

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Introduzione al Modello a Bosoni Interagenti

**Relatore:**

**Dott. Paolo Finelli**

**Presentata da:**

**Daniele Massaro**

**Correlatore:**

**Dott. Alberto Ventura**

Anno Accademico 2016/2017



*Alla mia famiglia, per essermi stata vicino  
quando ne avevo bisogno, per essermi stata  
accanto tutti gli altri giorni.*



# Sommario

Nel 1974 Akito Arima e Francesco Iachello formularono un nuovo modello nucleare con l'obiettivo di descrivere le proprietà collettive dei nuclei pari-pari, attraverso una reinterpretazione dell'interazione tra i nucleoni di valenza, configurate come interazioni di tipo bosonico. Il modello, detto Modello a Bosoni Interagenti (e abbreviato con IBM), prevedeva come idea fondamentale quella che i fermioni nucleari si potessero accoppiare in oggetti con spin intero, di fatto bosoni.

L'obiettivo della trattazione è duplice. In primo luogo consta nell'analizzare la teoria alla base del modello, sfruttando gli strumenti matematici delle algebre di Lie e del formalismo della seconda quantizzazione. In secondo luogo consiste nel valutare l'accordo del modello stesso con i dati sperimentali, eseguendo calcoli con il codice IBAR e ricavando tramite quest'ultimo le energie e i numeri quantici dei livelli di parità positiva e le intensità ridotte delle transizioni di quadrupolo elettrico fra i livelli.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>xi</b>
<b>1 Elementi di teoria dei gruppi e operatori</b>	<b>1</b>
1.1 I gruppi e l'algebra di Lie . . . . .	1
1.2 Gli operatori di Casimir . . . . .	4
1.3 Le rappresentazioni di un gruppo . . . . .	4
1.4 Operatori tensoriali . . . . .	6
1.5 Il teorema di Wigner-Eckart . . . . .	7
1.6 Operatori di creazione e di distruzione . . . . .	8
1.7 Operatori a una particella . . . . .	9
1.8 Operatori a due particelle . . . . .	10
<b>2 Studio di sistemi di bosoni identici</b>	<b>11</b>
2.1 L'algebra $U(2)$ . . . . .	11
2.2 L'hamiltoniano nei bosoni- $s$ e $t$ . . . . .	14
2.3 Simmetrie limiti . . . . .	15
2.4 Il limite $U(1)$ . . . . .	16
2.5 Il limite $SO(2)$ . . . . .	17
2.6 Cambio di base . . . . .	17
2.7 La determinazione degli elementi di matrice . . . . .	18
<b>3 Il Modello a Bosoni Interagenti</b>	<b>19</b>
3.1 Gli operatori di creazione e distruzione per i bosoni . . . . .	20
3.2 L'operatore hamiltoniano dell'IBM-1 . . . . .	21
3.3 La conservazione del numero di bosoni . . . . .	23
3.4 Espansione in multipoli . . . . .	24
3.5 Formalismo $Q$ -consistente e transizioni elettromagnetiche . . . . .	25
3.6 Catene di algebre . . . . .	26
3.7 Il limite $U(5)$ . . . . .	28
3.8 Il limite $SU(3)$ . . . . .	30
3.9 Il limite $O(6)$ . . . . .	32
3.10 Il triangolo di Casten . . . . .	33
3.11 Le transizioni elettromagnetiche nel limite $SU(3)$ . . . . .	34
3.12 Il modello a bosoni- $sdg$ . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Calcoli sul modello con il codice IBAR</b>	<b>39</b>
4.1	Implementazione dei dati iniziali . . . . .	39
4.2	Studio del sistema con simmetria SU(3) esatta . . . . .	40
4.3	Generalità sulla violazione della simmetria . . . . .	40
4.4	Studio del sistema con simmetria SU(3) violata . . . . .	42
4.5	Valutazione dei valori di $B(E2)$ . . . . .	44
	<b>Conclusioni</b>	<b>49</b>
	<b>A Utilizzo del codice IBAR</b>	<b>51</b>
	<b>B Alcune note sui valori di <math>B(E2)</math></b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>

## Elenco delle figure

3.1	Il triangolo di Casten e gli spettri atomici nei tre limiti di simmetria.	34
4.1	Livelli energetici relativi all'isotopo $^{234}\text{U}$ , considerando la simmetria $\text{SU}(3)$ esatta.	41
4.2	Il triangolo di Casten per una visualizzazione grafica delle violazioni di simmetria.	43
4.3	Livelli energetici relativi all'isotopo $^{238}\text{U}$ , considerando la violazione della simmetria $\text{SU}(3)$ .	43
4.4	Livelli energetici relativi all'isotopo $^{236}\text{U}$ , considerando la violazione della simmetria $\text{SU}(3)$ .	44
4.5	Livelli energetici relativi all'isotopo $^{234}\text{U}$ , considerando la violazione della simmetria $\text{SU}(3)$ .	45
4.6	Grafico riportante i dati di $B(E2; L \rightarrow L - 2)$ per l'isotopo $^{238}\text{U}$ .	46
4.7	Grafico riportante i dati di $B(E2; L \rightarrow L - 2)$ per l'isotopo $^{236}\text{U}$ .	47

## Elenco delle tabelle

3.1	Operatori di Casimir, i loro autovalori e i numeri quantici caratteristici per la catena (I).	29
3.2	Operatori di Casimir, i loro autovalori e i numeri quantici caratteristici per la catena (II).	31
3.3	Operatori di Casimir, i loro autovalori e i numeri quantici caratteristici per la catena (III).	33
4.1	Parametri impostati nell'hamiltoniano.	40
4.2	Parametri impostati nell'hamiltoniano per il modello- <i>sdg</i> .	45
4.3	I valori, espressi in $e$ e $b$ , del parametro di carica efficace $\alpha_2$ per i vari casi studiati.	45

## Elenco dei codici

A.1	Un esempio di input testuale per il codice IBAR.	53
-----	--	----



# Introduzione

Nel 1974 Akito Arima e Francesco Iachello formularono un nuovo modello nucleare con l'obiettivo di descrivere le proprietà collettive dei nuclei pari-pari, attraverso una reinterpretazione dell'interazione tra i nucleoni di valenza senza fare distinzione tra protoni e neutroni, configurate come interazioni di tipo bosonico. Il modello, detto Modello a Bosoni Interagenti (e abbreviato con IBM), prevedeva come idea fondamentale quella che i fermioni nucleari si potessero accoppiare in oggetti con spin intero, di fatto bosoni. La prima versione del modello (IBM-1), argomento di questa tesi, si propone di studiare gli spettri relativi ai nuclei pari-pari attraverso le interazioni, di tipo bosonico, tra i nucleoni di valenza. Il modello si fonda sulle conseguenze del modello a strati (*Shell Model*), che ha rivelato che gli stati a più bassa energia dei nuclei pari-pari sono caratterizzati da coppie di fermioni con spin 0 o 2. L'IBM-1 parte da queste assunzioni, postulando l'esistenza di due tipi diversi di bosone:  $s$  e  $d$ , derivanti dall'accoppiamento dei fermioni con momento angolare totale rispettivamente 0 e 2. L'hamiltoniano del sistema, contenente termini di bosone libero e interazioni a due corpi, è costruito mediante gli operatori di creazione e distruzione di bosoni- $s$  e  $d$  legati in modo da formare i generatori di sottoalgebre dell'algebra fondamentale  $U(6)$ . Lo studio di questi ultimi porta successivamente alla visualizzazione delle simmetrie dinamiche (in cui l'hamiltoniano del sistema risulta dipendente solo da un certo tipo di operatori relativi a un'unica sottoalgebra dell'algebra fondamentale) che corrispondono agli usuali limiti vibrazionali o rotazionali tipici dei nuclei.

In condizioni di simmetria dinamica l'hamiltoniano si riduce a una combinazione lineare di operatori di Casimir di una catena di sottoalgebre di  $U(6)$  ed è diagonalizzabile analiticamente, nel caso generale è diagonalizzabile numericamente mediante un apposito codice di calcolo.

Obiettivo della tesi è duplice: in primo luogo è quello di presentare in maniera teorica le caratteristiche del modello, analizzandone le principali proprietà, mostrando come lo strumento della teoria dei gruppi può portare alla deduzione di risultati complessi, in modo semplice e lineare. In secondo luogo è quello di mostrare la validità del modello attraverso un confronto diretto con i dati sperimentali, operato utilizzando un codice di calcolo in grado di simulare il sistema in esame, calcolandone le principali osservabili.

L'esposizione è articolata in quattro capitoli:

**IL PRIMO CAPITOLO** presenta i fondamenti matematici da conoscere per affrontare lo studio del modello: la teoria dei gruppi, con particolare attenzione alle algebre di Lie e alla teoria delle rappresentazioni, e il linguaggio operatoriale, incentrato sulla definizione degli operatori di creazione e distruzione.

**IL SECONDO CAPITOLO** mostra in un modello schematico bidimensionale, basato sull'algebra  $U(2)$ , i concetti fondamentali del modello a bosoni interagenti, in particolare quello di simmetria dinamica e relativa diagonalizzazione analitica dell'hamiltoniano.

**IL TERZO CAPITOLO** presenta il Modello a Bosoni Interagenti nella sua prima versione, analizzandone le principali caratteristiche, studiandone le simmetrie fondamentali.

**IL QUARTO CAPITOLO** mostra l'applicazione del modello ad alcuni isotopi pari-pari dell'Uranio, utilizzando un apposito codice di calcolo, e confronta i risultati teorici con i valori sperimentali di energie di livelli e intensità ridotte di transizioni elettromagnetiche.

# Capitolo 1

## Elementi di teoria dei gruppi e operatori

Il modello a bosoni interagenti utilizza due importanti strumenti matematici: la *teoria dei gruppi* e il *formalismo della seconda quantizzazione*. La costruzione del modello si basa infatti sull'utilizzo degli operatori di creazione e distruzione per rappresentare i bosoni, la cui combinazione dà luogo a operatori più complessi, che generano specifici gruppi di simmetria. Questi ultimi sono studiati attraverso alcune invarianze di trasformazione secondo alcuni operatori, che vanno a costituire le simmetrie del sistema. Studiare un sistema attraverso le sue simmetrie consente di semplificare notevolmente il problema. La teoria matematica alla base delle trasformazioni di simmetria è la teoria dei gruppi. Quando tali trasformazioni sono continue è possibile studiarle a livello infinitesimale, introducendo il concetto di algebra di Lie e dei suoi generatori. I concetti fondamentali furono formulati da Marius Sophus Lie nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali, mentre la classificazione generale delle algebre di Lie è dovuta a Élie Cartan.

### 1.1 I gruppi e l'algebra di Lie

Diamo innanzitutto le definizioni di base della teoria dei gruppi.

#### **DEFINIZIONE 1.1:** Gruppo astratto

Un gruppo astratto  $G$  è un insieme di elementi  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  per cui esiste una certa legge di composizione  $\cdot: G \times G$  che realizza le seguenti proprietà:

G.1 *Chiusura*: se  $g_i, g_j \in G$  allora anche la loro composizione si trova in  $G$ :

$$g_i \cdot g_j = g_k \in G. \quad (1.1)$$

G.2 *Associatività*: la legge di composizione gode della proprietà associativa; per ogni  $g_i, g_j, g_k \in G$ :

$$g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k. \quad (1.2)$$

G.3 *Identità*: esiste sempre un elemento  $e \in G$  neutro per la legge di composizione; per ogni  $g \in G$ :

$$e \cdot g = g \cdot e = g. \quad (1.3)$$

G.4 *Invertibilità*: per ogni  $g \in G$  esiste un elemento  $g^{-1} \in G$  detto l'inverso di  $g$ , tale che:

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e. \quad (1.4)$$

Il numero  $n$  di elementi di cui è costituito il gruppo è detto *ordine del gruppo*. Per mettere in evidenza la legge di composizione associata al gruppo, questo è talvolta indicato con la dicitura  $(G, \cdot)$ .

Un esempio di gruppo è il gruppo delle rotazioni in tre dimensioni: è caratterizzato dalle matrici quadrate  $3 \times 3$ , reali, ortogonali con determinante uguale all'unità, identificando l'operazione di composizione con il prodotto tra matrici. Esso è indicato con  $SO(3)$ . Considerando le rotazioni intorno agli assi cartesiani  $x$ ,  $y$  e  $z$ , si possono scrivere le relative matrici di rotazione, che assumono una forma particolarmente semplice:

$$R(\vartheta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_x & \sin \vartheta_x \\ 0 & -\sin \vartheta_x & \cos \vartheta_x \end{pmatrix}, \quad (1.5a)$$

$$R(\vartheta_y) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_y & 0 & -\sin \vartheta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_y & 0 & \cos \vartheta_y \end{pmatrix}, \quad (1.5b)$$

$$R(\vartheta_z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_z & \sin \vartheta_z & 0 \\ -\sin \vartheta_z & \cos \vartheta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5c)$$

Dove si sono considerati gli angoli  $\vartheta_x$ ,  $\vartheta_y$  e  $\vartheta_z$  relativamente ai tre assi. Ciascun altro elemento  $R(\vartheta)$  del gruppo, esprime una rotazione di un angolo  $\vartheta$  attorno a un certo asse, sarà dato certamente da una composizione di tali matrici. Dunque  $SO(3)$  è certamente un gruppo: è possibile infatti verificare la proprietà G.1, mentre la proprietà G.2 è verificata dalle proprietà del prodotto tra matrici. La matrice  $R(0)$  è la matrice identità  $\widehat{1}$ , che verifica G.3, mentre la matrice  $R(-\vartheta)$  è certamente l'elemento inverso che verifica G.4, trattandosi di una rotazione in senso opposto a quella indicata.

È possibile caratterizzare il gruppo più a fondo, osservando che i suoi elementi dipendono da alcuni parametri in modo continuo.

### DEFINIZIONE 1.2: Gruppo di Lie

Un gruppo  $G$  è detto di Lie se i suoi elementi dipendono in modo continuo da alcuni parametri. Se  $g \in G$  è tale per cui  $g = g(\mathbf{r})$  continua con  $\mathbf{r}$  vettore di parametri, allora si ha che:

$$g(\mathbf{r}) = \exp\left(-i\mathbf{r} \cdot \widehat{\mathbf{J}}\right), \quad (1.6)$$

in cui  $\hat{\mathbf{J}}$  è un vettore le cui componenti sono dette *generatori* del gruppo.

Tornando al caso del gruppo  $\text{SO}(3)$ , poiché ciascuna rotazione può essere sempre considerata come una composizione di più rotazioni del tipo (1.5), allora è immediato mostrare che  $\mathbf{r} = (\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$ , mentre i generatori si possono dedurre eseguendo uno sviluppo in serie di Taylor di (1.6), considerando  $\mathbf{r} \rightarrow (0, 0, 0)$ :

$$g(\mathbf{r}) = \exp(-i\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{J}}) = \hat{1} - i\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{J}} + \mathcal{O}(|\mathbf{r}|^2). \quad (1.7)$$

Perciò i generatori del gruppo generano la parte infinitesima delle trasformazioni. Allo stesso modo si possono sviluppare le rotazioni (1.5), ottenendo (considerando ad esempio  $R(\vartheta_z)$ ):

$$R(\vartheta_z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_z & \sin \vartheta_z & 0 \\ -\sin \vartheta_z & \cos \vartheta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1} - i\vartheta_z \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\vartheta_z^2), \quad (1.8)$$

deducendo i generatori del gruppo  $\text{SO}(3)$ :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

La visualizzazione dei generatori del gruppo di Lie come matrici non è l'unica possibile. In questo caso è infatti dimostrabile che

$$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z), \quad (1.10)$$

cioè i generatori del gruppo  $\text{SO}(3)$  coincidono con le componenti del momento angolare orbitale. È possibile inoltre valutare i commutatori dei generatori:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z, \quad (1.11a)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y, \quad (1.11b)$$

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x. \quad (1.11c)$$

Le operazioni di somma e prodotto dei generatori, identificando il prodotto con il loro commutatore, definiscono uno spazio lineare detto *algebra di Lie*. Poiché il prodotto di due generatori deve appartenere all'algebra, esso è esprimibile come combinazione lineare dei generatori stessi, segue quindi la formula:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \sum_k c_{ij}^k \hat{J}_k, \quad (1.12)$$

che definisce l'algebra di Lie per un gruppo di Lie di generatori  $\hat{\mathbf{J}}$ . I termini  $c_{ij}^k$  sono costanti dette *costanti di struttura*. Il loro valore consente di dedurre immediatamente l'algebra di Lie. A questo punto è utile citare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots\right), \quad (1.13)$$

Secondo tale equazione è possibile ricavare le relazioni moltiplicative tra gli elementi del gruppo semplicemente conoscendo i commutatori dei generatori, cioè la sua algebra di Lie. L'algebra di Lie si indica solitamente con la stessa dicitura del gruppo di Lie di cui fa parte, con la differenza che è scritta con caratteri minuscoli: il gruppo  $SO(3)$  ha algebra di Lie  $so(3)$ . Nella trattazione che segue utilizzeremo indifferentemente la parola gruppo o algebra, ma faremo riferimento alle sole algebre di Lie che, per semplicità, scriveremo simbolicamente a caratteri maiuscoli.

## 1.2 Gli operatori di Casimir

Per una certa algebra di Lie è sempre possibile costruire un insieme di operatori i cui commutatori con i generatori sono tutti nulli.

### DEFINIZIONE 1.3: Operatore di Casimir

Sia  $G$  un'algebra di Lie, un operatore  $\widehat{C}_l$  che commuta con tutti i generatori  $\widehat{J}_i$  di  $G$  si dice operatore invariante o operatore di Casimir.

$$[\widehat{C}_l, \widehat{J}_i] = 0, \quad (1.14)$$

in cui  $l = 1, 2, \dots, r$ , dove  $r$  è il numero massimo di operatori di Casimir linearmente indipendenti.

Gli operatori di Casimir si rivelano molto utili per la determinazione degli autostati di un sistema. Infatti risulta sempre possibile costruire un insieme di operatori commutanti formato da operatori di Casimir e generatori. Si verifica che essi sono simultaneamente diagonalizzabili e i loro autovalori possono essere utilizzati come etichette per gli autostati corrispondenti. Ad esempio, nel caso delle rotazioni in tre dimensioni si può considerare l'operatore di Casimir:

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2, \quad (1.15)$$

che commuta con tutti i generatori. A questo punto si può isolare l'insieme di operatori  $(\widehat{L}^2, \widehat{L}_z)$ : essi possono essere diagonalizzati simultaneamente, ottenendo le leggi agli autovalori:

$$\widehat{L}^2 |l, m_l\rangle = |l, m_l\rangle \hbar^2 l(l+1), \quad (1.16a)$$

$$\widehat{L}_z |l, m_l\rangle = |l, m_l\rangle \hbar m_l. \quad (1.16b)$$

Si ha che l'autostato  $|l, m_l\rangle$  è stato etichettato attraverso i numeri quantici relativi agli autovalori di ciascun operatore.

## 1.3 Le rappresentazioni di un gruppo

Talvolta è più utile configurare un gruppo attraverso gli effetti delle sue relazioni moltiplicative sugli elementi di un certo spazio vettoriale. A tale scopo è utile introdurre il concetto di *rappresentazione di un gruppo*.

**DEFINIZIONE 1.4: Rappresentazione di un gruppo**

Una rappresentazione di un gruppo  $(G, \cdot)$  su uno spazio vettoriale  $V$  è una mappa:

$$R: G \rightarrow GL(V), \quad (1.17)$$

tale che

$$R(g_1)R(g_2) = R(g_1 \cdot g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad (1.18a)$$

$$R(e) = \hat{1} \quad \text{con } \hat{1} \text{ matrice identità.} \quad (1.18b)$$

Si ricorda che  $GL(V)$  è il *gruppo generale lineare*, cioè l'insieme di tutte le matrici quadrate con determinante diverso da zero, identificate come operatori lineari in grado di agire sullo spazio vettoriale  $V$ , detto *spazio di rappresentazione*. La dimensione di  $V$  è detta *dimensione* della rappresentazione. Talvolta ci si riferisce a  $V$  stesso come rappresentazione del gruppo.

Sostanzialmente una rappresentazione di un gruppo è la realizzazione delle relazioni moltiplicative del gruppo attraverso matrici che agiscono su uno spazio vettoriale. Si può introdurre ora il concetto di equivalenza di rappresentazioni.

**DEFINIZIONE 1.5: Rappresentazioni equivalenti**

Siano  $R$  e  $\tilde{R}$  rappresentazioni del gruppo  $G$ . Esse si dicono equivalenti se sono collegate da una trasformazione di similitudine:

$$\tilde{R}(g) = AR(g)A^{-1}, \quad \forall g \in G, \quad (1.19)$$

in cui  $A$  è una matrice indipendente da  $g$ .

Il concetto di equivalenza consente di derivare gli importanti concetti di *riducibilità* e *irriducibilità* delle rappresentazioni:

**DEFINIZIONE 1.6: Riducibilità e irriducibilità di una rappresentazione**

Sia  $R$  una rappresentazione del gruppo  $G$ . Essa si dice riducibile se è equivalente a una rappresentazione le cui matrici sono diagonali a blocchi.

$$\tilde{R} = ARA^{-1} = \begin{pmatrix} R_1(g) & 0 & 0 \\ 0 & R_2(g) & 0 \\ 0 & 0 & R_3(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G. \quad (1.20)$$

Si dice irriducibile se non può essere decomposta come sopra.

