

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI
NELLA
FILLOTASSI**

Tesi di Laurea in
BIOMATEMATICA

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Carla Vettori

Presentata da:
Resta Laura

Seconda Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Introduzione

La successione di Fibonacci nasce da un semplice quesito sulla riproduzione dei conigli che si può considerare il primo problema relativo alla dinamica di una popolazione trattato matematicamente. Il problema, che é presentato nel primo capitolo, dá il numero dei conigli mese dopo mese, nella forma della successione di numeri: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, . . . , che oggi chiamiamo numeri di Fibonacci.

Ma cosa rende cosí speciale questa successione? É facile capire che può continuare fino all'infinito, perché comincia con due 1 e continua con termini che sono ogni volta la somma dei due precedenti. Niente di emozionante, ma come vedremo, non esistono in tutta la matematica altri numeri cosí onnipresenti quanto i numeri di Fibonacci: compaiono in geometria, algebra, teoria dei numeri e molti altri campi della matematica.

Cosa ancor piú spettacolare é che compaiono anche in natura! Per esempio, il numero delle spirali brattee su una pigna é un numero di Fibonacci e, analogamente, il numero delle spirali brattee su un'ananas é ancora un numero di Fibonacci. La presenza in natura di questi numeri sembra senza limiti: si ritrovano in rapporto alla disposizione dei rami in varie specie di alberi o alla disposizione dei petali di alcuni fiori e persino nella conchiglia del nautilus.

Questa ricorrenza, e in particolare lo studio delle regolaritá geometriche e numeriche nelle piante, é nota con il nome di *fillotassi*. Gli aspetti matematici delle piante sono causa di grande interesse da molto tempo, ma solo verso la metá dell'ottocento la fillotassi ebbe una forte spinta in avanti dovuta alla scoperta della regolaritá piú importante nell'accrescimento vegetale: un par-

ticolare angolo che é universale nella geometria di qualsiasi pianta: l'angolo aureo.

Tuttavia le impostazioni di studio di questi fenomeni erano solo puramente descrittive, non spiegavano in che modo i numeri di Fibonacci fossero connessi all'accrescimento delle piante, ma si limitavano a indicare la geometria delle disposizioni.

Capire come mai alcune disposizione, in natura, sono piú comuni di altri, é ancora un problema aperto della botanica. Una spiegazione che si avvicinó molto alla comprensione della causa di questi fenomeni fu data da Helmut Vogel nel 1979: osservando i semi del capolino di un girasole trovó che l'angolo aureo risulta essere l'unico angolo in corrispondenza del quale i semi si impacchettano senza lasciare vuoti e forma capolini solidi e robusti.

Ma i biologi sono sospettosi nei confronti di tali spiegazioni, perché un impaccamento efficiente aiuta a produrre una pianta solida e robusta, ma ciò non garantisce che esista un meccanismo per produrlo.

Solo nel 1992 due matematici francesi, Couder e Douady, scoprirono un tale meccanismo. Essi ricondussero la numerologia di Fibonacci a costrizioni dinamiche naturali sullo sviluppo delle piante, dimostrarono, cioè, che le regolaritá matematiche osservabili derivano da leggi universali del modo fisico. A rafforzare la loro dimostrazione ci pensó Martin Kunz¹ qualche anno piú tardi, dando una dimostrazione matematica completa degli aspetti dinamici della loro idea.

In questa tesi mi propongo di descrivere un modello matematico che riproduce la fillotassi del girasole partendo da dati biologici che segue l'intuizione avuta da Couder e Douady. Vedremo da cosa dipende la struttura geometrica del fiore e cercheremo di capire fino a che punto questo modello puó spiegare la comparsa dei numeri di Fibonacci nel capolino di un girasole. Per prima cosa però, presenteró la successione di Fibonacci dandone la defi-

¹Martin Kunz, *Some Analytical Result About Two Physical Models of Phyllotaxis*, in *Communications in Mathematical Physics*, 169 (1995), pp. 261-295.

nizione e dimostrando le principali proprietà di cui godono i numeri di questa successione.

Strettamente collegata ai numeri della successione di Fibonacci è la nozione di sezione aurea, o numero aureo, punto di connessione con la fillotassi, che sarà caratterizzata anche da un punto di vista geometrico.



Figura 1: Un girasole di Fibonacci (foto di Yves Couder)

Capitolo 1

I NUMERI DI FIBONACCI

Leonardo Pisano, detto Fibonacci, fu autore di molti testi matematici ma il piú noto e importante é il *Liber Abaci*¹, un testo ampio e pieno di problemi basato sulle conoscenze di aritmetica e algebra che Fibonacci aveva accumulato. Questo libro é di grande interesse non solo perché é stato il primo pubblicato in occidente a usare le cifre arabe al posto di quelle romane, ma perché nel capitolo 12 compare un problema che introduce i numeri di Fibonacci:

Un uomo ha una coppia di conigli in un luogo chiuso e si vuole sapere quante ne saranno alla fine di un anno, sapendo che é nella loro natura generare un'altra coppia in un mese e che dopo due mesi anche i nuovi conigli possono generare.

Se supponiamo che nessun coniglio muoia e che la prima coppia generi nel primo mese, allora il numero di coppie di conigli al mese n é uguale al doppio del numero delle coppie di conigli giá presenti nel mese $n - 2$ piú il numero di coppie non ancora fertili nate nel mese $n - 1$. Il problema genera dunque la successione di numeri: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377

Da un punto di vista biomatematico, questo problema si risolve seguendo

¹Il libro fu pubblicato nel 1202 e il titolo significa 'libro del calcolo' .

un modello discreto di dinamica ad una popolazione.

Si indica con

$$x(t) = x_t = x_n$$

il numero di conigli al tempo t , dove $t \in \mathbb{N}$ é una variabile discreta. Lo scopo é trovare il numero x_n dopo n generazioni e vedere il comportamento asintotico della soluzione partendo dalle condizioni iniziali

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 1$$

L'equazione risolvente

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \tag{1.1}$$

non é altro che la definizione ricorsiva della successione dei numeri di Fibonacci. Piú in generale é una equazione differenziale lineare che puó essere risolta cercando la soluzione nella forma

$$x_n \propto \lambda^n \quad \text{cioé} \quad x_n = \alpha \lambda^n$$

con $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \lambda > 0$.

Sostituendo quindi $\alpha \lambda^n$ nell'equazione (1.1) ottengo

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \tag{1.2}$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

La soluzione generale é quindi combinazione lineare di $\bar{x}_1 = \lambda_1^n$ e $\bar{x}_2 = \lambda_2^n$, cioé

$$x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

con $A = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ e $B = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ costanti, determinate imponendo le condizioni iniziali.

Analizzando il comportamento asintotico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

ho che, essendo $|\lambda_2| < 1$, la soluzione

$$x_n \simeq A\lambda_1^n \simeq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\lambda_1^n$$

Ora, se si vuole calcolare il tasso di crescita relativo della popolazione, basta considerare il rapporto fra due valori consecutivi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

dove con ϕ indico il rapporto aureo che piú avanti scopriremo avere un ruolo fondamentale nella fillofassi.

