ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

PROCESSI STOCASTICI DISCRETI, CATENE DI MARKOV E ALCUNI ESEMPI CLASSICI

Tesi di Laurea in Probabilità e Statistica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
NICOLA ABBONDANZA

I Sessione
Anno Accademico 2016/2017

A chi c'è sempre stato...

Introduzione

Le catene di Markov sono un particolare tipo di processo stocastico discreto dove la transizione allo stato successivo dipende esclusivamente dallo stato attuale, per questo motivo possono essere chiamate processo stocastico senza memoria.
Questi processi portano il nome del matematico russo Andrej Andreevič Markov (Rjazan, 14 Giugno 1856 - San Pietroburgo, 20 Luglio 1922), essi trovano applicazione in tanti campi: ad esempio in informatica li si utilizza per ordinare le pagine web tramite un criterio che attribuisce maggiore importanza a una pagina piuttosto che un altra in base al numero di link che vi puntano; oppure per descrivere situazioni del gioco d'azzardo dove gli stati su cui si transita rappresentano, ad esempio, l'ammontare del capitale del giocatore.
In questa tesi si presentano in maniera sintetica i processi stocastici discreti in generale dedicandoci poi allo studio di particolari processi stocastici discreti e, una volta fatte alcune ipotesi, li si utilizza per risolvere il 'problema della rovina del giocatore'; tale risoluzione richiederà l'uso delle equazioni alle differenze di cui sono riportati i risultati principali nel primo capitolo.
In seguito si catalogano le catene di Markov finite come un particolare processo stocastico e sono presentati una serie di risultati generali passando attraverso la classificazione degli stati, risoluzione di problemi di assorbimento in classi ergodiche, tempi medi di assorbimento in classi ergodiche ed assorbimento entro un tempo prestabilito. Tutto ciò verrà poi applicato al problema della 'rovina del giocatore' visto come catena di Markov finita.
Nella parte finale del terzo capitolo si classificheranno le catene di Markov regolari per le quali si dimostra il Teorema di Markov che garantisce la convergenza della catena verso

una distribuzione invariante. Questo risultato è di rilevanza notevole perchè permette di stabilire con quale probabilità ci si troverà in ciascuno degli stati dopo un certo tempo.
Si presenterà anche il caso della catena di Markov ciclica che non potrà mai essere regolare e quindi non si avrà l'unicità della distribuzione invariante.
Nell'ultimo capitolo si presenta un ulteriore esempio di applicazione delle catene di Markov discutendo il 'paradosso dell'ispezione'; in questo caso le catene di Markov saranno utilizzate per determinare la legge di una variabile aleatoria che rappresenta la vita di un oggetto.

Indice

Capitolo 1

Premesse

In questo capitolo ripercorreremo brevemente la definizione di spazi di probabilità, variabile aleatoria ed equazioni alle differenze dato che saranno utilizzate nei capitoli successivi. Ci limiteremo a dare qualche definizione e i principali risultati che interessano lo studio dei processi stocastici e delle catene di Markov.

1.1 Spazi di probabilità

Definizione 1.1. Consideriamo un insieme Ω arbitrario e non vuoto, una σ-algebra su Ω è data da una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tale che:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$;
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{F} \Rightarrow$ l'unione numerabile $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Esempio 1.1. Un esempio banale di σ-algebra è dato da $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Esempio 1.2. Un secondo esempio altrettanto banale di σ-algebra è dato da $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Definizione 1.2. Definiamo uno spazio di probabilità una terna data da $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ in cui Ω è un insieme non vuoto, $\mathcal{F}$ è una σ-algebra definita su Ω e μ è una misura di probabilità definita sull'insieme Ω, cioè è tale che

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

dove $\mu(\Omega) = 1$.

Ora diamo la nozione di variabile aleatoria

Definizione 1.3. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si dice *variabile aleatoria* un'applicazione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{\omega; X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$.

Una variabile aleatoria è dunque una funzione di ω tale che si possa calcolare $P(X(\omega) \leq t)$, cioè tale che abbia senso calcolare la probabilità che X prenda valori più piccoli di t. Nei prossimi capitoli la definizione di variabile aleatoria sarà fondamentale perchè nel caso di catene di Markov finite saremo interessati al caso in cui il codominio delle variabili aleatorie sia finito; cioè un insieme nella forma $\{x_1, ..., x_n\}$.

1.2 Equazioni alle differenze del primo e secondo ordine a coefficienti costanti

Le equazioni alle differenze sono particolari tipi di equazioni in cui l'incognita non è una funzione continua bensì una funzione definita su un insieme discreto; solitamente questo tipo di funzioni rappresentano le rilevazioni fatte a intervalli temporali spaziati uniformemente.

Definizione 1.4. Sia

$$y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione definita su un insieme discreto. La derivata discreta della successione y rappresenta la variazione di questa funzione nell'unità di tempo. Definiamo la successione derivata discreta Δy della successione y come

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n.$$

La derivata seconda discreta $\Delta^2 y$ della successione y è la derivata discreta della derivata discreta. In formule:

$$\left(\Delta^2 y\right)_n = (\Delta(\Delta y))_n = (\Delta y)_{n+1} - (\Delta y)_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Esempio 1.3. Calcoliamo la derivata discreta prima e seconda di $y_n = n^2\ \forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$(\Delta y)_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

e

$$\left(\Delta^2 y\right)_n = (n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2 = n^2 + 4n + 4 - 2n^2 - 4n - 2 + n^2 = 2.$$

Definizione 1.5. Una equazione alle differenze di ordine k è una espressione del tipo

$$f(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k}) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

dove $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione qualunque.

La (1.1) si può anche scrivere come

$$g\left(n, y_n, (\Delta y)_n, \left(\Delta^2 y\right)_n, ..., \left(\Delta^k y\right)_n\right) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

perchè y_{n+1}, y_{n+2},... si possono esprimere attraverso y_n e le derivate discrete Δy, $\Delta^2 y$,..., per esempio

$$\begin{cases} \Delta y = y_{n+1} - y_n \\ \Delta^2 y = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} y_{n+1} = \Delta y + y_n \\ y_{n+2} = \Delta^2 y + 2\Delta y + y_n \end{cases}$$

eccetera.

Definizione 1.6. Una soluzione dell'equazione alle differenze è una successione

$$y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfa la 1.1.

Esempio 1.4. Consideriamo l'equazione alle differenze

$$y_{n+1} - 2y_n = 0$$

può essere riscritta come $(\Delta y)_n - y_n = 0$. La soluzione dell'equazione è del tipo $y_n = k2^n$ al variare del valore di k; infatti

$$2^{n+1} - 2^n - 2^n = 2^n(2 - 1 - 1) = 0.$$

Studieremo una importante classe di equazioni alle differenze: quelle lineari a coefficienti costanti, di ordini 1 e 2. Queste equazioni ammettono sempre soluzioni.
Tali equazioni sono della forma

$$L\left(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n\right) = b, \tag{1.2}$$

dove b è un numero reale ed L è una funzione lineare della forma

$$L\left(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n\right) = y_{n+1} + a y_n \text{ se l'ordine è } 1,$$

$$L\left(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n\right) = y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n \text{ se l'ordine è } 2,$$

per certi a, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$.
Si può verificare la condizione di linearità, cioè in entrambi i casi vale

$$L\left(\alpha y_{n+2} + \beta z_{n+2}, \alpha y_{n+1} + \beta z_{n+1}, \alpha y_n + \beta z_n\right) = \alpha L\left(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n\right) + \beta L\left(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n\right)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, per ogni y_n e z_n successioni.

Definizione 1.7. L'equazione

$$L\left(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n\right) = b$$

con $b \neq 0$ si dice equazione alle differenze completa.

Definizione 1.8. L'equazione alle differenze

$$L\left(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n\right) = 0 \tag{1.3}$$

si dice equazione omogenea associata all'equazione completa $L\left(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n\right) = b$.

Ci sono due proprietà fondamentali vere in generale:

Teorema 1.2.1. *Se la successione y_n^* è soluzione dell'equazione 1.2, allora ogni altra soluzione di 1.2 si scrive come somma di y_n^* e di una soluzione dell'equazione omogenea associata 1.3.*

Dimostrazione. Se y_n^* è soluzione dell'equazione 1.2, allora $L\left(y_{n+2}^*, y_{n+1}^*, y_n^*\right) = b$. Inoltre se z_n è soluzione di 1.3, allora $L\left(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n\right) = 0$. Quindi sommando,

$$L\left(y_{n+2}^* + z_{n+2}, y_{n+1}^* + z_{n+1}, y_n^* + z_n\right) = L\left(y_{n+2}^*, y_{n+1}^*, y_n^*\right) + L\left(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n\right) = b,$$

ovvero $y_n^* + z_n$ è soluzione di 1.2.
Viceversa, se w_n è soluzione di 1.2, allora $L\left(w_{n+2}, w_{n+1}, w_n\right) = b$. Ma allora, per differenza,

$$L\left(w_{n+2} - y_{n+2}^*, w_{n+1} - y_{n+1}^*, w_n - y_n^*\right) = L\left(w_{n+2}, w_{n+1}, w_n\right) - L\left(y_{n+2}^*, y_{n+1}^*, y_n^*\right) =$$

$$b - b = 0,$$

quindi $z_n = w_n - y_n^*$ è soluzione si 1.3, ovvero $w_n = y_n^* + z_n$, con z_n soluzione dell'omogenea associata. □

Teorema 1.2.2. *Se z_n e w_n sono soluzioni di 1.3, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha z_n + \beta w_n$ è soluzione si 1.3.*

Dimostrazione. Segue banalmente dalla linearità di L. □

1.2.1 Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 1

In questo paragrafo ci occuperemo di trovare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze completa del tipo:

$$y_{n+1} + a y_n = b \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

È evidente che una soluzione di questa equazione alle differenze risulta univocamente determinata una volta che si conosca il suo primo termine.
Iniziamo con lo studio dell'omogenea associata, ovvero di

$$y_{n+1} + a y_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ricordando il Teorema 1.2.2, data una qualsiasi soluzione non banale di questa equazione, tutte le soluzioni si otterranno da questa moltiplicando per una costante.
Si cerca una soluzione non identicamente nulla del tipo

$$y_n = \lambda^n \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

da determinarsi. Sostituendo nell'equazione omogenea, otteniamo

$$\lambda^{n+1} + a\lambda^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ovvero

$$(\lambda + a)\,\lambda^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

e poiché $\lambda \neq 0$, segue

$$\lambda = -a.$$

D'altra parte, se $\lambda = -a$ tutte le equazioni del tipo (1.4) sono verificate (anche per $n > 0$). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c\,(-a)^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ci occupiamo ora del caso non omogeneo, cioè $b \neq 0$ e cerchiamo di determinare una soluzione y_n^* di questa equazione della forma più semplice possibile. Tutte le soluzioni si troveranno poi sfruttando il Teorema 1.2.1.
Visto che il secondo membro è costante, proviamo a vedere se l'equazione

$$y_{n+1} + ay_n = b \ \forall n \in \mathbb{N}$$

può avere una soluzione costante. Quindi proviamo a capire se per qualche $k \in \mathbb{R}$ la successione $y_n = k$ può essere soluzione. Tale k deve verificare

$$y_{n+1} + ay_n = k + ak = b \Leftrightarrow k\,(1 + a) = b,$$

- se $b \neq 0$ e $1 + a = 0$ questa equazione non ha mai soluzione,
- se invece $1 + a \neq 0$, allora si trova che
$$k = \frac{b}{1 + a},$$
- se poi $1 + a = 0$, cioè $a = -1$, si prova a trovare una soluzione della forma $y_n = kn$, con k da determinare sostituendo nell'equazione. Per $a = -1$ si ha
$$y_{n+1} + ay_n = k\,(n + 1) - kn = k = b,$$
così che la soluzione sia
$$y_n = bn.$$

Riassumendo: una soluzione y_n^* dell'equazione $y_{n+1} + ay_n = b$ è:

$$y_n^* = \begin{cases} \frac{b}{1+a} \text{ se } a \neq -1 \\ bn \text{ se } a = -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

per il Teorema 1.2.1 tutte le soluzioni sono della forma

$$y_n = y_n^* + c\,(-a)^n\,, \text{ al variare di } c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.5. Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+1} + 3y_n = 8 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cerchiamo per prima cosa le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$y_{n+1} + y_n = 0.$$

Immaginando una soluzione del tipo λ^n otteniamo

$$\lambda^{n+1} + 3\lambda^n = (\lambda + 3)\,\lambda^n = 0$$

ovvero

$$\lambda + 3 = 0 \text{ cioè } \lambda = -3,$$

pertanto tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo

$$y_n = c\,(-3)^n \text{ al variare di } c \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione y_n^* dell'equazione completa della forma $y_n^* = k$, cioè costante.

Tale costante deve verificare

$$k + 3k = 8 \text{ cioè } k = 2.$$

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula

$$y_n = 2 + c\,(-3)^n \ \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.
Una volta ricavata y_n si può ottenere una soluzione particolare conoscendo y_0; per esempio supponiamo di sapere che $y_0 = 1$, grazie a questo riusciremo a trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, infatti andando a sostitutire si ottiene

$$1 = y_0 = 2 + c\,(-3)^0 \text{ cioè } c = -1;$$

quindi la soluzione dell'equazione completa $y_{n+1} + 3y_n = 8$ di cui sappiamo che $y_0 = 1$ è

$$y_n = 2 - (-3)^n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.2.2 Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 2

In questo caso ci occuperemo di trovare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = b\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iniziamo dallo studio dell'omogenea associata, ovvero

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

In questo caso una soluzione y_n dell'equazione alle differenze completa risulta univocamente determinata una volta che si conoscono i suoi due primi termini y_0 e y_1. Supponiamo di conoscere due soluzioni z_n e w_n dell'equazione omogenea associata, ricordando il Teorema 1.2.2, per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ anche $c_1 z_n + c_2 w_n$ è soluzione dell'omogenea associata. Quindi la soluzione y_n corrispondente alla scelta di y_0 e y_1 in $\mathbb{R}$ coinciderà con la combinazione lineare $c_1 z_n + c_2 w_n$ se c_1, c_2 sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} c_1 z_0 + c_2 w_0 = y_0 \\ c_1 z_1 + c_2 w_1 = y_1. \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzioni per ogni possibile scelta di $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ se e solo se (z_0, z_1) e (w_0, w_1) sono indipendenti, cioè

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Occorre quindi trovare due soluzioni z_n e w_n per cui il determinante appena scritto non sia nullo.
Si cerca una soluzione dell'equazione omogenea nella forma

$$y_n = \lambda^n$$

con $\lambda \neq 0$ da determinarsi. Sostituendo nell'equazione omogenea otteniamo

$$\lambda^{n+2} - a_1\lambda^{n+1} + a_2\lambda^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Dato che $\lambda \neq 0$ necessariamente deve essere

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

D'altra parte, se λ è radice dell'equazione di secondo grado allora tutte le equazioni di 1.5 sono verificate. Come per le equazioni differenziali si presentano tre casi a seconda del valore del discriminante dell'equazione di secondo grado.

1. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$, allora il polinomio $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ ha due radici reali e distinte che chiamiamo λ_1 e λ_2. Allora $z_n = \lambda_1^n$ e $w_n = \lambda_2^n$ risultano soluzioni dell'equazione omogenea associata e verificano la condizione di indipendenza:

$$\det\begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \ \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.6. Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - y_n = 0$$

sapendo che

$$y_0 = 0, y_1 = 2.$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $y_n = \lambda^n$, andando a sostituire nell'eqazione di partenza si ottiene

$$\lambda^{n+2} - \lambda^n = \lambda^n \left(\lambda^2 - 1\right) = 0$$

allora λ dovrà soddisfare l'equazione

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

che restituisce due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze sono date da

$$y_n = c_1 1^n + c_2 \left(-1\right)^n = c_1 + c_2 \left(-1\right)^n \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Ora la soluzione tale che $y_0 = 0, y_1 = 2$ corrsponde a scegliere c_1, c_2 soluzioni del sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

ovvero

$$c_1 = 1, c_2 - 1.$$

Pertanto tale soluzione è

$$y_n = 1 + \left(-1\right)\left(-1\right)^n = 1 + \left(-1\right)^{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$, allora il polinomio $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ ha una sola radice reale data da

$$\lambda = \frac{-a_1}{2}.$$

allora tutte le successioni del tipo

$$y_n = k\left(\frac{-a_1}{2}\right)^n$$

risultano soluzione dell'equazione omogenea per ogni $k \in \mathbb{R}$. Supponiamo per il momento che $a_1 \neq 0$ e sfruttiamo il metodo della variazione delle costanti: immaginiamo che un'altra soluzione sia della forma

$$w_n = k_n \left(\frac{-a_1}{2}\right)^n \quad \text{con } k_n \text{ successione da determinarsi.}$$

Ricordando che $a_1^2 = 4a_2$, si ha

$$0 = w_{n+2}+a_1 w_{n+1}+a_2 w_n = k_{n+2}\left(\frac{-a_1}{2}\right)^{n+2}+a_1 k_{n+1}\left(\frac{-a_1}{2}\right)^{n+1}+\frac{a_1^2}{4}k_n\left(\frac{-a_1}{2}\right)^n =$$

$$\left(\frac{-a_1}{2}\right)^{n+2}(k_{n+2}-2k_{n+1}+k_n)\,.$$

D'altra parte $k_{n+2} - 2k_{n+1} + k_n = \Delta^2 k_n = 0$ se k_n è della forma $k_n = c_1 + c_2 n$. In particolare, se scegliamo $k_n = n$, le successioni $z_n = \left(\frac{-a_1}{2}\right)^n$ e $w_n = n\left(\frac{-a_1}{2}\right)^n$ sono soluzioni dell'equazione alle differenze omogenea e verificano la condizione di indipendenza:

$$\det\begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-a_1}{2} & \frac{-a_1}{2} \end{pmatrix} = \frac{-a_1}{2} \neq 0.$$

(tranne nel caso in cui $a_1 = 0$). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1\left(\frac{-a_1}{2}\right)^n + c_2 n\left(\frac{-a_1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. L'ulteriore caso in cui $a_1 = 0$, è banale: l'equazione è $y_{n+2} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che ha come soluzione una qualsiasi successione nulla dal secondo termine in poi.