La conseguenza derivante dalla riducibilità delle rappresentazioni è che lo spazio vettoriale su cui agiscono si esprime come somma diretta degli spazi vettoriali su cui agisce ciascun blocco della matrice. Perciò le rappresentazioni più convenienti da utilizzare per descrivere un sistema sono le rappresentazioni irriducibili inequivalenti. Da queste ultime è infatti possibile ricavare tutte le altre.

L'applicazione della teoria dei gruppi e delle rappresentazioni al modello a bosoni interagenti diverrà più chiara nei capitoli seguenti, dove si utilizzeranno i

concetti fondamentali qui descritti per la deduzione degli autostati e la scrittura dell'hamiltoniano del sistema.

## 1.4 Operatori tensoriali

Introduciamo ora le principali nozioni riguardanti gli operatori che saranno utilizzati nel seguito della trattazione. Si assumono come note la teoria del momento angolare in meccanica quantistica e le nozioni principali riguardanti gli operatori autoaggiunti.

Lo studio dei modelli fisici a livello quantistico si basa su grandezze rappresentate da operatori lineari. Una classe di operatori di questo tipo è quella degli operatori tensoriali irriducibili [1]. Essi sono utili in quanto hanno la proprietà di trasformarsi come funzioni dotate di momento angolare, sotto una trasformazione di rotazione.

### DEFINIZIONE 1.7: Operatore tensoriale irriducibile

Un operatore tensoriale irriducibile di rango  $k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ , è un insieme di  $2k + 1$  operatori  $\widehat{T}_q^{(k)}$ , con  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q = -k, -k + 1, \dots, k - 1, k$ , che si trasformano sotto rotazioni come funzioni dotate di momento angolare.

Inoltre si definisce l'*operatore tensoriale aggiunto*  $\widehat{T}_q^{*(k)}$  come:

$$\widehat{T}_q^{*(k)} = (-1)^{k-q} (\widehat{T}_{-q}^{(k)})^\dagger, \quad (1.21)$$

dove  $\dagger$  denota l'usuale operazione di aggiunzione.

Un esempio di operatori di questo tipo sono le armoniche sferiche, infatti possiamo scrivere:

$$\widehat{Y}_m^{(l)}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (1.22)$$

dove  $P_l^m$  è la funzione di Legendre di prima specie. Si nota che costituiscono un operatore tensoriale di rango  $k = l$ .

Avendo ora più operatori tensoriali irriducibili, si possono definire le composizioni di operatori tensoriali allo stesso modo delle composizioni dei momenti angolari, introducendo il *prodotto tensoriale operatoriale*:

### DEFINIZIONE 1.8: Composizione di operatori tensoriali irriducibili

Siano  $\widehat{T}_1^{(k_1)}_{q_1}$ ,  $\widehat{T}_2^{(k_2)}_{q_2}$  due operatori tensoriali irriducibili. Si può definire il loro prodotto tensoriale come l'operatore tensoriale dato da:

$$[\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2]^{(k)}_q = \sum_{q_1, q_2} \langle k_1, q_1, k_2, q_2 | k_1, k_2, k, q \rangle \widehat{T}_1^{(k_1)}_{q_1} \widehat{T}_2^{(k_2)}_{q_2}, \quad (1.23)$$

in cui si hanno  $k, q \in \mathbb{Z}$ , con  $k \geq 0$ ,  $q = -k, -k + 1, \dots, k - 1, k$  e il termine  $\langle k_1, q_1, k_2, q_2 | k_1, k_2, k, q \rangle$  è il *coefficiente di Clebsch-Gordan*. Vale inoltre la

disuguaglianza triangolare, nel senso che segue:

$$|k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2, \quad (1.24)$$

unitamente a una condizione di esistenza dei coefficienti:

$$q = q_1 + q_2. \quad (1.25)$$

Si può inoltre definire una forma di *prodotto scalare* tra gli operatori tensoriali:

**DEFINIZIONE 1.9: Prodotto scalare tra operatori tensoriali irriducibili**

Siano  $\widehat{T}_1^{(k)}_q, \widehat{T}_2^{(k)}_q$  due operatori tensoriali del medesimo rango  $k$ . Il loro prodotto scalare è l'operatore:

$$\widehat{T}_1 \cdot \widehat{T}_2 = (-1)^k \sqrt{2k+1} [\widehat{T}_1 \otimes \widehat{T}_2]^{(0)}_0 = \sum_{\mu=-k}^k \widehat{T}_{1\mu} \widehat{T}_{2-\mu}. \quad (1.26)$$

## 1.5 Il teorema di Wigner-Eckart

Il *teorema di Wigner-Eckart* costituisce un risultato fondamentale nella teoria degli operatori tensoriali; riguarda una proprietà degli elementi di matrice.

**PROPOSIZIONE 1.1**

Sia  $\widehat{T}_q^{(k)}$  un operatore tensoriale di rango  $k$ , rispetto al momento angolare  $\widehat{j}$ . Siano  $|a; j, m\rangle$  gli autoket condivisi dagli operatori  $\widehat{j}^2$  e  $\widehat{j}_0$ , distinguibili tra loro mediante il numero quantico  $a$ . Si ha la seguente relazione:

$$\langle a'; j', m' | \widehat{T}_q^{(k)} | a; j, m \rangle = \langle j, m, k, q | j, k, j', m' \rangle \frac{\langle a'; j' | | \widehat{T}_q^{(k)} | | a; j \rangle}{(2j' + 1)^{1/2}}, \quad (1.27)$$

in cui  $\langle a'; j' | | \widehat{T}_q^{(k)} | | a; j \rangle$  è detto *elemento di matrice ridotta*.

L'importanza della **PROP. 1.1** è dovuta al fatto che consente di separare la dipendenza dal numero quantico  $m$  per il calcolo degli elementi di matrice di un operatore tensoriale; introduce gli elementi di matrice ridotta e isola il contributo di  $m$  all'interno del coefficiente di Clebsch-Gordan.

Si hanno le seguenti condizioni di esistenza, dovute alla presenza del coefficiente di Clebsch-Gordan:

$$|j - j'| \leq k \leq j + j', \quad (1.28)$$

$$q = m' - m. \quad (1.29)$$

## 1.6 Operatori di creazione e di distruzione

Introduciamo ora un'altra classe di operatori estremamente utili quando si trattano sistemi a molti corpi, come può essere il nucleo atomico. Essi sono gli *operatori di creazione e distruzione*, che hanno assunto un ruolo chiave nella formulazione della seconda quantizzazione: cioè l'aggiornamento della prima descrizione della meccanica quantistica. Quest'ultima prevedeva la funzione d'onda come la rappresentazione dello stato quantistico in uno spazio di Hilbert, in cui le osservabili erano identificate da operatori lineari autoaggiunti. La seconda quantizzazione prevede che le funzioni d'onda siano sostituite da operatori, detti *operatori di campo*, che agiscono direttamente sugli stati quantistici.

### DEFINIZIONE 1.10: Operatori di creazione e distruzione

Una coppia di operatori bosonici di creazione e distruzione consiste in un operatore  $\hat{a}$ , operatore di distruzione, e il suo aggiunto  $\hat{a}^\dagger$ , operatore di creazione. Essi soddisfano la seguente relazione di commutazione:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}, \quad (1.30)$$

in cui  $\hat{1}$  è l'operatore identità.

Inoltre si ha il seguente operatore:

### DEFINIZIONE 1.11: Operatore numero

Dati  $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$  una coppia di operatori di creazione e distruzione, si definisce l'operatore numero come:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (1.31)$$

Per l'operatore numero si hanno diverse proprietà:

### PROPOSIZIONE 1.2

L'operatore  $\hat{N}$  è reale e si hanno le seguenti relazioni di commutazione con gli operatori di creazione e distruzione  $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ :

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad (1.32a)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (1.32b)$$

Il nome di operatore numero deriva dal fatto che la sua applicazione a uno stato  $|n\rangle$ , indicativo del numero di particelle considerate, permette di estrarre il numero delle stesse:

$$\hat{N} |n\rangle = |n\rangle n. \quad (1.33)$$

Il nome di operatori di creazione e distruzione è dovuto al fatto che la loro applicazione sul medesimo stato porta a un aumento o a una diminuzione del numero

delle particelle. Valgono infatti le relazioni seguenti:

$$\hat{a} |n\rangle = |n-1\rangle n^{1/2}, \quad n > 0, \quad (1.34a)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle (n+1)^{1/2}. \quad (1.34b)$$

In generale può capitare di considerare più coppie di operatori di creazione e distruzione, le definizioni non cambiano, ma è necessario adattarle al nuovo caso. Avendo  $p$  coppie di operatori di creazione e distruzione  $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i$  con  $i = 1, \dots, p$  si hanno le seguenti relazioni:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \hat{1}, \quad (1.35a)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0. \quad (1.35b)$$

Si hanno  $p$  operatori numero:

$$\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \quad (1.36)$$

che commutano tra di loro:

$$[\hat{N}_i, \hat{N}_j] = \hat{0}. \quad (1.37)$$

Vale inoltre la generalizzazione della relazione (1.33):

$$\hat{N}_i |n_1, \dots, n_i, \dots, n_p\rangle = |n_1, \dots, n_i, \dots, n_p\rangle n_i. \quad (1.38)$$

Mentre le relazioni (1.34) si generalizzano, osservando che l' $i$ -esimo operatore agisce solo sull' $i$ -esimo stato:

$$\hat{a}_i |n_1, \dots, n_i, \dots, n_p\rangle = |n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_p\rangle n_i^{1/2}, \quad n_i > 0, \quad (1.39a)$$

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots, n_p\rangle = |n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_p\rangle (n_i + 1)^{1/2}. \quad (1.39b)$$

## 1.7 Operatori a una particella

Gli *operatori a una particella* sono operatori dipendenti solamente dalle coordinate relative a una sola particella. Ad esempio, sono operatori a una particella l'energia cinetica o un potenziale esterno. La forma generale di un operatore a una particella, considerato un sistema con  $n$  particelle, è:

$$\hat{F} = \sum_{k=1}^n \hat{f}_k, \quad (1.40)$$

cioè si esprime come una somma di termini, in cui ciascuno di essi agisce su un'unica particella.

### PROPOSIZIONE 1.3

Nel formalismo della seconda quantizzazione, gli operatori a una particella assumono la forma:

$$\hat{F} = \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta, \quad (1.41)$$

in cui  $\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta$  sono operatori di creazione e distruzione e  $f_{\alpha\beta}$  sono gli elementi di

matrici relativi a  $\widehat{F}$ :

$$f_{\alpha\beta} = \langle \alpha | \widehat{f} | \beta \rangle . \quad (1.42)$$

Si nota che la forma di tale operatore consiste in una somma di termini, in cui ciascuno di essi consente di *spostare* una particella dallo stato  $\beta$  allo stato  $\alpha$ .

## 1.8 Operatori a due particelle

La classe di *operatori a due particelle* comprende tutti gli operatori riguardanti le interazioni tra le particelle in un sistema. Essi consistono nella somma di termini, ciascuno agente su una coppia di particelle:

$$\widehat{V} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq k'} \widehat{v}_{kk'} . \quad (1.43)$$

Allo stesso modo degli operatori a una particella, gli operatori a due particelle si esprimono in funzione degli operatori di creazione e distruzione, generalizzando il caso di una particella.

### PROPOSIZIONE 1.4

Nel formalismo della seconda quantizzazione, gli operatori a due particelle assumono la forma:

$$\widehat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} v_{\alpha\beta\gamma\delta} \widehat{a}_{\alpha}^{\dagger} \widehat{a}_{\beta}^{\dagger} \widehat{a}_{\gamma} \widehat{a}_{\delta} , \quad (1.44)$$

in cui  $\widehat{a}_{\alpha}^{\dagger}$ ,  $\widehat{a}_{\beta}^{\dagger}$ ,  $\widehat{a}_{\gamma}$ ,  $\widehat{a}_{\delta}$  sono operatori di creazione e distruzione e  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sono gli elementi di matrice relativi a  $\widehat{V}$ :

$$v_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle \alpha, \beta | \widehat{v} | \gamma, \delta \rangle . \quad (1.45)$$

La forma di tale operatore consiste nella somma di vari termini, in cui ciascuno di essi consente di *spostare* fino a due particelle dagli stati  $\gamma$ ,  $\delta$  agli stati  $\alpha$ ,  $\beta$ .

# Capitolo 2

## Studio di sistemi di bosoni identici

La teoria dei gruppi costituisce uno dei metodi più efficienti per l'analisi dei sistemi quantistici. Questi ultimi sono caratterizzati da simmetrie, aventi la struttura di gruppo. In generale le simmetrie sono direttamente collegate con delle invarianze, le quali portano inevitabilmente alla formulazione delle leggi di conservazione.

La teoria dei gruppi assume un ruolo chiave per lo studio dei modelli nucleari, e dunque anche per il modello a bosoni interagenti, per il quale, come si vedrà nel Capitolo 3, costituirà l'unico sistema in grado di mostrare le sue caratteristiche principali con metodi puramente analitici.

Nel presente capitolo, seguendo la monografia [2], si prenderà in esame un modello a bosoni interagenti a due gradi di libertà, rappresentati da bosoni  $s$  e  $t$ , che, in assenza di interazioni, si riduce all'oscillatore armonico bidimensionale. La sua algebra dinamica,  $U(2)$ , fa parte dei fondamenti della meccanica quantistica, essendo utilizzata per la descrizione dei momenti angolari, e consente uno sviluppo relativamente semplice dell'apparato matematico del modello.

L'obiettivo principale sarà quindi quello di mostrare l'efficacia della teoria dei gruppi nella semplificazione del modello di un oscillatore armonico bidimensionale, introducendo l'algebra  $U(2)$ . In dimensione maggiore si ha una complicazione dell'apparato matematico, che però mantiene la sua forma.

### 2.1 L'algebra $U(2)$

Introduciamo l'algebra del gruppo  $U(2)$  considerando un sistema costituito da un oscillatore armonico bidimensionale di coordinate  $\mathbf{q} = (x, y)$  e momento  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ , avente il seguente hamiltoniano, scritto in un sistema di unità di misura naturali (che d'ora in poi sottintenderemo per il resto della trattazione) in cui la costante di Planck ridotta  $\hbar$ , la massa  $m$  e la pulsazione  $\omega$  dell'oscillatore sono poste uguali a 1:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2). \quad (2.1)$$

È possibile analizzare il problema attraverso il formalismo della seconda quantizzazione, studiato in § 1.6, definendo gli operatori di creazione e distruzione, secondo

la DEF. 1.10:

$$\widehat{s}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip_x), \quad (2.2a)$$

$$\widehat{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip_x), \quad (2.2b)$$

e anche

$$\widehat{t}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - ip_y), \quad (2.3a)$$

$$\widehat{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + ip_y). \quad (2.3b)$$

Essi rispettano (1.35b):

$$[\widehat{s}, \widehat{s}^\dagger] = [\widehat{t}, \widehat{t}^\dagger] = 0. \quad (2.4)$$

Attraverso tali operatori si riscrive l'hamiltoniano (2.1):

$$\widehat{H} = \widehat{s}^\dagger \widehat{s} + \widehat{t}^\dagger \widehat{t} + 1. \quad (2.5)$$

Le simmetrie ad esso associate si possono studiare definendo i seguenti operatori:

$$\widehat{\mathcal{G}}_1^{(1)} \doteq \widehat{s}^\dagger \widehat{s}, \quad (2.6a)$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_1^{(2)} \doteq \widehat{s}^\dagger \widehat{t}, \quad (2.6b)$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_2^{(1)} \doteq \widehat{t}^\dagger \widehat{s}, \quad (2.6c)$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_2^{(2)} \doteq \widehat{s}^\dagger \widehat{s}, \quad (2.6d)$$

che commutano con l'hamiltoniano (2.5):

$$[\widehat{H}, \widehat{\mathcal{G}}_i^{(j)}] = 0 \quad i, j = 1, 2, \quad (2.7)$$

e formano l'algebra di Lie del gruppo U(2) (che ricordiamo essere il gruppo delle matrici unitarie in 2 dimensioni),

$$[\widehat{\mathcal{G}}_i^{(j)}, \widehat{\mathcal{G}}_k^{(l)}] = \widehat{\mathcal{G}}_i^{(l)} \delta_{j,k} - \widehat{\mathcal{G}}_k^{(j)} \delta_{i,l} \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (2.8)$$

costituendone, di conseguenza, i generatori.

Si possono semplificare le equazioni (2.8) definendo un altro insieme di operatori:

$$\widehat{J}_x \doteq \frac{1}{2}(\widehat{s}^\dagger \widehat{s} + \widehat{t}^\dagger \widehat{t}), \quad (2.9a)$$

$$\widehat{J}_y \doteq \frac{1}{2}(\widehat{t}^\dagger \widehat{s} + \widehat{s}^\dagger \widehat{t}), \quad (2.9b)$$

$$\widehat{J}_z \doteq \frac{i}{2}(\widehat{t}^\dagger \widehat{s} - \widehat{s}^\dagger \widehat{t}), \quad (2.9c)$$

$$\widehat{N} \doteq \widehat{s}^\dagger \widehat{s} + \widehat{t}^\dagger \widehat{t} = \widehat{n}_s + \widehat{n}_t, \quad (2.9d)$$

i quali rispettano le seguenti leggi di commutazione, ricavabili direttamente da (2.4):

$$\left[ \widehat{J}_i, \widehat{J}_j \right] = i\varepsilon_{ijk} \widehat{J}_k \quad i, j, k = x, y, z, \quad (2.10)$$

$$\left[ \widehat{N}, \widehat{J}_i \right] = 0 \quad i = x, y, z. \quad (2.11)$$

In (2.10) si riconoscono le leggi di commutazione relative al momento angolare, nonché all'algebra SU(2) (rappresentativa delle rotazioni in 3 dimensioni)\*. In effetti  $\widehat{J}_x$ ,  $\widehat{J}_y$  e  $\widehat{J}_z$  sono proprio le componenti del momento angolare, mentre  $\widehat{N}$  è l'operatore numero totale, definito sommando gli operatori numero relativi a ciascuna coppia di operatori di creazione e distruzione costruiti come in (1.36). L'operatore  $\widehat{N}$  è il generatore dell'algebra U(1).

Poiché  $\widehat{N}$  commuta con i tre generatori,  $\widehat{J}_k$ , dell'algebra SU(2), si può dire che l'algebra di Lie U(2) è la somma diretta delle algebre SU(2) e U(1) e il corrispondente gruppo di Lie U(2) è il prodotto diretto dei gruppi SU(2) e U(1):

$$U(2) \simeq SU(2) \otimes U(1). \quad (2.12)$$

Si dice che U(2) è *isomorfo* a SU(2)  $\otimes$  U(1).

Grazie a (2.9d) è possibile semplificare ulteriormente l'hamiltoniano (2.5), ottenendo:

$$\widehat{H} = \widehat{N} + 1, \quad (2.13)$$

Il passo successivo riguarda il calcolo degli autostati. Risolvendo esplicitamente il problema agli autovalori relativo a (2.1) si ottengono autostati etichettati da due numeri quantici  $N$  e  $m$ , in cui  $N$  caratterizza esplicitamente l'energia e  $m = -N, -N + 1, \dots, N - 1, N$ . Si può quindi dire che l'algebra U(2) è caratterizzata dal numero quantico  $N$ . Per ciò che riguarda l'algebra SU(2) è utile introdurre il numero quantico  $j$ , associato all'operatore  $\widehat{J}^2 = \widehat{J}_x^2 + \widehat{J}_y^2 + \widehat{J}_z^2$ , cioè:

$$\widehat{J}^2 = \frac{1}{4} \widehat{N} (\widehat{N} + 2) \Leftrightarrow \widehat{J}^2 = j(j + 1), \quad (2.14)$$

che implica:

$$j = \frac{N}{2}. \quad (2.15)$$

Gli autostati si esprimono attraverso la seguente espressione:

$$|N, n_t\rangle = \frac{(\widehat{s}^\dagger)^{N-n_t} (\widehat{t}^\dagger)^{n_t}}{\sqrt{(N-n_t)!n_t!}} |0\rangle, \quad (2.16)$$

in cui  $n_t$  è il numero quantico associato all'operatore  $\widehat{n}_t$ , come in (1.38) e

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \quad (2.17)$$

---

\*Si può dimostrare che il gruppo SU(2) e il gruppo SO(3) sono localmente lo stesso gruppo: le loro algebre di Lie hanno le stesse costanti di struttura.

è la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico bidimensionale.

Concentriamoci ora sugli autostati  $|N, n_t\rangle$ : essi sono autostati simultanei per l'operatore  $\widehat{N}$  e l'operatore  $\widehat{n}_t$ , quest'ultimo in grado di generare l'algebra  $U(1)$ , sottoalgebra di  $U(2)$ . È possibile introdurre la seguente relazione (indicando sotto ad ogni algebra il suo numero quantico corrispondente, che funge da etichetta per gli autostati):

$$\begin{array}{ccc} U(2) \supset U(1) & \text{(I),} & \\ N & n_t & \end{array} \quad (2.18)$$

denominata *catena di algebre*.

