid \sigma_k = 1\}$$

si ha che:

$$\nu = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Lie}\{\mathsf{g}_1\} =: m$$

infatti, se $Z_1, \ldots, Z_m$ sono i primi m elementi della base Jacobiana di g, $X \in \mathsf{g}$ si può scrivere $X = \xi_1 Z_1 + \ldots \xi_N Z_N$, ma d'altra parte, per il corollario a *pag. 26*, $\xi_j = 0$, $\forall j > \nu$. Pertanto:

$$\mathsf{g}_1 =< Z_1, \ldots, Z_m >$$

e dunque:

$$\mathsf{g} = \mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_m\} \Rightarrow \mathsf{rg}(\mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_m\}(x)) = N, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Inoltre, ponendo per ogni $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$, $\mathsf{g_j} := [\mathsf{g_1}, \mathsf{g_{j-1}}]$, si ha per la proposizione a *pag. 26* che $\mathsf{g}_j = \{0\}$, $\forall j > r := \sigma_N$, inoltre se $X \in \mathsf{g}_j$ è δ_λ-omogeneo di grado j. Sia poi $j \in \underline{N}, j \geq m+1$, allora Z_j è δ_λ-omogeneo di grado σ_j, ma essendo combinazione di commutatori nidificati di $Z_1, \ldots, Z_m$, sempre per la proposizione a *pag. 26*, tale grado è un numero intero, pertanto abbiamo mostrato che $\mathbb{G}$ è un gruppo omogeneo di Carnot di passo r e con m generatori.

q.e.d

Algebra di Lie di un gruppo omogeneo di Carnot

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo di Carnot di passo r e con N_1 generatori; siano poi $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie e $\{Z_1, \ldots, Z_N\}$ la sua base Jacobiana, che denotiamo con $\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}, Z_1^{(2)}, \ldots, Z_{N_2}^{(2)}, \ldots, Z_{N_r}^{(r)}\}$. Definiamo poi, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2$:

$$W^{(k)} := \mathsf{span}\{Z_J | J \in \{1, \ldots, N_1\}^k\}$$

ogni elemento $Z \in W^{(k)}$ è un campo vettoriale invariante sinistro δ_λ-omogeneo di grado k; dalla proposizione a *pag. 26* $W^{(k)} = \{0\}$ se $k > r$, inoltre dal corollario a *pag. 26* si ha:

$$W^{(k)} \subseteq \mathsf{span}\{Z_1^{(k)}, \ldots, Z_{N_k}^{(k)}\} \quad 2 \leq k \leq r$$

dunque ponendo, per $k = 1$:

$$W^{(1)} := \mathtt{span}\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}\} = \mathtt{span}\{Z_1^{(1)}, \ldots, Z_{N_1}^{(1)}\}$$

risulta:

$$\dim W^{(k)} \leq N_k \quad \forall k \in \underline{r}$$

d'altra parte, dal corollario a *pag. 12*:

$$\mathtt{span}\{W^{(1)}, \ldots, W^{(r)}\} = \mathsf{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_{N_1}\} \ = \mathfrak{g}$$

ed essendo, per il corollario a *pag. 26*, $W^{(i)} \cap W^{(k)} \neq \emptyset$, $\forall i \neq j$:

$$\mathfrak{g} = W^{(1)} \oplus \ldots \oplus W^{(r)}$$

Ora:

$$N = \dim g = \sum_{k=1}^{N} \dim W^{(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} N_k = N$$

pertanto:

(i)

$$\dim W^{(k)} = N_k, \forall k \in \underline{r}$$

(ii)

$$W^{(k)} = \mathsf{span}\{Z_1^{(k)}, \ldots, Z_{N_k}^{(k)}\} \quad 2 \leq k \leq r$$

Infine, posto per ogni $i \in \underline{r}$, $V_i := [W^{(1)}, W^{(i-1)}]$, si ha per la proposizione a *pag .26*:

$$V_i \subseteq W^{(i)}$$

d'altra parte, anche in questo caso, per il corollario a *pag. 12*:

$$\mathsf{g} = \mathsf{span}\{V_1, \ldots, V_r\} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$$

da cui necessariamente:

$$\dim V_i = N_i \Rightarrow V_i = W^{(i)} \forall i \in \underline{r}$$

In definitiva abbiamo mostrato che g è un'algebra graduata:

$$\mathsf{g} = W^{(1)} \oplus \ldots \oplus W^{(r)}$$

con:

$$\begin{aligned} &\left[W^{(1)}, W^{(r)}\right] = \{0\} \\ &\left[W^{(1)}, W^{(i)}\right] = W^{(i+1)}, \qquad \forall i \in \underline{r-1} \end{aligned}$$

Capitolo 3

Operatori differenziali su B-gruppi

3.1 Sub-Laplaciani

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo di Carnot di generatori Jacobiani $Z_1, \dots, Z_{N_1}$, l'operatore differenziale così definito:

$$\triangle_{\mathbb{G}} := \sum_{j=1}^{N_1} Z_j^2$$

è detto ***sub-Laplaciano*** (***canonico***) su $\mathbb{G}$; in generale, con sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$ si intende un qualunque operatore differenziale della forma:

$$\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2$$

dove $\{Y_1, \dots, Y_{N_1}\}$ è una base di $\mathsf{span}\{Z_1, \dots, Z_{N_1}\}$.