3. $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$, allora il polinomio $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ ha due radici complesse coniugate; siano esse $\lambda \pm i\mu$. Allora posso dire che $(\lambda + i\mu)^n$ e $(\lambda - i\mu)^n$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, però purtroppo sono soluzioni a valori complessi e, di solito, si è interessati a trovare soluzioni che siano successioni a valori reali. Se scriviamo $\lambda \pm i\mu$ in forma esponenziale sapremo calcolare meglio $(\lambda \pm i\mu)^n$. Se $r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ e θ è un argomento di $\lambda + i\mu$, allora

$$\lambda \pm i\mu = re^{\pm i\theta}$$

quindi

$$(\lambda \pm i\mu)^n = r^n e^{\pm in\theta} = r^n \left(\cos(n\theta) \pm i \sin(n\theta)\right).$$

Le successioni reali

$$z_n = r^n \cos(n\theta) \text{ e } w_n = r^n \sin(n\theta)$$

sono ancora soluzioni dell'equazione omogenea. Inoltre verificano la condizione di indipendenza

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \end{pmatrix} = r \sin(\theta) \neq 0,$$

(si ricordi che $\theta \neq 0 \bmod \pi$, dal momento che $\mu \neq 0$). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1 r^n \cos(n\theta) + c_2 r^n \sin(n\theta) \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.7. Determiniamo tutte le soluzioni di

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0.$$

L'equazione omogenea associata a questa equazione alle differenze è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

che ha due radici complesse coniugate pari a

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Quindi abbiamo $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ per cui possiamo scrivere

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ e } 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

A questo punto possiamo dire che tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze sono

$$y_n = c_1 \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Occupiamoci ora del caso non omogeneo, cioè quando $b \neq 0$, e cerchiamo di determinare una soluzione y_n^* di questa equazione. Tutte le soluzioni si troveranno sfruttando il Teorema 1.2.1.

Immaginiamo una soluzione che sia costante: $y_n = k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora k deve verificare

$$k + a_1 k + a_2 k = b \Leftrightarrow k\left(1 + a_1 + a_2\right) = b.$$

- Se $1 + a_1 + a_2 \neq 0$ questa equazione ammette soluzione

$$k = \frac{b}{1 + a_1 + a_2}.$$

- Se $1 + a_2 + a_2 = 0$, immaginiamo una soluzione della forma $y_n = kn$; un tale k dovrà verificare

$$k\left(n+2\right) + a_1 k\left(n+1\right) + a_2 kn = b \Leftrightarrow k\left(2 + a_1\right) = b.$$

  Questa equazione ammette soluzione quando $2 + a_1 \neq 0$ e quindi

$$k = \frac{b}{2 + a_1}.$$

- Se $1 + a_1 + a_2 = 0$ e $2 + a_1 = 0$, ovvero se $a_1 = -2$ e $a_2 = 1$, immaginiamo una soluzione del tipo $y_n = kn^2$. Allora k dovrà verificare

$$k\left(n+2\right)^2 + a_1 k\left(n+1\right)^2 + a_2 kn^2 = b \Leftrightarrow 2k = b,$$

  quindi

$$k = \frac{b}{2}.$$

Riassumendo

$$y_n^* = \begin{cases} \frac{b}{1+a_1+a_2} \text{ se } 1 + a_1 + a_2 \neq 0 \\ \frac{bn}{2+a_1} \text{ se } 1 + a_1 + a_2 = 0, 2 + a_1 \neq 0 \\ \frac{bn^2}{2} \text{ se } 1 + a_1 + a_2 = 0, 2 + a_1 = 0. \end{cases}$$

Esempio 1.8. Determiniamo le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 3.$$

Studiamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, ovvero l'equazione

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0.$$

Per quanto visto prima è necessario risolvere

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

che restituisce la soluzione

$$\lambda = 1.$$

Abbiamo quindi che tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze omogenea associata sono date da

$$z_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n = c_1 + c_2 n \ \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Determiniamo ora una soluzione dell'equazione completa, della forma $y_n^* = k$. Tale costante k deve verificare $k - 2k + k = 3$, che però non ha soluzioni. Proviamo quindi con $y_n^* = kn$ e troviamo di nuovo un'equazione priva di soluzioni $2k - 2k = 3$. Infine con $y_n^* = kn^2$ troviamo $2k = 3$. Quindi

$$y_n^* = \frac{3}{2}n^2$$

è soluzione dell'equazione completa.
Tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze sono quindi della forma

$$y_n = \frac{3}{2}n^2 + c_1 + c_2 n \ \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.3 Equazioni alle differenze a coefficienti costanti di ordine k

Quanto detto per le equazioni di primo e secondo ordine si può generalizzare per un generico ordine k.
In tal caso, l'equazione completa diviene:

$$\sum_{i=0}^{k} p_i y_{n+k-i} = g_n, \ n \geq n_0,$$

dove $\{p_i\}$ è una successione di costanti e $\{g_n\}$ una generica successione.
Al solito una sua soluzione è univocamente determinata dalle k condizioni iniziali

$$y_{n_0}, y_{n_0+1}, ..., y_{n_0+k-1}.$$

L'equazione omogenea associata è

$$\sum_{i=0}^{k} p_i y_{n+k-i} = 0 \ n \geq n_0,$$

di cui cercheremo una soluzione nella forma

$$y_n = z^{n-n_0}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Sostituendo nell'equazione omogenea si ottiene

$$z^{n-n_0} \sum_{i=0}^{k} p_i z^{k-i} = 0, \ n \geq n_0,$$

da cui si ottiene che z deve essere una radice del polinomio caratteristico

$$p(z) = \sum_{i=0}^{k} p_i z^{k-i} = 0,$$

associato all'equazione omogenea. Si può dimostrare che

Teorema 1.3.1. *Se le k radici del polinomio caratteristico sono semplici allora le soluzioni*

$$y_n^{(i)} = z_i^n, \ i = 1, ..., k,$$

sono linearmente indipendenti.

In tal caso la soluzione dell'equazione omogenea associata sarà della forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i^n, \ n \geq n_0,$$

le costanti $c_1, ..., c_k$ saranno univocamente determinate dalla scelta delle k condizioni iniziali. Infine la soluzione dell'equazione completa di partenza sarà data dalla somma della soluzione dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

Capitolo 2

Processi stocastici

2.1 Generalità dei processi stocastici

Iniziamo la trattazione di questo argomento dando la definizione di processo stocastico, nei prossimi capitoli vedremo come le catene di Markov si collocano all'interno di questa teoria.

Definizione 2.1. Si definisce *processo stocastico* una famiglia di variabili aleatorie

$$\{X_t; t \in T\}$$

dove t rappresenta un indice che varia nell'insieme T.

In base alla natura dei codomini di ciascuna variabile aleatoria che interviene nel processo si distinguono due casi:

- se il codominio di ciascuna variabile aleatoria è discreto il processo stocastico si dirà *discreto*
- se il codominio di ciascuna variabile aleatoria è continuo il processo stocastico si dirà *continuo.*

A seconda delle caratteristiche dell'insieme T in cui varia il parametro t il processo stocastico può essere di varia natura:

- se T è un insieme discreto il processo stocastico si dirà *a parametro discreto*

- se T è un insieme continuo il processo stocastico si dirà *a parametro continuo.*

Noi ci concentreremo sul caso in cui sia il codominio di ciascuna delle variabili aleatorie sia l'insieme T siano discreti, cioè tratteremo di processi stocastici discreti a parametro discreto.
I processi stocastici sono utilizzati per la descrizione di un fenomeno che evolve nel tempo, per questo il variare del parametro $t \in T$ viene spesso interpretato come lo scorrere del tempo.
In generale si suppone che le variabili aleatorie che intervengono nella descrizione del processo non siano indipendenti, bensì legate da delle relazione di dipendenza che derivano dalla descrizione del fenomeno in termini stocastici.
Senza l'introduzione di opportune precisazioni il processo stocastico è di difficile gestione a causa della generalità della sua definizione, di conseguenza, a seconda del problema trattato, dovremo fare opportune ipotesi.

Esempio 2.1. Se si considera una partita a testa o croce sembra ragionevole assumere l'ipotesi di equiprobabilità ed indipendenza (o schema bernoulliano); infatti ha senso porre la probabilità dell'evento $E_h =$*'successo al colpo h-esimo'* pari a p per ogni h; in simboli $P(E_h) = p \ \forall h$; cioè la probabilità che si verifichi il successo ad un determinato colpo è sempre la stessa perchè non ci sono condizioni che la facciano cambiare. Inoltre è sensato pensare a tutti gli eventi E_h indipendenti l'uno dell'altro.

2.2 Il problema della rovina del giocatore

2.2.1 La probabilità di rovina

Ora che si sono introdotte le prime generalità dei processi stocastici vogliamo vederne un esempio di applicazione. Ci occuperemo di descrivere il fenomeno noto come 'rovina del giocatore' utilizzando la formalizzazione matematica fornita dai processi stocastici.
Questo tipo di problema si colloca all'interno dei problemi di assorbimento; cioè si raggiungono degli stati per cui il processo si arresta, cioè si stabilizza.

Consideriamo due giocatori A e B che possiedono rispettivamente a e b monete; essi decidono di sfidarsi ad un gioco d'azzardo composto da varie manche. Le modalità del gioco sono le seguenti:

- se il giocatore A vince una manche allora B gli verserà una moneta, di conseguenza il patrimonio di A avrà un incremento unitario mentre quello di B decrescerà di una moneta, la situazione è analoga se la manche è vinta da B;
- il gioco si arresta non appena uno dei due giocatori azzera il suo patrimonio, cioè quando uno dei due giocatori è rovinato.

L'ipotesi che imponiamo per la descrizione di questo fenomeno è che in ciascuna 'manche' le probabilità di vincita da parte di A e B rimangono invariate e non dipendono dall'esito delle giocate precedenti. Questa assunzione è spesso ricordata come 'ipotesi di equiprobabilità ed indipendenza'.
Sotto questa ipotesi proveremo quanto segue:

'in un gioco equo il giocatore che disponga di un capitale iniziale finito e giochi (senza possibilità di credito) contro un avversario 'infinitamente ricco', si rovina certamente prima o poi'.

Più precisamente, con probabilità 1 il suo patrimonio scende allo zero in un numero finito di colpi.

Assumiamo che la probabilità di vincere una manche sia pari a p e che la probabilità di perderla sia pari a q.
(Il gioco è detto equo quando $p = q = \frac{1}{2}$).

Per iniziare supponiamo che i patrimoni di A e B siano finiti e consideriamo i seguenti eventi:

- sia E l'evento *'il patrimonio di A scende prima o poi a zero sapendo che inizialmente è a'* e sia $p(a)$ la probabilità di E, in simboli

$$P(E) = p(a);$$

- analogamente si consideri l'evento F dato da *'il patrimonio di B scende prima o poi a zero sapendo che il patrimonio iniziale di A è a'*, e sia $q(a)$ la probabilià di F, in simboli
$$P(F) = q(a).$$

In tutto il ragionamento si assume inoltre noto il patrimonio iniziale di B uguale a b.
La prima affermazione da provare è che

$$p(a) + q(a) = 1,$$

ciò significherà che l'evento F è il complementare dell'evento E e quindi, nel caso che i patrimoni di A e di B siano finiti, con probabilità pari ad 1 il gioco si arresta con la rovina di uno dei due giocatori.
In termini di gioco, indichiamo con $p^{(n)}(a)$ la probabilità che il giocatore A sia rovinato entro i primi n colpi disponendo di un capitale iniziale a. Usando questa notazione sussiste la seguente relazione:

$$p^{(n)}(a) = p \cdot p^{(n-1)}(a+1) + q \cdot p^{(n-1)}(a-1). \tag{2.1}$$

La relazione sta a significare che la probabilità che il giocatore A si rovini in n colpi, disponendo di un capitale a, è pari alla probabilità che vinca moltiplicata per la probabilità di essere rovinato in $n-1$ colpi avendo a disposizione il capitale $a+1$ sommata alla probabilità che perda moltiplicata per la probabilità che sia rovinato in $n-1$ colpi avendo a disposizione un capitale pari ad $a-1$.
La successione $p^{(n)}(a)$ è limitata fra 0 e 1 dato che è una probabilità; è monotona non decrescente al crescere di n perchè l'evento *'La rovina di A si verifica entro i primi n colpi'* implica *'La rovina di A si verifica entro i primi $n+1$ colpi'*. Una volta fatte queste osservazioni possiamo affermare che:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} p^{(n)}(a) = p(a).$$

Dalla 2.1 passando al limite si ottiene:

$$p(a) = p \cdot p(a+1) + q \cdot p(a-1). \tag{2.2}$$

La 2.2 è un'equazione alle differenze finite omogenea del secondo ordine per la funzione incognita $p(a)$. La soluzione generale di una tale equazione è una combinazione lineare a coefficienti arbitrari di due soluzioni particolari indipendenti.

- Il primo caso da analizzare è quello di un gioco equo, cioè la probabilità di vincere e di perdere sono uguali, nel nostro caso vorrà dire $p = q$:
  in questa ipotesi la legge $p + q = 1$ diventa $p + p = 2p = 1$ e l'equazione si traduce in:
  $$p(a+1) - \frac{1}{p}p(a) + p(a-1) = 0$$
  si considera l'equazione caratteristica data da
  $$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
  le cui soluzioni sono date da
  $$\lambda_{1,2} = 1,$$
  quindi la soluzione generale dell'equazione alle differenze è:
  $$p(a) = c_1(1)^a + c_2 a(1)^a = c_1 + c_2 a.$$
  Per trovare i valori di c_1 e c_2 si impongono le condizioni $p(0) = 1$ e $p(a+b) = 0$, esse esprimono che la probabilità di rovina del giocatore A sia 1 nel caso abbia esaurito il suo patrimonio e 0 nel caso in cui sia B ad essere rovinato, cioè il patrimonio di A sia salito ad $a + b$:
  $$\begin{cases} p(a) = c_1 + c_2 a \\ p(0) = 1 \\ p(a+b) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$
  La soluzione cercata quindi è:
  $$p(a) = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}.$$
- Il secondo caso è quello di un gioco non equo, cioè la probabilità di vincere e di perdere non sono uguali, nel nostro caso vorrà dire $p \neq q$:
  l'equazione si traduce in:
  $$p(a+1) - \frac{1}{p}p(a) + \frac{q}{p}p(a-1) = 0$$

si considera l'equazione caratteristica data da

$$\lambda^2 - \frac{1}{p}\lambda + \frac{q}{p} = 0$$

le cui soluzioni sono date da

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2p} \pm \frac{1}{2p}\sqrt{1-4pq},$$

dato che $q = 1 - p$ le soluzioni sono:

$$\frac{1}{2p} \pm \frac{1}{2p}\sqrt{1-4p+4p^2} = \frac{1}{2p} \pm \frac{1}{2p}\sqrt{(2p-1)^2} = \frac{1}{2p} \pm \frac{1}{2p}(2p-1)$$

cioè

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = \frac{2(1-p)}{2p} = \frac{q}{p}$$

quindi la soluzione generale dell'equazione alle differenze è:

$$p(a) = c_1 (1)^a + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^a = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

Per trovare i valori di c_1 e c_2 si impongono le condizioni $p(0) = 1$ e $p(a+b) = 0$, esse esprimono, come prima, che la probabilità di rovina del giocatore A sia 1 nel caso abbia esaurito il suo patrimonio e 0 nel caso in cui sia B ad essere rovinato cioè il patrimonio di A salga ad $a+b$:

$$\begin{cases} p(a) = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^a \\ p(0) = 1 \\ p(a+b) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

La soluzione cercata quindi è:

$$p(a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Se si scambiano p, q, a rispettivamente con q, p, b si ottengono le espressioni di $q(a)$:

$$q(a) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} \\ \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} \end{cases} \tag{2.5}$$

e subito si vede che $p(a) + q(a) = 1$ infatti nel caso $p = q$ si vede:

$$\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1,$$

nel caso $p \neq q$:

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} = 1.$$

Si noti che nel caso di un gioco equo la probabilità di rovina dei due giocatori sono inversamente proporzionali ai capitali iniziali.
In particolare abbiamo che l'evento F è il complementare dell'evento E, per cui siamo certi che partendo da capitali iniziali finiti uno dei due giocatori si rovinerà certamente.
Se torniamo nell'ipotesi che il giocatore B sia infinitamente ricco, cioè il capitale b tende a $+\infty$, risulta che

$$\lim_{b \to +\infty} p(a) = 1 \text{ se } p \leq q,$$

e

$$\lim_{b \to +\infty} p(a) = \left(\frac{q}{p}\right)^a \text{ se } p > q.$$

Quindi si può notare che se il gioco è equo e B è infinitamente ricco si è certi che il giocatore A verrà rovinato; mentre nel caso non equo è interessante notare che se il gioco è appena poco favorevole ad A la probabilità che A non si rovini giocando contro un avversario infinitamente ricco può essere molto elevata.