Alternativamente si possono utilizzare gli operatori  $\widehat{J}_z$  e  $\widehat{J}^2$ . Diagonalizzandoli simultaneamente (si tratta di operatori commutanti) si possono determinare gli autostati (riportati in § 2.5). Essendo anch'essi autostati simultanei per i due operatori considerati, si può introdurre la seguente catena di algebre:

$$\begin{array}{ccc} U(2) \simeq SU(2) \otimes U(1) \supset SO(2) & \text{(II),} & \\ N & j & \mu \end{array} \quad (2.19)$$

in cui, dalla teoria sul momento angolare, si ha  $\mu = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ , che, collegata a  $m = -N, -N+1, \dots, N-1, N$ , assumendo la validità di (2.15), consente di stabilire che:

$$\mu = \frac{m}{2}. \quad (2.20)$$

L'ultima inclusione in (2.19) è dovuta al fatto che la considerazione dell'operatore  $\widehat{J}_z$  fa sì che si considerino, tra le trasformazioni di  $U(2)$ , quelle relative a questo operatore, cioè le rotazioni secondo l'asse  $z$ , che chiaramente formano un sottogruppo delle rotazioni in 3 dimensioni identificate da  $SU(2)$ . In particolare si può dimostrare che  $SO(2) \simeq U(1)$ , e quindi si tratta di un gruppo a un parametro, caratterizzato da un solo generatore  $\widehat{J}_z$ . Ciò giustifica l'ultima inclusione di (2.19) nonché la scelta dell'etichetta.

Grazie alle catene di algebre è possibile analizzare in modo schematico e semplice le simmetrie riguardanti i sistemi di bosoni, nonché la determinazione delle rappresentazioni di gruppi complessi. Vedremo nei capitoli seguenti una loro applicazione.

## 2.2 L'hamiltoniano nei bosoni- $s$ e $t$

L'hamiltoniano introdotto nella sezione precedente descrive un sistema di due bosoni non interagenti. Il caso più generale, con  $N$  bosoni interagenti, prevede un hamiltoniano contenente gli operatori a una particella e a due particelle, definiti come in § 1.7, 1.8:

$$\widehat{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} p_i^2 + U_i \right) + \sum_{i<j}^N V_{ij}. \quad (2.21)$$

Esplicitando le sommatorie, si può ricavare la seguente espressione più generale:

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= E_0 + \varepsilon_s \widehat{s}^\dagger \widehat{s} + \varepsilon_t \widehat{t}^\dagger \widehat{t} \\ &+ e_1 \widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \widehat{s} \widehat{s} + e_2 (\widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \widehat{t} \widehat{t} + \widehat{t}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{s} \widehat{s}) \\ &+ e_3 \widehat{s}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{s} \widehat{t} + e_4 \widehat{t}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{t} \widehat{t},\end{aligned}\quad (2.22)$$

in cui  $E_0$  è una costante e i parametri  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_t$  e gli  $e_i$  sono gli elementi di matrice relativi agli operatori a una e due particelle. L'hamiltoniano (2.22) commuta con l'operatore  $\widehat{N}$ , definito in (2.9d), poiché contiene lo stesso numero di operatori di creazione e distruzione, però non commuta con i generatori di SU(2), definiti da (2.9a)–(2.9c). Di conseguenza si ha una simmetria solo per l'algebra U(1).

Un'altra proprietà di (2.22) è l'invarianza per trasformazioni di *parità*, dove si definisce la parità dei bosoni secondo le seguenti relazioni:

$$\widehat{P} \widehat{s}^\dagger \widehat{P}^{-1} = \widehat{s}^\dagger, \quad (2.23a)$$

$$\widehat{P} \widehat{t}^\dagger \widehat{P}^{-1} = -\widehat{t}^\dagger, \quad (2.23b)$$

in cui  $\widehat{P}$  è l'operatore di parità, o di inversione spaziale.

Un'ultima proprietà discende direttamente dalla DEF. 1.10, da cui si deduce che l'hamiltoniano  $s$ - $t$  è hermitiano, dunque invariante per operazioni di aggiunta.

## 2.3 Simmetrie limiti

Per risolvere l'hamiltoniano  $s$ - $t$  è necessario costruire un insieme completo di autostati, calcolare gli elementi di matrice e diagonalizzare numericamente quest'ultima. Le osservabili del sistema dipendono proprio dagli elementi di matrice. A questo scopo è utile riscrivere l'hamiltoniano attraverso gli operatori di Casimir. In generale, data un'algebra di Lie, è sempre possibile trovare un insieme di operatori di Casimir, per cui è sempre possibile riscrivere l'hamiltoniano attraverso di essi. Di nostro interesse sono solo gli operatori di Casimir lineari e quadratici nei generatori, perché l'hamiltoniano contiene solo termini di bosone libero, lineari nei generatori, e interazioni a due corpi, quadratiche nei generatori.

**Algebra U(2):** gli operatori di Casimir sono  $\widehat{N}$ ,  $\widehat{N}^2$ , in cui

$$\widehat{N}^2 = \widehat{N} + \widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \widehat{t} \widehat{t} + \widehat{t}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{s} \widehat{s} + 2\widehat{s}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{s} \widehat{t}. \quad (2.24)$$

**Algebra U(1):** gli operatori di Casimir sono  $\widehat{n}_t$ ,  $\widehat{n}_t^2$ , in cui

$$\widehat{n}_t^2 = \widehat{n}_t + \widehat{t}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{t} \widehat{t}. \quad (2.25)$$

**Algebra SO(2):** gli operatori di Casimir sono  $\widehat{J}_z$ ,  $\widehat{J}_z^2$ , in cui:

$$\widehat{J}_z^2 = \frac{1}{4} \left( \widehat{N} - \widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \widehat{s} \widehat{s} - \widehat{t}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{t} \widehat{t} + 2\widehat{s}^\dagger \widehat{t}^\dagger \widehat{s} \widehat{t} \right). \quad (2.26)$$

L'hamiltoniano (2.22) risulta:

$$\widehat{H} = E_0' + \varepsilon \widehat{n}_t + \alpha \widehat{n}_t^2 + \beta \widehat{J}_z^2, \quad (2.27)$$

in cui:

$$E_0' = E_0 + (\varepsilon_s - e_1 + e_2)N + e_1 N^2, \quad (2.28a)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_t - \varepsilon_s + e_1 - e_4 - (2e_1 - 2e_2 - e_3)N, \quad (2.28b)$$

$$\alpha = e_1 - 2e_2 - e_3 + e_4, \quad (2.28c)$$

$$\beta = -4e_2. \quad (2.28d)$$

Il vantaggio dell'utilizzo degli operatori di Casimir è costituito dal fatto che essi commutano con i vari generatori del gruppo, consentendo quindi di risolvere simultaneamente il problema agli autovalori per più operatori. Tali operatori sono utilizzati anche per la costruzione delle catene di algebre, in modo tale che ciascun'algebra presente in catena sia caratterizzata da un numero quantico collegato con gli operatori di Casimir implicati nella trattazione. La catena così costruita sarà formata da un'algebra principale, che caratterizza ogni rappresentazione con il suo numero quantico, e da una serie di sottoalgebre. Ciascuna di esse sarà invariante sotto le trasformazioni relative alle algebre principali, poiché caratterizzate da operatori di Casimir. Gli autostati saranno costituiti, quindi, da multipletti di numeri quantici, relativi ciascuno a un'algebra e a un operatore di Casimir.

Nel nostro caso si utilizzano le catene (2.18) e (2.19). Si nota che l'annullarsi di alcuni dei coefficienti può ricondurre l'hamiltoniano a dipendere da una sola di queste. Le situazioni limite che si raggiungono sono note con il nome di *simmetrie dinamiche*.

## 2.4 Il limite U(1)

Ponendo  $\beta = 0$ , l'hamiltoniano (2.27) si riduce a

$$\widehat{H}^{(1)} = E_0' + \varepsilon \widehat{n}_t + \alpha \widehat{n}_t^2, \quad (2.29)$$

con autovalori:

$$E^{(1)}(n_t) = E_0' + \varepsilon n_t + \alpha n_t^2, \quad (2.30)$$

in cui  $n_t$  rappresenta il numero di bosoni- $t$ , pertanto  $n_t \leq N$ . È immediato notare che, come è emerso in § 2.1, si può introdurre la seguente catena di algebre:

$$\begin{array}{ccc} \text{U}(2) & \supset & \text{U}(1) \\ N & & n_t \end{array} \quad (\text{I}). \quad (2.18)$$

Quest'ultima consente di caratterizzare gli autostati:

$$|N, n_t\rangle = \frac{(\widehat{s}^\dagger)^{N-n_t} (\widehat{t}^\dagger)^{n_t}}{\sqrt{(N-n_t)!n_t!}} |0\rangle, \quad (2.31)$$

la cui parità si ricava applicando (2.23):

$$\widehat{P} |N, n_t\rangle = |N, n_t\rangle (-1)^{n_t} \quad (2.32)$$

Gli autostati sono gli stessi di (2.16), relativi a un oscillatore armonico bidimensionale. La differenza sostanziale rispetto a questi ultimi è che (2.31) sono riferiti a un caso in cui U(2) costituisce una simmetria dinamica tramite U(1), in quanto il sistema dipende solo dalla descrizione algebrica dovuta a (2.18).

Successivamente si calcolano tutti gli elementi di matrice relativi a U(2) o a SU(2), poiché c'è simmetria rispetto a U(1) e vale (2.12). Si rimanda a § 2.7 per una discussione generale su ciò.

## 2.5 Il limite SO(2)

Ponendo  $\varepsilon = \alpha = 0$  in (2.27) si ottiene:

$$\widehat{H}^{(\text{II})} = E_0' + \beta \widehat{J}_z^2, \quad (2.33)$$

con autovalori:

$$E^{(\text{II})}(\mu) = E_0' + \beta \mu^2, \quad (2.34)$$

in cui si ha  $\mu = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ . Secondo § 2.1 si ha la seguente catena di algebre, da (2.19):

$$\begin{array}{ccccc} \text{U}(2) & \supset & \text{SU}(2) & \supset & \text{SO}(2) & \text{(II)} \\ N & & j & & \mu & \end{array} \quad (2.35)$$

Per trovare gli autostati  $|j, \mu\rangle$  si può sfruttare l'operatore  $\widehat{J}_x$ , piuttosto che  $\widehat{J}_z$  come dovrebbe essere. Infatti, da (2.9a), si può riscrivere come funzione di  $\widehat{N}$  e  $\widehat{n}_t$ , operatori definenti la catena (2.18), riconducendosi al caso studiato in § 2.4, di cui si conoscono gli autostati. Con una trasformazione di rotazione nello spazio  $s-t$  è possibile ricavare gli autostati di  $\widehat{J}_z$  proprio in funzione di quelli di  $\widehat{J}_x$ , ottenendo:

$$|j, \mu\rangle = \frac{(\widehat{s}^\dagger - i\widehat{t}^\dagger)^{j-\mu} (\widehat{s}^\dagger + i\widehat{t}^\dagger)^{j+\mu}}{2^j \sqrt{(j-\mu)!(j+\mu)!}} |0\rangle, \quad (2.36)$$

le cui proprietà di parità sono identificate dalla seguente equazione:

$$\widehat{P} |j, \mu\rangle = |j, -\mu\rangle. \quad (2.37)$$

Volendo utilizzare questa descrizione algebrica per la valutazione delle varie osservabili, è necessario calcolare gli elementi di matrice relativi ai generatori di U(2) (o SU(2)). Si rimanda a § 2.7 per i dettagli.

## 2.6 Cambio di base

Nei paragrafi precedenti si sono ricavati gli autostati di base (2.31) e (2.36) relativi ai due limiti algebrici. Ci si può chiedere come possono essere messi in relazione tra loro. La formula per il cambio di base, ponendo  $|j, n_t\rangle \equiv |N, n_t\rangle$  è la seguente:

$$|j, \mu\rangle = \sum_{n_t=0}^{2j} |j, n_t\rangle \langle j, n_t | j, \mu\rangle. \quad (2.38)$$

Si può ricavare un'espressione esplicita, nella forma:

$$\langle j, n_t | j, \mu \rangle = \left[ \frac{(2j - n_t)! n_t!}{2^{2j} (j - \mu)! (j + \mu)!} \right]^{1/2} (i)^{n_t} \sum_{l=0}^{j-\mu} (-1)^l \binom{j + \mu}{n_t - l} \binom{j - \mu}{l}, \quad (2.39)$$

in cui  $l = n_t - k$ . La (2.39) è utile anche per ricavare gli elementi di matrice riferiti a una certa base in funzione di un'altra base.

## 2.7 La determinazione degli elementi di matrice

Per calcolare gli elementi di matrice, è utile utilizzare gli operatori tensoriali irriducibili, definiti in § 1.4. Si ha che gli operatori di creazione e distruzione di bosoni- $s$  e  $t$  possono essere associati a operatori tensoriali irriducibili. Tale identificazione consente di utilizzare le proprietà studiate precedentemente, in particolare il *Teorema di Wigner-Eckart* (PROP. 1.1), con il quale è possibile esprimere gli elementi di matrice attraverso un coefficiente di Clebsch-Gordan e l'elemento di matrice ridotta. Questi ultimi possono, poi, essere calcolati separatamente.

In particolare, avendo un'algebra dinamica  $G$  e una catena di algebre:

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n, \quad (2.40)$$

il problema della determinazione degli elementi di matrice si può riassumere nei seguenti punti:

- Esprimere gli operatori fisici come operatori tensoriali o in termini di essi.
- Utilizzare il *Teorema di Wigner-Eckart* per esprimere gli elementi di matrice in funzione di coefficienti algebrici e elementi di matrice ridotta. I coefficienti dipendono solamente dalla struttura dell'operatore in questione, gli elementi di matrice, invece, dipendono proprio dall'operatore scelto.
- Calcolare gli elementi di matrice ridotta considerando la componente più semplice possibile dell'operatore tensoriale.

Il capitolo ha presentato i diversi aspetti inerenti all'algebra riguardante lo sviluppo di modelli teorici a partire da un hamiltoniano. Tutti i passi seguiti per la determinazione delle catene di algebre, nonché dei limiti algebrici, costituiscono un modello per l'analisi di problemi simili e che pertanto sono perfettamente riproducibili nel caso si analizzi un sistema equivalente, ma più complesso. Nel nostro caso, nel Capitolo 3 si analizzerà un sistema di  $N$  bosoni a momento angolare definito, si costruirà una forma generale per l'hamiltoniano e si analizzeranno le diverse simmetrie deducibili proprio da un'analisi algebrica del modello.

# Capitolo 3

## Il Modello a Bosoni Interagenti

Il termine *Modello a Bosoni Interagenti* (*Interacting Boson Model*, brevemente IBM) fu coniato nel 1973 da Herman Feshbach e Francesco Iachello per un modello appropriato per i nuclei leggeri, in particolare il nucleo bimagico  $^{16}\text{O}$  (cioè con un numero di protoni e neutroni esattamente uguali a un numero magico, in questo caso 8), nel quale le eccitazioni collettive particella-lacuna erano trattate approssimativamente come eccitazioni bosoniche [3]. Nel 1974, insieme con Akito Arima, Iachello formulò un modello che descriveva lo spettro vibrazionale di nuclei sferici pari-pari di massa media, ad esempio  $^{100}\text{Pd}$ , mediante un hamiltoniano di bosoni quadrupolari, o bosoni- $d$ , interagenti, la cui simmetria  $\text{SO}(5)$  consentiva un calcolo analitico dello spettro [4]. Nello stesso anno, Janssen, Jolos e Dönau proposero un hamiltoniano di bosoni- $d$  con simmetria più generale,  $\text{SU}(6)$ , in grado di riprodurre gli spettri collettivi di nuclei pari-pari transizionali come  $^{152}\text{Gd}$  e  $^{150,152}\text{Sm}$ , troncati a un momento angolare massimo  $L_{\max} = 2N$ , dove  $N$ , numero massimo di bosoni- $d$  del modello, era posto uguale al numero di coppie di nucleoni di valenza [5]. Nel 1975, Arima e Iachello riformulavano il modello a bosoni interagenti con simmetria  $\text{SU}(6)$ , introducendo, accanto ai bosoni- $d$ , i bosoni monopolari  $s$  e la conservazione del numero totale di bosoni- $s$  e  $d$  e mostravano come le sottoalgebre di  $\text{SU}(6)$  davano luogo a simmetrie dinamiche limiti, in grado di descrivere spettri collettivi sia vibrazionali che rotazionali [6]. L'articolo del 1975 segnò la nascita della versione 1 del modello, che, nel giro di pochi anni, fu seguita da una versione 2, con una più robusta struttura microscopica, in cui i bosoni- $s$  e  $d$  erano interpretati come immagini bosoniche di coppie di nucleoni dello stesso tipo legati a momento angolare  $L = 0$  e  $L = 2$ , rispettivamente [7]. Poiché i numeri di bosoni di tipo protonico e di tipo neutronico erano conservati separatamente, la simmetria dell'hamiltoniano veniva estesa a  $\text{SU}(6) \otimes \text{SU}(6)$ , con una più ricca struttura di sottosimmetrie limiti. Entrambi i modelli, così come altre versioni successive con ulteriori gradi di libertà, sono descritte in dettaglio nella monografia di Arima e Iachello del 1987 [8], che d'ora in poi prenderemo a riferimento per il formalismo.

### 3.1 Gli operatori di creazione e distruzione per i bosoni

Per introdurre i bosoni utilizziamo il formalismo della seconda quantizzazione, spiegato brevemente in § 1.6.

Introduciamo gli operatori  $\widehat{s}^\dagger$ ,  $\widehat{s}$  rispettivamente di creazione e distruzione di *bosoni-s* nello stato di momento angolare  $|j = 0, m = 0\rangle$ . Definiamo inoltre gli operatori  $\widehat{d}_\mu^\dagger$ ,  $\widehat{d}_\mu$  di creazione e distruzione di *bosoni-d* nello stato  $|j = 2, m = \mu\rangle$  in cui  $\mu = -2, \dots, 2$ . Dalla DEF. 1.10 e da (1.35) si hanno le seguenti relazioni di commutazione:

$$\left[\widehat{s}, \widehat{s}^\dagger\right] = \widehat{1}, \quad (3.1a)$$

$$\left[\widehat{d}_\mu, \widehat{d}_\nu^\dagger\right] = \delta_{\mu,\nu}\widehat{1}, \quad (3.1b)$$

$$\left[\widehat{s}, \widehat{d}_\mu^\dagger\right] = \left[\widehat{s}, \widehat{d}_\mu\right] = \left[\widehat{s}^\dagger, \widehat{d}_\mu^\dagger\right] = \left[\widehat{s}^\dagger, \widehat{d}_\mu\right] = 0, \quad (3.1c)$$

$$\left[\widehat{s}, \widehat{s}\right] = \left[\widehat{s}^\dagger, \widehat{s}^\dagger\right] = \left[\widehat{d}_\mu, \widehat{d}_\mu\right] = \left[\widehat{d}_\mu^\dagger, \widehat{d}_\mu^\dagger\right] = 0. \quad (3.1d)$$

Gli operatori così definiti possono essere associati a operatori tensoriali, con la nota che è necessario modificare l'operatore  $\widehat{d}_\mu$ , per cui non vale quest'associazione nella sua forma base. In particolare si pone:

$$\widetilde{d}_\mu \doteq (-1)^\mu \widehat{d}_{-\mu}. \quad (3.2)$$

Successivamente si possono definire gli operatori numero per ciascuna coppia di operatori di creazione e distruzione. Introduciamo gli operatori relativi al numero di bosoni-s e al numero di bosoni-d:

$$\widehat{n}_s = \widehat{s}^\dagger \widehat{s}, \quad (3.3)$$

$$\widehat{n}_d = \sum_{\mu} \widehat{d}_\mu^\dagger \widehat{d}_\mu. \quad (3.4)$$

Essi hanno come autovalori rispettivamente il numero  $n_s$  di bosoni-s e il numero  $n_d$  di bosoni-d. Di conseguenza l'operatore:

$$\widehat{N} = \widehat{n}_s + \widehat{n}_d \quad (3.5)$$

ha come autovalore il numero  $N = n_s + n_d$  totale di bosoni ed è appunto chiamato *operatore numero totale di bosoni*.

È possibile introdurre una notazione più compatta per tali operatori, riscrivendoli come  $\widehat{b}_\alpha^\dagger$ ,  $\widehat{b}_\alpha$  con  $\alpha = 1, \dots, 6$ , ponendo:

$$\widehat{b}_1 = \widehat{s} \quad \widehat{b}_2 = \widehat{d}_{+2} \quad \widehat{b}_3 = \widehat{d}_{+1} \quad \widehat{b}_4 = \widehat{d}_0 \quad \widehat{b}_5 = \widehat{d}_{-1} \quad \widehat{b}_6 = \widehat{d}_{-2}$$

e avendo le seguenti relazioni di commutazione, ricavabili direttamente da (3.1):

$$\left[\widehat{b}_\alpha, \widehat{b}_\beta^\dagger\right] = \delta_{\alpha,\beta}\widehat{1}, \quad (3.6a)$$

$$\left[\widehat{b}_\alpha, \widehat{b}_\beta\right] = \left[\widehat{b}_\alpha^\dagger, \widehat{b}_\beta^\dagger\right] = 0. \quad (3.6b)$$

Generalmente è possibile sostituire il pedice  $\alpha$  con coppie di numeri quantici  $j$ ,  $m$  relativi al momento angolare, in cui  $j = 0$ ,  $m = 0$  per i bosoni- $s$  e  $j = 2$ ,  $m = -2, \dots, 2$  per i bosoni- $d$ .