La successione di Fibonacci é la piú antica fra le successioni ricorsive note, ma questi numeri non furono identificati come qualcosa di speciale fino alla metà dell'ottocento, quando presero il nome con cui li conosciamo oggi grazie a François-Édouard-Anatole Lucas (1842-1891) matematico francese che creó una propria successione² seguendo lo schema impostato da Fibonacci. Già Keplero osservó che il rapporto tra due numeri consecutivi della successione tende alla sezione aurea, ma é a partire dal 1830 che si ha una grande crescita dell'interesse verso questa successione. Si notó infatti, che i numeri comparivano come numeri delle spirali delle brattee su una pigna e si osservarono una gran varietà di altri casi dove si poteva trovare questa successione; nella stessa epoca un matematico francese, Jacques-Philippe-Marie Binet (1786-1856) sviluppó una formula per trovare un qualsiasi numero di Fibonacci data la sua posizione nella successione, e tutt'ora questi numeri affascinano i matematici di tutto il mondo.

²La successione di Lucas é una sequenza che inizia con la coppia di numeri 1 e 3, anziché con una coppia di 1, e tutti gli altri numeri vengono definiti con la medesima regola di addizione della successione di Fibonacci.

1.1 Proprietá dei numeri di Fibonacci

I numeri di Fibonacci godono di molte proprietá speciali, la maggior parte delle quali tutt'altro che evidenti. Dopo aver definito la nozione di successione di Fibonacci, cito alcune proprietá fra le piú espressive seguite da relativa dimostrazione.

Definizione 1.1. Consideriamo una generica successione $\{u_n\}$ tale che per ogni $n > 2$ valga

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (1.3)$$

L'equazione (1.3) é un esempio di *formula ricorsiva* o *equazione alle differenze*. Ogni successione che verifica la condizione viene considerata una soluzione. Se fissiamo i primi due termini della successione, la soluzione viene univocamente determinata, in particolare fissando $u_1 = 1$ e $u_2 = 1$ si ottiene la successione di Fibonacci e i suoi termini sono i numeri di Fibonacci. Posso perció riscrivere la (1.3) come

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad (1.4)$$

dove F_n é l'*n-esimo* termine della successione.

I primi 10 termini della successione sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

Proposizione 1.1. *Dalla definizione (1.4), si ha per la somma dei primi n numeri di indice rispettivamente pari e dispari*

$$\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \quad \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n} \quad (1.5)$$

Dimostrazione. Dimostro la prima delle (1.5) e la riscrivo come

$$F_{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n F_{2k} \quad (1.6)$$

Dalla definizione (1.4) si ha che

$$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1}, \quad F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}, \quad F_{2n-1} = F_{2n-2} + F_{2n-3}, \dots,$$

$$F_{2i+1} = F_{2i} + F_{2i-1}, \dots, F_3 = F_2 + F_1, \quad F_1 = 1$$

Sommando membro a membro e semplificando si ottiene la (1.6).

La dimostrazione della seconda delle (1.5) é analoga.

□

Proposizione 1.2. *Sia (1.4). Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ vale*

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Fisso m e procedo per induzione su n .

Per $n = 1$ la relazione diventa $F_{m+1} = F_mF_2 + F_{m-1}F_1 = F_m + F_{m-1}$ che é vera.

Si suppone quindi che la formula valga per ogni $0 \leq m < n$ cioé che valgano le seguenti relazioni:

$$F_{n-1+m} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \qquad F_{n-2+m} = F_mF_{n-1} + F_{m-1}F_{n-2}$$

e si dimostra per n .

Sommando membro a membro le due uguaglianze precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} F_{n-1+m} + F_{n-2+m} &= F_{n+m} = F_m[F_n + F_{n-1}] + F_{m-1}[F_{n-1} + F_{n-2}] \\ &= F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \end{aligned}$$

e quindi

$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$$

□

Proposizione 1.3. *La somma dei quadrati dei numeri di Fibonacci é uguale al prodotto dell'ultimo numero considerato e di quello che lo segue:*

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_nF_{n+1} \quad (1.8)$$

Dimostrazione. Procedo per induzione. Per $n = 1$ l'uguaglianza é verificata infatti

$$F_1^2 = F_1 F_2 = 1^2 = 1 \cdot 1$$

Ora assumiamo vero l'enunciato per $n = k$ cioè assumiamo che valga

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1} \text{ e verificiamo per } n = k + 1$$

$$(F_1^2 + \dots + F_k^2) + F_{k+1}^2 = F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} F_{k+2}$$

allora vale

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = F_{n+1} F_{n+2}$$

che é esattamente l'enunciato per $n = k + 1$.

□

Proposizione 1.4. *La somma dei quadrati di due numeri di Fibonacci consecutivi é uguale al numero di Fibonacci il cui indice é la somma degli indici dei due numeri di partenza:*

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Considero la (1.7) pongo $n = n$ e $m = n + 1$ e sostituisco, allora

$$F_{n+n+1} = F_{2n+1} = F_{n+1-1} F_n + F_{n+1} F_{n+1} = F_n F_n + F_{n+1} F_{n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

□

Proposizione 1.5. *Il prodotto di due numeri di Fibonacci separati da una posizione é pari al quadrato del numero di Fibonacci che si trova in mezzo ad essi diminuito o aumentato di un'unitá:*

$$F_{n-1} F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Dimostro (1.10) per $n \geq 1$ procedendo sempre per induzione. Per $n = 1$ vale

$$F_0 F_2 = F_1^2 + (-1)^1 = 0 \cdot 1 = 1^2 - 1 = 0$$

Suppongo vera l'uguaglianza per $n = k$ e $k \geq 1$ cioè

$$F_{k-1}F_{k+1} = F_k^2 + (-1)^k$$

e verifico per $n = k + 1$ che

$$F_k F_{k+2} = F_k^2 + (-1)^{k+1}$$

infatti

$$\begin{aligned} F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}^2 = F_k F_{k+1} + F_k^2 - F_{k+1}^2 \\ &= F_k^2 + F_{k+1}(F_k - F_{k+1}) = F_k^2 - F_{k+1}(-F_{k-1}) = F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} \\ &= (-1)(F_{k+1}F_{k-1} + F_k^2) = (-1)(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Pertanto $F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ ovvero

$$F_k F_{k+2} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$$

□

Quest'ultima proprietá permette di realizzare un apparente paradosso geometrico. Il problema é stato posto da Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), matematico inglese piú noto con lo pseudonimo di Lewis Carrol, nella seguente forma: prendiamo un quadrato di lato $8 = F_6$ (o piú in generale di lato F_n) e suddividiamolo in due triangoli rettangoli e in due trapezi rettangoli come indicato in figura (1.1).

I due triangoli rettangoli hanno cateti di lunghezza 8 e $3 = F_4$ (di lunghezza F_n e F_{n-2}) mentre i due trapezi rettangoli hanno altezza $5 = F_5$ (cioé F_{n-1}) e basi di lunghezza 3 e 5 . Sistemiamo ora i triangoli e i trapezi, accostandoli senza sovrapporli, in modo da ottenere un rettangolo di lato minore 5 e lato maggiore 13 . L'area di ciascun triangolo e trapezio non é cambiata, per cui il quadrato e il rettangolo dovrebbero avere la stessa area, invece vale $8^2 = 64$ (F_n^2) per il quadrato e $13 \cdot 5 = 65$ ($F_{n-1}F_{n+1}$) per il rettangolo!

La soluzione del paradosso consiste nel fatto che il trapezio e il triangolo rettangolo non sono disposti lungo la diagonale del rettangolo.