Proprietà dei sub-Laplaciani

Nelle notazioni precedenti valgono le seguenti proprietà:

(i) $\mathcal{L}$ è invariante rispetto traslazioni a sinistra su $\mathbb{G}$, ovvero:

$$\mathcal{L}(u(\alpha \diamond x)) = (\mathcal{L}u)(\alpha \diamond x) \qquad \forall \alpha, x \in \mathbb{G}, \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

questa proprietà segue direttamente dal fatto che $Y_1, \ldots, Y_{N_1}$ sono campi vettoriali lisci invarianti sinistri.

(ii) $\mathcal{L}$ è δ_λ-omogeneo di grado 2, ovvero:

$$\mathcal{L}(u(\delta_\lambda(x))) = \lambda^2(\mathcal{L}u)(\delta_\lambda(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \lambda > 0, u \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

infatti, fissato $j \in \underline{N}$, per il corollario a *pag. 26*, Y_j è δ_λ-omogeneo di grado 1 e per la proposizione a *pag. 26* Y_j^2 è δ_λ-omogeneo di grado 2. Pertanto $\mathcal{L}$ è ancora δ_λ-omogeneo di grado 2.

(iii) vale la condizione:
(H)

$$\mathsf{rg}(\mathsf{Lie}\{Y_1, \ldots, Y_N\}(x)) = N, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

L'importanza della proprietà *(iii)* emergerà nella penultima sezione di questo capitolo.

3.2 B-gruppi

Sia $B = (b_{i,j})_{i,j \in \underline{N}}$ una matrice a coefficienti reali; poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{E}(t) := \exp tB$$

dove ricordiamo che per definizione:

$$\exp(tB) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} B^k$$

definiamo poi la seguente operazione su $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$\tilde{\diamond} : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$
$$(z, z') = ((t, x), (t', x')) \mapsto (t' + t\ ,\ x' + \tilde{E}(t')x) = (z \diamond z')$$

La coppia $\mathbb{B} := (\mathbb{R}^N, \diamond)$ risulta un gruppo di Lie con elemento neutro in 0 e inversa:

$$(t, x)^{-1} = (-t, -\tilde{E}(-t)x)$$

Calcoliamo, fissato $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, la matrice Jacobiana, nel punto 0, relativa alla traslazione sinistra τ_z, dove $z = (t, x)$. Si ha:

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x_j}(0.0) = e_{j+1} \in \mathbb{R}^{N+1} \qquad j \in \underline{N}$$

$$\frac{\partial (\tau_z)_1}{\partial t}(0.0) = 1$$

$$\frac{\partial (\tau_z)_j}{\partial t}(0,0) =< B_{j,\cdot}, x >$$

da cui:

$$\mathcal{J}_{\tau_z}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & I_{\mathbb{R}^N} \end{pmatrix}, \qquad b = Bx$$

Pertanto la base Jacobiana di $\mathfrak{b}$, l'algebra di Lie di $\mathbb{B}$, sarà:

$$Y = \partial_t + < Bx, \nabla >, \quad \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N}$$

utilizzeremo tale risultato nelle sezioni successive.

Gruppi di tipo Kolmogorov

Consideriamo ora un B-gruppo $\mathbb{B} = (\mathbb{R}^N, \diamond)$ come nel caso precedente, con l'ulteriore ipotesi che la matrice B sia della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & B_r & 0 \end{pmatrix}$$

dove, per ogni $j \in \underline{r}$, B_j è una matrice $p_{j-1} \times p_j$, di rango p_j e inoltre:

$$p_0 + \ldots + p_r = N, \qquad p_0 \geq \ldots \geq p_r$$

e i blocchi 0 sono scelti in modo che B sia una matrice $N \times N$. I gruppi di questo tipo sono detti ***gruppi*** di ***tipo Kolmogorov*** o più brevemente di ***tipo K***. Vogliamo dimostrare che i gruppi di tipo Kolmogorov sono in particolare gruppi omogenei di Carnot, più precisamente denotando:

$$\mathbb{R}^N \ni x = (x^{(0)}, \ldots, x^{(r)}), \quad x^{(j)} \in \mathbb{R}^{p_j}$$

definendo la famiglia di dilatazioni:

$$D_\lambda(x) = (\lambda x^{(0)}, \ldots, \lambda^{r+1} x^{(r)}), \qquad \lambda > 0$$

e da essa:

$$\delta_\lambda(t, x) = (\lambda t, D_\lambda(x))$$

la terna:

$$\mathbb{B} = (\mathbb{R}^N, \diamond, \delta_\lambda)$$

è un gruppo omogeneo di Carnot. Introduciamo preliminarmente la seguente:

Oss. Nelle ipotesi precedenti $B^k = 0, \quad \forall k \geq r+1$, infatti:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B_2^{(1)} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_r^{(1)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in tal modo, dopo r passi si ha la matrice nulla.