Gli operatori assumono la forma

$$\widehat{b}_{j,m}^\dagger, \quad \widehat{b}_{j,m} \quad (3.7)$$

e la relazione (3.2) diventa:

$$\widehat{b}_{j,m} = (-1)^{j+m} \widehat{b}_{j,-m}. \quad (3.8)$$

Come affermato in precedenza, gli operatori con cui trattiamo sono operatori tensoriali, in particolare gli operatori  $\widehat{b}_{j,m}$  sono operatori tensoriali di rango  $k = j$ . Possiamo scrivere in modo esplicito il prodotto tensoriale per ciascuna coppia secondo la relazione (1.23), indipendentemente dal fatto che gli operatori considerati siano entrambi di creazione o di distruzione, oppure un caso misto:

$$[\widehat{b}_{j_1,m_1} \otimes \widehat{b}_{j_2,m_2}]^{(J)}_M = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, j_2, J, M \rangle \widehat{b}_{j_1,m_1} \widehat{b}_{j_2,m_2}, \quad (3.9)$$

in cui  $J, M \in \mathbb{Z}$ , con  $M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$  e  $M = m_1 + m_2$ , come espresso dalla DEF. 1.8. Per  $j_1 = 0 \Rightarrow m_1 = 0$  e si ha che  $\widehat{b}_{0,0} = \widehat{s}$  (lo stesso esempio è valido anche nel caso si consideri l'operatore di creazione  $\widehat{b}_{j_1,m_1}^\dagger$ ). In questo caso la relazione (3.9) si riscrive in un modo più semplice, dovuto al fatto che la sommatoria si riduce a un solo termine, in quanto  $\langle 0, 0, j_2, m_2 | 0, j_2, J, M \rangle = (-1)^{J-j_2} \delta_{j_2,J} \delta_{m_2,M}$ , perciò:

$$[\widehat{s} \otimes \widehat{b}_{j_2,m_2}]^{(J)}_M = \sum_{m_2} (-1)^{J-j_2} \delta_{j_2,J} \delta_{m_2,M} \widehat{s} \widehat{b}_{j_2,m_2} = \widehat{s} \widehat{b}_{j_2,m_2} = [\widehat{s} \otimes \widehat{b}_{j_2,m_2}]^{(j_2)}_{m_2}. \quad (3.10)$$

## 3.2 L'operatore hamiltoniano dell'IBM-1

Ricordiamo che l'operatore hamiltoniano è quell'operatore che identifica in un dato sistema tutto ciò che riguarda l'energia e gli scambi di energia che avvengono. Quindi comprende tutte le forme di energia in gioco, compresi i potenziali di interazione. Nel caso in esame è utile studiare l'hamiltoniano generale  $\widehat{H}$  scomponendo i due contributi rilevanti:

$$\widehat{H} = \widehat{H}^{(0)} + \widehat{H}^{(1)}, \quad (3.11)$$

identificandolo come somma di un operatore  $\widehat{H}^{(0)}$  riguardante il sistema senza interazioni e un operatore  $\widehat{H}^{(1)}$  comprendente le interazioni tra i bosoni.

In generale si può esprimere l'operatore  $\widehat{H}^{(0)}$  come la somma tra l'operatore di energia cinetica  $\widehat{T}$  e quello di energia potenziale  $\widehat{V}$ . Si considera ora uno stato con un bosone singolo  $|b_{jm}\rangle$  di momento angolare definito caratterizzato dai numeri quantici  $j$  e  $m$ . Si ha:

$$\widehat{H}^{(0)} |b_{jm}\rangle = (\widehat{T} + \widehat{V}) |b_{jm}\rangle = |b_{jm}\rangle \varepsilon_{jm}. \quad (3.12)$$

L'energia  $\varepsilon_{jm}$  è l'autovalore relativo all'operatore  $\widehat{H}^{(0)}$  e rappresenta l'energia del sistema nel caso in cui quest'ultimo sia privo di interazioni. Essa non potrà dipendere dal numero quantico  $m$  poiché non si ha alcuna preferenza per un dato asse nello spazio, perciò la proiezione del momento angolare, identificata proprio da quest'ultimo, è ininfluente. In particolare, poiché i bosoni- $s$  sono indipendenti dai bosoni- $d$ , è possibile scrivere l'energia (tralasciando le interazioni) di un sistema formato da  $N$  bosoni, con  $n_s$  bosoni- $s$  e  $n_d$  bosoni- $d$  come:

$$E_{\text{tot}} = \varepsilon_s n_s + \varepsilon_d n_d, \quad (3.13)$$

infatti, l'energia dipende solo dal numero quantico  $j$ , che, nel nostro caso, può assumere solamente i due valori identificativi propri dei bosoni- $s$  e dei bosoni- $d$ , come descritto in § 3.1. Visualizzando l'equazione precedente in versione operatoriale si ottiene:

$$\widehat{H}^{(0)} = \varepsilon_s \widehat{n}_s + \varepsilon_d \widehat{n}_d, \quad (3.14)$$

da cui emerge immediatamente che  $\widehat{H}^{(0)}$  è un operatore a una particella, avendo la forma (1.41), poiché valgono (3.3), (3.4).

Consideriamo ora l'operatore  $\widehat{H}^{(1)}$ , esso rappresenta le interazioni, pertanto è rappresentato da un operatore a due particelle, nella forma (1.44). Nel nostro caso si scrive:

$$\widehat{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\eta=1}^6 \langle \alpha, \beta | \widehat{h}^{(1)} | \gamma, \eta \rangle \widehat{b}_\alpha^\dagger \widehat{b}_\beta^\dagger \widehat{b}_\gamma \widehat{b}_\eta. \quad (3.15)$$

È possibile convertire (3.15) in una forma comprendente gli elementi di matrice con momento angolare definito, si ha:

$$\widehat{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j_\alpha j_\beta j_\gamma j_\eta J} \langle j_\alpha, j_\beta, J | \widehat{h}^{(1)} | j_\gamma, j_\eta, J \rangle (2J+1)^{1/2} \left[ \widehat{b}_\alpha^\dagger \otimes \widehat{b}_\beta^\dagger \right]^{(J)} \otimes \left[ \widehat{b}_\gamma \otimes \widehat{b}_\eta \right]^{((J))} \Big|_0^{(0)}. \quad (3.16)$$

A questo punto costruire l'hamiltoniano d'insieme è immediato. È sufficiente sostituire ai vari operatori utilizzati gli operatori relativi ai bosoni- $s$  e  $d$ . Si considera prima (3.14), che diventa:

$$\widehat{H}^{(0)} = E_0 + \varepsilon_s \widehat{s}^\dagger \widehat{s} + \varepsilon_d \widehat{d}^\dagger \widehat{d}, \quad (3.17)$$

a cui è stata aggiunta, per completezza, l'energia di punto zero. Successivamente si considera (3.16) in cui si sviluppano le somme con l'accortezza che i valori di  $J$  indicati si possono determinare semplicemente dal fatto che si stanno considerando

bosoni con momento angolare massimo  $j = 2$ :

$$\begin{aligned}
\widehat{H}^{(1)} &= \frac{1}{2} \sum_{J=0,2,4} \langle d, d, J | \widehat{h}^{(1)} | d, d, J \rangle (2J+1)^{1/2} \left[ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}^\dagger]^{(J)} \otimes [\widetilde{d} \otimes \widetilde{d}]^{(J)} \right]_0^{(0)} \\
&+ \frac{1}{2} \langle d, d, J=2 | \widehat{h}^{(1)} | d, s, J=2 \rangle 2\sqrt{5} \left( \left[ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}^\dagger]^{(2)} \otimes \widetilde{d}\widehat{s} \right]_0^{(0)} + \left[ \widehat{s}^\dagger \widehat{d}^\dagger \otimes [\widetilde{d} \otimes \widetilde{d}]^{(2)} \right]_0^{(0)} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \langle d, d, J=0 | \widehat{h}^{(1)} | s, s, J=0 \rangle \left( \left[ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}^\dagger]^{(0)} \otimes \widehat{s}\widehat{s} \right]_0^{(0)} + \left[ \widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \otimes [\widetilde{d} \otimes \widetilde{d}]^{(0)} \right]_0^{(0)} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \langle d, s, J=2 | \widehat{h}^{(1)} | d, s, J=2 \rangle 4\sqrt{5} [\widehat{d}^\dagger \widehat{s}^\dagger \otimes \widetilde{d}\widehat{s}]_0^{(0)} \\
&+ \frac{1}{2} \langle s, s, J=0 | \widehat{h}^{(1)} | s, s, J=0 \rangle [\widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \otimes \widehat{s}\widehat{s}]_0^{(0)}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Si definiscono le seguenti costanti:

$$c_J = \langle d, d, J | \widehat{h}^{(1)} | d, d, J \rangle, \tag{3.19a}$$

$$\nu_2 = \langle d, d, J=2 | \widehat{h}^{(1)} | d, s, J=2 \rangle \sqrt{10}, \tag{3.19b}$$

$$\nu_0 = \langle d, d, J=0 | \widehat{h}^{(1)} | s, s, J=0 \rangle, \tag{3.19c}$$

$$u_2 = \langle d, s, J=2 | \widehat{h}^{(1)} | d, s, J=2 \rangle 2\sqrt{5}, \tag{3.19d}$$

$$u_0 = \langle s, s, J=0 | \widehat{h}^{(1)} | s, s, J=0 \rangle. \tag{3.19e}$$

E si scrive l'hamiltoniano come in (3.11), unendo (3.17) e (3.18):

$$\begin{aligned}
\widehat{H} &= E_0 + \varepsilon_s \widehat{s}^\dagger \widehat{s} + \varepsilon_d \widehat{d}^\dagger \widehat{d} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{J=0,2,4} c_J (2J+1)^{1/2} \left[ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}^\dagger]^{(J)} \otimes [\widetilde{d} \otimes \widetilde{d}]^{(J)} \right]_0^{(0)} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_2 \left( \left[ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}^\dagger]^{(2)} \otimes \widetilde{d}\widehat{s} \right]_0^{(0)} + \left[ \widehat{s}^\dagger \widehat{d}^\dagger \otimes [\widetilde{d} \otimes \widetilde{d}]^{(2)} \right]_0^{(0)} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \nu_0 \left( \left[ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}^\dagger]^{(0)} \otimes \widehat{s}\widehat{s} \right]_0^{(0)} + \left[ \widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \otimes [\widetilde{d} \otimes \widetilde{d}]^{(0)} \right]_0^{(0)} \right) \\
&+ u_2 [\widehat{d}^\dagger \widehat{s}^\dagger \otimes \widetilde{d}\widehat{s}]_0^{(0)} \\
&+ \frac{1}{2} u_0 [\widehat{s}^\dagger \widehat{s}^\dagger \otimes \widehat{s}\widehat{s}]_0^{(0)}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Si nota che è costituito da 9 parametri. Nelle prossime sezioni si mostrerà che non sono tutti indipendenti tra loro. Sarà possibile ridurli fino a 6 termini indipendenti.

### 3.3 La conservazione del numero di bosoni

Come si era già visto per il modello semplificato (2.22) a due gradi di libertà, anche nel modello (3.20) a nove gradi di libertà il numero totale di bosoni è

conservato per costruzione:

$$\left[ \widehat{H}, \widehat{N} \right] = 0. \quad (3.21)$$

Ciò consente di semplificare (3.20), nel senso che è possibile scrivere:

$$E_0 + \varepsilon_s \widehat{n}_s + \varepsilon_d \widehat{n}_d = E_0 + \varepsilon_s \left( \widehat{N} - \widehat{n}_d \right) + \varepsilon_d \widehat{n}_d = e_0 + \varepsilon \widehat{n}_d. \quad (3.22)$$

in cui si è sostituito  $\widehat{N}$  con il suo numero quantico  $N$ , per cui  $e_0 = E_0 + \varepsilon_s N$ , mentre  $\varepsilon = \varepsilon_d - \varepsilon_s$ .

Ci si può anche chiedere qual è il valore fisicamente più realistico da attribuire a  $N$ . Nell'interpretazione microscopica dell'IBM-1, i bosoni del modello sono le immagini bosoniche delle coppie di nucleoni dello stesso tipo (protone-protone e neutrone-neutrone) presenti negli strati di valenza. I numeri dei bosoni di tipo protonico e neutronico si conservano separatamente; tali numeri dipenderanno quindi dal riempimento degli strati (*shell*) considerati: si individueranno nel numero di coppie di particelle per strati riempiti meno della metà e (in virtù dell'equivalenza particella-lacuna\*, che non tratteremo in questa sede) nel numero di coppie di lacune per strati riempiti più della metà. Per chiarire questa nozione si consideri il nucleo di  $^{110}_{48}\text{Cd}_{62}$ : lo strato che contiene un numero di protoni o neutroni il più vicino possibile a 48 o 62 contiene 50 nucleoni. Ciò significa che nello strato di valenza:

- si hanno  $62 - 50 = 12$  neutroni (cioè 6 bosoni di tipo neutrone), in quanto i neutroni riempiono lo strato superiore (che contiene  $82 - 50 = 32$  nucleoni) meno della metà;
- si hanno  $50 - 48 = 2$  lacune di tipo protone (cioè 1 bosone di tipo protone), in quanto i protoni riempiono lo strato inferiore (che contiene  $50 - 28 = 22$  nucleoni) più della metà.

Risultando in un sistema formato in totale da  $N = 7$  bosoni di valenza. Riassumendo, il numero di bosoni di un dato tipo (n o p) è posto uguale al minore fra i seguenti due numeri: il numero di coppie di particelle al di sopra della chiusura dello strato inferiore o il numero di coppie di lacune al di sotto della chiusura dello strato superiore, allo scopo di tenere in conto, sia pure in modo approssimato, del principio di Pauli, valido per le coppie di nucleoni identici di cui i bosoni sono un'immagine.

### 3.4 Espansione in multipoli

È possibile dimostrare, utilizzando tecniche di riaccoppiamento di momenti angolari illustrate in dettaglio nel Capitolo 9 della monografia [9], che l'hamiltoniano IBM-1 (3.20) si può riscrivere come una somma di interazioni multipolo-multipolo:

$$\widehat{H} = e_0 + \varepsilon \widehat{n}_d + a_0 \widehat{P}^\dagger \cdot \widehat{P} + a_1 \widehat{L} \cdot \widehat{L} + a_2 \widehat{Q}^x \cdot \widehat{Q}^x + a_3 \widehat{U} \cdot \widehat{U} + a_4 \widehat{V} \cdot \widehat{V}, \quad (3.23)$$

---

\*L'equivalenza particella-lacuna prevede che ciascuno strato possa essere analizzato considerando sia le particelle presenti fisicamente relative a quello strato, sia le lacune, cioè enti che rappresentano l'assenza di particelle. Pertanto il loro numero individua, sostanzialmente, quante particelle mancano per riempire lo strato.

in cui gli operatori sono definiti come segue:

$$\text{numero di bosoni-}d \quad \hat{n}_d = \hat{d}^\dagger \hat{d}, \quad (3.24a)$$

$$\text{monopolo} \quad \hat{P} = \frac{1}{2} \hat{d} \hat{d} - \frac{1}{2} \hat{s} \hat{s}, \quad (3.24b)$$

$$\text{momento angolare} \quad \hat{L} = \sqrt{10} [\hat{d}^\dagger \otimes \hat{d}]^{(1)}, \quad (3.24c)$$

$$\text{quadrupolo} \quad \hat{Q}^\chi = [\hat{d}^\dagger \otimes \hat{s} + \hat{s}^\dagger \otimes \hat{d}]^{(2)} + \chi [\hat{d}^\dagger \otimes \hat{d}]^{(2)}, \quad (3.24d)$$

$$\text{ottupolo} \quad \hat{U} = [\hat{d}^\dagger \otimes \hat{d}]^{(3)}, \quad (3.24e)$$

$$\text{esadecapolo} \quad \hat{V} = [\hat{d}^\dagger \otimes \hat{d}]^{(4)}, \quad (3.24f)$$

combinati con 6 parametri indipendenti:  $e_0, \varepsilon, a_i$  con  $i = 1, \dots, 4$ . Il termine  $\hat{P}$  si dice *operatore di monopolo*, il termine  $\hat{L}$  si dice *operatore momento angolare* e il termine  $\hat{Q}^\chi$  si dice *operatore di quadrupolo*. Per quanto riguarda i termini  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$ , essi sono detti rispettivamente *operatore di ottupolo* e *operatore di esadecapolo*. Ovviamente questa non è l'unica formulazione ridotta dell'hamiltoniano (3.20), però ha il pregio di evidenziare in maniera più intuitiva quali sono gli operatori implicati, nonché il loro ruolo nella determinazione degli stati finali dei nuclei che si considerano. Per  $\chi = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ , le cinque componenti dell'operatore di quadrupolo  $\hat{Q}^\chi$  e le tre componenti del momento angolare  $\hat{L}$  generano un'algebra  $SU(3)$ , che studieremo in dettaglio per le applicazioni.

### 3.5 Formalismo $Q$ -consistente e transizioni elettromagnetiche

Si può ottenere un'altra forma dell'hamiltoniano semplificata molto utile per svolgere i calcoli teorici, e infatti utilizzata in [10] per la programmazione del codice IBAR, di cui si parlerà ampiamente nel Capitolo 4.

$$\hat{H}_{\text{CQF}} = e_0 + \varepsilon \hat{n}_d + a_1 \hat{L} \cdot \hat{L} + \kappa \hat{Q}^\chi \cdot \hat{Q}^\chi + a_3 \hat{U} \cdot \hat{U} + a_4 \hat{V} \cdot \hat{V}. \quad (3.25)$$

Il coefficiente  $\kappa$  si scrive anche  $a_2$  talvolta. L'hamiltoniano posto in questa forma si definisce hamiltoniano-CQF (*Consistent-Q Formalism*). La definizione degli operatori implicati segue le relazioni (3.24). Il vantaggio dell'utilizzo dell'hamiltoniano-CQF è dovuto alla forma che assume l'*operatore delle transizioni elettromagnetiche*. Definiamo dunque quest'ultimo nella sua forma base:

$$\hat{T}(E2) = \alpha_2 [\hat{d}^\dagger \otimes \hat{s} + \hat{s}^\dagger \otimes \hat{d}]^{(2)} + \beta_2 [\hat{d}^\dagger \otimes \hat{d}]^{(2)}. \quad (3.26)$$

I suoi elementi di matrice, denominati  $B(E2)$  saranno molto importanti per la trattazione seguente in quanto sono parametri nucleari misurabili attraverso esperimenti, costituendo, dunque, una prova tangibile della validità del modello. Essi sono definiti come transizioni tra stati di diverso momento angolare:

$$B(E2; L_i \rightarrow L_f) = \frac{1}{2L_i + 1} \left| \langle L_f || \hat{T}(E2) || L_i \rangle \right|^2, \quad (3.27)$$

in cui  $L_i$  e  $L_f$  indicano rispettivamente il momento angolare iniziale e il momento angolare finale degli stati presi come riferimento. Per una trattazione più approfondita, si rimanda a § 3.11.

Nel formalismo  $Q$ -consistente si ha una relazione di proporzionalità diretta tra l'operatore di quadrupolo e l'operatore delle transizioni elettromagnetiche:

$$\widehat{T}(E2) = \alpha_2 \widehat{Q}^x, \quad (3.28)$$

in cui  $\alpha_2$  è una costante detta *carica efficace*.

### 3.6 Catene di algebre

Introduciamo ora il problema della determinazione degli autostati e degli autovalori. Procediamo come mostrato nel Capitolo 2: determiniamo l'algebra principale descrittiva del sistema e costruiamo gli operatori di Casimir, ottenendo le sottoalgebre corrispondenti e riducendo il problema allo studio delle catene di algebre.

Utilizzando la notazione operatoriale introdotta in (3.7), con  $l, l' = 0, 2$ , possiamo costruire i seguenti operatori:

$$\widehat{G}^{(k)}_{\mu}(l, l') = [\widehat{b}_l^{\dagger} \otimes \widehat{b}_{l'}]^{(k)}_{\mu}. \quad (3.29)$$

Attraverso di essi è possibile generare l'algebra  $U(6)$ , che ha esattamente 36 generatori:

$$\widehat{G}^{(0)}_0(s, s) = [\widehat{s}^{\dagger} \otimes \widehat{s}]^{(0)}_0 \quad 1 \quad (3.30a)$$

$$\widehat{G}^{(0)}_0(d, d) = [\widehat{d}^{\dagger} \otimes \widehat{d}]^{(0)}_0 \quad 1 \quad (3.30b)$$

$$\widehat{G}^{(1)}_{\mu}(d, d) = [\widehat{d}^{\dagger} \otimes \widehat{d}]^{(1)}_{\mu} \quad 3 \quad (3.30c)$$

$$\widehat{G}^{(2)}_{\mu}(d, d) = [\widehat{d}^{\dagger} \otimes \widehat{d}]^{(2)}_{\mu} \quad 5 \quad (3.30d)$$

$$\widehat{G}^{(3)}_{\mu}(d, d) = [\widehat{d}^{\dagger} \otimes \widehat{d}]^{(3)}_{\mu} \quad 7 \quad (3.30e)$$

$$\widehat{G}^{(4)}_{\mu}(d, d) = [\widehat{d}^{\dagger} \otimes \widehat{d}]^{(4)}_{\mu} \quad 9 \quad (3.30f)$$

$$\widehat{G}^{(2)}_{\mu}(d, s) = [\widehat{d}^{\dagger} \otimes \widehat{s}]^{(2)}_{\mu} \quad 5 \quad (3.30g)$$

$$\widehat{G}^{(2)}_{\mu}(s, d) = [\widehat{s}^{\dagger} \otimes \widehat{d}]^{(2)}_{\mu} \quad 5 \quad (3.30h)$$

in cui a destra si è annotata la molteplicità  $(2k + 1)$  dei vari operatori. Per l'applicazione in fisica nucleare, è necessario trattare gli stati che sono caratterizzati da un buon valore di momento angolare. Questa premessa ci porta a considerare necessariamente l'algebra  $O(3)$  per la determinazione delle catene, algebra specifica per il momento angolare, generata attraverso (3.30c). Da quest'ultima deriva immediatamente l'inclusione

$$O(3) \supset O(2), \quad (3.31)$$

poiché  $O(2)$  è l'algebra relativa alla componente  $z$  del momento angolare. Abbiamo dunque dedotto la conclusione comune che le catene dovranno avere. Gli operatori

che generano l'algebra  $O(3)$  sono i 3 operatori definiti in (3.30c), dai quali si estrae:

$$\widehat{L}_z \doteq \widehat{G}^{(1)}_0(d, d) = [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{\widetilde{d}}]^{(1)}_0 \quad (3.32)$$

unico generatore del gruppo  $O(2)$ .