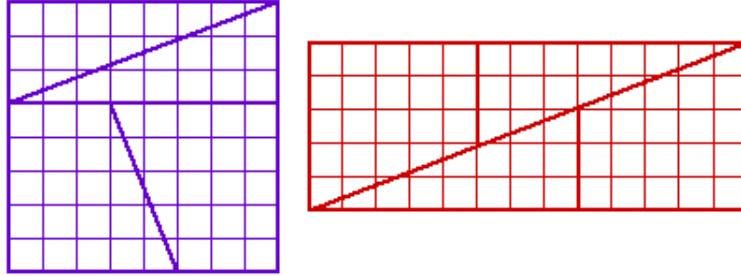


Figura 1.1: Il paradosso di Fibonacci

In realtà fra i due triangoli rettangoli che formano il rettangolo c' è uno spazio vuoto che è proprio l'unità mancante nell'area del quadrato. Più in generale, partendo da un quadrato di lato F_n , la tangente dell'angolo del triangolo in alto a destra è $\frac{F_{n-2}}{F_n}$ mentre quella della diagonale del rettangolo è $\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ e la differenza risulta essere

$$\begin{aligned} \frac{F_{n-2}}{F_n} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} &= \frac{F_{n-2}(F_n + F_{n-1}) - (F_{n-1} + F_{n-2})F_{n-1}}{F_n F_{n+1}} \\ &= \frac{F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2}{F_n F_{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{F_n F_{n+1}} \end{aligned}$$

che è quindi sempre più trascurabile al crescere di n .

Proposizione 1.6. *Due numeri di Fibonacci consecutivi sono primi fra loro, cioè*

$$\text{MCD}(F_{n+1}, F_n) = 1 \quad (1.11)$$

Dimostrazione. Naturalmente $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ sono primi fra loro. Ora supponiamo, per assurdo, che F_n e F_{n+1} siano primi fra loro e che F_{n+1} e F_{n+2} abbiano un fattore comune diverso da 1, e questo fattore sia b , cioè sia $F_{n+1} = ab$ e $F_{n+2} = bc$ con $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Poiché $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$, anche F_n avrebbe il fattore b , infatti sarebbe

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1} = ab - bc = b(a - c)$$

allora F_n e F_{n+1} avrebbero entrambi il fattore b in comune.

Questo contraddice l'ipotesi assurdo che F_n e F_{n+1} siano primi fra loro, perciò F_{n+1} e F_{n+2} non possono avere fattori diversi da 1 e quindi sono anch'essi primi fra loro.

□

Per la dimostrazione della precedente proprietá dei numeri di Fibonacci utilizzo l'algoritmo euclideo delle divisioni successive.

Questo algoritmo parte da una semplice osservazione:

$$\text{se } d|n \text{ e } d|m \Rightarrow d|(n - m)$$

infatti se $d|n$, esiste un intero n_0 tale che $n = dn_0$ e, analogamente, se $d|m$ esiste un intero m_0 tale che $m = dm_0$. Facendo la sottrazione fra n e m risulta:

$$n - m = dn_0 - dm_0 = d(n_0 - m_0)$$

e quindi $d|(n - m)$.

L'algoritmo euclideo delle divisioni successive per il calcolo del MCD é un procedimento molto veloce, il caso piú lento si ha quando i quozienti ottenuti con le divisioni successive dell'algoritmo, sono tutti uguali ad 1. Ció accade per le coppie di numeri consecutivi della serie di Fibonacci.

Queste sono solo alcune delle particolari proprietá dei numeri di Fibonacci e nonostante le loro origini stiano in un problema molto semplice sulla proliferazione dei conigli, hanno applicazioni che vanno ben oltre.

Capitolo 2

LA SEZIONE AUREA

Fino ad ora abbiamo visto i numeri di Fibonacci come successione anziché come numeri singoli. La fillofassi, però, non è guidata direttamente dalla successione, ma dalla relazione fra i membri consecutivi della successione, attraverso i loro quozienti. Come accennato in precedenza, il quoziente fra due numeri di Fibonacci consecutivi tende a un particolare numero:

$$\begin{aligned}\frac{F_2}{F_1} &= \frac{1}{1} = 1 \\ \frac{F_3}{F_2} &= \frac{2}{1} = 2 \\ \frac{F_4}{F_3} &= \frac{3}{2} = 1,5 \\ \frac{F_5}{F_4} &= \frac{5}{3} = 1,\bar{6} \\ \frac{F_6}{F_5} &= \frac{8}{5} = 1,6 \\ &\dots \\ \frac{F_9}{F_8} &= \frac{34}{21} = 1,\overline{619047} \\ \frac{F_{10}}{F_9} &= \frac{55}{34} = 1,\overline{61764705882352941}\end{aligned}$$

Quando i numeri di Fibonacci diventano sempre più grandi, il rapporto tende

a un numero specifico, il cosiddetto *rapporto aureo* che per convenzione si indica con la lettera greca ϕ . La scelta di questa lettera é probabilmente in onore del famoso scultore greco Fidia che ha fatto di questo numero una caratteristica fissa delle proprie opere. Qualcuno lega, erroneamente, ϕ al nome di Fibonacci parlando di numeri di ϕ -bonacci.

Abbiamo quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \approx 1.6180339887498948482045868343656$$

La sezione aurea ϕ é un numero irrazionale non periodico con moltissime proprietà. In particolare ϕ é l'unico numero non naturale il cui reciproco e il cui quadrato mantengono inalterata la propria parte decimale. ¹

$$\phi = 1,618033989$$

$$\phi^2 = 2,618033989$$

$$\frac{1}{\phi} = 0,618033989$$

Una caratteristica molto speciale che possiamo osservare é che

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \frac{F_n}{F_{n+1}} + 1 \text{ cioè } \phi = \frac{1}{\phi} + 1 \quad (2.1)$$

ció é possibile calcolare il valore del reciproco di ϕ in base al valore stesso di ϕ e questo é l'unico numero per vale una simile relazione.

Ora possiamo cercare una soluzione dell'equazione (2.1) e trovare cosí un nuovo collegamento con i numero di Fibonacci. Moltiplico per ϕ l'equazione ottenendo quindi

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \quad (2.2)$$

Applicando la formula per la risoluzione delle equazioni di secondo grado ottengo

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (2.3)$$

¹Esistono altri numeri i cui reciproci mantengono la stessa parte decimale, ma nessun altro lo fa anche elevato al quadrato.

Per verificare quanto detto sopra, possiamo calcolare $\frac{1}{\phi}$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618033989$$

che conferma quindi la congettura sulla reciprocità.

L'equazione (2.2) ci permette inoltre di poter analizzare le potenze di ϕ in termini di ϕ stesso. Sappiamo già che

$$\phi^2 = \phi + 1$$

e possiamo usare questa per scomporre le successive potenze

$$\phi^3 = \phi\phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi^2\phi^2 = (\phi + 1)(\phi + 1) = \phi^2 + 2\phi + 1 = \phi + 1 + 2\phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi^3\phi^2 = (2\phi + 1)(\phi + 1) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 2\phi + 2 + 3\phi + 1 = 5\phi + 3$$

e così via...

Inizia così a vedersi uno schema: ogni potenza di ϕ è uguale a un multiplo di ϕ aumentato di una costante, in particolare si nota che i coefficienti di ϕ e le costanti sono ancora numeri di Fibonacci. Vale perciò

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1} \quad (2.4)$$

La successione di Fibonacci è comparsa ancora una volta.

Ma ciò che ci interessa fare vedere è un altro risultato per cui risulta utile introdurre la nozione di frazione continua.

Definizione 2.1. Una frazione continua è un'espressione del tipo:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

dove a_0 è un numero intero e i successivi a_1, a_2, \dots, a_n sono interi positivi.