Esempio 2.2. Se $p = 0,51$ e $a = 100$ la probabilità di rovina è

$$p(a) \approx 1,83 \cdot 10^{-2}.$$

Quindi malgrado B sia infinitamente ricco la probabilità che A si rovini è molto bassa, quindi si vede come una minima disparità fra la probabilità di vincita e di perdita abbia forti ripercussioni sulle probabilità di rovina.

2.2.2 Tempo medio di gioco

Indichiamo ora con x il capitale attuale del giocatore A e torniamo ora a considerare le due barriere assorbenti $x = 0$ e $x = a + b$, cioè il gioco si ferma quando uno dei due

giocatori è rovinato.
Una grandezza che ci interessa calcolare è il valore medio della variabile aleatoria

$$T_x = \text{'}\textit{durata della passeggiata uscente da } x\text{'},$$

cioè il tempo medio che si impiega ad arrivare ad una delle barriere assorbenti. Osserviamo che muoversi di un passo dalla situazione x comporta lo spostamento a $x+1$ o a $x-1$ a seconda che si vinca o si perda la manche, sia E l'evento *'il giocatore A vince la manche corrente'*, il tempo medio è dato da:

$$\mathbb{E}(T_x) = \mathbb{E}(T_x|E) \cdot p + \mathbb{E}\left(T_x|\overline{E}\right) \cdot q = p \cdot \mathbb{E}(1 + T_{x+1}) + q \cdot \mathbb{E}(1 + T_{x-1}) \tag{2.6}$$

ovvero, indicando con M_x la speranza matematica di T_x si ottiene:

$$M_x = 1 + pM_{x+1} + qM_{x-1}. \tag{2.7}$$

L'equazione 2.6 la si può interpretare nella maniera seguente: la durata media della passeggiata che parte da x è pari alla durata media della passeggiata sapendo che il giocatore A ha vinto sommata alla durata media nel caso A abbia perso; ognuno di questi due eventi va moltiplicato per la rispettiva probabilità di vincita o di perdita.
L'equazione 2.7 è un'equazione alle differenze finite, del secondo ordine non omogenea; la sua soluzione generale si ottiene sommando la soluzione generale dell'omogenea associata con una soluzione particolare della non omogenea.
Mettiamoci nell'ipotesi in cui $p = q$ dove $1 = p + q = p + p = 2p$, ora risolviamo l'equazione omogenea associata data da:

$$pM_{x+1} - M_x + pM_{x-1} = 0, \tag{2.8}$$

consideriamo l'equazione caratteristica

$$p\lambda^2 - \lambda + p = 0$$

che ha soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p^2}}{2p} = \frac{1}{2p} \pm \frac{\sqrt{1-4p^2}}{2p} = 1,$$

quindi la soluzione generale dell'equazione 2.7 è data da:

$$M_x = c_1 (1)^x + c_2 x (1)^x = c_1 + c_2 x.$$

Ora per cercare la soluzione particolare bisogna tener conto di quanto detto nel capitolo precedente; perciò la soluzione cercata dovrà essere nella forma

$$M_x^p = kx^n$$

e quella che soddisfa l'equazione 2.7 è del tipo

$$M_x^p = kx^2$$

che sostituita nell'equazione 2.7 restituisce

$$pkx^2 + kp + 2kpx - kx^2 + pkx^2 + pk - 2pkx = -1$$

$$2pkx^2 - kx^2 + 2pk = -1$$

$$kx^2\left(2p-1\right) + 2pk = -1$$

ricordando la relazione $2p = 1$ porta a

$$k = -1.$$

Quindi la soluzione particolare di 2.7 è

$$M_x^p = -x^2.$$

La soluzione finale della 2.7 è:

$$M_x = -x^2 + c_1 + c_2 x.$$

Ora imponiamo le condizioni ai limiti $M_0 = M_{a+b} = 0$ che stanno ad indicare il fatto che la durata media del gioco sarà nulla se nello stato attuale ci si trova in una delle due barriere assorbenti; si trova:

$$\begin{cases} M_x = -x^2 + c_1 + c_2 x \\ M_0 = 0 \\ M_{a+b} = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

che diventa

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ -\left(a+b\right)^2 + c_2\left(a+b\right) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

da cui

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = a + b \end{cases} \tag{2.11}$$

così la soluzione è:

$$M_x = x\left(a + b - x\right).$$

Con un procedimento analogo si ricava che nel caso $p \neq q$

$$M_x = \frac{x}{q-p} - \frac{a+b}{q-p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

La cosa interessante da notare è che se i capitali iniziali sono pari ad a e b, nel caso di gioco equo, la speranza matematica della durata del gioco è pari ad $a \cdot b$. Quindi se ad esempio un giocatore ha a disposizione 100 euro e l'altro 1 euro il gioco mediamente dura 100 manche. Questo risultato è per certi versi sorprendente perchè seppure il patrimonio di uno sia esiguo rispetto all'altro la partita mediamente richiederà un numero piuttosto alto di manche per concludersi. In seguito vedremo come 'la rovina del giocatore' possa essere studiata anche come catena di Markov e come si vedrà si raggiungeranno naturalmente gli stessi risultati.

Capitolo 3

Catene di Markov finite

Dopo aver visto come si caratterizzano i processi stocastici ed aver analizzato un problema usando la teoria che essi ci forniscono mettendoci nell'ipotesi di indipendenza ed equiprobabilità, andiamo a descrivere le catene di Markov finite che sono un particolare tipo di processo stocastico. Per prima cosa definiamo lo stato:

Definizione 3.1. Consideriamo un sistema che evolve nel tempo, supponiamo che esso possa assumere i valori contenuti nell'insieme $E = \{x_1, ..., x_N\}$; l'evento $X_n = x_i$ sarà letto come 'il sistema al tempo n si trova nello stato x_i'.

Una volta posto questo si è pronti per dare la definizione di catena di Markov finita.

Definizione 3.2. Consideriamo il processo stocastico dato da $\{X_t; t \in T\}$, esso si definisce catena di Markov finita se è un processo stocastico discreto a parametro discreto per cui si assume l'ipotesi Markoffiana. Più in dettaglio è un processo stocastico per cui valgono le seguenti proprietà:

- $T = \mathbb{N}$,
- tutte le variabili aleatorie X_t hanno lo stesso codominio $E = \{x_1, ..., x_N\}$ finito,
- vale l'ipotesi markoffiana, cioè: per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i, j \in \{1, ..., N\}$ esiste $p_{i,j}(n) \in [0, 1]$, che rappresenta la probabilità di passare dallo stato x_i allo stato x_j, tale che:

$$p_{i,j}(n) = P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i)$$

e questa probabilità è uguale a

$$p_{i,j}\left(n\right) = P\left(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i \wedge X_{n-1} = x_{i_{n-1}} \wedge ... \wedge X_1 = x_{i_1}\right)$$

qualsiasi siano $x_{i_{n-1}}, ..., x_{i_1} \in E$. Quindi lo stato al tempo $n+1$ dipende soltanto dallo stato al tempo n e non dipende dagli stati precedenti.

Osservazione 1. Fissato $i \in \{1, ..., N\}$ la lista ordinata $\left(p_{i,1}\left(n\right), ..., p_{i,N}\left(n\right)\right)$ è la densità condizionale discreta di probabilità della variabile aleatoria X_{n+1} condizionata al fatto che $X_n = x_i$. Essendo una densità di probabilità vale la proprietà:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i,j}\left(n\right) = 1.$$

Definizione 3.3. Una catena di Markov $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice omogenea se per ogni $i \in \{1, ...N\}$, la densità condizionale $p_{i,\bullet}\left(n\right)$ è indipendente da n, cioè la probabilità $P\left(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i\right)$ non dipende dal valore di n, ma soltanto dai valori di i, j; in altre parole, lo stato della catena a un tempo stabilito dipende unicamente dallo stato immediatamente precedente, e non dall'istante dell'osservazione. Quindi per catene di Markov omogenee $p_{i,j}\left(n\right)$ si scriverà come $p_{i,j}$ e si riferirà alla *'probabilità di spostarsi dallo stato x_i allo stato x_j'*.

D'ora in poi parleremo di catene di Markov finite omogenee.

3.1 Matrice di transizione

Definizione 3.4. Si consideri una catena di Markov $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, si definisce matrice di transizione della catena la matrice

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}.$$

In base alla definizione che abbiamo dato di $p_{i,j}$ si ha che:

$$p_{i,j} \geq 0 \ \forall i, \forall j,$$

e

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1$$

perchè ogni riga rappresenza una densità discreta di probabilità.

Definizione 3.5. Una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

si definisce *stocastica* se

$$a_{i,j} \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} = 1 \text{ per } i = 1, 2, ...$$

Di conseguenza ogni matrice di transizione è una matrice stocastica; a ognuna di queste è possibile associare un grafo orientato i cui vertici sono gli stati possibili, gli stati generici x_i, x_j saranno collegati da una freccia qualora $p_{i,j} > 0$.
Vediamo un esempio che chiarisce quanto detto:

Esempio 3.1. Due giocatori A e B disputano varie manche di un gioco; in ciascuna giocata la probabilità che vinca A è p, che vinca B è $q = 1 - p$.
A inizia a giocare con la disponibilità di 1 euro e B di 3 euro. Dopo ogni giocata, chi vince riceve 1 euro dall'avversario. Il gioco termina se uno dei due contendenti rimane senza denaro (uno dei due giocatori è rovinato). Il processo da andare a studiare sarà l'evoluzione nel tempo del patrimonio di un giocatore e per farlo è necessario scrivere la matrice di transizione P.
Gli *stati* si possono descrivere con l'insieme

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

perchè il patrimonio di ogni giocatore può assumere valore minimo 0 qualora sia rovinato oppure valore massimo 4 pari alla somma dei due patrimoni iniziali, costruiamo la matrice per righe e numeriamo gli indici i, j con i numeri $0, 1, 2, 3, 4$ così che sia evidente il passaggio da uno stato all'altro.
Scriviamo la matrice di transizone dal punto di vista del giocatore A:

- la riga $i = 0$ corrisponde all'eventualità di avere un patrimonio pari a 0 all'inizio della manche e quindi di essere rovinati, siccome non è possibile giocare a credito significa che il gioco è concluso e quindi con probabilità 1 si rimarrà allo stato 0, cioè $p_{0,0} = 1$ e $p_{0,j} = 0$ per $j = 1, 2, 3, 4$.

- analogamente accadrà nella riga $i = 4$ dove avendo rovinato B il gioco si ferma e quindi $p_{4,4} = 1$ mentre $p_{4,j} = 0$ per $j = 0, 1, 2, 3$.

- Per le righe $1 \leq i \leq 3$ avviene la giocata, in base al suo esito il patrimonio di A, che parte da i, cambierà passando a $i - 1$ con probabilità q oppure a $i + 1$ con probabilità p. Nessun altro stato può essere raggiunto perchè per ogni vincita o perdita il patrimonio sale o si abbassa di 1 euro. Allora $p_{i,i+1} = p$ e $p_{i,i-1} = q$, tutti gli altri sono nulli.

La matrice di transizione sarà:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come abbiamo detto alla matrice è possibile far corrispondere un grafo orientato che in questo caso avrà la seguente forma

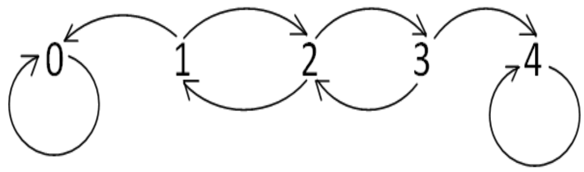

Figura 3.1: *Grafo associato alla matrice di transizione P*

Quindi in questo esempio abbiamo visto come la 'rovina del giocatore' possa essere studiata usando le catene di Markov.
Ora sarà di nostro interesse introdurre tutta una serie di risultati che ci permetteranno di avere ulteriori informazioni sul processo, ad esempio calcolare la probabilità che sia A a vincere, oppure quanto tempo mediamente richiederà il gioco prima di concludersi ed altri.

3.2 Distribuzione iniziale e transizione in più passi

Definizione 3.6. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov, si definisce distribuzione iniziale il vettore

$$\nu^{(0)} = \left(\nu_1^{(0)}, ..., \nu_N^{(0)}\right) \text{ con } 0 \leq \nu_k^{(0)} \leq 1 \text{ per } 1 \leq k \leq N$$

e

$$\sum_{k=1}^{N} \nu_k^{(0)} = 1.$$

Il significato della distribuzione iniziale è il seguente:

$$\nu_k^{(0)} = P\left(X_0 = x_k\right) \text{ con } 1 \leq k \leq N,$$

cioè il vettore $\nu^{(0)}$ ci dice con quali probabilità la variabile aleatoria X_0 assume il valore x_k per ogni k.

Esempio 3.2. Nell'esempio 3.1 per il giocatore A $X_0 = 1$ con probabilità 1 perchè con certezza il gioco partiva con A che possedeva quel capitale, ma in generale non è così.

Osservazione 2. Possiamo dire quindi che la catena di Markov è data quando sono dati:

- la distribuzione iniziale,
- la matrice di transizione.

Come abbiamo detto la matrice di transizione contiene gli elementi per determinare la distribuzione di probabilità di ciascuna X_n in funzione della distribuzione di X_{n-1}. Potrebbe essere interessante conoscere la distribuzione di X_n in funzione di quella di X_0 e per fare questo è necessario conoscere la distribuzione inziale.
Vediamo come ottenere la distribuzione $\nu^{(1)} = \left(\nu_1^{(1)}, ..., \nu_N^{(1)}\right)$, con $\nu_k^{(1)} = P\left(X_1 = x_k\right)$, una volta assegnato $\nu^{(0)}$:

$$\nu_k^{(1)} = P\left(X_1 = x_k\right) = \sum_{i=1}^{N} P\left(X_1 = x_k \wedge X_0 = x_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} P\left(X_0 = x_i\right) P\left(X_1 = x_k | X_0 = x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \nu_i^{(0)} \cdot p_{i,k}.$$

L'espressione che abbiamo ottenuto rappresenta il k-esimo elemento della matrice-riga $\nu^{(0)} \cdot P$. In conclusione la legge di X_1 si ottiene dalla legge iniziale di X_0 moltiplicata per la matrice di transizione; cioè

$$\nu^{(1)} = \nu^{(0)} \cdot P.$$

Verifichiamo che il vettore $\nu^{(1)}$ sia effettivamente una distribuzione, cioè che la somma delle sue componenti sia 1 e le sue componenti siano non negative:

$$\sum_{k=1}^{N} \nu_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \nu_i^{(0)} \cdot p_{i,k} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i^{(0)} \sum_{k=1}^{N} p_{i,k}$$

dato che

$$\sum_{k=1}^{N} p_{i,k} = 1$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{N} \nu_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i^{(0)} = 1.$$

Infine le componenti di $\nu^{(1)}$ sono tutte non nulle perchè sono somme di prodotti di elementi positivi, al più nulli, e di conseguenze anche loro saranno non negative.
Analogamente si trova che

$$\nu^{(2)} = \nu^{(1)} P$$

cioè

$$\nu^{(2)} = \nu^{(0)} P \cdot P = \nu^{(0)} P^2,$$

quindi indicando con $\nu^{(n)}$ il vettore riga che esprime la distribuzione di X_n in funzione di $\nu^{(0)}$ si trova

$$\nu^{(n)} = \nu^{(0)} P^n.$$

Osservazione 3. Queste considerazioni permettono di introdurre anche la formula per la transizione in più passi, cioè:

$$\nu^{(m+n)} = \nu^{(0)} P^{m+n} = \nu^{(0)} P^m \cdot P^n = \nu^{(m)} P^n,$$

dove si vede come a partire dalla distribuzione di X_m si possa ottenere quella di X_{m+n}.