I) Per ogni $\lambda > 0$, δ_λ è un automorfismo di $\mathbb{G}$; per dimostrare questa proposizione ci serviremo del seguente:

Lemma Per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $\lambda > 0$ vale:

$$\tilde{E}(\lambda t) D_\lambda = D_\lambda \tilde{E}(t)$$

dim. Dall'osservazione precedente:

$$\tilde{E}(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{t^k}{k!} B^k$$

dunque, fissati $t \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$:

$$\tilde{E}(\lambda t) D_\lambda = D_\lambda \tilde{E}(t) \Leftrightarrow \lambda^k B^k D_\lambda = D_\lambda B^k \quad \forall k \geq 0$$

ora, tale condizione è sicuramente verificata per $k = 0$; una semplice verifica diretta mostra che vale anche per $k = 1$, dunque, per $k = 2$ si ha:

$$\begin{aligned} \lambda^2 B^2 D_\lambda &= \lambda B(\lambda B D_\lambda) = \\ = \lambda B(D_\lambda B) &= (\lambda B D_\lambda) B = \\ &= D_\lambda B^2 \end{aligned}$$

con un iterazione di questo procedimento si dimostra che la condizione vale per ogni $k \geq 0$

q.e.d.

Siano ora $z, z' \in \mathbb{B},\ z = (t, x),\ z' = (t', x')$, allora:

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda(z \diamond z') = \\ &\quad = \delta_\lambda(t' + t, x' + \tilde{E}(t')x) = \\ &\quad = (\lambda(t' + t), D_\lambda(x' + \tilde{E}(t')x)) = \\ &\quad = (\lambda t' + \lambda t, D_\lambda(x') + \tilde{E}(\lambda(t))D_\lambda(x)) = \\ &\quad = (\lambda t, D_\lambda(x)) \diamond (\lambda t', D_\lambda(x')) = \\ &\quad = \delta_\lambda(z) \diamond \delta_\lambda(z') \end{aligned}$$

II) Vale:

$$\mathsf{rg}(\mathsf{Lie}\{Y, \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{p_0}}\}(0,0)) = N + 1$$

Anche in questo caso faremo ricorso ad un:

Lemma Sia Z un campo vettoriale su $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ del tipo:

$$Z = Ay \cdot (\nabla_z)^T$$

dove A è una matrice $q \times p$, $y \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^q$ e:

$$\mathsf{rg}(A) = q \leq p$$

allora:

$$\mathsf{span}\{[\partial_{y_i}, Z] \mid i \in \underline{p}\} = \mathsf{span}\{\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_q}\}$$

<u>*dim.*</u> Sia $A = (a_{ij})$ allora, per il teorema di Schwarz:

$$[\partial_{y_i}, Z] = \sum_{j=1}^{q} a_{ji} \partial_{z_j}$$

e poichè, per ipotesi, $\mathsf{rg}(A) = q$:

$$\dim \left(\mathsf{span}\{[\partial_{y_i}, Z] \mid i \in \underline{p}\}\right) = q$$

q.e.d.

Ora, data la particolare forma della matrice B, si ha:

$$Y = \sum_{i=1}^{r} B_i x^{(i-1)} \cdot (\nabla_{x^{(i)}})^T$$

per il lemma precedente:

$$\begin{aligned} &\mathsf{span}\{[\partial_{x_i}, Y] \mid i \in \underline{p_0}\} = \\ &= \mathsf{span}\{[\partial_{x_i}, B_1 x^{(0)} \cdot (\nabla_{x^{(1)}})^T] \mid i \in \underline{p_0}\} = \\ &= \mathsf{span}\{\partial x_i^{(1)} \mid i \in \underline{p_1}\} \end{aligned}$$

Applicando ancora il lemma precedente:

$$\mathsf{span}\{[\partial_{x_i^{(1)}}, Y] \mid i \in \underline{p_1}\} = \mathsf{span}\{\partial x_i^{(2)} \mid i \in \underline{p_2}\}$$

da ciò:

$$\mathsf{Lie}\{Y, \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{p_0}}\} = \mathsf{Lie}\{Y, \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N}\}$$

e dunque è immediatamente provato anche *II)*. Pertanto abbiamo mostrato che $\mathbb{B}$ è, secondo le notazioni introdotte, un gruppo omogeneo di Carnot, di passo r e con $p_0 + 1$ generatori.