Consideriamo ora gli operatori definiti da (3.30b)–(3.30f). Sono in totale 25 operatori relativi solamente ai bosoni- $d$ . Essi generano l'algebra  $U(5)$ , sono i generatori delle trasformazioni che agiscono sullo spazio 5-dimensionale dei bosoni- $d$ . Rimuovendo da quest'ultimo insieme gli operatori relativi a momento angolare pari, otteniamo che gli operatori definiti in (3.30c) e (3.30e) generano l'algebra  $O(5)$ . Infine si nota che si hanno a disposizione direttamente gli operatori (3.30c), da cui la relazione (3.31) deriva immediatamente. Si ha dunque la catena:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{I}) \quad (3.33)$$

Continuiamo l'analisi degli operatori (3.30) considerando le seguenti combinazioni lineari:

$$\widehat{G}^{(1)}_\mu(d, d) = [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{\widetilde{d}}]^{(1)}_\mu \quad 3 \quad (3.34a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{G}^{(2)}_\mu(d, s) + \widehat{G}^{(2)}_\mu(s, d) - \frac{\sqrt{7}}{2} \widehat{G}^{(2)}_\mu(d, d) = \\ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{s} + \widehat{s}^\dagger \otimes \widehat{\widetilde{d}}]^{(2)}_\mu - \frac{\sqrt{7}}{2} [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{\widetilde{d}}]^{(2)}_\mu \end{aligned} \quad 5 \quad (3.34b)$$

per un totale di 8 operatori. Si nota che l'operatore (3.34b) è definito come (3.24d): si tratta proprio dell'operatore di quadrupolo  $\widehat{Q}^{-\sqrt{7}/2}$ . Analizzando i commutatori di questi ultimi, si nota che generano l'algebra  $SU(3)$ . La presenza, inoltre, di (3.34a), definito al pari di (3.30c), consente di includere l'algebra relativa al momento angolare, con la relazione (3.31). Si ottiene quindi la catena:

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{II}) \quad (3.35)$$

Si ha un'ultima possibilità di scelta tra gli operatori (3.30); si considerano:

$$\widehat{G}^{(1)}_\mu(d, d) = [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{\widetilde{d}}]^{(1)}_\mu \quad 3 \quad (3.36a)$$

$$\widehat{G}^{(3)}_\mu(d, d) = [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{\widetilde{d}}]^{(3)}_\mu \quad 7 \quad (3.36b)$$

$$\widehat{G}^{(2)}_\mu(d, s) + \widehat{G}^{(2)}_\mu(s, d) = [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{s} + \widehat{s}^\dagger \otimes \widehat{\widetilde{d}}]^{(2)}_\mu \quad 5 \quad (3.36c)$$

ottenendo 15 operatori. L'analisi dei commutatori consente di concludere che questi ultimi generano l'algebra  $O(6)$ . Considerando solamente (3.36a) e (3.36b) si hanno i 10 operatori generatori dell'algebra  $O(5)$ . La presenza di (3.36a), definito come in (3.30c) permette di includere le algebre  $O(3)$  e  $O(2)$  secondo (3.31). Riassumendo, si ottiene la catena:

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{III}) \quad (3.37)$$

A questo punto definiamo gli operatori di Casimir per le algebre considerate.

$$\widehat{C}_1^{U(6)} = \widehat{N}, \quad (3.38)$$

$$\widehat{C}_2^{U(6)} = \widehat{N}(\widehat{N} + 5), \quad (3.39)$$

$$\widehat{C}_1^{U(5)} = \widehat{n}_d, \quad (3.40)$$

$$\widehat{C}_2^{U(5)} = \widehat{n}_d(\widehat{n}_d + 4), \quad (3.41)$$

$$\widehat{C}_2^{SU(3)} = \frac{2}{3} \left[ 2\widehat{Q} \cdot \widehat{Q} + \frac{3}{4}\widehat{L} \cdot \widehat{L} \right], \quad (3.42)$$

$$\widehat{C}_2^{O(6)} = 2 \left[ \widehat{N}(\widehat{N} + 4) - 4\widehat{P}^\dagger \cdot \widehat{P} \right], \quad (3.43)$$

$$\widehat{C}_2^{O(5)} = 4 \left[ \frac{1}{10}\widehat{L} \cdot \widehat{L} + \widehat{U} \cdot \widehat{U} \right], \quad (3.44)$$

$$\widehat{C}_2^{O(3)} = 2\widehat{L} \cdot \widehat{L}, \quad (3.45)$$

in cui il pedice indica l'ordine dell'operatore. Si è posto  $\widehat{Q} \doteq \widehat{Q}^{-\sqrt{7}/2}$ . Scriviamo dunque l'hamiltoniano (3.20) come combinazione lineare degli operatori da (3.38)–(3.45), ottenendo:

$$\begin{aligned} \widehat{H} = e_0 + e_1 \widehat{C}_1^{U(6)} + e_2 \widehat{C}_2^{U(6)} + \varepsilon \widehat{C}_1^{U(5)} + \alpha \widehat{C}_2^{U(5)} + \\ \beta \widehat{C}_2^{O(5)} + \gamma \widehat{C}_2^{O(3)} + \delta \widehat{C}_2^{SU(3)} + \eta \widehat{C}_2^{O(6)}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

L'hamiltoniano dipende da 9 parametri, come avviene nella forma originale (3.20). La caratteristica principale di questa forma dell'hamiltoniano risiede nel fatto che non è diagonalizzabile analiticamente, in quanto dipende da operatori di Casimir relativi a gruppi diversi e diagonalizzabili nell'ambito delle catene di algebre ricavate precedentemente. L'annullarsi dei vari termini può però portare quest'ultimo a dipendere solo da un certo tipo di operatori, caratteristici di una e una sola catena. Tale situazione, studiata in § 2.3 per l'algebra  $U(2)$ , prende il nome di simmetria dinamica.

Nei paragrafi seguenti si studierà il problema agli autovalori relativo alle tre diverse simmetrie dinamiche dell'IBM-1, per la determinazione dell'energia dei livelli e degli autostati.

### 3.7 Il limite $U(5)$

Consideriamo il caso relativo alla catena (3.33) e determiniamo gli autostati relativi a questa simmetria limite. Si analizzano i vari operatori di Casimir per tutti i sottogruppi e si determinano i numeri quantici con cui etichettare gli autostati. Si inizia dal gruppo  $U(6)$ , caratterizzato dagli operatori (3.38) e (3.39) che sono certamente associati al numero totale di bosoni, come emerge dalla loro forma. Per quanto riguarda il gruppo  $U(5)$  si hanno gli operatori (3.40) e (3.41), associati al numero di bosoni- $d$  nel sistema considerato. È quindi intuitivo mostrare che:

$$n_d = N, N - 1, \dots, 1, 0. \quad (3.47)$$

**Tabella 3.1:** Operatori di Casimir, i loro autovalori e i numeri quantici caratteristici per la catena (I).

Gruppo	Operatore di Casimir	Autovalore	Numero quantico
U(6)	$\widehat{C}_1^{U(6)}$	$N$	$N$
	$\widehat{C}_2^{U(6)}$	$N(N+5)$	
U(5)	$\widehat{C}_1^{U(5)}$	$n_d$	$n_d$
	$\widehat{C}_2^{U(5)}$	$n_d(n_d+4)$	
O(5)	$\widehat{C}_2^{O(5)}$	$2\nu(\nu+3)$	$\nu$
O(3)	$\widehat{C}_2^{O(3)}$	$2L(L+1)$	$L$
O(2)	$\widehat{L}_z$	$M_L$	$M_L$

Il gruppo successivo è O(5), in cui si ha l'operatore (3.44) connesso al numero di bosoni che si accoppiano in modo da avere momento angolare dispari. Essi sono ovviamente in numero minore di  $n_d$ , infatti  $\nu$  soddisfa la regola:

$$\nu = n_d, n_d - 2, \dots, 1 \text{ oppure } 0. \quad (3.48)$$

Per quanto riguarda i gruppi O(3) e O(2), si hanno rispettivamente gli operatori (3.45) e (3.32), che non sono altro che l'operatore momento angolare al quadrato e la sua terza componente. Sono caratterizzati dagli usuali numeri quantici  $L$  e  $M_L$  relativi al momento angolare, con la condizione:

$$-L \leq M_L \leq L. \quad (3.49)$$

I risultati sono riassunti in Tabella 3.1.

Sfortunatamente, i numeri quantici appena descritti non sono sufficienti per classificare tutti i possibili stati, in quanto, fissata una rappresentazione di O(5), si hanno più rappresentazioni di O(3). Ciò comporta che, fissati i valori di  $N$ ,  $n_d$ ,  $\nu$ , si hanno più stati con il medesimo valore di  $L$ . In questi casi si dice che l'inclusione  $O(5) \supset O(3)$  non è completamente decomponibile. Si introduce un numero quantico ulteriore, denominato  $n_\Delta$  con cui etichettare tali stati degeneri in  $L$ . Quest'ultimo numero quantico rappresenta il numero di triplette di bosoni- $d$  legati a momento angolare zero.

Riassumendo, otteniamo la seguente catena, in cui indichiamo i numeri quantici:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (I) \quad (3.50)$$

$$N \quad n_d \quad \nu \quad n_\Delta \quad L \quad M_L$$

Essa è caratterizzata dagli autostati indicati come

$$|N, n_d, \nu, n_\Delta, L, M_L\rangle, \quad (3.51)$$

che formano una base ortonormale.

Scriviamo ora l'hamiltoniano relativo a tale simmetria: si impiegheranno solamente gli operatori di Casimir diagonalizzabili nell'ambito della catena (I).

$$\widehat{H}^{(1)} = e_0 + e_1 \widehat{C}_1^{U(6)} + e_2 \widehat{C}_2^{U(6)} + \varepsilon \widehat{C}_1^{U(5)} + \alpha \widehat{C}_2^{U(5)} + \beta \widehat{C}_2^{O(5)} + \gamma \widehat{C}_2^{O(3)}. \quad (3.52)$$

Non si introduce il Casimir quadratico di  $O(2)$ , con autovalore  $M_L^2$  ( $-L \leq M_L \leq +L$ ) a meno che il nucleo non sia immerso in un campo esterno che rimuova la degenerazione degli stati con lo stesso  $L$  ma diverso  $M_L$ .

Gli autovalori dell'energia si possono trovare facilmente calcolando il valore di aspettazione di  $\widehat{H}^{(1)}$  sugli autostati appena definiti, applicando le dovute regole di calcolo operatoriale.

$$\begin{aligned} E^{(1)}(N, n_d, \nu, n_\Delta, L, M_L) &= \langle N, n_d, \nu, n_\Delta, L, M_L | \widehat{H}^{(1)} | N, n_d, \nu, n_\Delta, L, M_L \rangle \\ &= E_0 + \varepsilon n_d + \alpha n_d(n_d + 4) + \beta 2\nu(\nu + 3) + \gamma 2L(L + 1), \end{aligned} \quad (3.53)$$

in cui si è definito

$$E_0 = e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5). \quad (3.54)$$

Il limite  $U(5)$  è anche detto *limite vibrazionale*, poiché il suo spettro energetico è simile a quello di un sistema sottoposto a un potenziale di tipo anarmonico e caratterizzato da moti vibrazionali (vedi angolo in basso a sinistra di Figura 3.1 a pagina 34).

### 3.8 Il limite $SU(3)$

Consideriamo ora il caso relativo alla catena (3.35) e procediamo come nel paragrafo precedente, studiando gli operatori di Casimir implicati. Si può analizzare il problema attraverso il metodo dei *diagrammi di Young*, il quale consiste in un algoritmo grafico che consente di ricavare tutte le rappresentazioni irriducibili di un dato gruppo. In questa trattazione faremo riferimento ai soli risultati di questo metodo.

La catena inizia dal gruppo  $U(6)$ , per cui si hanno gli operatori (3.38) e (3.39) relativi al numero totale di bosoni. Proseguendo si ha il gruppo  $SU(3)$ , caratterizzato dall'operatore di Casimir (3.42): esso è parametrizzato da due numeri quantici  $\lambda$  e  $\mu$ , chiamati *numeri di Elliott*, derivanti dalla trattazione con i diagrammi di Young. Tali diagrammi rappresentano graficamente le proprietà di simmetria delle rappresentazioni tensoriali irriducibili di un dato gruppo. Le rappresentazioni di  $SU(3)$  sono caratterizzate da diagrammi di Young a due righe, la prima costituita da  $f_1$  caselle e la seconda da  $f_2$  caselle, con  $f_2 \leq f_1$ , in particolare  $f_2 = 0$  per le rappresentazioni totalmente simmetriche. Per definizione,  $\lambda = f_1 - f_2$ ,  $\mu = f_2$ .

Fissato  $N$ , si ha che essi assumono i valori dati da:

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) &= (2N, 0), (2N - 4, 2), (2N - 8, 4), \dots \\ &\dots, (2N - 6, 0), (2N - 10, 2), \dots \\ &\dots, (2N - 12, 0), (2N - 16, 2), \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

**Tabella 3.2:** Operatori di Casimir, i loro autovalori e i numeri quantici caratteristici per la catena (II).

Gruppo	Operatore di Casimir	Autovalore	Numero quantico
U(6)	$\widehat{C}_1^{\text{U}(6)}$	$N$	$N$
	$\widehat{C}_2^{\text{U}(6)}$	$N(N+5)$	
SU(3)	$\widehat{C}_2^{\text{SU}(3)}$	$\frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu)$	$(\lambda, \mu)$
O(3)	$\widehat{C}_2^{\text{O}(3)}$	$2L(L+1)$	$L$
O(2)	$\widehat{L}_z$	$M_L$	$M_L$

Per quanto riguarda gli ultimi due gruppi O(3) e O(2), il problema agli autovalori è già stato trattato in § 3.7. In Tabella 3.2 sono mostrati gli operatori di Casimir e i relativi autovalori.

Similmente al caso precedente, anche per il limite SU(3) si ha che i numeri quantici appena descritti non sono sufficienti a etichettare tutti gli stati possibili univocamente: l'inclusione  $\text{SU}(3) \supset \text{O}(3)$  non è completamente decomponibile. È quindi necessario introdurre un altro numero quantico, denominato  $K$  e caratterizzato dai seguenti valori:

$$K = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1 \text{ oppure } 0; \quad (3.56)$$

inoltre si hanno i seguenti valori di  $L$ :

$$L = \begin{cases} \max(\lambda, \mu), \max(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1 \text{ oppure } 0 & K = 0, \\ K, K + 1, K + 2, \dots, K + \max(\lambda, \mu) & K \neq 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

Riassumendo, si ottiene la seguente catena, in cui si indicano i numeri quantici:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{U}(6) & \supset & \text{SU}(3) & \supset & \text{O}(3) & \supset & \text{O}(2) & \text{(II)} & (3.58) \\ & & N & & (\lambda, \mu) & & K & & L & & M_L \end{array}$$

Essa è caratterizzata dagli autostati indicati con

$$|N, (\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle, \quad (3.59)$$

che formano una base ortonormale.

Scriviamo quindi l'hamiltoniano negli operatori caratteristici del limite SU(3), cioè diagonalizzabili nell'ambito della catena (II).

$$\widehat{H}^{(\text{II})} = e_0 + e_1 \widehat{C}_1^{\text{U}(6)} + e_2 \widehat{C}_2^{\text{U}(6)} + \gamma \widehat{C}_2^{\text{O}(3)} + \delta \widehat{C}_2^{\text{SU}(3)}. \quad (3.60)$$

Procedendo come nel paragrafo precedente, si ricavano gli autovalori dell'energia, che risultano:

$$E^{(\text{II})}(N, \lambda, \mu, K, L, M_L) = E_0 + \gamma 2L(L+1) + \delta \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu), \quad (3.61)$$

in cui  $E_0$  è definito in (3.54). Nel limite SU(3) è possibile scrivere l'hamiltoniano in una forma particolarmente semplice:

$$\widehat{H}^{(\text{II})} = E_0 - \kappa' \widehat{L} \cdot \widehat{L} - \kappa 2\widehat{Q} \cdot \widehat{Q}, \quad (3.62)$$

in cui si ha:

$$\kappa = -\frac{2}{3}\delta, \quad (3.63a)$$

$$\kappa' = -\frac{1}{2}\delta - 2\gamma. \quad (3.63b)$$

Il limite SU(3) è detto anche *limite rotazionale*, poiché il suo spettro somiglia a quello tipico di un rotore a simmetria assiale (vedi angolo in basso a destra di Figura 3.1 a pagina 34). Se poniamo  $\mu = 0$ , otteniamo da (3.56) che l'unico valore possibile per  $K$  è 0. Questo è il caso della *banda fondamentale gs* (*ground-state*). Ponendo invece  $\mu = 2$ , si ha che  $K = 0, 2$ . Relativamente a  $K = 0$  si ha la *banda  $\beta$* , avendo invece  $K = 2$  si ottiene la *banda  $\gamma$* . Dalla relazione (3.61) si nota che tali ultime due bande sono degeneri, in quanto gli autovalori energetici non dipendono da  $K$ , ma solo da  $\mu$ : si tratta di due rappresentazioni irriducibili di SU(3). Il valore di  $K$  è lo stesso per tutti gli stati di una banda e si può identificare con la proiezione del momento angolare sull'asse di simmetria del nucleo.

Le energie dei livelli relativi a tali bande sono misurabili sperimentalmente, e costituiscono quindi un'importante metodo di confronto per valutare l'affidabilità del modello. Ci occuperemo più approfonditamente di questo problema nel capitolo successivo.

### 3.9 Il limite O(6)

Occupiamoci ora del caso relativo alla catena (3.37), determinandone autovalori e autostati. Si nota che essa è simile alla catena (I) se non per la sostituzione del gruppo U(5) con il gruppo O(6). Nel dettaglio, per il gruppo U(6) si hanno gli operatori (3.38) e (3.39) collegati con il numero totale di bosoni  $N$ . Per quanto il gruppo O(6) si ha l'operatore (3.43). Esso è caratterizzato dal numero quantico  $\sigma$  che soddisfa:

$$\sigma = N, N - 2, \dots, 1 \text{ oppure } 0. \quad (3.64)$$

Procedendo, considerando il gruppo O(5) si definisce il numero quantico  $\tau$ , per cui:

$$\tau = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0. \quad (3.65)$$

Per quanto riguarda gli operatori relativi a O(3) e O(2), la discussione è perfettamente identica a quella relativa a § 3.7, 3.8. In Tabella 3.3 sono riassunti gli autovalori relativi a ciascun operatore di Casimir.

Come accadeva nei casi precedenti, l'inclusione  $O(5) \supset O(3)$  non è completamente decomponibile, circostanza che determina la necessità di un ulteriore numero quantico in grado di etichettare i vari stati possibili ed individuato in  $\nu_\Delta$ . Tale numero ha fisicamente il medesimo significato relativo a  $n_\Delta$  per quanto riguarda il

**Tabella 3.3:** Operatori di Casimir, i loro autovalori e i numeri quantici caratteristici per la catena (III).

Gruppo	Operatore di Casimir	Autovalore	Numero quantico
U(6)	$\widehat{C}_1^{U(6)}$	$N$	$N$
	$\widehat{C}_2^{U(6)}$	$N(N+5)$	
O(6)	$\widehat{C}_2^{O(6)}$	$2\sigma(\sigma+4)$	$\sigma$
O(5)	$\widehat{C}_2^{O(5)}$	$2\tau(\tau+3)$	$\tau$
O(3)	$\widehat{C}_2^{O(3)}$	$2L(L+1)$	$L$
O(2)	$\widehat{L}_z$	$M_L$	$M_L$

limite U(5) (vedi § 3.7), cioè rappresenta il numero di tripletti di bosoni- $d$  legati a momento angolare zero.

Riassumendo, si ha la seguente catena, completa di numeri quantici:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{U(6)} & \supset & \text{O(6)} & \supset & \text{O(5)} & \supset & \text{O(3)} & \supset & \text{O(2)} & & \text{(III)} & & \text{(3.66)} \\ & & N & & \sigma & & \tau & \nu_\Delta & L & & M_L & & \end{array}$$

Essa è caratterizzata dagli autostati indicati con

$$|N, \sigma, \tau, \nu_\Delta, L, M_L\rangle, \quad (3.67)$$

che formano una base ortonormale.