In generale quindi possiamo dire che

$$\nu^{(n+1)} = \nu^{(n)} \cdot P,$$

quindi la matrice di transizione ci permette di passare dalla distribuzione di X_n a quella di X_{n+1} e i suoi elementi

$$p_{i,j} = P\left(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i\right)$$

esprimono la probabilità di spostarsi in un solo passo dallo stato x_i allo stato x_j.
Invece la transizione in n passi da x_i a x_j verifica il seguente Teorema:

Teorema 3.2.1 (Chapman-Kolmogorov). *Le probabilità di transizione in n passi $p_{i,j}^{(n)}$ soddisfano le seguenti equazioni, dette equazioni di Chapman-Kolmogorov,*

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{x_r \in E} p_{i,r}^{(n)} p_{r,j}^{(m)},$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0, \forall x_i, x_j \in E;$$

che si può anche scrivere:

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{x_r \in E} p_{i,r}^{(k)} p_{r,j}^{(n-k)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \forall x_i, x_j \in E$$

Dimostrazione. Fissato $k \in 0, 1, ..., n$ si ha

$$p_{i,j}^{(n)} = P\left(X_n = x_j | X_0 = x_i\right) = P\left(X_n = x_j, \bigvee_{x_r \in E} \left(X_k = x_r\right) | X_0 = x_i\right) =$$

per σ-additività

$$\sum_{x_r \in E} P\left(X_n = x_j, X_k = x_r | X_0 = x_i\right) =$$

per l'ipotesi di Markov e l'omogeneità della catena

$$\sum_{x_r \in E} P\left(X_n = x_j | X_k = x_r, X_0 = x_i\right) P\left(X_k = x_r | X_0 = x_i\right) =$$

$$\sum_{x_r \in E} P\left(X_n = x_j | X_k = x_r\right) P\left(X_k = x_r | X_0 = x_i\right) =$$

$$\sum_{x_r \in E} P\left(X_{n-k} = x_j | X_0 = x_r\right) P\left(X_k = x_r | X_0 = x_i\right) =$$

$$\sum_{x_r \in E} p_{i,r}^{(k)} p_{r,j}^{(n-k)}$$

□

Le equazioni di Chapman-Kolmogorov ci dicono che la probabilita che la catena vada dallo stato x_i allo stato x_j in n passi è la sommatoria al variare di x_r dei prodotti della probabilità di andare dallo stato x_i allo stato intermedio x_r nei primi k passi per la probabilità di andare dallo stato x_r allo stato x_j nei successivi $n - k$ passi.

3.3 Classificazione ed ordinamento degli stati

Ormai è chiaro che lo studio di una catena di Markov possa essere ricondotto allo studio di una matrice stocastica e della sue potenze intere positive. Per prima cosa definiamo una relazione che può instaurarsi fra gli stati di una catena:

Definizione 3.7. Data una catena di Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e due stati x_i,x_j; si dice che x_i *comunica con* x_j se $i = j$ oppure esiste $n > 0$ tale che $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Dunque esiste una probabilità non nulla di poter arrivare in zero, uno o più passi allo stato x_j partendo dallo stato x_i, tale relazione è orientata perchè il fatto che x_i comunichi con x_j non vuol dire affatto che x_j comunichi con x_i; quindi, non è detto che valga la proprietà simmetrica.
Dalla definizione si capisce che $p_{i,i}^{(0)} = 1$; in questo modo si asssume che uno stato x_i comunichi con se stesso 'in zero' passi. Quindi la relazione verifica la proprietà riflessiva.

Proposizione 3.3.1. *La relazione 'comunica con' gode della proprietà transitiva; cioè se sappiamo che*

$$x_i \textit{ comunica con } x_j \textit{ e } x_j \textit{ comunica con } x_k$$
$$\textit{allora}$$
$$x_i \textit{ comunica con } x_k.$$

Dimostrazione. Dire x_i *comunica con* x_j e x_j *comunica con* x_k significa che esiste $n > 0$ tale che $p_{i,j}^{(n)} > 0$ ed esiste $m > 0$ tale che $p_{j,k}^{(m)} > 0$; per cui

$$p_{i,k}^{(n+m)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,k}^{(m)} > 0$$

e ciò prova che lo stato x_i comunica con lo stato x_k. □

Definizione 3.8. Si dice che x_i *bi-comunica* con x_j se $x_i = x_j$ oppure

$$x_i \text{ comunica con } x_j$$
$$\text{e}$$
$$x_j \text{ comunica con } x_i$$

Questa relazione si può interpretare come il fatto che $i = j$ oppure che esista $n > 0$ tale che $p_{i,j}^{(n)} > 0$ ed esista $m > 0$ tale che $p_{j,i}^{(m)} > 0$.
L'assunzione di *bi-comunicatività* di ciascun x_i con se stesso equivale a porre $p_{i,i}^{(0)} = 1$; ciò è utile per rendere valida la seguente Proposizione.

Proposizione 3.3.2. *La relazione di bi-comunicatività è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione.
- La proprietà riflessiva è verificata dato che si assume che $p_{i,i}^{(0)} = 1$, grazie a questo vale il fatto che x_i bi-comunica non se stesso.

- La proprietà simmetrica è verificata perchè se uno stato x_i *bi-comunica* con x_j significa che $p_{i,j}^{(n)} > 0$ e $p_{j,i}^{(m)} > 0$, per n, m opportuni. Di conseguenza se queste probabilità sono positive possiamo affermare che x_j *bi-comunica* con x_i perchè riusciamo a transitare da uno stato all'altro.

- La proprietà transitiva è verificata perchè se x_i *bi-comunica* con x_j e x_j *bi-comunica* con x_k significa che $p_{i,j}^{(n)} > 0$, $p_{j,i}^{(m)} > 0$ per n, m opportuni e $p_{j,k}^{(r)} > 0$, $p_{k,j}^{(s)} > 0$ per r, s opportuni; di conseguenza si avrà

$$p_{i,k}^{(n+r)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,k}^{(r)} > 0$$

e

$$p_{k,i}^{(s+m)} \geq p_{k,j}^{(s)} \cdot p_{j,i}^{(m)} > 0$$

quindi si trova che x_i *bi-comunica* con x_k.

$\square$

Se consideriamo l'insieme degli stati $E = \{x_1, ..., x_N\}$ possiamo quozientarlo con la relazione di equivalenza data dalla *bi-comunicatività* ottenendo così una partizione in classi di equivalenza dell'insieme E.

Osservazione 4. L'insieme quoziente può essere composto da una sola classe di equivalenza o da più classi di equivalenza.

Definizione 3.9. Supponiamo che l'insieme quoziente sia composto da più classi di equivalenza $[x_1], ..., [x_k]$; diremo che dalla classe $[x_i]$ è possibile *raggiungere* la classe $[x_j]$ se ogni elemento della classe $[x_i]$ *comunica* con gli elementi della classe $[x_j]$; cioè ogni elemento della classe $[x_i]$ comunica con qualche stato della classe $[x_j]$.

Come nel caso della relazione *'comunica'* anche questa ha una direzione, cioè se da $[x_i]$ è possibile *raggiungere* $[x_j]$ non può valere il viceversa perchè se anche da $[x_j]$ fosse possibile *raggiungere* $[x_i]$ vorrebbe dire che le classi $[x_i]$ e $[x_j]$ coinciderebbero perchè a quel punto i loro stati *bi-comunicherebbero* fra loro.

Definizione 3.10. Supponiamo che dalla classe $[x_i]$ sia possibile *raggiungere* la classe $[x_j]$, allora diremo che $[x_j]$ è una classe inferiore alla $[x_i]$ e lo indicheremo $[x_j] \prec [x_i]$.

Una volta data questa definizione enunciamo il seguente risultato:

Proposizione 3.3.3. *La relazione che nasce dall'essere una classe inferiore è un ordine parziale; cioè verifica le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.*

Dimostrazione. La relazione di ordine parziale è indotta dalla comunicatività tra gli stati, infatti

- La proprietà riflessiva è verificata banalmente perchè avendo posto $p_{i,i}^{(0)} = 1$ si vede che ogni stato della classe $[x_i]$ comunica con se stesso e quindi è possibile raggiungere la classe $[x_i]$ a partire da se stessa.
- La proprietà antisimmetrica è verificata perchè se da $[x_i]$ si raggiunge $[x_j]$ e da $[x_j]$ si raggiunge $[x_i]$, come abbiamo detto prima, le due classi coincidono dato che i loro i stati bi-comunicano.
- La proprietà transitiva segue dalla transitività della relazione *'comunica con'*, infatti se da $[x_i]$ si raggiunge $[x_j]$ e da $[x_j]$ si raggiunge $[x_r]$ vale il fatto che da $[x_i]$ si raggiunge $[x_r]$, infatti dato che gli stati di $[x_i]$ comunicano con quelli di $[x_j]$ e quelli di $[x_j]$ con quelli di $[x_r]$ allora gli stati di $[x_i]$ comunicano con quelli di $[x_r]$.

□

Dato che abbiamo un ordine parziale possiamo dare anche le seguenti definizioni:

Definizione 3.11. Una classe di equivalenza è *massima* se nessuno dei suoi stati può essere raggiunto da stati fuori dalla classe; analogamente una classe di equivalenza si dice *minima* o *ergodica* se da nessuno dei suoi stati possono essere raggiunti stati di altre classi.

Siccome nel caso delle catene di Markov finite l'insieme E degli stati è finito, esso ammette sempre una classe ergodica e una classe massima, che a volte possono coincidere. Qualora la classe ergodica fosse composta da un unico stato questo prenderebbe il nome di *stato assorbente*, le classi che non sono ergodiche prendono il nome di *classi transitorie* ed i loro elementi si chiameranno *stati transitori*.
Facciamo un esempio per chiarire le definizioni e i concetti appena esposti:

Esempio 3.3. Torniamo all'esempio 3.1 in cui si aveva che l'insieme degli stati era $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e la matrice di transizione era

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso [0] e [4] sono classi ergodiche composte da un solo stato, rispettivamente 0 e 4, perchè abbiamo che dallo stato 0, o equivalentemente dallo stato 4, non è possibile raggiungere altri stati della catena se non se stessi; quindi gli stati 0 e 4 sono stati assorbenti.
Gli stati $1, 2, 3$ fanno parte della stessa classe di equivalenza perchè 1 comunica con 2 e 2 comunica con 1, cioè 1 bi-comunica con 2, analogamente 2 bi-comunica con 3 e allora per la transitività 1 bi-comunica con 3, di conseguenza $1, 2, 3$ fanno parte della stessa classe di equivalenza che denotiamo con [1].
[1] è una classe transitoria perchè dai suoi stati posso raggiungere gli stati delle altre due classi, infatti dallo stato 1 è possibile giungere a 0 e da 3 è possibile giungere a 4, in particolare si tratta di una classe massima perchè nessuno dei suoi stati può essere raggiunto da quelli esterni alla classe dato che 0 e 4 sono stati assorbenti.
Quindi si ha che $[0] \prec [1]$ e $[4] \prec [1]$ mentre [0] e [4] non sono tra loro confrontabili.

L'ordine parziale tra gli stati consente di poter riscrivere la matrice di transizione portandola nella forma canonica data da

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_2 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{R_3} & P_3 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{3}{|c|}{R_4} & P_4 & 0 \\ \multicolumn{4}{|c|}{R_5} & P_5 \end{pmatrix}$$

Figura 3.2: *Matrice di transizione in forma canonica*

dove le sub-matrici quadrate P_i rappresentano le matrici di transizione delle classi $[x_i]$ e le sub-matrici R_i possono presentare elementi tutti nulli oppure no, nel caso in cui R_i abbia tutti elementi nulli significa che $[x_i]$ è ergodica.
Può essere utile notare che se tutti gli elementi di R_i sono nulli lo stesso vale per R_{i-1}.

Esempio 3.4. Continuando lo studio dell'esempio precedente si vede che ordinando gli stati la matrice di transizione si presenta nella forma:

$$P = \begin{pmatrix} \underline{1}| & \underline{0} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{0}| & \underline{1}| & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ q & 0| & 0 & p & 0 \\ 0 & 0| & q & 0 & p \\ 0 & p| & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

cioè risulta nella forma:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{R_3} & \multicolumn{3}{c}{P_3} \end{pmatrix}$$

Figura 3.3: *Matrice per la 'rovina del giocatore' in forma canonica*

Le classi ergodiche [0] e [4] sono ridotte ad un solo elemento perchè si tratta di stati assorbenti, quindi le relative sub-matrici sono:

$$P_1 = 1 \; P_2 = 1.$$

Dato che [4] è assorbente si ha che R_2 è composta da un unico elemento nullo.
Inoltre la sub-matrice di transizione della classe [1] è

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

mentre la sub-matrice R_3 è data da

$$R_3 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Osservazione 5. Le potenze n-esime di una matrice di transizione in forma canonica sono ancora dello stesso tipo; le sub-matrici diagonali P_i^n saranno quindi le potenze n-esime delle sub-matrici diagonali di P.

Quindi abbiamo visto come tra gli stati possa essere indotta una relazione di ordine parziale e come questa permetta di catalogare i vari stati in classi di equivalenza.
Chiudiamo questi risultati che riguardano la classificazione degli stati con una definizione:

Definizione 3.12. Una catena di Markov si definisce *irriducibile* se tutti gli stati *bi-comunicano* fra loro. In tal caso la matrice di transizione associata alla catena si dirà matrice irriducibile.

Cioè la catena si dirà irriducibile se l'insieme E di tutti gli stati è un'unica classe ergodica in cui tutti gli stati *bi-comunicano* fra loro.

3.4 Il tempo di prima visita

Consideriamo per $1 \leq j \leq N$

$$\tau_j(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}; X_n(\omega) = x_j\};$$

e poniamo $\tau_j(\omega) = +\infty$ nel caso in cui l'insieme sopraindicato sia vuoto.
ω indica un generico elemento di Ω che è lo spazio sul quale sono definite le variabili aleatorie X_n; la funzione

$$\tau_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

è una variabile aleatoria perchè per ogni n il sottoinsieme di Ω per cui $\tau_j > n$ è un evento infatti

$$\{\omega \in \Omega; \tau_j(\omega) > n\} = \{\omega \in \Omega; X_1 \neq x_j \wedge ... \wedge X_n \neq x_j\}$$

e siccome ciascun insieme $\{\omega \in \Omega; X_k \neq x_j\}$ per $k = 1, 2, 3, ...$ è un evento, è tale anche la loro intersezione.

Definizione 3.13. Si pone

$$\rho_{i,j} = P(\tau_j < +\infty | X_0 = x_i),$$

che equivale a definire

$$\rho_{i,j} = P(\exists n \geq 1, X_n = x_j | X_0 = x_i).$$

Cioè si pone $\rho_{i,j}$ come la probabilità che la catena visiti prima o poi lo stato x_j partendo dallo stato x_i, in particolare $\rho_{i,i}$ è la probabilità di ritornare sullo stato x_i una volta partiti dallo stesso stato.

Definizione 3.14. Si definiscono stati *ricorrenti* quegli stati che verificano

$$\rho_{i,i} = 1.$$

Cioè se la probabilità di ritornare sullo stato x_i è pari ad 1, tale stato si dirà ricorrente.

In particolare gli stati transitori verificano il fatto che

$$\rho_{i,i} < 1.$$

Proposizione 3.4.1. *Se uno stato x_i è assorbente allora è anche ricorrente.*

Dimostrazione. Un elemento è assorbente se corrisponde ad una classe ergodica ridotta ad un solo elemento, di conseguenza da tale classe non è possibile uscire perchè quello stato non comunica con nessun stato oltre a se stesso, di conseguenza si avrà che

$$P(\tau_i = 1 | X_0 = x_i) = 1,$$

e quindi lo stato x_i è ricorrente. □

Proposizione 3.4.2. *Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una catena di Markov e sia $E = \{x_1, ..., x_N\}$ l'insieme dei suoi stati; allora per ogni $x_i \in E$ e per ogni x_j stato transitorio la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{i,j}^{(n)}$$

è convergente, il che implica la relazione

$$\lim_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0.$$

Se, invece, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{i,j}^{(n)}$$

è divergente, lo stato x_j è ricorrente.