In particolare tratterò frazioni continue semplici, ovvero quelle che a numeratore hanno esclusivamente il numero 1.

Proposizione 2.1. ϕ può essere ottenuto come limite di frazioni:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (2.5)$$

Inoltre, la possibilità di scrivere la sezione aurea in questo modo ci conferma che ϕ è il numero irrazionale peggio approssimabile dai razionali.

Dimostrazione. Sia $x > 0$ un numero irrazionale, positivo qualsiasi. Dato un numero naturale q , vogliamo trovare un numero naturale p tale che $\frac{p}{q}$ disti da x il meno possibile. Siccome i numeri razionali con denominatore q dividono la retta reale in segmenti di lunghezza $\frac{1}{q}$, esiste un unico numero tale che si abbia

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q}$$

e diremo che $\frac{p}{q}$ è la migliore approssimazione razionale di x .

Descrivo ora un algoritmo che mi permette di ricavare migliori approssimazioni razionali di x . Dato $x > 0$ indichiamo con $a_1 = [x]$ la parte intera di x e con $x_1 = x - [x] \in [0, 1[$ la parte frazionaria di x in modo da avere $x = a_1 + x_1$. Se x non è un numero intero, poniamo $a_2 = [\frac{1}{x_1}] \geq 1$ e $x_2 = \frac{1}{x_1} - a_2 \in [0, 1[$ e procediamo per induzione. In questo modo possiamo scrivere x nella forma seguente:

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + x_n}}}$$

Se x è razionale, prima o poi si ottiene $x_n = 0$ e l'algoritmo ha termine, mentre se x è irrazionale, l'algoritmo non si arresta mai e otteniamo l'espansione di x in frazione continua:

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}} \text{ che abbrevio scrivendo } x = [a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Se tronco l'espansione in frazione continua di x al livello n ottengo una migliore approssimazione razionale di x , infatti posto

$$\frac{p_n}{q_n} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

si ha che

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{1}{2q_n}$$

per cui la frazione $\frac{p_n}{q_n}$ é la migliore approssimazione razionale di x .

Ora ci chiediamo però quale sia il numero x peggio approssimabile dai razionali, cioè per quale x la successione $\{x - \frac{p_n}{q_n}\}$ tende a zero piú lentamente. Siccome si ha che

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| x - \frac{p_s}{q_s} \right| < \frac{1}{q_s^2} \quad (2.6)$$

il numero x che cerco é quello per cui la successione $\{q_n\}$ va all'infinito molto lentamente. Se prendiamo $x = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ si ha che i denominatori q_n soddisfano le condizioni

$$q_1 = 1 \quad q_2 = a_2 \quad \text{e} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

per ogni $n \geq 2$. Ricordando la definizione ricorsiva dei numeri di Fibonacci, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, otteniamo $q_n \geq F_n$.

In particolare, per $n \rightarrow \infty$, $q_n \rightarrow +\infty$, quindi il numero x , per cui $\{q_n\}$ cresce piú lentamente, é quello per cui $q_n = F_n$, che si ha se e soltanto se $a_1 = 1$.

Allora posso scrivere

$$x = [1, 1, 1, 1, \dots]$$

e $[1, 1, 1, \dots]$ é lo sviluppo in frazione continua di ϕ .

Il numero x che cercavo é proprio il rapporto aureo ϕ . □

In questo modo abbiamo dimostrato che il rapporto aureo é il numero irrazionale peggio approssimabile dai razionali, e che la migliore approssimazione di ϕ , é data dai quozienti di due numeri di Fibonacci consecutivi $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

2.1 La spirale logaritmica

Si può dare una caratterizzazione geometrica della sezione aurea. Considero il segmento AB di lunghezza unitaria e lo divido in due parti AC e CB, in modo che la parte maggiore sia media proporzionale fra la parte minore e l'intero segmento



Figura 2.1: Segmento aureo

Indicando con x la lunghezza del segmento maggiore (AC), si ha

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \rightarrow x^2 = 1-x$$

Ricordando la (2.2), si nota facilmente che una radice positiva dell'equazione è $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \phi - 1$ e in corrispondenza si ha

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \quad (2.7)$$

Per secoli, artisti e architetti hanno identificato col nome di *rettangolo aureo* il rettangolo in cui la base b e l'altezza h seguono questa proporzione, cioè $\frac{b}{h} = \frac{h}{b+h}$, pensando che fosse il rettangolo dalla forma perfetta. Si è dimostrato più tardi nei secoli, che effettivamente il rettangolo aureo è quello più piacevole alla vista.

Uno dei modi più semplici per costruire un rettangolo aureo è iniziare con un quadrato ABEF con M punto medio di \overline{AF} . Poi, con centro in M e raggio \overline{ME} traccio un'arco di circonferenza che interseca in D il prolungamento di \overline{AF} . La perpendicolare in D intersecherà il prolungamento di \overline{BE} in C e quindi il rettangolo ABCD è un rettangolo aureo. (Figura 2.2).

Per verificarlo poniamo che ABEF sia un quadrato unitario, perciò $EF=AF=1$ e $MF = \frac{1}{2}$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo MFE, otteniamo

$ME = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e quindi $AD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Faccio il rapporto fra base e altezza e vedo che obbedisce alla relazione $\frac{b}{h} = \frac{h}{b+h}$, cioè $\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{CD+AD}$; sostituendo le misure ottengo

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

che é proprio un'uguaglianza.

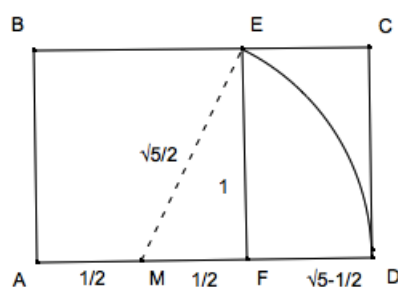


Figura 2.2: Costruzione di un rettangolo aureo.

Ora supponiamo che $AF = 1$ e $AD = \phi$, allora $FD = \phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ e quindi il rettangolo CDFE ha dimensioni $FD = \frac{1}{\phi}$ e $CD = 1$. Se esaminiamo il rapporto fra base e altezza abbiamo:

$$\frac{EF}{FD} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} = \phi$$

e si tratta quindi di un rettangolo aureo interno al rettangolo aureo ADCB. Possiamo continuare costruendo un quadrato interno al rettangolo appena formato; ciò conferma il fatto che il rettangolo ECDF sia un rettangolo aureo. Continuando il procedimento otteniamo una serie di rettangoli aurei costruiti uno all'interno dell'altro. (Figura 2.3)

Se disegno i seguenti quarti di cerchio:

centro E, raggio EB

centro G, raggio GF

centro K, raggio KH

centro M, raggio MJ

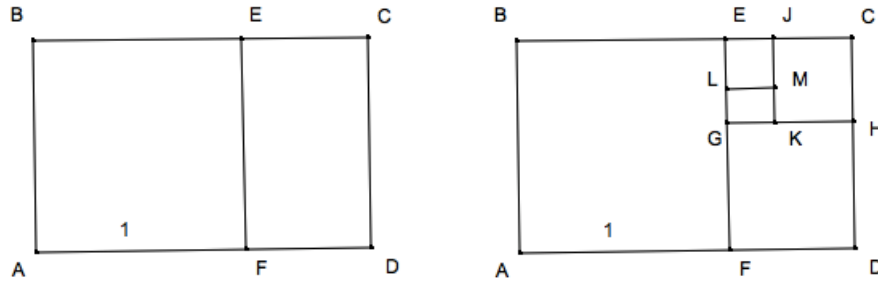


Figura 2.3: rettangoli aurei costruiti uno dentro l'altro

il risultato é l'approssimazione di una spirale logaritmica.