Scriviamo l'hamiltoniano attraverso i soli operatori di Casimir relativi alla catena (III).

$$\widehat{H}^{(\text{III})} = e_0 + e_1 \widehat{C}_1^{U(6)} + e_2 \widehat{C}_2^{U(6)} + \beta \widehat{C}_2^{O(5)} + \gamma \widehat{C}_2^{O(3)} + \eta \widehat{C}_2^{O(6)}. \quad (3.68)$$

Si possono calcolare gli autovalori dell'energia, che risultano:

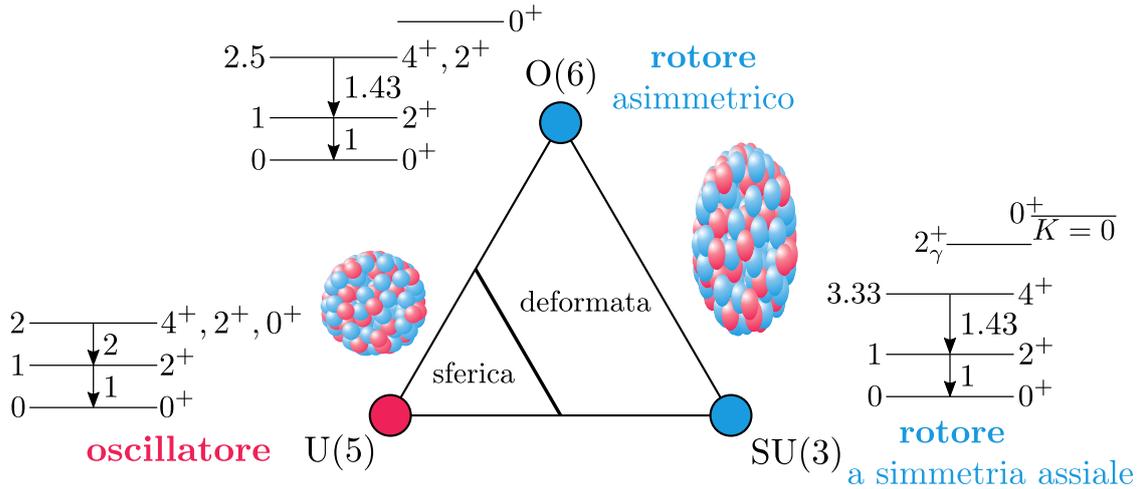
$$E^{(\text{III})}(N, \sigma, \tau, \nu_\Delta, L, M_L) = E_0 + \beta 2\tau(\tau+3) + \gamma 2L(L+1) + \eta 2\sigma(\sigma+4). \quad (3.69)$$

Lo spettro nel limite O(6) è quello di un rotore instabile rispetto alle deformazioni  $\gamma$  (vedi in alto al centro di Figura 3.1 nella pagina seguente – cfr. Greiner e Maruhn [11]).

Nel seguito faremo delle applicazioni del limite SU(3) del modello, per il quale allargheremo il discorso dagli autovalori dell'hamiltoniano alle transizioni elettromagnetiche fra gli autostati, con particolare riferimento alle transizioni di quadrupolo elettrico, che sono le più intense fra gli stati collettivi di bassa energia dei nuclei deformati.

## 3.10 Il triangolo di Casten

Il *triangolo di Casten* (Casten e McCutchan [12]), rappresentato in Figura 3.1, fornisce una visualizzazione grafica delle simmetrie dinamiche, ponendole ai vertici



**Figura 3.1:** Il triangolo di Casten: ai vertici sono indicati i tre limiti di simmetria principali, unitamente agli spettri caratteristici di ciascuno di essi. Sono inoltre rappresentate le due forme tridimensionali principali caratteristiche dei nuclei in una data simmetria.

di un triangolo equilatero. Inoltre individua la forma assunta dal nucleo, sferica o deformata, e le caratteristiche dello spettro, come spiegato precedentemente. Nel caso della simmetria SU(3) la forma del nucleo varia in base al valore di  $\chi$ : si ha un *rotore prolato* se  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ , oppure un *rotore oblat* se  $\chi = +\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

### 3.11 Le transizioni elettromagnetiche nel limite SU(3)

Nel limite SU(3), studiato in § 3.8, si ha che l'operatore hamiltoniano assume la forma semplificata (3.62). Confrontando dunque le relazioni (3.25), relativa al formalismo  $Q$ -consistente, e (3.62), si ha che differiscono per alcuni termini, che possono essere eliminati ponendo il loro coefficiente uguale a zero. Infatti, nel caso in cui  $\varepsilon = a_3 = a_4 = 0$ , si ha che l'hamiltoniano (3.62) è descrivibile attraverso il formalismo  $Q$ -consistente. Ciò consente di esprimere l'operatore delle transizioni come in (3.28), dove si è posto  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ . Ciò implica che l'operatore  $\hat{T}(E2)$  con  $\chi = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$  sia proprio un generatore del gruppo SU(3) e quindi non possa connettere rappresentazioni diverse del medesimo, determinando una regola di selezione per le transizioni, a partire dai numeri quantici di Elliott:

$$\Delta(\lambda, \mu) = (0, 0). \quad (3.70)$$

Di conseguenza le transizioni sono permesse solamente intrabanda. Non sono quindi permesse le transizioni  $gs \rightleftharpoons \beta$  e  $gs \rightleftharpoons \gamma$ , in quanto non vale (3.70), infatti  $|\Delta(\lambda, \mu)| = (4, 2)$ , mentre la transizione  $\beta \rightleftharpoons \gamma$  è permessa in quanto l'unico numero quantico che differenzia le due bande è il numero quantico  $K$ : le bande  $\beta$  e  $\gamma$  appartengono infatti alla stessa rappresentazione irriducibile di SU(3) con numeri di Elliott  $(2N - 4, 2)$ .

Noti gli autostati (3.59) è possibile calcolare gli elementi di matrice delle transizioni elettromagnetiche.

**Transizione  $gs \rightarrow gs$** 

La banda fondamentale è associata agli autostati descritti da:

$$|N, (\lambda = 2N, \mu = 0), K = 0, L, M_L\rangle, \quad (3.71)$$

che partecipano alla transizione:

$$|N, (\lambda = 2N, \mu = 0), K = 0, L, M_L\rangle \rightarrow |N, (\lambda = 2N, \mu = 0), K = 0, L - 2, M_L'\rangle. \quad (3.72)$$

Si possono calcolare gli elementi di matrice, che risultano:

$$B(E2; gs, L \rightarrow L - 2) = \alpha_2^2 \frac{3}{4} \frac{(L + 2)(L + 1)}{(2L + 3)(2L + 5)} (2N - L)(2N + L + 3). \quad (3.73)$$

**Transizioni  $\beta \rightarrow \beta$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma$  e  $\beta \rightleftharpoons \gamma$** 

Le bande  $\beta$  e  $\gamma$  sono associate agli autostati descritti da:

$$\beta: \quad |N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 0, L, M_L\rangle, \quad (3.74a)$$

$$\gamma: \quad |N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 2, L, M_L\rangle, \quad (3.74b)$$

che partecipano alle transizioni:

$\beta \rightarrow \beta$ :

$$|N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 0, L, M_L\rangle \rightarrow |N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 0, L - 2, M_L'\rangle, \quad (3.75a)$$

$\gamma \rightarrow \gamma$ :

$$|N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 2, L, M_L\rangle \rightarrow |N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 2, L - 2, M_L'\rangle, \quad (3.75b)$$

$\beta \rightleftharpoons \gamma$ :

$$|N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 0, L, M_L\rangle \rightleftharpoons |N, (\lambda = 2N - 4, \mu = 2), K = 0, L - 2, M_L'\rangle. \quad (3.75c)$$

Gli elementi di matrice sono gli stessi per ciascuna transizione possibile tra le bande, in quanto queste ultime sono degeneri. Essi si ricavano con la formula:

$$B(E2; \beta, \gamma, L \rightarrow L - 2) = \alpha_2^2 \frac{3}{4} \frac{(L + 2)(L + 1)}{(2L + 3)(2L + 5)} \times \left\{ \left[ 2N + L + \frac{1}{2} \frac{(L + 3)(L + 4)}{2(2N - 2)^2 - (L + 2)(L + 3)} \right]^2 \times \left[ \frac{2(2N - 2)^2 - (L + 2)(L + 3)}{2(2N - 2)^2 - L(L + 1)} \right] \left( \frac{2N - 2 - L}{2N + 1 + L} \right) \right\}. \quad (3.76)$$

### 3.12 Il modello a bosoni- $sdg$

Nell'IBM-1 si considerano solamente bosoni del tipo  $s$  e  $d$ , caratterizzati da momento angolare rispettivamente uguale a 0 o 2. I nucleoni possono però accoppiarsi in modo tale da avere momento angolare maggiore. Si possono introdurre i bosoni- $g$ , caratterizzati da momento angolare 4. Attraverso questi ultimi possiamo estendere il modello studiato a un caso più generale. Seguendo l'articolo [13], si introducono i bosoni- $g$  allo stesso modo dei bosoni- $s$  e  $d$ , cioè attraverso gli operatori di creazione e distruzione  $\widehat{g}_\nu^\dagger, \widehat{g}_\nu$  in cui  $\nu = -4, \dots, 4$ :

$$\left[ \widehat{g}_k, \widehat{g}_l^\dagger \right] = (-1)^k \delta_{-k,l} \widehat{1}. \quad (3.77)$$

Considerando, pertanto, tutti gli operatori bosonici definiti, si hanno: 1 operatore per i bosoni- $s$ , 5 operatori per i bosoni- $d$  e 9 operatori per i bosoni- $g$ . In totale si hanno 15 operatori differenti, il che porta a considerare come simmetria del sistema l'algebra  $U(15)$ . Il modello- $sdg$  è utile perché consente una previsione più accurata degli elementi di matrice relativi alle transizioni elettromagnetiche, come si vedrà nel Capitolo 4.

Studiamo ora i limiti di simmetria caratterizzanti il modello. Per semplicità, si considererà il solo limite  $SU(3)$ , in quanto sarà quello sfruttato per le applicazioni che seguiranno. Nel limite  $SU(3)$  si può scrivere una catena di algebre molto simile alla catena (II):

$$U(15) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \quad (3.78)$$

$$N \quad (\lambda, \mu) \quad K \quad L \quad M_L$$

Le condizioni di esistenza sui coefficienti sono una generalizzazione di quelle presentate in § 3.8, secondo una regola che riporteremo successivamente. Possiamo indicare anche gli autostati, perfettamente analoghi a (3.59):

$$|N, (\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle, \quad (3.79)$$

Per il sottogruppo  $SU(3)$  è possibile introdurre l'operatore di Casimir, già definito in precedenza:

$$\widehat{C}_2^{SU(3)} = \frac{2}{3} \left[ 2\widehat{Q} \cdot \widehat{Q} + \frac{3}{4} \widehat{L} \cdot \widehat{L} \right], \quad (3.42)$$

in cui si hanno le generalizzazioni di  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{L}$ :

$$\widehat{L} = \sqrt{10} [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}]^{(1)} + \sqrt{60} [\widehat{g}^\dagger \otimes \widehat{g}]^{(1)}, \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \widehat{Q} = 4\sqrt{\frac{7}{15}} \left[ [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{s}]^{(2)} + [\widehat{s}^\dagger \otimes \widehat{d}]^{(2)} \right] - 11\sqrt{\frac{2}{27}} [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{d}]^{(2)} + \\ 36\sqrt{\frac{1}{105}} \left[ [\widehat{g}^\dagger \otimes \widehat{d}]^{(2)} + [\widehat{d}^\dagger \otimes \widehat{g}]^{(2)} \right] - 2\sqrt{\frac{33}{7}} [\widehat{g}^\dagger \otimes \widehat{g}]^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Si può dunque scrivere l'hamiltoniano  $SU(3)$ , simile a (3.62):

$$\widehat{H}^{(sdg)} = \alpha' \widehat{L} \cdot \widehat{L} - \alpha 2\widehat{Q} \cdot \widehat{Q}, \quad (3.82)$$

da cui si ricavano gli autovalori energetici:

$$E^{(sdg)}(N, \lambda, \mu, K, L, M_L) = \left( \frac{3}{4}\alpha - \alpha' \right) L(L+1) - \alpha(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu), \quad (3.83)$$

Le previsioni dovute al modello-*sdg* nell'ambito della simmetria  $SU(3)$  si uniformano a quelle del modello-*sd* per stati con momento angolare basso. L'aggiunta di termini di bosone-*g* consente una maggior libertà al sistema e quindi permette di effettuare anche previsioni a momento angolare più alto. Nel modello-*sd* la banda fondamentale è contenuta nella rappresentazione  $(2N, 0)$  di  $SU(3)$  e le bande  $\beta$  e  $\gamma$  nella rappresentazione  $(2N-4, 2)$ , mentre nel modello-*sdg* la banda fondamentale è contenuta nella rappresentazione  $(4N, 0)$  di  $SU(3)$  e le bande  $\beta$  e  $\gamma$  nella  $(4N-4, 2)$ . Limitatamente a queste bande le formule analitiche delle  $B(E2)$  nel modello-*sdg* si ottengono dalle corrispondenti formule del modello-*sd* con la sostituzione  $N \mapsto 2N$ . Per quanto riguarda le transizioni  $B(E2)$  si ha che esse hanno le proprietà già indicate in § 3.11, in particolar modo seguono la regola di selezione (3.70). Con la sostituzione descritta si ha che le formule per il calcolo degli elementi di matrice diventano:

$$B(E2; gs, L \rightarrow L-2) = \alpha_2^2 \frac{3}{4} \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+3)(2L+5)} (4N-L)(4N+L+3), \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} B(E2; \beta, \gamma, L \rightarrow L-2) &= \alpha_2^2 \frac{3}{4} \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+3)(2L+5)} \\ &\times \left\{ \left[ 4N+L + \frac{1}{2} \frac{(L+3)(L+4)}{2(4N-2)^2 - (L+2)(L+3)} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{2(4N-2)^2 - (L+2)(L+3)}{2(4N-2)^2 - L(L+1)} \right] \left( \frac{4N-2-L}{4N+1+L} \right) \right\}. \quad (3.85) \end{aligned}$$



# Capitolo 4

## Calcoli sul modello con il codice IBAR

In questo capitolo si sfrutterà il codice IBAR per analizzare la struttura dei nuclei degli isotopi  ${}^{238}_{92}\text{U}_{146}$ ,  ${}^{236}_{92}\text{U}_{144}$ ,  ${}^{234}_{92}\text{U}_{142}$  nell'ambito del modello IBM-1. L'obiettivo è quello di confrontare i dati dei livelli energetici di ciascuna banda e dei valori di  $B(E2)$  calcolati per ciascun nucleo con i dati sperimentali ottenuti da [14–16], per quanto riguarda i livelli energetici, e [17, 18], per quanto riguarda i valori di  $B(E2)$ . Il calcolo prevede la configurazione del sistema nella simmetria SU(3), e ha l'obiettivo di mostrare le differenze che si ottengono nel momento in cui si viola quest'ultima, aggiungendo termini non tipici di SU(3), spostando il sistema nella direzione di un'altra simmetria del modello.

### 4.1 Implementazione dei dati iniziali

Per una panoramica sull'utilizzo del codice si rimanda all'Appendice A. La programmazione di IBAR prevede l'utilizzo di un hamiltoniano nel formalismo CQF:

$$\hat{H}_{\text{CQF}} = e_0 + \varepsilon \hat{n}_d + a_1 \hat{L} \cdot \hat{L} + \kappa \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x + a_3 \hat{U} \cdot \hat{U} + a_4 \hat{V} \cdot \hat{V}. \quad (3.25)$$

Quest'ultimo si implementa inserendo i coefficienti indicati, i quali sono ricavati dall'articolo [19]\*.

Il numero di bosoni relativi a ciascun nucleo si calcola come spiegato in § 3.3. In Tabella 4.1 sono mostrati i parametri utilizzati per il calcolo. Si nota l'assenza dei parametri  $\varepsilon$ ,  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ , posti tutti uguali a zero: in questo modo si riconduce l'hamiltoniano alla forma (3.62) relativa al limite SU(3), che è appunto quello che andremo ad analizzare. Di conseguenza è necessario imporre  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ , tipico del rotore prolato nel limite SU(3). Si ricorda che il valore  $\chi = +\frac{\sqrt{7}}{2}$  corrisponde al rotore oblatto nello stesso limite SU(3).

---

\*Essendo l'hamiltoniano utilizzato in [19] diverso da quello di IBAR [10], i parametri sono opportunamente modificati operando un confronto tra le due espressioni.

**Tabella 4.1:** Parametri impostati nell'hamiltoniano.

Nucleo	$N$	$\kappa$ (MeV)	$a_1$ (MeV)
$^{238}\text{U}$	15	-0.0116	0.0028
$^{236}\text{U}$	14	-0.0115	0.00295
$^{234}\text{U}$	13	-0.01195	0.00235

## 4.2 Studio del sistema con simmetria SU(3) esatta

Lo studio del sistema prevede l'analisi dei livelli energetici relativi alle bande fondamentale,  $\beta$  e  $\gamma$ , calcolati mediante il codice IBAR e confrontati con i dati sperimentali. Nell'ambito della simmetria SU(3) esatta si ha un accordo molto buono con i dati sperimentali, relativamente agli isotopi  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$ . Per quanto riguarda, invece, l'isotopo  $^{234}\text{U}$ , di cui si riporta il grafico delle bande in Figura 4.1, è possibile notare un buon accordo solo per ciò che riguarda la banda fondamentale e la banda  $\gamma$ , in cui quasi tutti gli stati sono riprodotti fedelmente dal calcolo. L'analisi della banda  $\beta$ , invece, mostra alcune discrepanze con i dati sperimentali. La banda appare spostata verso l'alto e nessuno degli stati è riprodotto. In questo caso è inevitabile apportare delle correzioni allo studio del sistema, supponendo che la simmetria descrittiva dello stesso non sia una simmetria esatta. Si opera dunque una violazione della simmetria, spiegata nel paragrafo che segue.

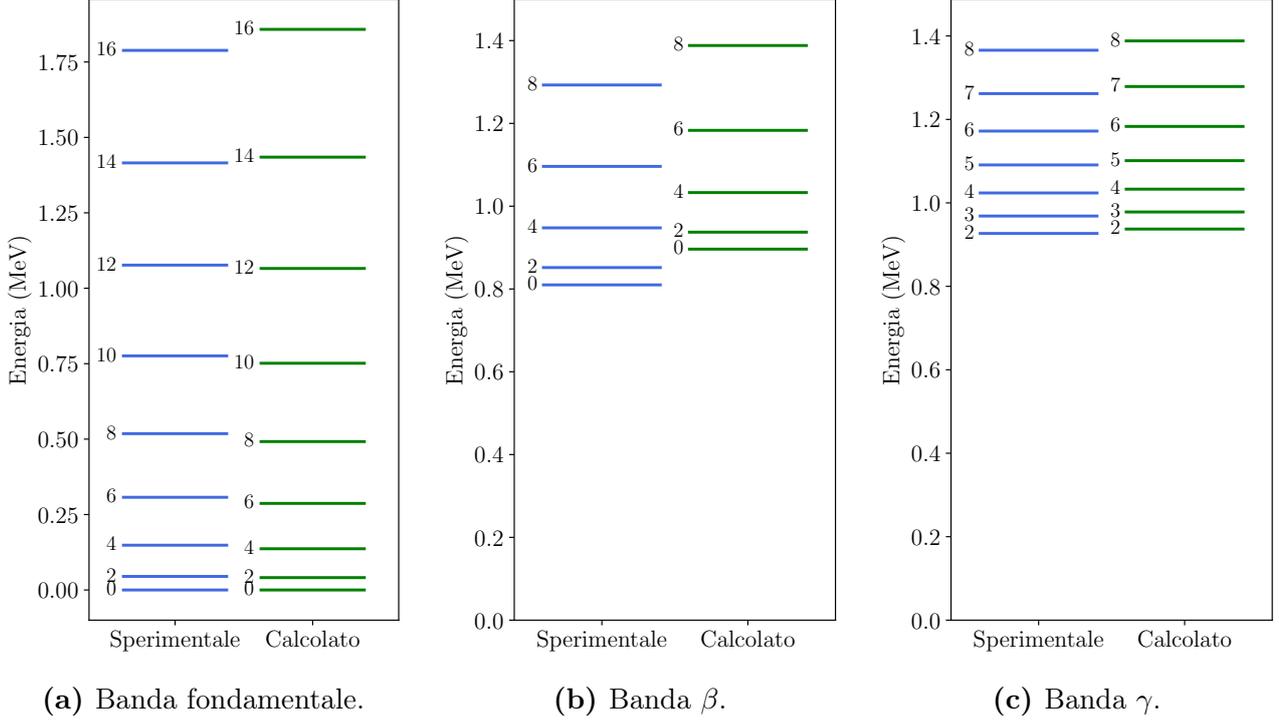
Per quanto riguarda i grafici delle bande degli isotopi  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$ , essi sono mostrati direttamente nella forma di simmetria SU(3) violata, poiché la violazione non apporta nessuna modifica sostanziale alla loro struttura. Un problema comune dell'analisi relativa alla simmetria esatta è la degenerazione delle bande  $\beta$  e  $\gamma$ , fenomeno tipico del limite SU(3), come è spiegato in § 3.8. Ciò è certamente in disaccordo con i dati sperimentali: è quindi comunque necessario effettuare una violazione della simmetria, in modo tale da rimuovere la degenerazione.