Dimostrazione. Dimostriamo questo risultato nel caso più generale dove gli stati sono un'infinità numerabile da cui poi trarremo le conclusioni per il caso in cui il numero degli stati sia finito.

Introduciamo la notazione $P^i(\bullet) = P(\bullet | X_0 = x_i)$.

Sia $q_{n,m}$ la probabilità che la catena visiti lo stato x_j partendo al tempo 0 da x_i per la prima volta al tempo n e per la seconda al tempo $n+m$, essa vale

$$P^i(X_1 \neq x_j \wedge ... \wedge X_{n-1} \neq x_j \wedge X_n = x_j \wedge X_{n+1} \neq x_j \wedge ... \wedge X_{n+m-1} \neq x_j \wedge X_{n+m} = x_j) =$$

$$= \sum_{j \notin \{h_1, ..., h_{m+n-1}\}} p_{i,h_1} p_{h_1,h_2} \cdot ... \cdot p_{h_{n-1},j} \cdot p_{j,h_{n+1}} \cdot ... \cdot p_{h_{n+m-1},j} =$$

$$P^i(\tau_j = n) P^j(\tau_j = m).$$

Sia $N_j = \#\{n > 0, X_n = x_j\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x_j\}}$, esso rappresenta il numero di visite (eventualmente infinito) che la catena fa allo stato x_j, sia x_i uno stato che comunica con x_j, allora

$$P^i(N_j \geq 2) = \sum_{n,m} q_{n,m} = \sum_{n \geq 1, m \geq 1} P^i(\tau_j = n) P^j(\tau_j = m) =$$

$$\sum_{n \geq 1} P^i(\tau_j = n) \sum_{m \geq 1} P^j(\tau_j = m) = \rho_{i,j}\rho_{j,j}.$$

Ripetendo gli stessi ragionamenti si vede che più in generale si ha

$$P^i(N_j \geq m) = \rho_{i,j}\rho_{j,j}^{m-1} \text{ per } m \geq 1$$

da questa relazione si può calcolare per sottrazione la legge di N_j; se x_j è ricorrente $\rho_{j,j} = 1$ e dunque $P^i(N_j \geq m) = \rho_{i,j}$ per $m \geq 1$. Dunque

$$P^i(N_j = 0) = 1 - \rho_{i,j}$$

e $P^i(N_j = m) = 0$ per $m = 1, 2, ...$; ciò è possibile solo se $P^i(N_j = +\infty) = \rho_{i,j} > 0$.
Se invece lo stato x_j è uno stato transitorio allora $\rho_{j,j} < 1$ e la legge di N_j è data da

$$P^i(N_j = 0) = 1 - \rho_{i,j}$$

$$P^i(N_j = m) = \rho_{i,j}\rho_{j,j}^{m-1}(1 - \rho_{j,j}) \;\; m \geq 1 \tag{3.1}$$

da questo possiamo dedurre che

$$P^i(N_j < +\infty) = \sum_{m=1}^{+\infty} P^i(N_j = m) = 1$$

e dunque

$$P(N_j = +\infty) = 0$$

Dalla 3.1 segue che:

$$\mathbb{E}^i[N_j] = \sum_{k=0}^{+\infty} kP^i(N_j = k) = \rho_{i,j} \sum_{k=1}^{+\infty} k\rho_{j,j}^{k-1}(1 - \rho_{j,j}) = \frac{\rho_{i,j}}{1 - \rho_{j,j}} < +\infty$$

(l'ultima somma si calcola riconducendosi alla speranza matematica di una legge geometrica). Poniamo $K > 0$ e

$$N_j^K = \sum_{n=1}^{K} \mathbf{1}_{\{X_n = x_j\}}$$

che rappresenta il numero di visite che la catena di Markov fa allo stato x_j in un tempo K; è chiaro che $N_j^K \leq N_j$ e

$$\sum_{n=1}^{K} p_{i,j}^{(n)} = \sum_{n=1}^{K} P^i \left(X_n = x_j\right) = \sum_{n=1}^{K} \mathbb{E}^i \left[\mathbf{1}_{\{X_n = x_j\}}\right] =$$

$$\mathbb{E}^i \left[\sum_{n=1}^{K} \mathbf{1}_{\{X_n = x_j\}}\right] = \mathbb{E}^i \left[N_j^K\right] \leq \mathbb{E}^i \left[N_j\right] < +\infty.$$

Dunque per ogni $x_i \in E$ e per ogni stato transitorio x_j la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{i,j}^{(n)}$$

è convergente, il che implica che

$$\lim_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0.$$

Ne segue, per contrapposizione, che se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{i,j}^{(n)}$$

diverge allora x_j è ricorrente.
In particolare se l'insieme degli stati E è finito, e quindi l'insieme degli stati transitori T è finito, si indica con N_T il numero di visite che la catena fa in T, si ha

$$N_T = \sum_{x_j \in T} N_j$$

e dunque anche N_T è una variabile aleatoria che assume solo valori finiti. Dunque la catena esce prima o poi da T per non tornarvi più. Infine

$$\lim_{n \to +\infty} P^i \left(X_n \in T\right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j \in T} p_{i,j}^{(n)} = 0. \tag{3.2}$$

□

Osservazione 6. La dimostrazione illustra che una catena di Markov finita ha almeno uno stato ricorrente, infatti se tutti gli stati fossero transitori si avrebbe che $T = E$ e dunque

$$\sum_{x_j \in T} p_{i,j}^{(n)} = \sum_{x_j \in E} p_{i,j}^{(n)} = 1$$

in contraddizione con la 3.2. Ricordando che x_i comunica con x_j se e solo se $i = j$ o esiste qualche valore di n per cui $p_{i,j}^{(n)} > 0$, questo ragionamento implica che in una catena di Markov finita ogni stato x_i comunica con almeno uno stato ricorrente x_j (eventualmente $j = i$).

Vediamo ora una proposizione che caratterizza gli stati transitori e ricorrenti in termini della relazione *'comunica con'*:

Proposizione 3.4.3. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov,*

- *se esiste uno stato x_i tale che x_j comunica con x_i ma x_i non comunica con x_j allora x_j è transitorio.*
- *se x_i bi-comunica con x_j e x_i è ricorrente allora anche x_j è ricorrente e $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} = 1$.*

Dimostrazione. • Supponiamo che x_j *comunichi con* x_i e che x_i *non comunichi con* x_j; sia

$$m = \min\left\{ s \in \mathbb{N}; p_{j,i}^{(s)} > 0 \right\},$$

esistono quindi degli stati $x_{h_1}, ..., x_{h_{m-1}}$ tali che

$$p_{j,h_1} \cdot p_{h_1,h_2} \cdot ... \cdot p_{h_{m-1},i} > 0.$$

Inoltre possiamo supporre che $x_{h_1}, ..., x_{h_{m-1}}$ siano distinti da x_j: se fosse $x_{h_k} = x_j$ allora sarebbe

$$p_{j,h_{k+1}} \cdot ... \cdot p_{h_{m-1},i} > 0$$

e dunque

$$p_{j,i}^{(m-k)} > 0$$

contro l'ipotesi che sia m il più piccolo intero per il quale $p_{j,i}^{(m)} > 0$.
Dunque l'evento

$$A = \left(X_1 = x_{h_1}, ..., X_{m-1} = x_{h_{m-1}}, X_m = x_i\right)$$

è tale che

$$P(A) > 0.$$

Mostriamo che

$$P\left((\tau_j < +\infty) \cap A |\, X_0 = x_j\right) = 0; \tag{3.3}$$

ciò concluderà la dimostrazione perchè da 3.3 segue che $(\tau_j < +\infty) \subset A^C$ e dunque che $\rho_{j,j} = P(\tau_j < +\infty | X_0 = x_j) \leq 1 - P(A) < 1$.
Si ha che

$$P\left((\tau_j < +\infty) \cap A | X_0 = x_j\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left((\tau_j = k) \cap A | X_0 = x_j\right);$$

ma la somma vale 0 perchè $(\tau_j = k) \cap A = \emptyset$ se $k < m$, poichè abbiamo visto che se A è verificato la catena non torna in j prima del tempo m, mentre se $k \geq m$, poichè $(\tau_j = k) \subset (X_k = x_j)$, usando la proprietà di Markov e il fatto che $p_{i,j}^{(n)} = 0$ per ogni n si ha

$$P\left((\tau_j = k) \cap A | X_0 = x_j\right) = P\left((\tau_j = k) | A \wedge X_0 = x_j\right) P\left(A | X_0 = x_j\right) =$$

$$P\left(\tau_j = k | X_0 = x_j, X_1 = x_{h_1}, ..., X_m = x_i\right) P\left(A | X_0 = x_j\right) = p_{i,j}^{(k-m)} P\left(A | X_0 = x_j\right) = 0.$$

Il fatto che $P\left((\tau_j < +\infty) \cap A | X_0 = x_j\right) = 0$ è abbastanza chiaro anche intuitivamente, perchè se A è verificato, allora la catena passa per x_i e dunque non può più tornare in x_j perchè x_i non comunica con x_j.

- Dal fatto che x_i *bi-comunica con* x_j segue che esistono m, n tali che

$$p_{i,j}^{(n)} > 0 \text{ e } p_{j,i}^{(m)} > 0,$$

pertanto dalle equazioni di Chapman-Kolmogoroff si ha che per ogni intero k

$$p_{j,j}^{(n+k+m)} \geq p_{j,i}^{(n)} p_{i,i}^{(k)} p_{i,j}^{(m)}.$$

Ciò accade perchè, $p_{j,j}^{(n+k+m)}$ è la probabilità di andare da x_j a x_j in $n+k+m$ passi, mentre

$$p_{j,i}^{(n)} p_{i,i}^{(k)} p_{i,j}^{(m)}$$

è la probabilità di andare da x_j a x_j in $n+k+m$ passi attraverso un percorso (tra tutti i possibili) che va da x_j a x_i in n passi, quindi da x_i a x_i in ulteriori k passi e da x_i a x_j in ulteriori m passi. Dalla precedente formula segue

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_{j,j}^{(n+k+m)} \geq \sum_{k=0}^{+\infty} p_{j,i}^{(n)} p_{i,i}^{(k)} p_{i,j}^{(m)} =$$

$$p_{j,i}^{(n)} p_{i,j}^{(m)} \sum_{k=0}^{+\infty} p_{i,i}^{(k)} = +\infty.$$

Quindi, dal Teorema 3.4.2 si ha che x_j è ricorrente.

□

Corollario 3.4.4. *Se l'insieme degli stati E è finito allora $x_j \in E$ è transitorio se e solo se esiste uno stato x_i tale che x_j comunica con x_i ma x_i non comunica con x_j.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.4.3 se esite uno stato x_i tale che x_j *comunica con* x_i ma x_i *non comunica con* x_j allora x_j è transitorio (sia che l'insieme E sia finito o no). Viceversa se E è finito allora sappiamo che esiste almeno uno stato ricorrente con cui x_j comunica. Certamente x_i non comunica con x_j perchè, per la Proposizione 3.4.3, se così fosse anche x_j sarebbe ricorrente. □

Pertanto, tutti gli stati di una classe sono dello stesso tipo, o tutti ricorrenti o tutti transitori, quindi possiamo dire:

Proposizione 3.4.5. *Sia C una classe formata da elementi tutti ricorrenti, allora la classe C è ergodica.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.4.3 sappiamo che se x_i è ricorrente e *bi-comunica con* x_j allora x_j è ricorrente. Di conseguenza all'interno della classe C si passa da stato ricorrente a stato ricorrente e non è possibile fare altrimenti. Quindi la classe C è ergodica perchè una volta che ci siamo entrati possiamo spostarci solo su stati ricorrenti che appartengono tutti a C. □

Quindi possiamo dire che uno stato transitorio x_i è caratterizzato dal fatto che se x_i *comunica* con x_j allora x_j *non comunica con* x_i e, per contrapposizione, uno stato x_i è ricorrente se e solo se per ogni stato x_j, se x_i *comunica con* x_j allora x_j *comunica con* x_i.
Utilizzando sempre l'esempio 3.1 vediamo che gli stati transitori verificano che $\rho_{i,i} < 1$ nel caso di stati transitori e che $\rho_{i,i} = 1$ negli stati assorbenti dato che sono anche ricorrenti.

Esempio 3.5. Tornando all'esempio della *'rovina del giocatore'* sappiamo che la matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e che i capitali iniziali dei due giocatori sono rispettivamento 1 e 3 euro.
Supponiamo $p = q = \frac{1}{2}$ così che la matrice di transizione diventi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come si evince banalmente dalla matrice di transizione

$$\rho_{0,0} = \rho_{4,4} = 1$$

e troviamo conferma del fatto che stati assorbenti siano anche ricorrenti.
Calcoliamo ora $\rho_{1,1}$, per farlo è necessaria la conoscenza di $\rho_{3,1}$ che calcoleremo usando il seguente schema

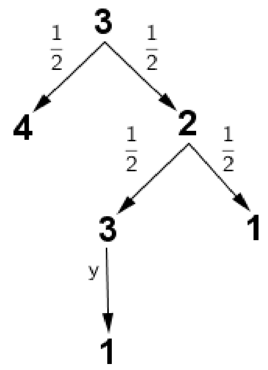

Figura 3.4: *Calcolo di* $\rho_{3,1}$

che esprime le probabilità di passare da uno stato all'altro; se indichiamo con y $\rho_{3,1}$ avremo che

$$y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y$$

da cui si ricava che

$$y = \rho_{3,1} = \frac{1}{3}.$$

Ora possiamo calcolare $\rho_{1,1}$ usando il seguente grafo

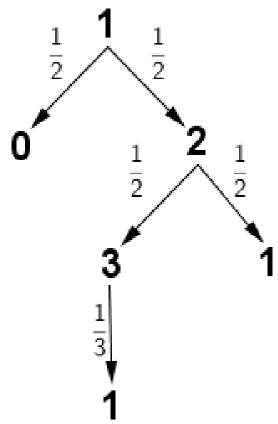

Figura 3.5: *Calcolo di* $\rho_{1,1}$

da cui si vede che

$$\rho_{1,1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Analogamente si procede per il calcolo di $\rho_{2,2}$ e $\rho_{3,3}$.
Osservando i risultati ottenuti per i casi trattati si trova conferma del fatto che per gli stati transitori valga il fatto che $\rho_{i,i} < 1$ e per quelli assorbenti $\rho_{i,i} = 1$.

Risulta interessante studiare la probabilità che la catena di Markov entri in una classe ergodica, cioè che la variabile aleatoria assuma il valore di uno stato che appartiene ad una classe ergodica. Questo tipo di studi rientrano sotto il nome di 'problemi di assorbimento' in cui ci si occupa di calcolare tale probabilità.

3.5 Problemi di assorbimento

In questa sezione tratteremo il calcolo della probabilità di entrare in una classe ergodica risolvendo appunto quelli che sono i problemi di assorbimento. Questo tipo di studio è interessante perchè arriveremo a dire che la probabilità che il sistema raggiunga una classe ergodica in un numero finito di passi è pari a 1.
Consideriamo C una classe ergodica; se $X_0 = x_i \in C$ allora $X_n \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dato che da una classe ergodica non si può uscire (in maniera equivalente se per un certo $k \in \mathbb{N}$ accade che $X_k \in C$ allora $X_n \in C$ $\forall n \geq k$). Se $X_0 \in C'$ con C' classe ergodica diversa da C, allora in nessun istante di tempo successivo n si avrà che $X_n \in C$.
L'unico caso interessante è il caso in cui X_0 appartiene ad una classe transitoria e quindi ha senso calcolare la probabilità:

$$\lambda_i = P\left(\exists n \in \mathbb{N}, X_n \in C | X_0 = x_i\right).$$

Per quanto appena detto si avrà che $\lambda_i = 1$ se $x_i \in C$ e $\lambda_i = 0$ se $x_i \in C'$. Inoltre se $x_i \notin C$ ed è ricorrente, allora $\rho_{i,i} = 1$, quindi deve essere ancora $\lambda_i = 0$ perchè la transizione a un elemento di C impedisce il ritorno allo stato x_i, cosicchè se $\lambda_i > 0$ allora $\rho_{i,i} < 1$.
Facciamo un esempio di quanto detto riferendoci sempre alla 'rovina del giocatore':

Esempio 3.6. Abbiamo già visto che le classi ergodiche nel caso della rovina del giocatore sono [0] ridotta al solo stato 0 e [4] anch'essa ridotta al solo elemento 4. Prendiamo in considerazione la classe [0], il calcolo della probabilità λ_i riferita a questa classe corrisponde al trovare la probabilità che il giocatore arrivi alla rovina condizionata dal fatto che al momento iniziale dispone di i euro.