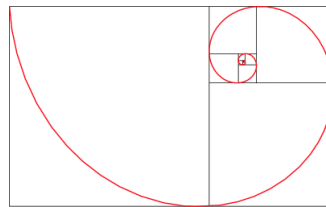


Figura 2.4: spirale logaritmica

Notiamo che le diagonali dei due rettangoli di partenza, sono perpendicolari e si intersecano in un punto P che chiaramente é il punto limite della spirale, come si vede dalla figura (2.5).

Partendo da un punto qualsiasi sulla spirale, si deve girare attorno al centro infinite volte prima di raggiungere il punto P; tuttavia, la distanza totale coperta da questo percorso é finita ed il suo valore é pari a $\frac{r}{\cos \alpha}$, dove r é la lunghezza del segmento che congiunge il punto di partenza a P.

Analiticamente, usando le coordinate polari (r, α) , la spirale logaritmica é definita da

$$\frac{dr}{d\alpha} = br \quad \text{ossia} \quad r = de^{b\alpha} \quad \text{con } b \text{ costante}$$

e in forma parametrica é definita come

$$x(\alpha) = ae^{b\alpha} \cos \alpha$$

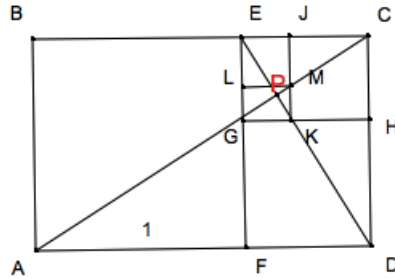


Figura 2.5: P punto limite della spirale

$$y(\alpha) = ae^{b\alpha} \sin \alpha$$

dove r é il raggio, α é l'angolo fra il raggio e il vettore tangenziale che é costante e a e b sono numeri reali.

Se $\alpha = 0$ la spirale degenera in una retta, mentre se $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ degenera in una circonferenza. Inoltre nella spirale logaritmica le distanze fra i bracci aumentano secondo una progressione geometrica.

Questa é anche chiamata *spira mirabilis*, in quanto gode di diverse proprietà, in particolare le spirali logaritmiche sono autosimili nel senso che sono congruenti a sé stesse sotto trasformazioni di similitudine (scalandole si ottiene lo stesso risultato che ruotandole), e é congruente alla sua involuta e evoluta.

La vera spirale aurea, o logaritmica, non nasce da questi quarti di circonferenza, ma interseca i lati dei quadrati ad angoli molto piccoli, mentre la spirale della figura (2.4), chiamata spirale apparente, li tocca solamente.

La spirale aurea, come i numeri di Fibonacci, si ritrova spesso nel mondo vegetale e animale.

L'esempio piú celebre é la conchiglia del nautilus: guardando la sezione di questa conchiglia é facile riconoscere la spirale.

La stessa forma é osservabile nel guscio delle chiacchiere, ma non solo: i falchi si avvicinano alla loro preda secondo una spirale logaritmica, i bracci delle galassie e dei cicloni tropicali sono spirali logaritmiche e si puó notare anche



Figura 2.6: sezione di un nautilus.

nella disposizione delle foglie di alcune piante cioè nella fillotassi.

Capitolo 3

LA FILLOTASSI

La *fillotassi*¹ é il modo caratteristico e costante per ogni specie vegetale, secondo cui le foglie si inseriscono sui rami, o secondo cui si dispongono i semi in alcuni fiori. Piú schematicamente la fillotassi studia la disposizione delle foglie, dei rami, dei fiori o dei semi nelle piante con lo scopo principale di evidenziare l'esistenza di patterns regolari. Le varie disposizioni degli elementi naturali seguono regolarit  matematiche sorprendenti: D'arcy Thompson² osserv  che il regno vegetale ha una curiosa preferenza per particolari numeri e per certe geometrie spirali, e che tali numeri e geometrie sono strettamente connessi.

I particolari numeri che ricorrono in modo sorprendente nel mondo vegetale, sono i numeri della successione di Fibonacci e possiamo facilmente ritrovarli nel numero di spirali formate dai semi di girasole o margherita, o formate dalle bratee di una pigna. Questo tipo di disposizione, chiamata fillotassi di Fibonacci, come conseguenza della stretta relazione con i numeri di Fibonacci, o fillotassi spirale, fu studiata a mat  del Settecento da due matematici, C. Bonnet e G.L. Calandrini, ma un importante passo avanti si ebbe intorno al 1837 grazie a Auguste e Louis Bravais, quando scoprirono la

¹La parola fillotassi deriva dal greco *phýllon*, foglia e *táksis*, disposizione.

²D'arcy Thompson (1860 - 1948) biologo e matematico scozzese, fu uno dei pionieri della biomatematica é l'autore del libro *On Growth and Form* e di altri testi riguardanti temi di biomatematica.

singola regolarit  pi  importante nell'accrescimento di una pianta. Essi osservarono che ciascun elemento botanico, sviluppandosi uno per uno, diverge di un angolo d rispetto al precedente. Nella maggior parte dei casi l'angolo di divergenza d approssima l'*angolo aureo* cio  i 137,5 gradi.

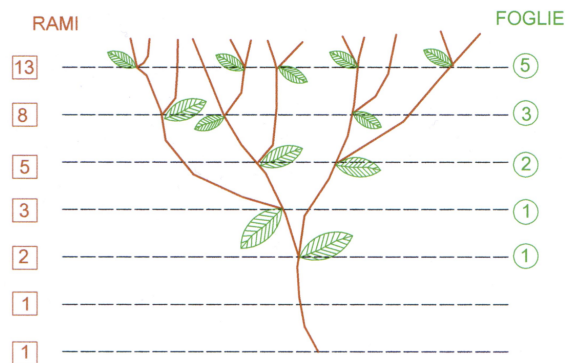


Figura 3.1: Proiezione sul piano della ramificazione della *Ptarmica*

Ad esempio nel caso della disposizione dei rami, se si proiettano le ramificazioni di diverse piante o alberi su un piano si vede che l'angolo fra due rami successivi   costante e vicino all'angolo aureo. Inoltre per quanto riguarda l'emissione di nuovi rami, alcune piante seguono una regola precisa. Ogni nuovo ramo prima di germogliare, richiede un periodo di tempo fisso che dipende dal tipo di pianta. Successivamente tale ramo germoglia a intervalli di tempo pi  brevi. Prendendo come unit  di tempo il mese, il numero dei rami evolve seguendo la successione di Fibonacci (Figura 3.1).

Per apprezzare il significato dell'angolo aureo, consideriamo due numeri consecutivi della successione di Fibonacci, ad esempio $F_9 = 34$ e $F_{10} = 55$, facendo il rapporto e moltiplicando per 360 otteniamo 222,5 gradi.

$$\frac{34}{55} \cdot 360 \approx 222,5$$

Ora, poich  l'angolo 222,5   maggiore di 180, dovremmo sottrarlo a 360: otteniamo cos  137,5 gradi, cio  l'angolo aureo.