3.3 Una classe di operatori differenziali di evoluzione

Introduciamo ora una classe molto importante di operatori differenziali, cruciali nella descrizione di alcuni modelli di evoluzione in diversi ambiti quali la fisica e la finanza; siano dunque $A = (a_{i,j})_{i,j\in\underline{N}}$, $B = (b_{i,j})_{i,j\in\underline{N}}$ matrici $N \times N$ a coefficienti reali non nulle; supponiamo poi A simmetrica e semidefinita positiva ($x^T \cdot A \cdot x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$), vogliamo studiare alcune proprietà degli operatori differenziali del tipo:

$$L = \mathsf{div}(A \cdot \nabla) + < Bx, \nabla > -\partial_t$$

dove div è la divergenza e $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})$; poniamo poi, per ogni $j \in \underline{N}$:

$$X_i := \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\partial_{x_j}$$

e:

$$Y := < Bx, \nabla >$$

Ad ogni operatore di questo tipo possiamo associare in modo naturale il B-gruppo su $\mathbb{R}^{N+1}$, con l'operazione:

$$\diamond :\ \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$
$$(z, z') = ((t, x), (t', x')) \mapsto (t - t'\ ,\ x' + \tilde{E}(t')x) = (z \diamond z')$$

dove ricordiamo ancora che:

$$\tilde{E}(t) := \exp tB$$

Proprietà di L:

(I) L'operatore L è invariante per traslazioni a sinistra rispetto a $\diamond$; infatti, da quanto visto nella sezione precedente, la base Jacobiana di $\mathbb{B}$ è costituita da:

$$-\partial_t + < Bx, \nabla >, \quad \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}$$

pertanto anche:

$$\mathsf{div}(A \cdot \nabla)$$

sarà invariante a sinistra e di conseguenza anche:

$$\mathsf{div}(A \cdot \nabla) + Y = L$$

(II) Supponiamo che il gruppo $\mathbb{B}$ ottenuto nel modo precedente sia un gruppo di Kolmogorov e che la matrice A sia della forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \dots 0 & \\ 0 & 0 \dots 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 0 & \end{pmatrix}$$

dove A_0 è una matrice $p_0 \times p_0$ invertibile (sempre secondo le notazioni della sezione precedente); definiamo la famiglia di dilatazioni:

$$\delta_\lambda(t, x) = (\lambda^2 t, D_\lambda(x))$$

dove:

$$D_\lambda(x) = (\lambda x^{(0)}, \lambda^3 x^{(1)} \dots, \lambda^{2r+1} x^{(r)}), \qquad \lambda > 0$$

allora l'operatore L è δ_λ-omogeneo di grado 2 (o δ_λ-invariante). Infatti, essendo A una matrice $p_0 \times p_0$, la componente $\mathsf{div}(A \cdot \nabla)$ risulta combinazione lineare di campi vettoriali δ_λ-omogenei di grado 2, pertanto sarà a sua volta omogenea, di grado 2.
Per quanto riguarda la seconda componente, la proprietà risulta banalmente verificata da ∂_t. Per $< Bx, \nabla >$ osserviamo invece che data la particolare forma di B ogni componente $x^{(j)}$ viene portata in $x^{(j-1)}$, infatti:

$$Bx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_r & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ \vdots \\ x^{(r)} \end{pmatrix}$$

la componente j-esima sarà del tipo: $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_{p_j}^{(j)})$ su di essa intervengono le colonne:

$$Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ B_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

in tal modo, le uniche righe non nulle sono quelle relative a B_j, dunque le uniche componenti non negative saranno quelle relative a tali righe, ovvero le componenti di $x^{(j-1)}$. Pertanto la funzione Bx risulta, su ogni componente $x^{(j)}$, omogenea di grado $\sigma_{j-1} = 2j-1$, e dunque il prodotto vettoriale $< Bx, \triangledown >$ risulta, su ogni componente $x^{(j)}$, δ_λ-omogeneo di grado $\sigma_{j+1} - \sigma_j = 2j + 1 - 2j + 1 = 2$

3.4 Condizione di Hörmander

Sia $L' = \mathsf{div}(A \cdot \triangledown) + < B \cdot \triangledown, x > -\partial_t$, con A e B come nelle ipotesi precedenti; si noti che l'operatore L così definito è sempre riconducibile ad un operatore L che rispetti la definizione precedente sostituendo B con B^T. Diremo che L' soddisfa la ***condizione di Hörmander*** se vale:
(H)

$$\mathsf{rg}(\mathsf{Lie}\{X_1, \ldots, X_N, Y\}(x)) = N, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Definiamo poi, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$C(t) := \int_0^t E(s) \cdot A \cdot E(s)^T \cdot ds$$

dove, per ogni $\tau \in \mathbb{R}$:

$$E(s) := \exp(-sB^T)$$

Introduciamo ora un:

Lemma Nelle notazioni precedenti, posto per ogni $k > 0$:

$$X_{(j,0)} := X_j, \qquad X_{(j,k)} = [X_{(j,k-1)}, Y] \quad \forall j \in \underline{N}$$

e:

$$V_k := \mathsf{span}\{X_{(j,i)} \ \mid \ i = 1, \ldots, k\}$$

esiste $k \geq 0$ tale che:

$$\mathsf{Lie}\{X_1, \ldots, X_N, Y\} = V_k$$

<u>*dim.*</u> Ricordiamo innanzitutto che poichè supponiamo che tutti gli operatori in considerazione siano lisci (ovvero ristretti a funzioni di classe C^∞) possiamo applicare il teorema di Schwarz nel seguente modo:

$$\partial x_j \partial x_i = \partial x_i \partial x_j \qquad \forall i, j \in \underline{N}$$