Teorema 3.5.1. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov ed $E = \{x_1, ..., x_N\}$ l'insieme degli stati, sia $C \subset E$ una classe ergodica e sia T l'insieme degli stati transitori che non appartengono a C.*
Allora per ogni i tale che $x_i \in T$ risulta:

$$\lambda_i = \sum_{x_h\in C} p_{i,h} + \sum_{x_j\in T} p_{i,j}\lambda_j. \tag{3.4}$$

Nel caso delle catene di Markov finite che abbiamo preso in analisi la soluzione a tale sistema lineare è unica, perciò la probabilità di assorbimento è caratterizzata dal sistema 3.4.

Come si evince dall'enunciato la probabilità λ_i di assorbimento nella classe C a partire da uno stato x_i si ottiene dalla risoluzione di un sistema lineare.

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che λ_i è soluzione del sistema lineare 3.4.
Sia

$$\tau = \inf \{n \in \mathbb{N}, X_n \in C\}$$

che rappresenta il primo istante $n \geq 1$ in cui la catena entra nella classe C, per convenzione si pone $\tau = +\infty$ se l'insieme al secondo membro è vuoto. τ è una variabile aleatoria, perchè se $k \in \mathbb{N}$ allora

$$\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) > k\} = \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) \notin C, ..., X_k(\omega) \notin C\}$$

è un evento, in quanto intersezione di eventi; e dunque è un evento anche il complementare, cioè

$$\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq k\}.$$

Si nota che

$$\lambda_i = P(\tau < +\infty | X_0 = x_i)$$

e che

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\tau = n | X_0 = x_i).$$

Quindi

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\tau = n | X_0 = x_i\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(X_1 \in T \wedge ... \wedge X_{n-1} \in T \wedge X_n \in C | X_0 = x_i\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x_{h_1} \in T, ..., x_{h_{n-1}} \in T, x_j \in C} p_{i,h_1} \cdot p_{h_1,h_2} \cdot ... \cdot p_{h_{n-1},j}$$

Poniamo ora

$$\sum_{x_{h_1} \in T, ..., x_{h_{n-1}} \in T, x_j \in C} p_{i,h_1} \cdot p_{h_1,h_2} \cdot ... \cdot p_{h_{n-1},j} = g_i^{(n)}$$

così che

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{+\infty} g_i^{(n)};$$

quindi

$$g_i^{(n)} = P\left(\tau = n | X_0 = x_i\right).$$

Ora notiamo che

$$g_i^{(1)} = \sum_{x_h \in C} p_{i,h};\ g_i^{(n+1)} = \sum_{x_r \in T} p_{i,r} g_r^{(n)}.$$

Abbiamo quindi che

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{+\infty} g_i^{(n)} = g_i^{(1)} + \sum_{n=2}^{+\infty} g_i^{(n)} = g_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} g_i^{(n+1)} = g_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{x_r \in T} p_{i,r} g_r^{(n)} =$$

$$\sum_{x_h \in C} p_{i,h} + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \sum_{n=1}^{+\infty} g_r^{(n)} = \sum_{x_h \in C} p_{i,h} + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \lambda_r.$$

Ora dimostriamo l'unicità della soluzione del sistema 3.4; cioè se consideriamo una soluzione w_i data da

$$w_i = \sum_{x_h \in C} p_{i,h} + \sum_{x_j \in T} p_{i,j} w_j \tag{3.5}$$

dobbiamo provare che $w_i = \lambda_i \ \forall i \in T$.

Quindi sia $\{w_i; x_i \in T\}$ una soluzione di 3.5 e sia τ il primo istante in cui la catena entra nella classe ergodica C in modo che sia $\lambda_i = P\left(\tau < +\infty | X_0 = x_i\right).$

Sostituendo nel secondo membro di 3.5 il valore di w_j si ottiene:

$$w_i = \sum_{x_h \in C} p_{i,h} + \sum_{x_j \in T} \sum_{x_h \in C} p_{i,j} p_{j,h} + \sum_{x_h \in T} \sum_{x_j \in T} p_{i,h} p_{h,j} w_j \tag{3.6}$$

La somma dei primi due termini vale $P(\tau \leq 2)$, rimane da chiarire il significato del terzo termine: se $x_j \in T$ allora $p_{h,j} = 0$ a meno che non sia $x_h \in T$; dunque se $x_i, x_j \in T$:

$$p_{i,j}^{(2)} = \sum_{x_h \in E} p_{i,h} p_{h,j} = \sum_{x_h \in T} p_{i,h} p_{h,j};$$

quindi 3.6 si può riscrivere come:

$$w_i = P(\tau \leq 2) + \sum_{x_j \in T} p_{i,j}^{(2)} w_j.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento si ricava per ogni n che:

$$w_i = P(\tau \leq n) + \sum_{x_j \in T} p_{i,j}^{(n)} w_j \tag{3.7}$$

poiché ogni $x_j \in T$ è transitorio sappiamo dalla proposizione 3.4.2 che

$$\lim_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0,$$

e passando al limite si ottiene

$$w_i = \lim_{n \to +\infty} P(\tau \leq n) = P(\tau < +\infty) = \lambda_i$$

cioè la soluzione del sistema 3.4 è unica. □

Quindi le probabilità di assorbimento λ_i sono caratterizzate dal fatto di essere le soluzioni del sistema 3.4; in particolare se la classe ergodica C è composta da tutti gli stati ricorrenti si vede subito che $\lambda_i = 1$ è soluzione del sistema 3.4, perchè

$$\sum_{x_h \in C} p_{i,h} + \sum_{x_j \in T} p_{i,j} = \sum_{x_h \in E} p_{i,h} = 1.$$

Dunque con probabilità 1 la catena esce dall'insieme degli stati transitori per non farvi più ritorno.

Esempio 3.7. Torniamo all'esempio della rovina del giocatore in cui la matrice di transizione nel caso in cui $p = q = \frac{1}{2}$ è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi le probabilità di assorbimento nella classe ergodica [0] si calcolano risolvendo il sistema lineare nelle incognite λ_1, λ_2, λ_3:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_2 \end{cases}$$

che restituisce le soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{3}{4},\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = \frac{1}{4}.$$

Nel capitolo precedente avevamo visto che il problema della rovina del giocatore poteva essere trattato come processo stocastico a cui si imponeva l'ipotesi di equiprobabilità ed indipendenza, i risultati relativi alla probabilità di rovinarsi nel caso in cui il giocatore A disponesse di un capitale a era data da

$$\lambda_a = \frac{b}{a+b},$$

naturalmente otteniamo gli stessi risultati se il problema viene trattato come catena di Markov come indicano i risultati riportati sopra.

Analogamente il caso in cui $p \neq q$ la matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le probabilità di assorbimento nella classe ergodica [0] si calcolano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 = q + p\lambda_2 \\ \lambda_2 = q\lambda_1 + p\lambda_3 \\ \lambda_3 = q\lambda_2 \end{cases}$$

che restituisce le soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{q\,(1-pq)}{1-2pq},\ \lambda_2 = \frac{q^2}{1-2pq},\ \lambda_3 = \frac{q^3}{1-2pq}.$$

Anche in questo caso le soluzioni ricalcano esattamente quelle trovate nel capitolo precedente in cui il problema era trattato come processo stocastico con la solita ipotesi di equiprobabilità ed indipendenza. Infatti limitandoci al caso di λ_1 si aveva che

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)^4}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^4} = \frac{qp^3 - q^4}{p^4 - q^4} =$$

$$\frac{q\,(p^2+q^2+pq)}{(p^2+q^2)\,(p+q)}$$

ma dato che $p + q = 1$ si ottiene

$$\lambda_1 = \frac{q\,(1-pq)}{1-2pq},$$

che ovviamente coincide con la soluzione che ci fornisce il sistema lineare.

Proviamo ora il risultato che avevamo anticipato all'inizio del capitolo, cioè che prima o poi la catena lascerà l'insieme degli stati transitori:

Teorema 3.5.2. *In una catena di Markov la probabilità che il sistema, da qualunque stato transitorio parta, raggiunga in un numero finito di passi una classe ergodica è pari a* 1*.*

Dimostrazione. Sia x_k lo stato da cui parte il sistema, se x_k appartiene ad una classe ergodica il sistema si trova già in una classe ergodica da cui non potrà più uscire.
Se invece lo stato x_k è transitorio, allora la classe $[x_k]$ ammette almeno una classe inferiore, ed è positiva la probabilità che da x_k si raggiunga, mediante passaggi attraverso

classi inferiori alla $[x_k]$, almeno una classe ergodica in almeno n_k passi.
L'insieme E degli stati è finito, quindi posto

$$n = \max \{n_k; x_k \in E\},$$

si conclude che, qualunque sia x_k, è positiva la probabilità di raggiungere in al più n passi una classe ergodica; esiste cioè un numero $p > 0$ tale che la probabilità che il sistema raggiunga in n passi, al più, uno stato ergodico è non inferiore a p, da qualunque stato il sistema sia partito.
Conseguentemente la probabilità che il sistema non raggiunga uno stato ergodico entro n passi è non superiore a $1-p$, che è minore di 1; la probabilità, allora, di non raggiungere uno stato ergodigo in hn passi non supera $(1-p)^h$ che riesce infinitesima al divergere di h. Il teorema è così provato. $\square$

Quindi abbiamo visto che, nel caso in cui l'insieme degli stati sia finito, se lo stato x_k da cui parte al catena appartiene a una classe ergodica la catena vi rimane; se x_k appartiene all'insieme degli stati transitori la catena lo abbandonerà per entrare nella classe ergodica degli elementi ricorrenti, oppure un'altra.

3.6 Il tempo medio di assorbimento

In questa sezione tratteremo il calcolo del tempo medio che una catena di Markov impiega ad entrare nella classe ergodica degli stati ricorrenti. Abbiamo già visto che nel caso di catene di Markov finite la probabilità di entrare in una qualsiasi classe ergodica è pari a 1; ora siamo interessati a calcolare il numero medio di passi necessari per raggiungere la classe degli stati ricorrenti che, come abbiamo visto, è ergodica.
Sia C la classe degli stati ricorrenti e T l'insieme degli stati transitori, dato che con probabilità 1 si raggiunge C possiamo dire che

$$\tau = \inf \{n \in \mathbb{N}, X_n \in C\}$$

è finita, ossia non ha $+\infty$ tra i valori ammissibili con probabilità non nulla.
Sia $E = \{x_1, ..., x_N\}$ l'insieme degli stati, per $1 \leq i \leq N$ poniamo

$$\tau_i = \mathbb{E}^i [\tau] = \mathbb{E} [\tau | (X_0 = x_i)].$$

Per convenzione poniamo $P^i = P(\bullet | X_0 = x_i)$, ricordiamo che

$$g_i^{(n)} = P\left(X_1 \in T \wedge X_2 \in T \wedge ... \wedge X_{n-1} \in T \wedge X_n \in C | X_0 = x_i\right) = P^i\left(\tau = n\right),$$

questo risultato ci è utile per descrivere τ_i che si ottiene

$$\tau_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n P^i\left(\tau = n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n g_i^{(n)}.$$

Prima di mostrare il calcolo dei tempi medi di assorbimento è necessario un Lemma

Lemma 3.6.1. *Sia T l'insieme degli stati transitori di una catena di Markov e siano*

$$u_i^{(n)} = P\left(X_n \in T \wedge ... \wedge X_1 \in T | X_0 = x_i\right)$$

la probabilità di passare per stati transitori una volta partiti dallo stato transitorio x_i per un tempo n, e

$$u_i = P\left(\bigcap_{n \geq 1} \left(X_n \in T\right) | X_0 = x_i\right)$$

la probabilità di fare la stessa cosa ma per un tempo infinito.
Allora per ogni stato transitorio x_i la successione $\left(u_i^{(n)}\right)_{n \geq 0}$ è decrescente e

$$\lim_{n \to +\infty} \left(u_i^{(n)}\right) = u_i.$$

Inoltre la famiglia di numeri reali $\left(u_i\right)_{i \in T}$ soddisfa le equazioni

$$u_i = \sum_{x_j \in T} p_{i,j} u_j, \tag{3.8}$$

se l'insieme T degli stati transitori è finito, allora l'unica soluzione del sistema di equazioni 3.8 è

$$u_i = 0 \ \forall i \in T.$$

Osservazione 7. Se l'insieme degli stati è finito allora $u_i = 0$ perchè in tal caso abbiamo già visto che con probabilità 1 la catena viene assorbita in una classe ergodica.

Dimostrazione. La successione è ovviamente decrescente poichè le $\left(u_i^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ rappresentano le probabilità di una successione decrescente di eventi. Inoltre, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$u_i^{(n+1)} = \sum_{x_j \in T} p_{i,j} u_j^{(n)}.$$

La 3.8 segue passando al limite.
Se l'insieme T è finito, allora, iterando la 3.8 abbiamo

$$u_i = \sum_{x_j \in T} p_{i,j} u_j = \sum_{x_j, x_l \in T} p_{i,j} p_{j,l} u_l \leq \sum_{x_l \in T} p_{i,l}^{(2)} u_l.$$

Pertanto, iterando la 3.8 n volte, troviamo le diseguaglianze

$$|u_i| \leq \sum_{x_j \in T} p_{i,j}^{(n)} |u_j| \leq \max_{x_j \in T} \{|u_j|\} \sum_{x_j \in T} p_{i,j}^{(n)}.$$

Grazie alla proposizione 3.4.2, la conclusione segue facendo tendere n all'infinito. □

Il calcolo dei tempi medi τ_i è simile a quello delle probabilità di assorbimento λ_i, infatti:

Teorema 3.6.2. *Sia C la classe degli stati ricorrenti, T quella degli stati transitori; τ_i e $g_i^{(n)}$ definiti come sopra. Allora:*

1. *Ogni τ_i ha valore finito,*

2. *I numeri τ_i soddisfano il sistema lineare*

$$\tau_i = 1 + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \tau_r \tag{3.9}$$

ovvero

$$1 = \tau_i - \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \tau_r$$

3. *Il sistema 3.9 ha una sola soluzione, quindi caratterizza i valori di τ_i.*

Dimostrazione. 1. Dato che

$$\tau = \inf \{n \in \mathbb{N}, X_n \in C\}$$

non ammette $+\infty$ tra i suoi valori è chiaro che

$$\tau_i = \mathbb{E}^i[\tau]$$

non può assumere il valore $+\infty$ e quindi

$$\tau_i < +\infty.$$

2.
$$\tau_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n g_i^{(n)} = g_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, g_i^{(n+1)} =$$

$$g_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} g_i^{(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} n g_i^{(n+1)}$$

dato che

$$g_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} g_i^{(n+1)} = 1$$

si ottiene

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n g_i^{(n+1)}$$

dato che $g_i^{(n+1)} = \sum_{x_r \in T} p_{i,r} g_r^{(n)}$ si ottiene

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{x_r \in T} p_{i,r} g_r^{(n)}$$

scambiando l'ordine delle sommatorie

$$\tau_i = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{x_r \in T} p_{i,r} g_r^{(n)} = 1 + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \sum_{n=1}^{+\infty} n g_r^{(n)} = 1 + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \tau_r.$$

3. Supponiamo che T sia l'insieme degli stati transitori e che $\{\tau_i; x_i \in T\}$, $\{w_i; x_i \in T\}$ siano due soluzioni distinte del sistema 3.9; allora la loro differenza $\{\tau_i - w_i; x_i \in T\}$ è data da

$$\tau_i - w_i = \sum_{x_r \in T} p_{i,r} (\tau_r - w_r).$$

Dato che il numero degli stati è finito, per il Lemma 3.6.1 abbiamo che l'unica soluzione di 3.8 è quella nulla, cioè

$$\tau_i - w_i = 0 \ \forall x_i \in T$$

e

$$\tau_i = w_i \ \forall x_i \in T,$$

cioè la soluzione al sistema 3.9 è unica.

□

Esempio 3.8. Continuiamo lo studio del problema della rovina del giocatore di cui sappiamo la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ora calcoliamo il tempo medio di assorbimento della catena nella classe ergodica [0], che equivale a calcolare il tempo di assorbimento in [4], risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \tau_1 = 1 + \frac{1}{2}\tau_2 \\ \tau_2 = 1 + \frac{1}{2}\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_3 \\ \tau_3 = 1 + \frac{1}{2}\tau_2 \end{cases}$$

che restituisce le soluzioni

$$\tau_1 = 3, \ \tau_2 = 4, \ \tau_3 = 3.$$

Vediamo di studiare questa catena di Markov da un punto di vista più generale così da mettere in luce un risultato interessante.