La fillotassi non appare solo come regolarità nell'accrescimento delle piante, ma riguarda anche la disposizione delle foglie sul fusto. La si può osservare prendendo una pianta che non sia stata potata e cominciando dalla foglia più in basso, si risale lungo il fusto, contando il numero di rotazioni attorno ad esso, fino a che non si raggiunge la foglia la cui direzione è la stessa della foglia di partenza. Il numero di rotazioni sarà un numero di Fibonacci, e anche il numero di foglie trovate sul cammino fino a raggiungere la foglia finale, apparterrà alla successione di Fibonacci. (Figura 3.2).

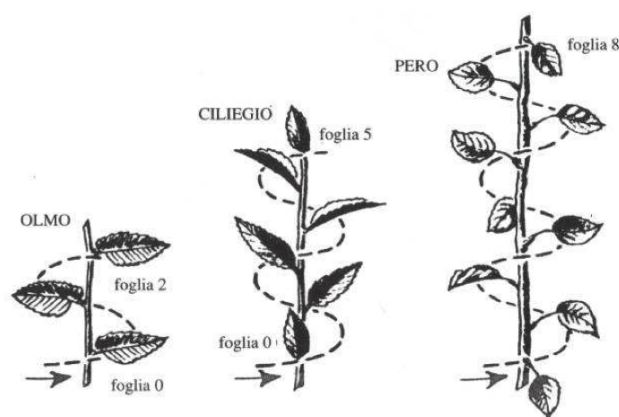


Figura 3.2: Disposizione delle foglie sul fusto

Tuttavia la fillotassi a numeri di Fibonacci non è presente in tutte le piante, esistono eccezioni a queste regolarità, ma la maggior parte implicano o il raddoppiamento dei numeri di Fibonacci, o la successione di Lucas 1, 3, 4, 7, 11, . . . che presenta lo stesso meccanismo di addizione ma comincia con numeri diversi.

Le osservazioni esposte sopra, sono di tipo puramente descrittive, come erano i primi studi sulla fillotassi, perciò uno dei problemi aperti è proprio stabilire quali sono i meccanismi che regolano questo fenomeno e come mai alcune disposizioni sono, in natura, più comuni di altre. Si può ipotizzare che tale organizzazione sia correlata alla massimizzazione dello spazio oppure alla quantità media di luce incidente per ogni singola foglia.

L'idea piú costruttiva é venuta da una recente pubblicazione di due fisico-matematici francesi, Stéphan Douady Yves Couder ³, i quali hanno sviluppato una teoria della dinamica di crescita delle piante attraverso modelli al calcolatore ed esperimenti in laboratorio, in riferimento proprio alla successione di Fibonacci. L'idea rivoluzionaria di questa teoria sta nel considerare il processo di crescita della pianta come processo meccanico e *non* genetico. Essi ottennero l'angolo aureo come conseguenza di una dinamica ragionevole e non postulandolo.

Douady e Couder suppongono che i primordi generati dall'apice meristematico⁴ appaiano a uguali intervalli di tempo seguendo una traiettoria circolare attorno al fusto. Loro considerano, inoltre, che questi primordi si respingano l'un l'altro man mano che ne nascono dei nuovi, cosí da massimizzare la distanza fra essi. In questo modo i primordi si organizzano in un modello spaziale regolare altamente efficiente. Secondo Couder e Douady un esperimento, sotto queste ipotesi, avrebbe dovuto dare una distribuzione di elementi tale che l'angolo tra tra essi fosse l'angolo di Fibonacci. Presero quindi, un recipiente circolare, lo riempirono con un materiale sintetico resistente agli attacchi chimici e ai cambi di temperatura (olio di siliconi), e lo inserirono in un campo magnetico verticale. Poi, a intervalli regolari, fecero cadere gocce di un fluido ad alta suscettibilitá magnetica al centro del disco in un piccolo cono troncato, che simulava l'apice della pianta. Le gocce venivano polarizzate dal campo magnetico, e, a causa di questa polarizzazione, formavano un piccolo dipolo magnetico che portava le gocce a respingersi; rendendo il campo magnetico piú intenso al bordo del recipiente si diede, alle gocce, un impulso nella direzione radiale. A causa dell'interazione delle prime gocce con quelle cadute successivamente, le ultime gocce cadevano dal cono nella direzione di minima energia. L'intervallo di tempo che distanziava

³Stéphan Douady, Yves Couder, Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process Physical Review Letters 68, no.13 (1992) pp. 2098-101.

⁴L'apice meristemato, o meristema apicale, é la parte terminale del fusto che mediante divisioni genera cellule indeterminate che in seguito si specializzeranno in foglie, gemme, brattee, semi o altro.

la caduta delle gocce di fluido magnetico provocava la generazione di spirali il cui numero era un numero della successione di Fibonacci e l'angolo che si formava fra le gocce quando raggiungevano il perimetro, quasi sempre, era proprio l'angolo di Fibonacci. In particolare, nel modello meccanico di Douady e Couder la divergenza fra le gocce oscilla assestandosi vicino alla sezione aurea dell'angolo giro.

3.1 Il modello matematico dell'accrescimento del girasole

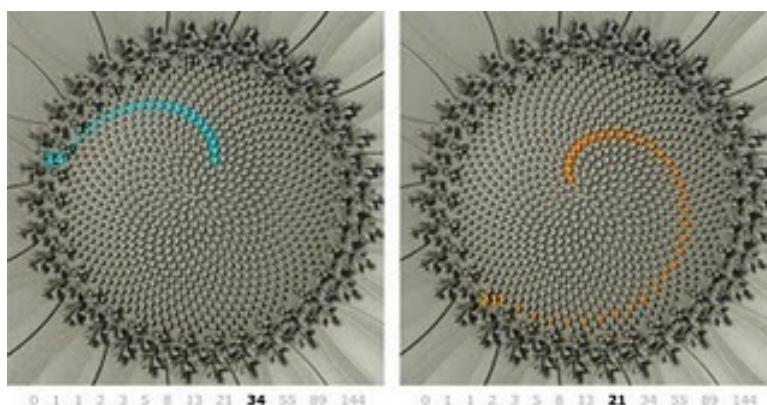


Figura 3.3: Spirali nel girasole

La figura (3.3) illustra un esempio di filotassi spirale nel capolino di un girasole, infatti se si contano attentamente il numero delle spirali, si nota che quelle in senso orario, evidenziate in arancione, sono 21 e quelle in senso antiorario, in azzurro, sono 34, cioè due numeri consecutivi della successione di Fibonacci. Ma queste due famiglie di spirali non sono le uniche presenti nel capolino, bensí sono le uniche visibili. In ogni caso il numero di spirali

visibili nel capolino di un qualsiasi girasole é sempre dato da due numeri consecutivi della successione di Fibonacci.

Questa ricorrenza tanto strana, e di cui possiamo solo ipotizzare il perché, é ben descritta da un modello matematico che riproduce il fenomeno partendo dai dati biologici. Nel caso della fillotassi del girasole, serve sapere tramite quale meccanismo il fiore si forma. Studi biologici mostrano che la parte attiva del fiore, quella in cui avviene la crescita vera e propria, é una zona circolare chiamata apice posta al centro del fiore; sul bordo dell'apice si formano i primordi, che poi si sviluppano fino a diventare semi, stami o foglie. Ciascun primordio nasce ruotando rispetto al precedente di un angolo $2\pi\theta$. Nel caso dei fiori, lo sviluppo é essenzialmente bidimensionale e un primordio crescendo, sposta verso l'esterno i primordi piú anziani per farsi spazio. Come conseguenza di questo spostamento, i primordi sono disposti lungo una stretta spirale chiamata spirale generatrice e le spirali piú larghe, enumerate dalla successione di Fibonacci, sono chiamate *parastichi*.