Sia poi, per ogni $m, r \in \underline{N}$:

$$[X_m, X_r] = X_m X_r - X_r X_m = \sum_{k=0}^{N} c_k \partial_{x_k}$$

dove:

$$c_k \partial_{x_k} = \sum_{j=1}^{N} a_{mj} \partial_{x_j}(a_{rk} \partial_{x_k}) - \sum_{j=1}^{N} a_{rj} \partial_{x_j}(a_{mk} \partial_{x_k}) = \sum_{j=1}^{N} c'_{kj} \partial_{x_k} - c''_{kj} \partial_{x_k}$$

ora:

$$\begin{aligned} c'_{kj}\partial_{x_k} &= a_{mj}\partial_{x_j}(a_{rk}\partial_{x_k}) = a_{mj}a_{rk}(\partial_{x_j}\partial_{x_k}) = (\textsf{Teorema di Schwarz}) = \\ &= a_{mj}a_{rk}(\partial_{x_k}\partial_{x_j}) \\ c''_{kj}\partial_{x_j} &= a_{rj}\partial_{x_j}(a_{mk}\partial_{x_k}) = a_{rj}a_{mk}(\partial_{x_j}\partial_{x_k}) \end{aligned}$$

dunque:

$$c'_{kj}\partial_{x_k} = c''_{jk}\partial_{x_j}$$

da cui:

$$[X_m, X_r] = 0$$

Ora:

$$< x, B \cdot \nabla > = < x, (< B_{(1,\cdot)}, \nabla >, \ldots, < B_{(N,\cdot)}, \nabla >) > = \sum_{q=1}^{N} x_q < B_{(q,\cdot)}, \nabla >$$

$$[X_m, Y] = X_m Y - Y X_m =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{q=1}^{N} (x_q a_{mk} \partial_{x_k} < B_{(q,\cdot)}, \nabla >) + a_{mk} < B_{(k,\cdot)}, \nabla > - \sum_{q=1}^{N} (x_q a_{mk} < B_{(q,\cdot)}, \nabla >) \partial_{x_k} \right)$$

ricorrendo ancora una volta al teorema di Schwarz si ha che:

$$[X_m, Y] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} a_{mk} < B_{(k,\cdot)}, \nabla > = \sum_{k=1}^{N} < a_{mk} B_{(k,\cdot)}, \nabla > =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{mk} b_{kj} \partial x_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{mk} b_{kj} \partial x_j$$

pertanto $[X_m, Y] I(x) = m$-esima colonna di AB; allo stesso modo si mostra che $X_{(m,k)} = m$-esima colonna si AB^k.

D'altra parte:

$$[X_m, [X_r, Y]] = [X_m, X_{(m,1)}] = X_m X_{(m,1)} - X_{(m,1)} X_m =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{mj} \partial_{x_j} \sum_{i=1}^{N} c_i \partial_{x_i} - \sum_{i=1}^{N} c_i \partial_{x_i} \sum_{j=1}^{N} a_{mj} \partial_{x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{mj} c_i \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_j} \partial_{x_i} - \sum_{j=1}^{N} c_i a_{mj} \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} \partial_{x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{mj} c_i \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_j} \partial_{x_i} - \sum_{j=1}^{N} c_i a_{mj} \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_j} \partial_{x_i} = 0$$

dove si è usato ancora una volta il teorema di Schwarz; per il corollario a *pag. 12* si ha la dimostrazione del lemma.

q.e.d

Prop. La condizione *(H)* è equivalente alle seguenti condizioni:

(I) $Ker(A)$ non contiene sottospazi non banali invarianti rispetto a B

(II) $C(t) > 0$ ($\Leftrightarrow$ $\langle x, C(t)x \rangle > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$), $\qquad \forall t > 0$

dim. Mostriamo innanzitutto l'equivalenza tra *(I)* e *(II)*; innanzitutto osserviamo che poichè A è semidefinita positiva:

$$E(s) \cdot A \cdot E(s)^T \geq 0, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

dunque C è monotona crescente e non negativa, e tale risulta anche la funzione:

$$t \mapsto \langle \xi, C(t)\xi \rangle \,, \quad t \in \mathbb{R}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ fissato; supponiamo, per assurdo, che non valga *(II)*, allora:

$$\exists t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^N, \ \xi \neq 0 \ : \quad \langle \xi, C(s) \cdot \xi \rangle = 0 \qquad \text{se} \quad 0 < s \leq t$$

ciò si verifica se e solo se:

$$< E(s) \cdot A \cdot E(s)^T \cdot \xi, \ \xi >= 0 \qquad \forall \, 0 < s \leq t$$

se e solo se:

$$< A \cdot E(s)^T \cdot \xi \ , \ E(s)^T \cdot \xi >= 0, \qquad \forall \, 0 < s \leq t$$

se e solo se:

$$A \cdot E(s)^T \xi = 0 \qquad \forall \, 0 < s \leq t$$

esplicitamente:

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} AB^k \right) \cdot \xi = 0 \ \Leftrightarrow \ (AB^k) \cdot \xi = 0 \ \forall k > 0$$

in altri termini abbiamo provato che *(II)* è equivalente alla seguente condizione:

(A.1)

$$(AB^k) \cdot \xi = 0 \ \ \forall k > 0 \ \Rightarrow \ \xi = 0$$

D'altra parte:

$$V := \{ \xi \in \mathbb{R}^N \ : \ (AB^k) \cdot \xi = 0, \ \forall k > 0 \}$$

è il più grande sottospazio di $Ker(A)$ invariante rispetto a B. Pertanto *(A.1)* è equivalente anche a *(I)* e dunque *(I)* e *(II)* sono equivalenti. Proveremo ora l'equivalenza tra *(H)* e *(I)*; per il lemma precedente vale *(H)* se e solo se esiste $k \geq 0$ tale che:

$$V_k = \mathbb{R}^N$$

d'altra parte, poichè $X_{(j,k)}I(\cdot)$ è la j-esima colonna di AB^k si ha:

$$V_k = \mathsf{span}\{ker(A) \cap ker(AB) \cap \ldots \cap ker(AB^k)\}^{\perp}$$

dunque *(H)* è equivalente a:

$$\exists k \geq 0 : \quad \mathsf{span}\{ker(A) \cap ker(AB) \cap \ldots \cap ker(AB^k)\} \ = \{0\}$$

e tale condizione è evidentemente equivalente a *(I)*.

q.e.d

Oss. Dalla dimostrazione della proposizione precedente osserviamo che la condizione *(II)* è equivalente alle seguenti:

- $\exists\, t > 0 : \quad C(t) > 0$
- $C(t) < 0 \qquad \forall\, t < 0$
- $\exists\, t < 0 : \quad C(t) < 0$

L'importanza della proposizione precedente è espressa dal celebre teorema di Hörmander e dal fatto che quando è verificata la condizione *(II)* è sempre possibile determinare una soluzione fondamentale dell'equazione $Lu = 0$. In questo lavoro mostreremo l'esistenza di una soluzione semplice solo nel caso particolare dell'equazione di Kolmogorov, dandone una scrittura esplicita, e verificando che soddisfa la condizione $Lu = 0$.

3.5 Equazione di Kolmogorov

Consideriamo ancora un operatore differenziale:

$$L' = \mathsf{div}(A \cdot \nabla) + < B \cdot \nabla, x > - \partial_t$$

supponiamo poi che A e B siano matrici $N \times N$, con $N = 2n$, della forma:

$$A = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathbb{R}^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione:

$$L'u = \partial^2_{x_1} u + \ldots + \partial^2_{x_n} u + x_1 \partial_{x_{n+1}} u + \ldots + x_n \partial_{x_N} u - \partial_t u = 0$$

è detta ***equazione di tipo Kolmogorov*** o più brevemente ***equazione di Kolmogorov***. si ha:

$$B^2 = 0$$

dunque:

$$E(s) = I_{\mathbb{R}^N} - sB^T$$

inoltre:

$$B^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{\mathbb{R}^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^T$$

e ancora:

$$B^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{\mathbb{R}^n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathbb{R}^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix} =: H$$

Pertanto $C(t)$ ammette una scrittura esplicita:

$$C(t) = \int_0^t (I_{\mathbb{R}^N} - sB^T)A(I_{\mathbb{R}^N} - sB) \cdot ds = \int_0^t -sB^T(I_{\mathbb{R}^N} - sB) + A(I_{\mathbb{R}^N} - sB) \cdot ds =$$

$$= \int_0^t -sB^T + s^2H + A - sB \cdot ds = \frac{t^3}{3}H - \frac{t^2}{2}(B + B^T) + tA$$

Ovvero:

$$C(t) = \begin{pmatrix} tI_{\mathbb{R}^n} & -\frac{t^2}{2}I_{\mathbb{R}^n} \\ -\frac{t^2}{2}I_{\mathbb{R}^n} & \frac{t^3}{3}I_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}$$

Soluzione dell'equazione di Kolmogorov

Vogliamo ora mostrare che, nelle notazioni precedenti, vi è una soluzione dell'equazione differenziale $L'u = 0$ data da:

$$\Gamma(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\mathtt{det} C(t)}} \exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x \ , \ x >\right) & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Se $t \leq 0$ la verifica è banale; supponiamo dunque $t > 0$, allora si ha:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(t,x) = \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\mathtt{det} C(t)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x \ , \ x >\right) =$$

$$= \Gamma(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x \ , \ x >\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\Gamma(t,x) \sum_{i=1}^{N} x_i(d_{ij}(t) + d_{ji}(t))$$