## 4.3 Generalità sulla violazione della simmetria

La violazione della simmetria SU(3) si configura come una modifica dei parametri dell'hamiltoniano. Ogni parametro, infatti, codifica un comportamento relativo a un diverso limite di simmetria. Obiettivo dell'operazione di violazione è quello di ottenere un miglior accordo con i dati sperimentali, correggendo la simmetria del sistema grazie all'aggiunta di termini tipici di altre simmetrie.

Dal punto di vista teorico si può dedurre l'azione dell'aggiunta di ciascun parametro, partendo dalla definizione degli hamiltoniani relativi a ciascuna catena, riportati in (3.52), (3.60) e (3.68). È possibile scrivere un hamiltoniano comune, che rappresenta il contributo degli operatori di Casimir comuni a ciascuna catena:

$$\hat{H}_{\text{com}} = e_0 + e_1 \hat{C}_1^{\text{U}(6)} + e_2 \hat{C}_2^{\text{U}(6)} + \gamma \hat{C}_2^{\text{O}(3)}, \quad (4.1)$$



**Figura 4.1:** Livelli energetici relativi all'isotopo  $^{234}\text{U}$ , considerando la simmetria  $\text{SU}(3)$  esatta.

Di conseguenza si riscrivono le espressioni degli hamiltoniani relativi a ciascuna catena in maniera compatta:

$$\hat{H}^{(\text{I})} = \hat{H}_{\text{com}} + \varepsilon \hat{C}_1^{\text{U}(5)} + \alpha \hat{C}_2^{\text{U}(5)} + \beta \hat{C}_2^{\text{O}(5)}, \quad (4.2)$$

$$\hat{H}^{(\text{II})} = \hat{H}_{\text{com}} + \delta \hat{C}_2^{\text{SU}(3)}, \quad (4.3)$$

$$\hat{H}^{(\text{III})} = \hat{H}_{\text{com}} + \beta \hat{C}_2^{\text{O}(5)} + \eta \hat{C}_2^{\text{O}(6)}. \quad (4.4)$$

Le differenze derivanti dalle tre versioni dell'hamiltoniano si riconducono ai soli operatori di Casimir non comuni. È quindi intuitivo capire che la simmetria riferita a un certo sistema si viola se si aggiungono termini non consentiti da quella simmetria. La presenza di questi ultimi dipende dal valore non nullo assunto dai coefficienti degli operatori di Casimir. Per semplicità si riscrivono le espressioni precedenti, esplicitando il valore dei vari operatori secondo le equazioni da (3.38)–(3.45):

$$\hat{H}_{\text{com}} = e_0 + e_1 \hat{N} + e_2 \hat{N}(\hat{N} + 5) + c_1 \hat{L} \cdot \hat{L}, \quad (4.5)$$

$$\hat{H}^{(\text{I})} = \hat{H}_{\text{com}} + \varepsilon \hat{n}_d + \alpha \hat{n}_d(\hat{n}_d + 4) + c_2 \hat{U} \cdot \hat{U}, \quad (4.6)$$

$$\hat{H}^{(\text{II})} = \hat{H}_{\text{com}} + c_3 \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \quad (4.7)$$

$$\hat{H}^{(\text{III})} = \hat{H}_{\text{com}} + 2\eta \hat{N}(\hat{N} + 4) + c_2 \hat{U} \cdot \hat{U} + c_4 \hat{P}^\dagger \cdot \hat{P}, \quad (4.8)$$

in cui  $c_1, c_2, c_3, c_4$  sono costanti date da una combinazione lineare di  $\beta, \gamma, \delta$  e  $\eta$ . In questa forma è facile dedurre in che modo è possibile violare la simmetria dello stato iniziale. In particolare:

- $c_2 \neq 0$ : si aggiunge il contributo del termine di ottupolo  $\widehat{U}$  che sposta il sistema verso le simmetrie  $U(5)$  e  $O(6)$ .
- $c_3 \neq 0$ : si aggiunge il contributo del termine di quadrupolo  $\widehat{Q}$  che sposta il sistema verso la simmetria  $SU(3)$ .
- $c_4 \neq 0$ : si aggiunge il contributo del termine di monopolo  $\widehat{P}$  che sposta il sistema verso la simmetria  $O(6)$ .
- $\varepsilon \neq 0$  o  $\alpha \neq 0$ : si aggiunge il contributo di un termine di bosone- $d$  libero che sposta il sistema verso la simmetria  $U(5)$ .

Un'ultima violazione di simmetria si ottiene variando il parametro  $\chi$ : nel caso in cui  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$  si ha la riproduzione del limite  $SU(3)$ , nel caso in cui  $\chi = 0$  si ha che l'operatore di quadrupolo diventa un generatore di  $O(6)$ , infatti ponendo tale valore di  $\chi$  in (3.24d) si ottiene l'espressione di (3.36c). Pertanto la diminuzione del valore assoluto di  $\chi$  consente di spostare il sistema verso la simmetria  $O(6)$ .

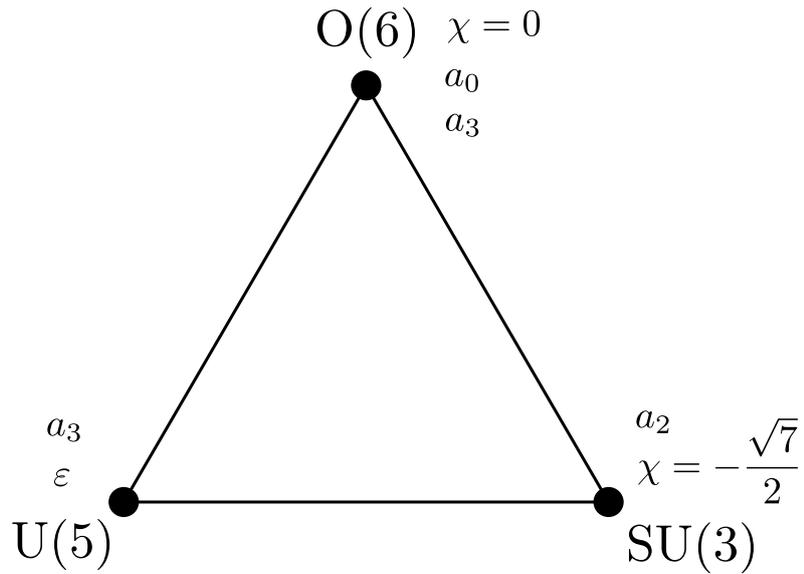
Riferendoci al caso in esame, in cui l'hamiltoniano appare nella forma (3.25) relativamente al formalismo CQF, si possono trarre le medesime conclusioni. Variando le costanti implicate si ottiene una violazione di simmetria in linea con il parametro fisico che si sta aggiungendo, secondo i punti precedenti.

Si possono riassumere le violazioni di simmetria in maniera grafica, attraverso il triangolo di Casten, riportato in Figura 4.2 nella pagina successiva. Come spiegato in § 3.10, si tratta di un triangolo equilatero ai cui vertici sono poste le tre simmetrie nella loro versione non violata. In Figura 4.2 si riporta una versione semplificata di Figura 3.1 (Casten e Warner [20]), in cui si sono indicati i parametri caratteristici di ciascuna simmetria, tratti dall'hamiltoniano in forma multipolare (3.23). Quando si cambia un parametro ci si pone in una condizione intermedia tra le simmetrie, spostandosi da uno dei vertici in cui ci si trova inizialmente a uno dei punti del triangolo in base a quanto è importante la violazione effettuata. Di conseguenza è possibile che le violazioni di simmetria contribuiscano a cambiare la forma del nucleo.

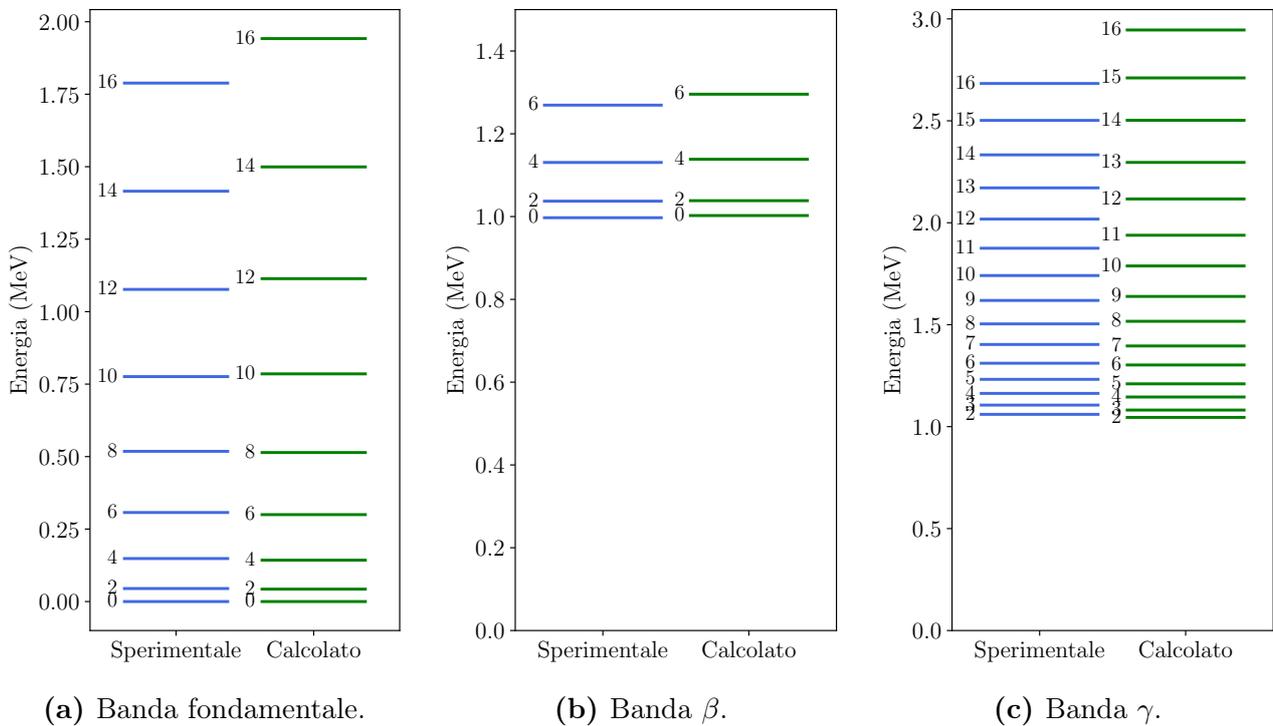
## 4.4 Studio del sistema con simmetria $SU(3)$ violata

In riferimento a § 4.2 si è concluso che la violazione di simmetria è una soluzione inevitabile per uno studio adeguato del sistema. Per quanto riguarda gli isotopi  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$  si è optato per una violazione del solo parametro  $\chi$ , diminuendolo in valore assoluto, perturbando la simmetria  $SU(3)$  nella direzione della simmetria  $O(6)$ . I grafici relativi alle tre bande sono riportati in Figura 4.3 e 4.4. Si nota che per gli stati di momento angolare basso l'accordo è molto buono e le bande  $\beta$  e  $\gamma$  non sono più degeneri. In generale il modello IBM-1 è valido per stati a momento angolare non elevati, il motivo è spiegato in § 4.5.

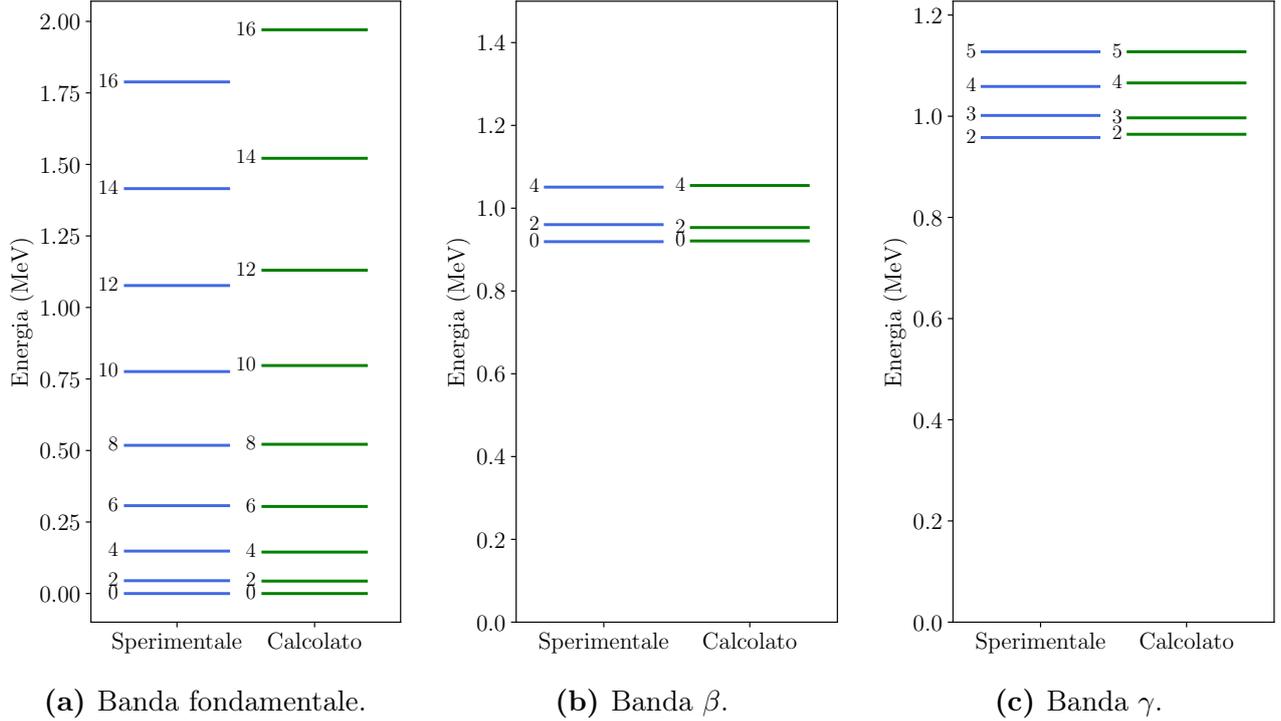
Per quanto riguarda l'isotopo  $^{234}\text{U}$ , la violazione operata agendo sul solo parametro  $\chi$  non è sufficiente a migliorare l'accordo con i dati sperimentali. Si opera una violazione anche sul parametro  $\varepsilon$ , aggiungendo un termine di bosone libero, che perturba il sistema nella direzione della simmetria  $U(5)$ . Si ottengono i risultati in



**Figura 4.2:** Il triangolo di Casten per una visualizzazione grafica delle violazioni di simmetria: ai vertici sono indicati i 3 limiti di simmetria principali, unitamente ai valori assunti dai parametri dell'hamiltoniano in quelle condizioni. Questi ultimi sono tratti dall'hamiltoniano completo in forma multipolare (3.23).



**Figura 4.3:** Livelli energetici relativi all'isotopo  $^{238}\text{U}$ , considerando la violazione della simmetria SU(3), operata agendo sul parametro  $\chi = -1.303$ .



**Figura 4.4:** Livelli energetici relativi all'isotopo  $^{236}\text{U}$ , considerando la violazione della simmetria  $\text{SU}(3)$ , operata agendo sul parametro  $\chi = -1.288$ .

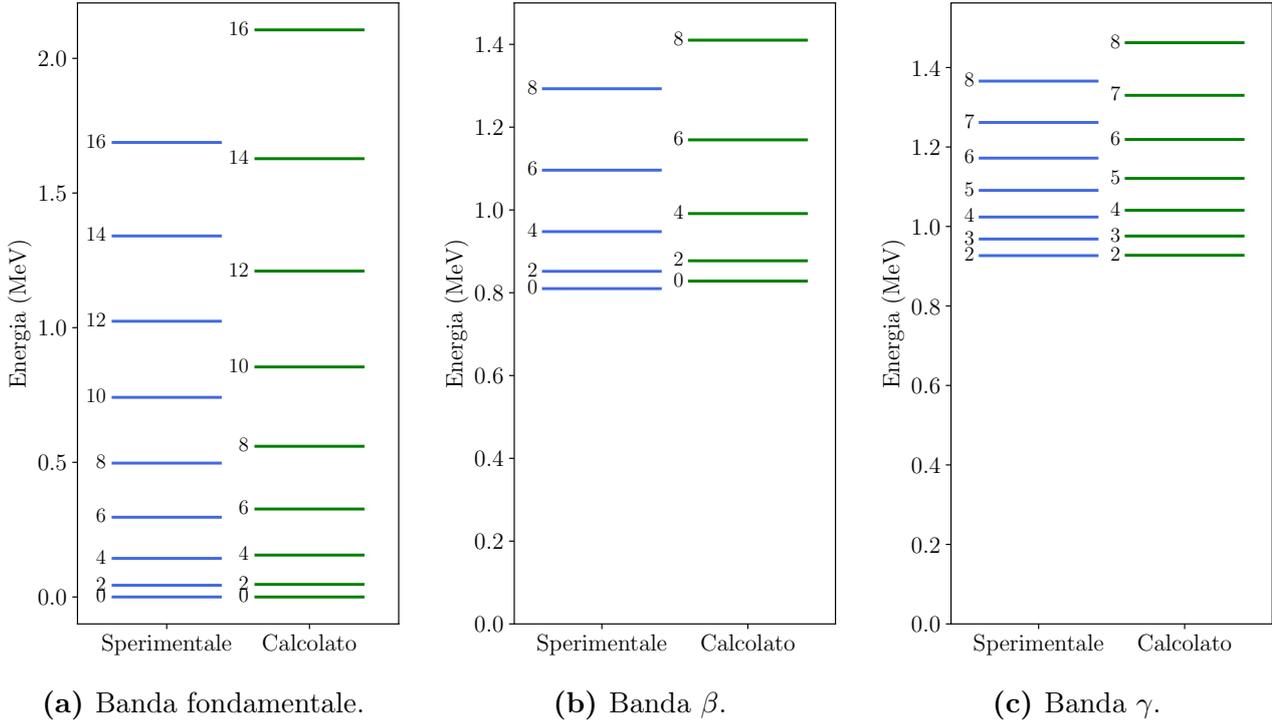
Figura 4.5, in cui si nota che la base della banda  $\beta$  è riprodotta decisamente meglio, ma si perde l'accordo sperimentale con le energie relative agli stati di momento angolare alto per le bande fondamentale e  $\gamma$ .

## 4.5 Valutazione dei valori di $B(E2)$

Di seguito si analizzano i valori di  $B(E2)$  per gli isotopi di  $^{238}\text{U}$  e  $^{236}\text{U}$  per tre casi diversi. Si considera in primo luogo la simmetria  $\text{SU}(3)$  esatta, poi si procede a valutare la sua violazione, come è avvenuto nel paragrafo precedente, e infine si valuta il sistema attraverso il modello-*sdg*. Per implementare tale modello, è necessario adattare i parametri di IBAR. Il primo cambiamento consiste nella sostituzione di  $N$ , il numero di bosoni impiegati, con  $2N$ , come spiegato in § 3.12. Successivamente si impongono i parametri indicati in Tabella 4.2. Nel modello-*sdg* si descrive il sistema con simmetria  $\text{SU}(3)$  esatta, pertanto  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

Inoltre è necessario determinare il valore di carica efficace  $\alpha_2$  da cui dipende l'operatore di quadrupolo, implementabile in IBAR come spiegato in Appendice B. I valori di carica efficace impiegati sono riportati in Tabella 4.3.

In Figura 4.6 e 4.7 sono rappresentati, per via grafica, i valori sperimentali di  $B(E2)$ , confrontati con quelli calcolati dal codice IBAR. I dati delle simmetrie  $\text{SU}(3)$  e  $\text{SU}(3)$  violata sono rappresentati tramite la stessa curva, poiché la scala utilizzata nei grafici non ha una risoluzione sufficiente a mostrare la differenza tra i loro valori. Si osserva che, in generale, in entrambi i casi il calcolo eseguito da IBAR sottostima i



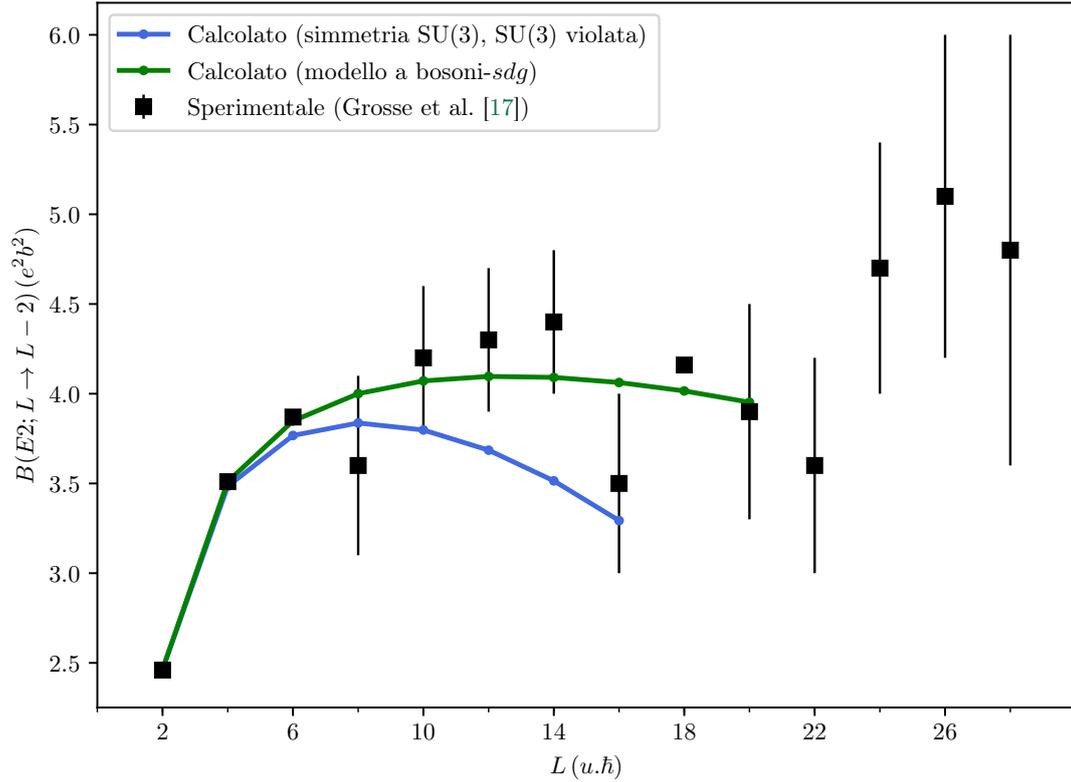
**Figura 4.5:** Livelli energetici relativi all'isotopo  $^{234}\text{U}$ , considerando la violazione della simmetria  $\text{SU}(3)$ , operata agendo sui parametri  $\chi = -1.250$  e  $\varepsilon = 0.120$  MeV.