Lo sviluppo geometrico del fiore dipende quindi da tre fattori: l'angolo di divergenza, la forma dei primordi e come un nuovo primordio sposta i precedenti.

Il modello matematico, che andiamo a descrivere, é un modello che segue l'intuizione avuta da Douady e Couder, descrive cioè la crescita del fiore nel tempo in modo dinamico e supporremo che l'angolo di divergenza $2\pi\theta$ rimanga costante per tutto il processo. L'ipotesi che l'unica parte attiva dello sviluppo del fiore sia l'apice implica che, una volta maturi, la forma circolare di ciascun primordio sia costante e uguale per tutti i primordi e che ogni primordio nasca già maturo, in quanto il tempo di maturazione é trascurabile rispetto la tempo di vita del fiore. Useremo perciò un modello a tempo discreto: il modello varia a certi istanti, corrispondenti alla nascita di un nuovo primordio. Inoltre, la stessa ipotesi, implica che lo spostamento dei primordi sia conseguenza di ciò che accade al centro, in altre parole, i primordi maturi si spostano solo per far posto a un nuovo primordio.

Se identifichiamo la posizione di ciascun primordio con le coordinate polari

(r, θ) del suo centro, possiamo supporre che lo spostamento dipenda solo dalla distanza r del centro del primordio dal centro dell'apice: la nascita di un nuovo primordio sposta il centro di un primordio già esistente di coordinate polari (r, θ) , nel punto $(r + d, \theta)$.

Costruiamo il modello in base alle seguenti ipotesi:

- l'angolo di divergenza $2\pi\theta$ sia costante;
- i primordi sono dei cerchi di raggio unitario uguale per tutti i primordi, e il primordio j -esimo nasce all'istante j -esimo già maturo e con centro sul bordo dell'apice;
- la nascita di un nuovo primordio sposta radialmente tutti i primordi precedenti verso l'esterno di una distanza d .

Il modello é quindi completamente determinato dall'angolo di divergenza $2\pi\theta$, dallo spostamento d e dal numero di primordi nel fiore.

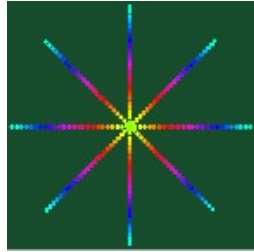
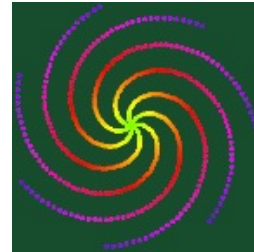
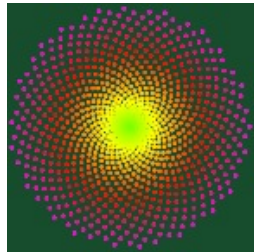
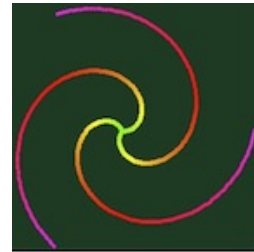
Per capire la geometria del fiore, cioè dare una stima dell'angolo θ , numeriamo i primordi in funzione di quando sono nati e sistemiamo gli assi coordinati in modo che il primo primordio nasca con centro nel punto di coordinate polari $(r_0, 0)$, dove $r_0 \ll d$ é l'apice il raggio dell'apice. Quindi il j -esimo primordio all'istante n é dato da:

$$P_j(n) = (r_0 + (n - j)d, 2\pi j\theta) \quad \text{con } n \geq j$$

Chiameremo (θ, d, n) -fiore la configurazione prodotta dal modello con parametri θ , d e n .

Se θ é razionale, cioè $\theta = \frac{p}{q}$, con p e q primi, allora i primordi si dispongono a raggiera lungo q semirette uscenti dall'origine (Figura 3.4). Chiaramente non accade questo in natura, quindi supporremo che l'angolo di divergenza $2\pi\theta$ sia un multiplo irrazionale di 2π . Ma l'irrazionalità non basta, infatti un $(\pi, 0.2, 200)$ -fiore non riproduce neanche vagamente la disposizione dei primordi di un qualsiasi fiore. (Figura 3.5).

Il problema in questi casi, é che i primordi non sono disposti in maniera efficiente, cioè non occupano uniformemente lo spazio a disposizione, ma

Figura 3.4: $(\frac{7}{8}, 0.2, 200)$ -fioreFigura 3.5: $(\pi, 0.2, 200)$ -fioreFigura 3.6: $(\phi, 0.1, 500)$ -fioreFigura 3.7: $(\phi+0.05, 0.1, 1500)$

si accumulano in alcune zone lasciandone completamente libere altre. Ciò appare più evidente quando θ è razionale. Queste osservazioni ci portano a pensare, quindi, che la migliore scelta di θ sia quella più lontana possibile dai razionali e, da quanto visto nel capitolo precedente, ci suggeriscono di usare come angolo θ la sezione aurea ϕ . (Figura 3.6). L'aspetto è molto più realistico rispetto alle precedenti raffigurazioni, e possiamo identificare $21 = F_8$ spirali che ruotano in senso orario e $34 = F_9$ spirali che ruotano in senso antiorario. Ma la struttura geometrica di un (θ, d, n) -fiore dipende in modo molto instabile da θ . Per esempio, il $(\phi + 0.05, 0.1, 1500)$ -fiore della figura (3.7) ha una rappresentazione molto lontana da quella dei girasoli che si ritrovano in natura, nonostante abbia come parametro θ una piccola variazione del valore di ϕ . Il punto è che la struttura geometrica del fiore dipende principalmente dall'espansione in frazione continua di θ e non dalla sua rappresentazione decimale. Vediamo come.

Sia $\frac{p_s}{q_s}$ la migliore approssimazione razionale di θ , data da un'espansione in frazione continua troncata. Di conseguenza il centro del q_s -esimo primordio

ha un angolo pari a $2\pi(q_s\theta - p_s)$ che, in valore assoluto é minore di $\frac{2\pi}{q_s}$ (cfr. l'equazione 2.6).

Piú in generale, per ogni $k = 0, \dots, q_s - 1$ e per ogni numero naturale j , il $(jq_s + k)$ -esimo primordio é ruotato rispetto al precedente del solito angolo $2\pi(q_s\theta - p_s)$; inoltre la differenza in distanza dall'origine é dq_s , indipendente da j .

Quindi la famiglia dei $(jq_s + k)$ -esimi primordi forma una spirale, al variare di j , tanto piú evidente quanto piú piccolo é $2\pi(q_s\theta - p_s)$ e la spirale ruota in senso orario se $q_s\theta - p_s$ é negativo e antiorario se tale valore é positivo.

Quali spirali effettivamente si vedano dipende anche dal numero di primordi disponibili, infatti l'approssimazione $\frac{p_s}{q_s}$ genera q_s spirali, ognuno dei quali contenente circa $\frac{n}{q_s}$ primordi e perché la spirale si veda, occorre che $\frac{n}{q_s}$ sia abbastanza grande (circa 10). Conseguentemente q_s non potrà essere né troppo grande né troppo piccolo: il passo della spirale é dell'ordine di $\frac{d}{|q_s\theta - p_s|}$ mentre il raggio del fiore é nd , quindi, rispetto al raggio del fiore, il passo della spirale é dell'ordine di $\frac{d}{n|q_s\theta - p_s|}$, per cui se $n|q_s\theta - p_s|$ é troppo grande (supponiamo maggiore di 20), allora la spirale é talmente densa da non essere distinguibile. Ciò spiega come mai vediamo, nella maggior parte dei casi, due famiglie di spirali e raramente ne sono visibili piú di due.