Dove $d_{ij}(t)$ sono i coefficienti di $C^{-1}(t)$; infatti:

$$C^{-1}(t)x = \begin{pmatrix} < C^{-1}_{1,\cdot}(t), x > \\ \vdots \\ < C^{-1}_{N,\cdot}(t), x > \end{pmatrix}$$

$$< C^{-1}(t)x\ ,\ x >=< C^{-1}_{1,\cdot}(t), x > x_1 + \ldots + < C^{-1}_{N,\cdot}(t), x > x_N$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} < C^{-1}(t)x\ ,\ x >= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} < C^{-1}_{i,\cdot}(t), x > x_i =$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} d_{ik}(t) x_k x_i = \sum_{i \neq j} d_{ij}(t) x_i + \sum_{k \neq j} d_{jk}(t) x_k + 2 d_{jj}(t) x_j =$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i (d_{ij}(t) + d_{ji}(t))$$

Da ciò:

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_j^2}(t,x) = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(t,x) \sum_{i=1}^{N} x_i (d_{ij}(t) + d_{ji}(t)) =$$

$$-\frac{1}{4}(\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma(t,x)) \sum_{i=1}^{N} x_i (d_{ij}(t) + d_{ji}(t)) - \frac{1}{4}\Gamma(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i (d_{ij}(t) + d_{ji}(t)) \right) =$$

$$\frac{1}{16}\Gamma(t,x) \left(\sum_{i=1}^{N} x_i (d_{ij}(t) + d_{ji}(t)) \right)^2 - \frac{1}{2}\Gamma(t,x) d_{jj}$$

In definitiva:

$$\partial^2_{x_1}\Gamma(t,x) + \ldots + \partial^2_{x_n}\Gamma(t,x) = \frac{1}{2}\Gamma(t,x) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i (d_{ij}(t) + d_{ji}(t)) \right)^2 - d_{jj}(t)$$

$$x_1 \partial_{x_{n+1}}\Gamma(t,x) + \ldots + x_n \partial_{x_N}\Gamma(t,x) = -\frac{1}{4}\Gamma(t,x) \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} x_j x_i (d_{i,j+n}(t) + d_{j+n,i}(t))$$

Per calcolare $\partial_t \Gamma(t,x)$ abbiamo:

$$\partial_t\Gamma(t,x) = \partial_t\left(\frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\mathsf{det}(C(t))}}\right)\exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x\ ,\ x >\right) +$$
$$\frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\mathsf{det}(C(t))}}\partial_t\left(\exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x\ ,\ x >\right)\right) =$$

ora:

$$\partial_t\left(\frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\mathsf{det}(C(t))}}\right)\exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x\ ,\ x >\right) =$$
$$= -(4\pi)^{-\frac{N}{2}}\cdot\frac{d}{dt}(\mathsf{det}(C(t)))\cdot\frac{1}{2\cdot\mathsf{det}(C(t))}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(C(t))}}\exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x\ ,\ x >\right) =$$
$$= -\frac{\Gamma(t,x)}{2\mathsf{det}(C(t))}\cdot\frac{d}{dt}(\mathsf{det}(C(t)))$$

$$\frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\mathsf{det}(C(t))}}\partial_t\left(\exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x\ ,\ x >\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\Gamma(t,x)\cdot\frac{d}{dt}(< C^{-1}(t)x\ ,\ x >) = -\frac{1}{4}\cdot\Gamma(t,x)\cdot(<\frac{d}{dt}(C^{-1}(t))x\ ,\ x >)$$

Dunque:

$$L(\Gamma)(t,x) = \frac{1}{2}\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i(d_{ij}(t)+d_{ji}(t))\right)^2 - d_{jj}(t) +$$
$$-\frac{1}{4}\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}x_jx_i(d_{i,j+n}(t)+d_{j+n,i}(t))$$
$$+\frac{\Gamma(t,x)}{2\mathsf{det}(C(t))}\cdot\frac{d}{dt}(\mathsf{det}(C(t))) + \frac{1}{4}\cdot\Gamma(t,x)\cdot(<\frac{d}{dt}(C^{-1}(t))x\ ,\ x >)$$

Ora, osserviamo che:

$$\frac{\Gamma(t,x)}{2}\sum_{j=1}^{n}d_{jj}(t) = \frac{\Gamma(t,x)}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{jj}(t)}{\mathsf{det}(C(t))} = \frac{\Gamma(t,x)}{2\cdot\mathsf{det}(C(t))}\cdot\sum_{j=1}^{n}C_{jj}(t)$$

dove $C_{jj}(t)$ è il determinante della matrice ottenuta privando $C(t)$ della j-esima riga e della j-esima colonna; d'altra parte:

$$\mathsf{det}(C(t)) = \frac{t^{2N}}{12^{\frac{N}{2}}}$$

$$C_{jj} = \frac{1}{(12)^{\frac{N}{2}-1} \cdot 3} \cdot t^{2N-1} \qquad \forall j \in \underline{n}$$

pertanto:

$$\sum_{j=1}^{n} C_{jj} = \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{(12)^{\frac{N}{2}-1} \cdot 3} \cdot t^{2N-1} = 2N \cdot \frac{1}{(12)^{\frac{N}{2}}} \cdot t^{2N-1} = \frac{d}{dt}(\mathsf{det}C)(t)$$