**Tabella 4.2:** Parametri impostati nell'hamiltoniano per il modello-*sdg*.

Nucleo	$N$	$\kappa$ (MeV)	$a_1$ (MeV)
$^{238}\text{U}$	30	-0.0056	0.0056
$^{236}\text{U}$	28	-0.005	0.005

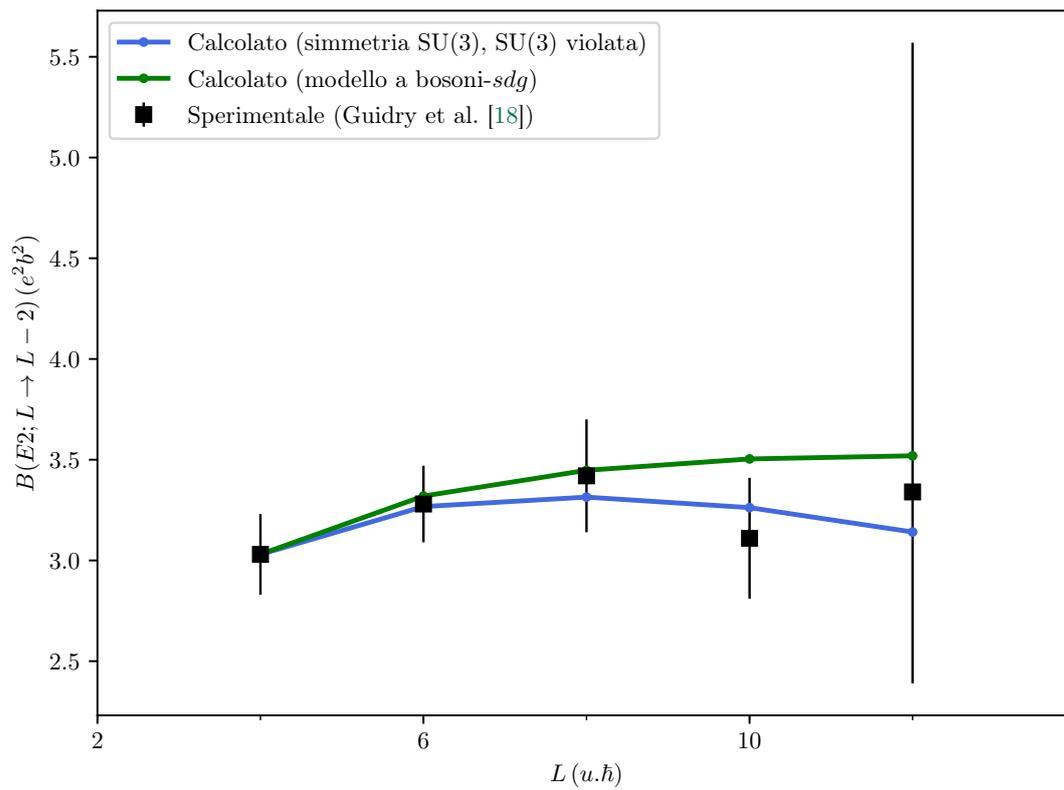
**Tabella 4.3:** I valori, espressi in e b, del parametro di carica efficace  $\alpha_2$  per i vari casi studiati.

Nucleo	Simmetria $\text{SU}(3)$ esatta	Simmetria $\text{SU}(3)$ violata	Modello- <i>sdg</i>
$^{238}\text{U}$	0.158	0.158	0.081
$^{236}\text{U}$	0.157	0.159	0.080



**Figura 4.6:** Grafico riportante i dati di  $B(E2; L \rightarrow L-2)$ , sperimentali e calcolati, nei tre diversi casi analizzati, per l'isotopo  $^{238}\text{U}$ .

valori sperimentali per transizioni tra stati di momento angolare elevato. Si osserva, inoltre, che, per quanto riguarda la Figura 4.6, il modello a bosoni-*sdg* interpola più punti sperimentali rispetto al modello classico, indice di una più completa descrizione delle caratteristiche del sistema in esame. Per quanto riguarda invece la Figura 4.7, con la piccola quantità di dati disponibili, si può affermare che l'accordo è buono, sia per quanto riguarda il caso normale con i bosoni-*sd*, sia il caso con i bosoni-*sdg*. La Figura 4.6 mostra inoltre un fenomeno interessante: per valori di momento angolare alti, i valori di  $B(E2)$  crescono enormemente e il modello IBM-1 non è più sufficiente a descrivere il sistema. In quei casi è necessario fare riferimento alla struttura microscopica del bosone descritto dall'IBM-1, configurato come una coppia di fermioni. Tale coppia può dividersi dando luogo al fenomeno di *rottura delle coppie* che genera l'effetto di cui sopra e che è ovviamente esente dalla descrizione dell'IBM-1 [21].



**Figura 4.7:** Grafico riportante i dati di  $B(E2; L \rightarrow L-2)$ , sperimentali e calcolati, nei tre diversi casi analizzati, per l'isotopo  $^{236}\text{U}$ .



# Conclusioni

Il modello a bosoni interagenti consente una descrizione unificata degli spettri collettivi di nuclei pari-pari sferici, transizionali e deformati mediante un semplice hamiltoniano in cui coppie interagenti di fermioni legati a momento angolare  $L = 0$  e  $L = 2$  sono approssimate con bosoni- $s$  e  $d$ . Il modello si presenta come un'estensione dell'oscillatore a 6 gradi di libertà, con simmetria unitaria  $U(6)$ . Il numero totale di bosoni del modello è conservato perché corrisponde al numero di coppie di nucleoni negli strati (*shell*) di valenza. La classificazione degli stati collettivi nucleari sfrutta le proprietà delle sottoalgebre  $U(5)$ ,  $SU(3)$  e  $O(6)$ , corrispondenti rispettivamente agli spettri dell'oscillatore anarmonico, del rotore a simmetria assiale e del rotore instabile rispetto alle deformazioni  $\gamma$ . Il presente studio è stato focalizzato sulle tre bande di più bassa energia di isotopi pari-pari dell'Uranio. I valori dei livelli energetici delle tre bande, per ogni isotopo, sono riprodotti abbastanza fedelmente nel caso di simmetria  $SU(3)$ , unitamente ai valori di  $B(E2)$ . Modificando adeguatamente i parametri dell'hamiltoniano si è resa possibile un'analisi più approfondita, facente parte di quelle che si chiamano violazioni di simmetria. Attraverso di esse è stato possibile fissare parametri ulteriori con cui migliorare l'accordo con i dati sperimentali, collocando il sistema in una simmetria intermedia rispetto alle tre citate.

Il modello, però, costituisce comunque un'approssimazione del comportamento dei nucleoni all'interno del nucleo. Per come è formulato, l'IBM-1 è una versione semplice in grado di schematizzare le interazioni tra i nucleoni di nuclei pari-pari come interazioni tra soli due tipi di bosoni:  $s$  e  $d$ . Le estensioni del modello sono più complete e possono applicarsi a casi diversi, con la conseguenza che l'impianto algebrico si complica notevolmente. Un'estensione particolarmente importante per i nuclei deformati è fornita dal modello a bosoni- $sdg$ , di cui si è già parlato precedentemente. In particolare esso assume l'esistenza del bosone- $g$  di momento angolare 4, che interagisce con entrambi i bosoni  $s$  e  $d$ . L'aggiunta di tale grado di libertà consente di descrivere stati di momento angolare più alto di quelli del modello- $sd$ , in cui le bande sono troncate a  $L_{\max} = 2N$  per costruzione. Una seconda estensione del modello si basa sulla seguente caratteristica dell'IBM-1: i bosoni del modello possono essere di due tipi: di tipo protone o di tipo neutrone, in base a quali particelle si accoppiano. La distinzione di tali coppie non è prevista nella prima versione del modello, mentre è assunta nella seconda versione (IBM-2), per la quale si distinguono i due tipi di bosone. Le estensioni più generali del modello prevedono la considerazione di fermioni liberi, il che consente la trattazione dei nuclei dispari-pari o dispari-dispari. Esistono due versioni relative a quest'ultima estensione, che prendono il nome di Modello a Bosoni-Fermioni Interagenti 1 e 2.

Concludendo, il grande pregio del modello a bosoni interagenti, e di quelli da esso derivati, è la capacità di descrivere in modo semplice spettri collettivi complessi in molte regioni della tavola periodica; il difetto maggiore è probabilmente la sua struttura fenomenologica, che utilizza parametri non calcolati con metodi microscopici, ma aggiustati sui risultati sperimentali, il che pone un severo limite alle sue possibilità di predizione per nuclei per cui non esistono dati.

# Appendice A

## Utilizzo del codice IBAR

Il codice IBAR è un programma in C++ scritto e pubblicato da Casperson nel 2012 [10]. Il suo scopo è quello di simulare il comportamento di un sistema formato da  $N$  bosoni che interagiscono nell'ambito del modello IBM-1, secondo l'hamiltoniano-CQF:

$$\hat{H}_{\text{CQF}} = e_0 + \varepsilon \hat{n}_d + a_1 \hat{L} \cdot \hat{L} + \kappa \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x + a_3 \hat{U} \cdot \hat{U} + a_4 \hat{V} \cdot \hat{V}. \quad (3.25)$$

I parametri con cui quest'ultimo è descritto sono impostabili dall'utente, tramite un file testuale di input. Il funzionamento di IBAR prevede la deduzione dei livelli energetici nucleari, nonché lo studio delle transizioni  $E0$  (che non si sono trattate) e  $E2$ , di cui si è ampiamente parlato nel Capitolo 3, deducendone gli elementi di matrice. Il suo funzionamento prevede che, per ogni valore del momento angolare del nucleo, costruisca gli elementi di matrice ridotta dell'hamiltoniano ed effettui una diagonalizzazione numerica, ricavando autostati e autovettori.

Un esempio di file di input per IBAR è riportato a pagina 53. Di seguito si analizzano una alla volta le sezioni in cui è suddiviso:

**### Settings for Hamiltonian ###:** In questa sezione si impostano i parametri dell'hamiltoniano, tutti in unità di misura MeV, escluso il parametro  $\chi$  che è un numero puro.

**### General calculation setting ###:** In questa fase è possibile impostare i parametri relativi al calcolo che eseguirà il programma. La stringa `boson` permette di specificare il numero di bosoni da inserire, la variabile `vector` rappresenta il numero massimo di autostati e autofunzioni che si vogliono calcolare per ciascun momento angolare. La stringa `range L` indica l'intervallo di valori del momento angolare (in unità  $\hbar$ ) che saranno analizzati da IBAR. Le successive stringhe non sono importanti ai fini del calcolo, in quanto regolano parametri riguardanti l'output testuale.

**### Transition commands ###:** Tali comandi consentono di impostare quali transizioni deve analizzare il programma. Quest'ultimo può valutare le transizioni del tipo  $E0$  e  $E2$ . La stringa generica `set e2 (i1) (i2) (i3) (i4)` permette di calcolare la transizione  $E2$  dallo stato di momento angolare iniziale  $L_i = (i1)$  con indice (i3) allo stato di momento angolare finale  $L_f = (i2)$  con indice (i4). Sostituendo la dicitura `e2` con `e0` si possono calcolare le transizioni  $E0$ .

**### Settings for transitions ###**: In questa sezione è possibile modificare il valore della carica efficace associata all'operatore di transizione (3.28) e detta  $\alpha_2$ . È sufficiente inserire il suo valore dopo la stringa `e2 scale` in unità di misura `e b`. La stringa `e0 scale` consente di eseguire la stessa operazione per quanto riguarda l'operatore di transizione relativo alle transizioni  $E0$ .

L'output del programma consiste in diversi file, ciascuno relativo a un diverso calcolo. Supponendo che il file di input si chiami `file` si avranno i seguenti output:

`file.i`: File contenente i livelli energetici espressi in MeV, suddivisi in base al valore del momento angolare e dell'indice relativo alla banda.

`file.ie2`: File contenente i valori di  $B(E2)$  in  $e^2b^2$  in base alle transizioni indicate nel file di input.

`file.ie0`: File contenente i valori di  $B(E0)$  in base alle transizioni indicate nel file di input.

`file.iin`: File che contiene una copia del file di input utilizzato per l'esecuzione del programma.

**Codice A.1:** Un esempio di input testuale per il codice IBAR.

```
### Input file notes ###
# cqf chi is -1.32287565553230 for SU(3)
# cqf kappa should be negative

5 ### Settings for Hamiltonian ###

  cqf chi -1.303
  cqf kappa -0.0116
  cqf a1 0.0028
10 cqf e0 0.
  cqf epsilon 0.
  cqf a3 0.
  cqf a4 0.

15 ### General calculation setting ###

  boson 15
  vector 3
  range L 0 16
20 precise false
  verbose true
  vecsave false
  shifted true
  wavechop 5e-9

25 ### Transition commands ###

  set e2 2 1 0 1
  set e2 4 1 2 1
30 set e2 6 1 4 1
  set e2 8 1 6 1
  set e2 10 1 8 1
  set e2 12 1 10 1
  set e2 14 1 12 1
35 set e2 16 1 14 1

  ### Settings for transitions ###

  e2 scale 0.158542
40 e0 scale 1.0
```



# Appendice B

## Alcune note sui valori di $B(E2)$

L'elemento di matrice relativo alle transizioni elettromagnetiche è stato definito in § 3.5, come segue:

$$B(E2; L_i \rightarrow L_f) = \frac{1}{2L_i + 1} \left| \langle L_f || \hat{T}(E2) || L_i \rangle \right|^2, \quad (3.27)$$

in cui  $L_i$  e  $L_f$  sono rispettivamente i momenti angolari iniziale e finale, relativi ai due stati che partecipano alla transizione. Allo stesso modo si esprime la transizione complementare, cioè quella che va da  $L_f$  a  $L_i$ . È possibile inoltre ricavare una relazione che le lega, dovuta all'invarianza dell'elemento di matrice ridotta per scambio di bra e ket:

$$B(E2; L_f \rightarrow L_i) = \frac{2L_i + 1}{2L_f + 1} B(E2; L_i \rightarrow L_f). \quad (B.1)$$

Si è scelto di esprimere le transizioni secondo la forma di diseccitazione, passando da uno stato con momento angolare maggiore, a uno con momento angolare minore. Esse avranno la forma:

$$B(E2; L \rightarrow L - 2). \quad (B.2)$$

Per quanto riguarda le unità di misura, per l'elemento di matrice ridotta si hanno due unità di misura principali: e b ( $[e] \times [\text{Barn}]$ ) e e fm<sup>2</sup> ( $[e] \times [\text{Fermi}]^2$ ), relazionate da:

$$1 \text{ e b} = 100 \text{ e fm}^2. \quad (B.3)$$

Si è scelto di esprimere i risultati in eb, che è l'unità di misura utilizzata in [10]. I valori sperimentali ottenuti dal riferimento [17] appaiono nella forma di elementi di matrice ridotta. Sarà quindi necessario calcolare i valori di  $B(E2)$  secondo (3.27) e convertirli opportunamente in modo tale che rappresentino una transizione del tipo (B.2) secondo l'adeguata unità di misura. Questa operazione implica che anche gli errori sperimentali associati siano propagati, secondo le usuali regole di propagazione. In questo caso, posto  $\delta B$  l'errore relativo a  $B(E2)$  e  $\delta M$  l'errore relativo all'elemento di matrice ridotta, si ha:

$$\delta B = 2 \frac{B}{M} \delta M. \quad (B.4)$$

Per quanto riguarda, invece, i valori sperimentali ottenuti dal riferimento [18], essi sono già nella forma scelta e nella corretta unità di misura. Non richiedono, quindi, modifiche.

Un'ultima precisazione riguarda l'operatore di quadrupolo  $\widehat{Q}$ , utilizzato dal codice IBAR per il calcolo delle transizioni; nel formalismo  $Q$ -consistente sussiste una diretta proporzionalità tra quest'ultimo e l'operatore delle transizioni  $\widehat{T}(E2)$ , espressa in (3.28), caratterizzata da una costante  $\alpha_2$ . Il suo valore non è noto a priori e si stabilisce imponendo la condizione che uno degli elementi di matrice calcolato sia esattamente uguale al valore sperimentale. Normalmente si tratta della transizione  $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$  (o della transizione inversa) tra il primo stato con  $J^\pi = 2^+$  e quello fondamentale. Perciò si procede eseguendo i calcoli con il codice, imponendo un valore a tentativi. Nel caso in esame, si deve avere:

$$\begin{aligned} B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) &= \frac{2 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 2 + 1} B(E2; 0 \rightarrow 2) = \frac{1}{5} (351 \text{ e fm}^2)^2 \\ &= 2.46 \text{ e}^2\text{b}^2 \quad \text{per } ^{238}\text{U, in Grosse et al. [17],} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+) = 3.03 \text{ e}^2\text{b}^2 \quad \text{per } ^{236}\text{U, in Guidry et al. [18],} \quad (\text{B.6})$$

$$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) = 2.44 \text{ e}^2\text{b}^2 \quad \text{per } ^{234}\text{U, in Browne e Tuli [14].} \quad (\text{B.7})$$

Per imporre il valore di  $\alpha_2$  nel programma, è necessario agire come indicato in Appendice A.

# Bibliografia

- [1] R. Zucchini. «Quantum Mechanics: Lecture Notes». 2017.
- [2] P. Van Isacker e A. Frank. *Algebraic methods in molecular and nuclear structure physics*. Wiley-Interscience publication, 1994.
- [3] H. Feshbach e F. Iachello. «The interacting boson model structure of  $^{16}\text{O}$ ». *Physics Letters B* 45 (1973), pp. 7–11.
- [4] F. Iachello e A. Arima. «Boson symmetries in vibrational nuclei». *Physics Letters B* 53 (1974), pp. 309–312.
- [5] D. Janssen, R. V. Jolos e F. Dönau. «An algebraic treatment of the nuclear quadrupole degree of freedom». *Nuclear Physics A* 224 (1974), pp. 93–115.
- [6] A. Arima e F. Iachello. «Collective Nuclear States as Representations of a SU(6) Group». *Physical Review Letters* 35 (1975), pp. 1069–1072.
- [7] A. Arima et al. «Collective nuclear states as symmetric couplings of proton and neutron excitations». *Physics Letters B* 66 (1977), pp. 205–208.
- [8] F. Iachello e A. Arima. *The interacting boson model*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1987.
- [9] W. Pfeifer. «An Introduction to the Interacting Boson Model of the Atomic Nucleus». 1998.
- [10] R. J. Casperson. «IBAR: Interacting boson model calculations for large system sizes». *Computer Physics Communications* 183 (2012), pp. 1029–1035.
- [11] W. Greiner e J. A. Maruhn. *Nuclear Models*. Springer, 1995.
- [12] R. F. Casten e E. A. McCutchan. «Quantum phase transitions and structural evolution in nuclei». *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 34 (2007), pp. 285–320.
- [13] H. C. Wu. «Bosons with large angular momentum and rotation of even-even nuclei». *Physics Letters B* 110 (1982), pp. 1–6.
- [14] E. Browne e J. K. Tuli. «Nuclear Data Sheets for  $A = 234$ ». *Nuclear Data Sheets* 108 (2007), pp. 681–772.
- [15] E. Browne e J. K. Tuli. «Nuclear Data Sheets for  $A = 236$ ». *Nuclear Data Sheets* 107 (2006), pp. 2649–2714.
- [16] E. Browne e J. K. Tuli. «Nuclear Data Sheets for  $A = 238$ ». *Nuclear Data Sheets* 127 (2015), pp. 191–332.

- [17] E. Grosse et al. «Collective Rotation of  $^{238}\text{U}$  at High Spins». *Physica Scripta* 24 (1981), pp. 337–348.
- [18] M. W. Guidry et al. «Recoil distance lifetimes of rotational states in  $^{236}\text{U}$ ». *Physical Review C* 12 (1975), pp. 1937–1944.
- [19] G. Maino et al. «Uranium Isotopes and the Interacting-Boson Model». *Lettere al nuovo cimento* 32 (1981), pp. 235–240.
- [20] R. F. Casten e D. D. Warner. «The interacting boson approximation». *Reviews of Modern Physics* 60 (1988), pp. 389–469.
- [21] K. Allart et al. «The broken pair model for nuclei and its recent applications». *Physics Reports* 169 (1988), pp. 209–292.