Possiamo, ora spiegare con piú precisione le figure (3.5), (3.6) e (3.7). Lo sviluppo in frazione continua di π é $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \dots]$, da cui si ricava $q_2 = 7$ e $q_3 = 113$. Siccome $n = 200$ é visibile una sola famiglia di spirali composta da $q_2 = 7$ curve che ruotano in senso orario perché $q - 2\pi - p_2$ é negativo.

Nella figura (3.6) $n = 500$ e siccome $\frac{n}{F_{10}} \approx 9$, le famiglie composte da F_s spirali con $s \geq 10$ non sono visibili perché composte da troppi primordi e d'altra parte $n|F_6\phi - F_7| \approx 28$, per cui le famiglie composte da F_s spirali con $s \leq 6$ sono anch'esse non visibili perché troppo dense. Rimangono visibili solo le famiglie composte da $F_9 = 34$ e $F_8 = 21$.

Infine, lo sviluppo in frazione continua di $\phi+0.05$ é $\phi+0.05 = [1, 1, 2, 80, 1, \dots]$ per cui $q_2 = 1$, $q_3 = 3$ e $q_4 = 241$. Siccome $n = 500$, la famiglia composta da 241 spirali non é visibile, mentre per $n |q_3(\phi + 0.05) - p_3| \approx 2$, é ben visibile la famiglia composta da 3 spirali.

3.2 Conclusioni

Grazie al modello matematico descritto sopra abbiamo verificato come la struttura geometrica di un qualunque fiore analogo al girasole, dipenda principalmente dall'espansione in frazione continua dell'angolo di divergenza. Purtroppo però il modello non spiega perché la natura prediliga la sezione aurea come angolo di divergenza. Il modello meccanico di Couder e Douady portó come angolo di divergenza, l'angolo aureo, non postulandolo direttamente in vista dell'efficienza dell'impaccamento che permetteva, ma come conseguenza di una dinamica ragionevole. Questa scoperta avvaloró sempre piú la teoria di H. Vogel sul perché la natura preferissi l'angolo aureo. Vogel rappresentó i semi di un girasole con dischetti circolari uguali e, supponendo un angolo di divergenza costante, calcoló quale regola di distribuzione avrebbe impacchettato i dischetti nel modo piú compatto possibile. Gli esperimenti mostrarono che se l'angolo é minore di 137,5 gradi, nel capolino appaiono dei vuoti e si vede una sola famiglia di spirali. La stessa cosa succede se l'angolo é maggiore dell'angolo aureo, ma questa volta l'unica famiglia di spirali visibile é quella che gira in senso apposto a quella osservata precedentemente. L'angolo aureo risulta quindi essere l'unico angolo in corrispondenza del quale i semi si impacchettano senza lasciare vuoti e quando ciò succede sono visibili entrambe le famiglie di spirali. In breve, l'impaccamento piú efficace, quello che forma il capolino di semi piú robusto, si ha quando l'angolo di divergenza é uguale all'angolo aureo.

Ma l'efficienza é verificata a posteriori, a fiore già completo. Ciò che manca é la comprensione del meccanismo biologico che spinge il meristema apicale a generare primordi ruotati di questo angolo speciale che l'angolo

aureo, cioè manca ancora il collegamento che spieghi come la biologia della pianta realizzi l'ottimizzazione matematica.

Certo é ormai chiaro che le sorprendenti regolarità numeriche nelle piante risultano essere una conseguenza della dinamica dell'accrescimento delle piante, e sono quindi governate da rigorose leggi matematiche.

Appendice A

Leonardo Pisano



Si sa pochissimo della vita di Leonardo Pisano, detto Fibonacci. Il nome Fibonacci - nome derivato dal latino *filius Bonacci*, ovvero figlio di Bonacci - gli é stato probabilmente attribuito nel Settecento da Giovanni Gabriello Grimaldi. Non esistono suoi ritratti e le immagini che si possono trovare sono ricostruzioni di fantasia. Leonardo nacque a Pisa intorno al 1175 e morí sempre a Pisa circa nel 1245; queste date sono naturalmente molto approssimative visto che non esistono documenti che permettono di determinarle con precisione, ma di sicuro Fibonacci viaggió moltissimo durante la sua vita, prima al seguito del padre che era un commerciante poi indipendentemente. I suoi viaggi si concentrarono soprattutto nelle regioni affacciate sul mediterraneo (Algeria, Egitto, Siria, Grecia, Sicilia , Provenza. . .) e questo gli permise di conoscere e studiare la cultura scientifica araba. Durante il periodo passato

col padre lontano da Pisa, fu istruito da un insegnante musulmano che lo introdusse all'algebra grazie al libro *Hisâb al-jabr w'al-muqabalah*¹ e grazie al quale venne a conoscenza della notazione decimale indo-araba, cioè delle “*nove cifre indiane*”, come le chiama lo stesso Fibonacci nel suo libro piú famoso, il *Liber Abaci*.

Il *Liber Abaci* venne completato nel 1202 e rivisto e ampliato nel 1228. La prima parte del volume é interamente dedicata alla numerazione decimale araba-indiana descritta con divizia di particoalri e applicata a numerosi problemi commerciali. La seconda parte é ben piú interessante da un punto di vista matematico perché discute di temi teorici soprattutto di teoria dei numeri, esponendo tecniche elaborate dalle scuole ellenistiche, indiana e araba. Altre opere fecero conoscere Fibonacci come famoso matematico in molte corti europee, in particolare alla corte di Federico II.

Fibonacci, come matematico, fu decisamente in anticipo nel tempo con le sue scoperte, ma la sua fama odierna é legata alla risoluzione di un problema secondario, in cui sono introdotti i numeri che danno vita alla successione che porta il suo nome.

¹Dal titolo di questo libro deriva la parola algebra.

Bibliografia

- [1] Alfred S. Posamentier e Ingmar Lehmann, (2007) *The Fabulous Fibonacci numbers*, New York, Prometheus Book.
- [2] Marco Abate (2007), *Il girasole di Fibonacci*, Matematica e cultura 2007, Michele Emmer (a cura di,) Italia, Springer, pag. 227-240. <www.dm.unipi.it/~abate>.
- [3] V. Comincioli, (2006) *Biomatematica: interazioni tra le scienze della vita e la matematica*, capitolo 5: Forme e modelli nei sistemi biologici, Italia, Apogeo (Ebook), pag. 312-323.
- [4] Ian Stewart, (2002) *L'altro segreto della vita. La nuova matematica e gli esseri viventi*, capitolo 6: Fiori per Fibonacci, Longanesi, pag 176-196.
- [5] Stéphan Douady e Yves Couder, (1992) *Phyllotaxis as a Self-Organized Growth Process*, in Physical Review Letters, 68, pag 2098-2101.
- [6] <mathworld.wolfram.com/>

Indice

Introduzione	3
1 I NUMERI DI FIBONACCI	7
1.1 Proprietá dei numeri di Fibonacci	10
2 LA SEZIONE AUREA	17
2.1 La spirale logaritmica	22
3 LA FILLOTASSI	27
3.1 Il modello matematico dell'accrescimento del girasole	31
3.2 Conclusioni	36
A Leonardo Pisano	39
Bibliografia	41