Mettiamoci nel caso generico in cui i patrimoni dei due giocatori siano a e b per cui i due elementi assorbenti, che rappresentano le uniche due classi ergodiche, sono $[0]$ e $[a + b]$ mentre gli stati $1, ..., a + b - 1$, che sono transitori, sono tutti contenuti in un' unica classe. Rimaniamo nal caso in cui $p = q = \frac{1}{2}$ e quindi la matrice di transizione sarà di ordine $a + b + 1$ e nella forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & ... & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 2 = 2\tau_1 - \tau_2 \\ 2 = 2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3 \\ ... \\ 2 = 2\tau_1 - \tau_{i-1} - \tau_{i+1} \\ ... \\ 2 = 2\tau_{a+b-2} - \tau_{a+b-3} - \tau_{a+b-1} \\ 2 = 2\tau_{a+b-1} - \tau_{a+b-2} \end{cases} \tag{3.10}$$

Dalla prima equazione si ricava

$$\tau_2 = 2\tau_1 - 2$$

e allora dalla seconda

$$2 = 4(\tau_1 - 1) - \tau_1 - \tau_3;\ \tau_3 = 3\tau_1 - 6;$$

e ancora, dalla terza

$$2 = 2\tau_3 - \tau_2 - \tau_4;\ 2 = 6\tau_1 - 12 - 2\tau_1 + 2 - \tau_4;\ \tau_4 = 4\tau_1 - 12.$$

I risultati ottenuti suggeriscono una regola per τ_i in funzione di τ_1 :

$$\tau_i = i\tau_1 - i(i-1),\ 1 \leq i \leq a + b - 1. \tag{3.11}$$

La validità di 3.10 si prova per induzione, supponendola vera per un determinato valore di i e per gli indici precedenti, e mostrando che vale anche per l'indice $i+1$. Dall'equazione $2 = 2\tau_i - \tau_{i-1} - \tau_{i+1}$ ricaviamo

$$\tau_{i+1} = 2\left[i\tau_1 - i\left(i-1\right)\right] - \left[\left(i-1\right)\tau_1 - \left(i-1\right)\left(i-2\right)\right] - 2 =$$

$$\left(i+1\right)\tau_1 - 2i^2 + 2i - i^2 - 3i = \left(i+1\right)\tau_1 - i^2 - i = \left(i+1\right)\tau_1 - \left(i+1\right)i$$

che corrisponde alla 3.11 con i sostituito da $i+1$.
La 3.11, applicata per τ_{a+b-1} e τ_{a+b-2} nell'ultima equazione di 3.10 dà

$$\left(a+b\right)\tau_1 + a + b - a^2 - 2ab - b^2 = 0$$

dalla quale si ricava

$$\tau_1 = a + b - 1$$

e adesso da 3.11

$$\tau_i = i\left(a+b-1\right) - i\left(i\right) = i\left(a+b-i\right),\ 1 \leq i \leq a+b-1.$$

In particolare

$$\tau_a = ab;$$

questo è il tempo medio per la rovina di uno dei due giocatori con capitali iniziali a e b.
L'esempio numerico trova conferma in quanto abbiamo detto, infatti se $a = 1$ e $b = 3$ si era trovato $\tau_1 = 1 \cdot 3 = 3$ e così via.
É interesante notare che se $a = 1$ e $b = 99$ allora la durata media della partita sarà di 99 mani malgrado $\lambda_a = \frac{b}{a+b} = \frac{99}{100} = 99\%$; quindi il giocatore B conquisterà quasi certamente la posta in gioco, ma A mediamente resiste molto a lungo!

3.7 Probabilità di assorbimento entro un tempo stabilito

Talvolta si è interessati a calcolare la probabilità che, partendo da uno stato x_i, l'asssorbimento nella classe ergodica C di tutti gli stati ricorrenti abbia avuto luogo prima di un certo tempo n, cioè

$$\phi_i\left(n\right) = P\left(\tau \leq n | X_0 = x_i\right).$$

Ricordando che avevamo indicato

$$g_i^{(n)} = P(\tau = n | X_0 = x_i)$$

e che detto T il complementare di C risulta per ogni k intero positivo

$$g_i^{(k+1)} = \sum_{x_r \in T} p_{i,r} g_r^{(k)}.$$

Inoltre

$$\phi_i(1) = g_i^{(1)} = P(\tau = 1 | X_0 = x_i) = \sum_{x_j \in C} p_{i,j}.$$

Allora

$$P(\tau \leq n+1 | X_0 = x_i) = \phi_i(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} g_i^{(k)} = g_i^{(1)} + \sum_{k=2}^{n+1} g_i^{(k)} =$$

$$\phi_i(1) + \sum_{k=1}^{n} g_i^{(k+1)} = \phi_i(1) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{x_r \in T} p_{i,r} g_r^{(k)} =$$

$$\phi_i(1) + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \sum_{k=1}^{n} g_r^{(k)} = \phi_i(1) + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \phi_r(n).$$

In definitiva

$$\phi_i(n+1) = \phi_i(1) + \sum_{x_r \in T} p_{i,r} \phi_r(n), \tag{3.12}$$

in cui è nota l'espressione $\phi_r(1) = \sum_{x_j \in C} p_{r,j}$ per ogni $x_r \in T$, la formula 3.12 offre una formula ricorsiva per calcolare $\phi_i(n)$ per ogni n.
Se la cardinalità di E diventa molto grande la formula 3.12 diventa piuttosto laboriosa da utilizzare.

Esempio 3.9. La formula 3.12 si può applicare al problema della rovina del giocatore, vediamo il caso più generale in cui la matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & ... & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a+b+1$ righe e colonne, siano a e b i capitali iniziali dei giocatori A e B. Gli stati assorbenti (che come abbiamo visto sono anche ricorrenti) sono 0 e $a+b$, indichiamo $s=a+b-1$ così che gli stati transitori siano $T=\{1,...,s\}$. Dalla matrice di transizione si vede che se $x_i \in T$ vale

$$p_{i,j} = \begin{cases} q \text{ se } j = i-1 \\ p \text{ se } j = i+1 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Per poter utilizzare la formula ricorsiva 3.12 dobbiamo conoscere i valori $\phi_i(1)$, per $1 \leq i \leq s$.
Per $i \in \{1, s\}$ vale

$$\phi_1(1) = q,\ \ \phi_s(1) = p$$

mentre se $2 \leq i \leq s-1$ risulta

$$\phi_i(1) = 0.$$

Allora dalla formula 3.12 abbiamo

$$\phi_1(n+1) = \phi_1(1) + p_{1,2}\phi_2(n) = q + p\phi_2(n);$$

$$\phi_s(n+1) = \phi_s(1) + p_{s,s-1}\phi_{s-1}(n) = q\phi_{s-1}(n) + p$$

e se $2 \leq i \leq s-1$ risulta

$$\phi_i(n+1) = \underbrace{\phi_i(1)}_{0} + p_{i,i-1}\phi_{i-1}(n) + p_{i,i+1}\phi_{i+1}(n) = q\phi_{i-1}(n) + p\phi_{i+1}(n).$$

Poniamo $\phi_0(n) = \phi_{s+1}(n) = 1$, ha senso fare questa assunzione perchè se il patrimonio di uno dei due giocatori è 0 o $a+b$ il gioco è terminato e quindi terminerà certamente entro n passi.
In questo modo si ha

$$\phi_i(n+1) = q\phi_{i-1}(n) + p\phi_{i+1}(n),\ \text{ per } 1 \leq i \leq s.$$

A questo punto mettiamoci nel solito caso particolare in cui $p = q = \frac{1}{2}$ e gli stati ricorrenti sono $C = \{0, 4\}$ e quelli transitori $T = \{1, 2, 3\}$, con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi vale che

$$\phi_1(1) = \frac{1}{2} \text{ e } \phi_3(1) = \frac{1}{2}$$

e si possono riportare alcuni valori di $\phi_i(n)$ ad esempio

$$\phi_1(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi_2(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\phi_2(1)}_{0} + \frac{1}{2}\phi_3(1) + \frac{1}{2}\phi_1(1)\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Quindi la probabilità di entrare nella classe degli stati ricorrenti partendo dallo stato 1 in al più 3 passi è pari a $\frac{3}{2}$.

3.8 Distribuzioni invarianti per una catena di Markov

In questa sezione tratteremo le probabilità invarianti per una catena dandone la definizione e enunciando un risultato fondamentale che è il Teorema di Markov-Kakutani, in seguito ci concentreremo sul caso di catene di Markov regolari per le quali la distribuzione invariante sarà unica.

Definizione 3.15. Una distribuzione di probabilità $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$ si dice *invariante* o *stazionaria* per una catena di Markov a m stati, se, indicata con P la matrice di transizione, risulta

$$\nu = \nu P.$$

Proposizione 3.8.1. *In una catena di Markov irriducibile tutti gli stati sono ricorrenti.*

Dimostrazione. Poiché la catena è finita deve esistere almeno uno stato ricorrente, inoltre essendo la catena irriducibile lo spazio degli stati forma un'unica classe. Inoltre abbiamo già visto che tutti gli stati di una classe sono dello stesso tipo, per cui devono essere tutti ricorrenti. □

Notiamo il fatto che se la legge ν di X_0 è stazionaria, allora X_n ha legge

$$\nu P^n = \nu P P^{n-1} = \nu P^{n-1} = ... = \nu.$$

Cioè se la legge iniziale è stazionaria tutte le X_n hanno la stessa legge.

Teorema 3.8.2 (Markov-Kakutani)**.** *Se P è una matrice di transizione di ordine finito m, allora esiste almeno una probabilità invariante ν per P.*

Dimostrazione. Poniamo

$$S = \{\nu = (\nu_1, ..., \nu_m) \in \mathbb{R}^n ; \nu_k \geq 0 \text{ per } 1 \leq k \leq m \text{ e } \nu_1 + ... + \nu_k = 1\} ;$$

cioè l'insieme di tutte le densità discrete di probabilità per una variabile X che può assumere m valori.
Una probabilità ν è invariante se e solo se è un punto fisso per la trasformazione

$$F : S \longrightarrow S \text{ dove } \nu \mapsto \nu P.$$

Fissiamo una qualunque $\nu \in S$ e definiamo una successione di elementi di S ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \nu P^k.$$

Per non confondere l'indice della sommatoria con le componenti di ν indichiamo con $\nu_n(i)$ l'i-esima componente del vettore ν_n, cioè

$$\nu_n = (\nu_n(1), ..., \nu_n(m)).$$

Per ogni n si ha che $\nu_n \in S$, perchè ogni componente di ν_n è non negativa e siccome ogni vettore νP^k ha la somma delle componenti che vale 1, così è per ν_n, che di tali vettori è una combinazione convessa. Verifichiamo comunque direttamente che la somma delle componenti di ν_n è uguale a 1.

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_n(i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\nu P^k\right)(i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{m}\nu(h)\,p_{h,i}^{(m)} =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{m}\nu(h)\sum_{i=1}^{m}p_{h,i}^{(k)} =$$

dato che $\sum_{i=1}^{m} p_{h,i}^{(k)} = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\sum_{h=0}^{m}\nu(h)}_{1} = \frac{1}{n}\cdot n = 1.$$

S è un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ perchè è chiuso e limitato, allora esiste una sottosuccessione (ν_{n_k}) di (ν_n) convergente ad un determinato $\pi \in S$.
Verifichiamo che π è invariante, cioè che $\pi = \pi P$:
per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\nu_{n_k} - \nu_{n_k}P = \frac{1}{n_k}\left(\sum_{i=0}^{n_k-1}\nu P^i - \sum_{i=0}^{n_k-1}\nu P^{i+1}\right) = \frac{1}{n_k}\nu\left(\sum_{i=0}^{n_k-1}P^i - \sum_{i=0}^{n_k-1}P^{i+1}\right) =$$

$$\frac{1}{n_k}\nu\left(I + P + ... + P^{n_k-1} - P - ... - P^{n_k-1} - P^{n_k}\right) = \frac{1}{n_k}\nu\left(I - P^{n_k}\right) = \frac{1}{n_k}\left(\nu - \nu P^{n_k}\right).$$

Sia ν, sia νP^{n_k} sono vettori che hanno m componenti tutte appartenenti all'intervallo $[0,1]$, quindi

$$\|\nu\| \leq \sqrt{m} \text{ e } \|\nu P^{n_k}\| \leq \sqrt{m}$$

di conseguenza

$$\|\nu - \nu P^{n_k}\| \leq 2\sqrt{m}$$

e quindi

$$\left\|\frac{1}{n_k}\left(\nu - \nu P^{n_k}\right)\right\| \longrightarrow 0 \text{ per } k \to +\infty.$$

Dall'uguaglianza

$$\nu_{n_k} - \nu_{n_k}P = \frac{1}{n_k}\left(\nu - \nu P^{n_k}\right)$$

tenendo presente che il secondo membro tende a 0 e che $\nu_{n_k} \longrightarrow \pi$ per $k \to +\infty$, concludiamo che

$$\pi = \pi P$$

cioè che π è una probabilità invariante. $\square$

Si può osservare che una probabilità invariante ν è soluzione del sistema omogeneo $\nu(I - P) = 0$, la matrice $I - P$ è singolare perchè la somma degli elementi delle righe è pari a 0, quindi le righe appartengono al sottospazio di $\mathbb{R}^n$

$$L = \{x = (x_1, ..., x_m); x_1 + ... + x_m = 0\}.$$

Questo sottospazio ha dimensione $m - 1$ e siccome la matrice $I - P$ ha m righe questo ci dice che sono linearmente dipendenti.
Di conseguenza il sistema $\nu(I - P) = 0$ ammette altre soluzioni oltre a quella nulla ma non è evidente che le componenti della soluzione siano tutte positive, questo ce lo garantisce il Teorema che abbiamo appena dimostrato.
Inoltre il Teorema di Markov-Kakutani enuncia solo l'esistenza delle probabilità invarianti e non la loro unicità ed inoltre se si considerano due probabilità invarianti π_1, π_2 allora anche $\alpha\pi_1 + (1 - \alpha)\pi_2$ per $\alpha \in [0, 1]$ è invariante.
Quindi possiamo concludere che se non ci è garantita l'unicità da condizioni che poi vedremo le probabilità invarianti sono infinite.

Esempio 3.10. Consideriamo il problema della rovina del giocatore con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le probabilità $\pi_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ e $\pi_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$ sono invarianti per P, infatti:

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)\,.$$

Analogamente per il caso $\pi_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$.
Anche nel caso di $\alpha \cdot \pi_1 + (1 - \alpha)\,\pi_2 = (\alpha\ 0\ 0\ 0\ 1 - \alpha)$ con $\alpha \in [0, 1]$ si verifica che

$$(\alpha\ 0\ 0\ 0\ 1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha\ 0\ 0\ 0\ 1 - \alpha)\,.$$

Cioè come abbiamo detto ci sono infinite probabilità invarianti.

Siamo interessati perciò al caso in cui la probabilità invariante sia unica e per fare questo dobbiamo introdurre la seguente definizione.

Definizione 3.16. Una matrice di transizione P (o la catena di Markov a lei associata) si dice *regolare* se esiste un intero $m > 0$ tale che

$$p_{i,j}^{(m)} > 0 \ \forall i, j \in \{1, ..., m\}$$

dove $E = \{x_1, ..., x_m\}$ è l'insieme degli stati.

Cioè esiste una potenza della matrice di transizione P che ha tutti valori strettamente positivi.

Osservazione 8. Una catena di Markov regolare è anche irriducibile, infatti l'essere regolare significa che riesco a trovare una potenza per la quale tutti i termini della matrice sono positivi e questo significa che tutti gli stati comunicano fra loro sia in un verso che nell'altro perchè ho la possibilità di passare dall'uno all'altro con probabilità positiva,

quindi posso dire che tutti gli stati *bi-comunicano* fra loro. Dato che tutti gli stati *bi-comunicano* fra loro posso dire che sono tutti ricorrenti per la Proposizione 3.8.1.
Esistono invece esempi di catene irriducibili che non sono regolari infatti se si considera

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si vede subito che questa matrice è irriducibile perché tutti gli stati comunicano fra loro ma non sarà mai regolare perchè per potenze dispari otterrò sempre matrici nella forma di P mentre per potenze pari otterrò sempre matrici nella forma di P^2 e mai una matrice con tutti gli elementi positivi.

Data in questi termini la definizione di regolarità può essere difficile da verificare per cui spesso si ricorre a delle condizioni di sufficienza date dal seguente Teorema.