Da questo risultato:

$$\begin{aligned} L(\Gamma)(t,x) = \frac{1}{4}\Gamma(t,x) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i (d_{ij}(t) + d_{ji}(t)) \right)^2 \\ -\frac{1}{4}\Gamma(t,x) \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} x_j x_i (d_{i,j+n}(t) + d_{j+n,i}(t)) \\ +\frac{1}{4} \cdot \Gamma(t,x) \cdot (< \frac{d}{dt}(C^{-1}(t))x \, , \, x >) \end{aligned}$$

La matrice $C^{-1}(t)$ sarà:

$$C^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} I_{\mathbb{R}^n} & \frac{6}{t^2} I_{\mathbb{R}^n} \\ \frac{6}{t^2} I_{\mathbb{R}^n} & \frac{12}{t^3} I_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}$$

e dunque:

$$\frac{d}{dt} C^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{t^2} I_{\mathbb{R}^n} & -\frac{12}{t^3} I_{\mathbb{R}^n} \\ -\frac{12}{t^3} I_{\mathbb{R}^n} & -\frac{36}{t^4} I_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$\frac{1}{4}\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i(d_{ij}(t)+d_{ji}(t))\right)^2 =$$
$$=\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{16}\left(2x_jd_{jj}(t)+x_{j+n}(d_{jj+n}(t)+d_{j+nj}(t))\right)^2 =$$
$$=\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{16}\left(8x_j\frac{1}{t}+12x_{j+n}\frac{1}{t^2}\right)^2 =$$
$$=\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}\frac{4}{t^2}x_j^2+\frac{9}{t^4}x_{j+n}^2+\frac{12}{t^3}x_jx_{j+n}$$

$$-\frac{1}{4}\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}x_jx_i(d_{ij+n}(t)+d_{j+ni}(t)) =$$
$$-\frac{1}{4}\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}x_j^2(d_{jj+n}(t)+d_{j+nj}(t))+2x_jx_{j+n}d_{j+nj+n}(t) =$$
$$\Gamma(t,x)\sum_{j=1}^{n}-\frac{3}{t^2}x_j^2-\frac{6}{t^3}x_jx_{j+n}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\Gamma(t,x)\cdot(<\frac{d}{dt}(C^{-1}(t))x\ ,\ x>) =$$
$$\frac{1}{4}\cdot\Gamma(t,x)\cdot\sum_{i,j=1}^{N}x_ix_j(d'_{ij}) =$$
$$\frac{1}{4}\cdot\Gamma(t,x)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_ix_j(d'_{ij})+\sum_{j=n+1}^{N}\sum_{i=1}^{n}x_ix_j(d'_{ij})\right) =$$
$$\frac{1}{4}\cdot\Gamma(t,x)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}-\frac{4}{t^2}x_j^2-\frac{12}{t^3}x_jx_{j+n}+\sum_{j=n+1}^{N}-\frac{36}{t^4}x_j^2-\frac{12}{t^3}x_jx_{j-n}\right) =$$
$$\Gamma(t,x)\cdot\sum_{j=1}^{n}-\frac{1}{t^2}x_j^2-\frac{6}{t^3}x_jx_{j+n}-\frac{9}{t^4}x_{j+n}^2$$

In definitiva:

$$
\begin{aligned}
L(\Gamma)(t,x) = \Gamma(t,x) \sum_{j=1}^{n} \frac{4}{t^2}x_j^2 + \frac{9}{t^4}x_{j+n}^2 + \frac{12}{t^3}x_j x_{j+n} \\
+\Gamma(t,x) \sum_{j=1}^{n} -\frac{3}{t^2}x_j^2 - \frac{6}{t^3}x_j x_{j+n} \\
+\Gamma(t,x) \cdot \sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{t^2}x_j^2 - \frac{6}{t^3}x_j x_{j+n} - \frac{9}{t^4}x_{j+n}^2 \\
= 0
\end{aligned}
$$

Possiamo inoltre scrivere in forma più esplicita la soluzione Γ:

$$
\Gamma(t,x) = \begin{cases} 0 & \textsf{se } t \leq 0 \\ \dfrac{(4\pi\sqrt{12})^{-\frac{N}{2}}}{t^N} e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t}x_j + \frac{3}{t^3}x_{j+n} + \frac{3}{t^2}x_j x_{j+n}\right)} & \textsf{se } t > 0 \end{cases}
$$

Bibliografia

[1] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians* Springer, 2007

[2] E. Lanconelli, S.Polidoro: *On a class of hypoelliptic evolution operators* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino Vol. 52, 1 Partial Diff. Eqs. 1994 pp. 29-63