Teorema 3.8.3. *Se tutti gli stati comunicano fra loro, e inoltre esiste h tale che* $p_{h,h} > 0$*, allora la catena è regolare.*

Dimostrazione. Sia $E = \{x_1, ..., x_m\}$ l'insieme degli stati, poichè tutti gli stati comunicano fra loro si avrà che $i = j$ oppure esiste un $n = n(i, j)$ per il quale $p_{i,j}^{(n)} > 0$.
Sia $M = \max \{n(i, j) ; i, j = 1, ..., m\}$; mostraimo che P^{2M} ha ogni termine strettamente positivo.
Infatti $p_{i,j}^{(2M)}$ è la probabilità che la catena transiti da x_i a x_j in $2M$ passi; poichè tutti gli stati comunicano tra loro, il passaggio dallo stato x_i allo stato x_j può avvenire passando da uno stato intermedio x_h; dove x_h è quello stato per cui sappiamo che $p_{h,h} > 0$.
Sappiamo che la catena può transitare da x_i ad x_h in $n(i, h)$ passi essendo $p_{i,h}^{(n(i,h))} > 0$, inoltre può transitare da x_h ad x_j in $n(h, j)$ passi dato che $p_{h,j}^{(n(h,j))} > 0$.
Inoltre c'è la probabilità positiva $p_{h,h}$ che la catena trovandosi nello stato x_h rimanga in quello stato. Vi è allora probabilità positiva che la catena di Markov transiti in $n(i, h)$ passi da x_i a x_h, poi rimanga in x_h per un numero r passi arbitrariamente fissato, poi transiti da x_h a x_j in $n(h, j)$ passi; in questo modo la catena sarà transitata da x_i a x_j in $n(i, h) + n(h, j) + r$ passi. Siccome $n(i, h) + n(h, j) \le 2M$, possiamo scegliere

$r = 2M - n(i,h) - n(h,j)$; in questo modo vediamo che il transito da x_i a x_j è avvenuto in $2M$ passi, con probabilità positiva: precisamente, la probabilità del transito in $2M$ passi da x_i a x_j in $2M$ passi è

$$p_{i,j}^{(2M)} \geq p_{i,h}^{(n(i,h))} \cdot p_{h,h}^{(r)} \cdot p_{h,j}^{(n(h,j))} > 0.$$

$\square$

Abbiamo già detto che il Teorema fornisce una condizione sufficiente per la regolarità della catena ma non necessaria; cioè ci sono matrici per cui non valgono le richieste del teorema ma che sono comunque regolari, infatti:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

cioè la matrice P è regolare seppure non verifichi le richieste del Teorema.
Una volta introdotta la regolarità possiamo metterci nel caso in cui la probabilità invariante sia unica.

Teorema 3.8.4 (Teorema di Markov). *Se P è una matrice di transizione regolare, allora esiste una e una sola distribuzione invariante π per P, e per ogni vettore-probabilità ν vale*

$$\lim_{n \to +\infty} \nu P^n = \pi.$$

Questo Teorema ha una conseguenza notevole: supponiamo che la catena abbia distribuzione iniziale ν. Allora la legge di X_n è data da νP^n, cioè per $n \to +\infty$

$$P(X_n = x_j) = (\nu P^n)_j \longrightarrow \sum_{x_i \in E} \nu_i \pi_j = \pi_j.$$

Ovvero, qualunque sia la distribuzione iniziale, X_n converge in legge alla distribuzione invariante π.

Quindi la probabilità invariante ha un significato molto importante perchè rappresenta la distribuzione discreta di probabilità di X_n dopo un lungo tempo; cioè ci dice con che probabilità la catena si troverà su uno stato piuttosto che l'altro.
Questo è molto importante, perchè il calcolo esatto della legge di X_n è sempre più complicato al crescere di n perchè si tratta di moltiplicare P per se stessa n volte, mentre la distribuzione invariante π si calcola risolvendo il sistema lineare

$$\nu = \nu P$$

che è in tante equazioni quante sono gli stati.

Dimostrazione. Dal Teorema di Markov-Kakutani sappiamo che esiste un autovettore sinistro per P, con tutte le componenti maggiori o uguali a 0. Supponiamo che π sia una distribuzione stazionaria per P, ossia un vettore riga $\pi = (\pi_1, ..., \pi_m)$ con $\pi_j \geq 0$ $\forall j$ e $\pi_1 + ... + \pi_m = 1$, tale che

$$\pi P = \pi.$$

1. *Sia $V_0 = \{x = (x_1, .., x_m) \, ; x_1 + ... + x_m = 0\}$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^m$. Questo sottospazio di dimensione $m-1$ è invariante per la moltiplicazione a sinistra per P.*
   Sia $x \in V_0$, allora
   $$\sum_{i=1}^{m} (xP)_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot p_{j,i} = \sum_{j=1}^{m} x_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} p_{j,i}}_{1} = \sum_{j=1}^{m} x_j = 0.$$

2. *Sia $V_1 = Span\,(\pi)$ il sottospazio di $\mathbb{C}^m$ generato da π, allora $V_0 \cap V_1 = \{0\}$.*
   Un elemento di V_1 è nella forma $t\pi$, con $t \in \mathbb{C}$; siccome la somma dei termini di π è 1, la somma dei termini di $t\pi$ è t; perciò $t\pi \in V_0 \Leftrightarrow t = 0$, cioè se è il vettore nullo.

3. *Ogni autovettore sinistro per P con autovalore diverso da 1, appartiene a V_0.*
   Dal punto (2), tenendo conto che $\dim V_0 = m-1$ allora $\mathbb{C}^m = V_0 \oplus V_1$. Sia ν un autovettore sinistro di P, con autovalore corrispondente $\lambda \neq 1$. Esistono e sono unici $\nu_0 \in V_0$ e $t \in \mathbb{C}$ tali che $\nu = \nu_0 + t\pi$. Allora
   $$\lambda\nu = \nu P = (\nu_0 + t\pi)\, P = \nu_0 P + t\pi P = \nu_0 P + t\pi$$

ma anche

$$\lambda\nu = \lambda\left(\nu_0 + t\pi\right) = \lambda\nu_0 + \lambda t\pi.$$

Siccome $\mathbb{C}^m$ è somma diretta di V_0 e V_1 la rappresentazione di $\lambda\nu$ come somma di un elemento di V_0 e uno di V_1 è unica; perciò

$$\nu_0 P = \lambda\nu_0 \text{ e } \lambda t = t.$$

Poichè $\lambda \neq 1$, l'ultima relazione implica $t = 0$, e allora $\nu = \nu_0 \in V_0$.

4. *Gli autovalori, reali o complessi, di una matrice di transizione hanno modulo* ≤ 1.
Ricordiamo che, essendo P non necessariamente simmetrica, autovalori e autovettori possono essere complessi. Sia ν un autovettore sinistro per P, con autovalore corrispondente $\lambda \neq 1$, cioè $\nu P = \lambda\nu$; la j-esima componente di $\lambda\nu$ è per ciascun j,

$$\lambda\nu_j = \left(\nu P\right)_j = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \cdot p_{k,j} \text{ e quindi } |\lambda\nu_j| = \left|\left(\nu P\right)_j\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} \nu_i \cdot p_{i,j}\right|.$$

Allora

$$|\lambda| \sum_{j=1}^{m} |\nu_j| = \sum_{j=1}^{m} |\lambda\nu_j| = \sum_{j=1}^{m} \left|\sum_{k=1}^{m} \nu_k \cdot p_{k,j}\right| \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} |\nu_k| \cdot p_{k,j} =$$

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu_k| \underbrace{\sum_{j=1}^{m} p_{k,j}}_{1} = \sum_{i=1}^{m} |\nu_k|. \tag{3.13}$$

Dividendo il primo e l'ultimo membro per $\sum_{i=1}^{m} |\nu_k|$ otteniamo $|\lambda| \leq 1$, come volevamo dimostrare.
Quanto abbiamo appena detto per gli autovettori sinistri vale anche per i destri, i quali in realtà coincidono con i sinistri, perchè gli autovettori sinistri di P sono autovettori destri di P^T; e gli autovalori di P e P^T sono gli stessi.
Quanto dimostrato fin'ora vale per tutte le matrici di transizione dato che ancora non abbiamo sfruttato l'ipotesi di regolarità di tali matrici.

5. *Se la matrice di transizione P ha tutti i termini maggiori di* 0, *allora tutti i suoi autovalori diversi da* 1 *hanno modulo strettamente minore di* 1.

Sia P una matrice come sopra; sia $\lambda \neq 1$ autovalore per P e ν un corrispondente autovettore sinistro. Mostriamo che, se i termini di P sono tutti positivi, allora la disuguaglianza 3.13 è necessariamente stretta, cioè

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \nu_k p_{k,j} \right| < \sum_{k=1}^{m} |\nu_k| \cdot p_{k,j}.$$

Infatti $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m) \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ è un vettore non nullo e tale che $\sum_{k=1}^{m} \nu_k = 0$, in quanto $\nu \in V_0$ per il punto (3). Ciò implica che le componenti non nulle del vettore ν non possono avere tutte lo stesso argomento; e se due numeri complessi non nulli z_1, z_2 hanno diverso argomento, allora $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.
Come nel punto (4) avevamo visto che $|\lambda| \leq 1$, ora otteniamo che $|\lambda| < 1$.

6. *Se P è una matrice di transizione con termini tutti positivi, allora la distribuzione stazionaria π è unica.*
Ciò equivale a dire che l'autospazio sinistro di P relativo all'autovalore 1 coincide con V_1. Per provarlo, supponiamo $\nu = \alpha\pi + \beta w$ tale che $\nu P = \nu$, e $w \in V_0$. Allora

$$\alpha\pi + \beta w = \nu = \nu P = \alpha\pi P + \beta w P = \alpha\pi + \beta w P$$

e quindi

$$\beta w P = \beta w.$$

Se $\beta \neq 0$, allora $wP = w$; ma per il punto (5) si ha che in V_0 eventuali autovettori per P devono avere autovalore di modulo minore di 1; quindi $w = 0$ e quindi $\nu = \alpha\pi \in V_1$.

7. *Se P è una matrice di transizione per la quale* $\dim V_1 = 1$*, e ogni altro autovalore di P ha modulo minore di 1 e $\nu = (\nu_1, .., \nu_m)$ è una probabilità, allora*

$$\lim_{n \to +\infty} \nu P^n = \pi.$$

Scriviamo νP^n nella forma:

$$\nu P^n = (\pi + \nu - \pi) P^n = \pi P^n + (\nu - \pi) P^n = \pi + (\nu - \pi) P^n. \tag{3.14}$$

Il vettore $\nu - \pi$ appartiene a V_0, perchè la somma delle sue componenti è uguale a 0. L'operatore lineare

$$V_0 \ni w \mapsto wP$$

opera in V_0 per il punto (1), e per ipotesi attuale gli autovalori di questo operatore ristretto a V_0 hanno tutti modulo minore di 1. Ciò implica che per ogni $w \in V_0$ si abbia

$$\lim_{n \to +\infty} \|wP^n\| = 0;$$

in particolare

$$\lim_{n \to +\infty} \|(\nu - w)\, P^n\| = 0,$$

e questo tenendo presente la 3.14, equivale a dire che

$$\lim_{n \to +\infty} \nu P^n = \pi.$$

8. *Conclusione della dimostrazione*

   Supponiamo che la matrice P sia regolare, allora per un opportuno n la matrice P^n è una matrice di transizione con tutti i termini positivi, alla quale possiamo quindi applicare i risultati dei punti (5) e (6). D'altra parte, se gli autovalori di P sono

$$1, \lambda_1, ..., \lambda_r$$

allora gli autovalori di P^n sono

$$1, \lambda_1^n, ..., \lambda_r^n.$$

Per il punto (5), i moduli di $\lambda_1^n, ..., \lambda_r^n$ sono minori di 1; allora ciò è vero anche per i moduli di $\lambda_1, ..., \lambda_r$. Allora per il punto (7) è

$$\lim_{k \to +\infty} \nu P^k = \pi$$

per ogni vettore probabilità ν.

□

Osservazione 9. Nel corso della dimostrazione del Teorema abbiamo visto che se la matrice di transizione P è regolare allora l'autovalore 1 è semplice e gli altri hanno modulo minore di 1. In realtà vale anche il viceversa, cioè le matrici regolari sono caratterizzate dall' avere l'autovalore dominante pari a 1 e tutti gli altri hanno modulo minore di 1. La dimostrazione passa attraverso il Teorema di Perron-Frobenius che caratterizza matrici di questo tipo.

Fin'ora abbiamo provato l'esistenza della probabilità invarante per una qualsiasi matrice di transizione e l'unicità di tale distribuzione per matrici regolari. Ora proveremo l'unicità della probabilità invariante per le matrici irriducibili.

Lemma 3.8.5. *Sia P la matrice di transizione di una catena di Markov. Poniamo*

$$Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} P^n. \tag{3.15}$$

Allora Q è anch'essa una matrice di transizione. Inoltre, se P è irriducibile, allora tutti gli elementi di Q sono strettamente positivi.

Dimostrazione. La serie 3.15 converge perchè ogni elemento di P^n è una probabiltà, di conseguenza è un valore appartente all'intervallo $[0, 1]$. Di conseguenza ogni serie numerica che definisce i termini di Q ha termini maggiori o uguali a 0 e si maggiora con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$. I termini di Q sono tutti maggiori o uguali a 0, dobbiamo provare che la somma degli elementi sulle righe sia pari a 1.

$$\sum_{j=1}^{m} q_{i,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} p_{i,j}^{(n)}}_{1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Infine, se P è irriducibile allora per ogni $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p_{i,j}^{(n)} > 0$. Allora qualche termine della serie che definisce $q_{i,j}$ è maggiore di 0, perciò $q_{i,j} > 0$, perchè la serie ha tutti i termini non negativi. Di conseguenza tutti i termini di Q sono positivi. □

Una volta provato questo Lemma possiamo passare a dimostrare il risultato di unicità della probabilità invariante per matrici irriducibili:

Teorema 3.8.6. *Se* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una catena di Markov irriducibile, allora la probabilità invariante è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che la matrice di transizione P sia irriducibile, definiamo la matrice Q come in 3.15 e supponiamo che $\pi^{(1)}$ e $\pi^{(2)}$ siano distribuzioni stazionarie per P, cioè

$$\pi^{(1)} \cdot P = \pi^{(1)} \text{ e } \pi^{(2)} \cdot P = \pi^{(2)}.$$

Osserviamo che $\pi^{(1)}$ e $\pi^{(2)}$ sono probabilità invariante per Q; infatti:

$$\pi^{(1)} \cdot Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \pi^{(1)} \cdot P^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \pi^{(1)} = 1 \cdot \pi^{(1)} = \pi^{(1)},$$

analogamente si può vedere che

$$\pi^{(2)} \cdot Q = \pi^{(2)}.$$

Ma Q, avendo tutti i termini maggiori di 0, è regolare, quindi il Teorema 3.8.4 c'è una sola probabilità invariante per Q, e allora

$$\pi^{(1)} = \pi^{(2)}.$$

□

L'unica parte del Teorema 3.8.4 che non è garantito sia soddisfatta è quella della convergenza alla probabilità invariante. Quindi per trovare tale probabilità è necessario risolvere il sistema

$$\begin{cases} (x, y) \cdot P = (x, y) \\ x + y = 1 \end{cases} \tag{3.16}$$

ma non ci è garantita la convergenza del limite del Teorema 3.8.4.

Esempio 3.11. Supponiamo che la matrice di transizione di una catena di Markov sia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

questa è banalmente irriducibile perchè tutti gli stati comunicano fra loro, la probabilità invariante si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x, y) \cdot P = (x, y) \\ x + y = 1 \end{cases} \tag{3.17}$$

che restituisce la soluzione

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Non saremmo riusciti a trovare la probabilità invariante usando il Teorema 3.8.4 perchè non c'è convergenza dato che per n pari la matrice

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre per n dispari la matrice è nella forma

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 3.17. Una probabilità $\pi = (\pi_1, ..., \pi_m)$ sullo spazio degli stati di una catena di Markov con matrice di transizione P si dice *reversibile* se

$$\pi_i \cdot p_{i,j} = \pi_j \cdot p_{j,i} \; \forall i, j \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Tale equazione si dice *equazione del bilancio dettagliato.*

Vediamo ora un risultato interessante che collega questo tipo di probabilità con quelle invarianti:

Teorema 3.8.7. *Se $\pi = (\pi_1, ..., \pi_m)$ è reversibile per P, allora è invariante per P.*

Dimostrazione. Supponiamo che π sia reversibile per P e mostriamo che π è invariante per P. Per un $j \in \{1, ..., m\}$, il termine di posto j del vettore $\pi \cdot P$ è

$$(\pi \cdot P)_j = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \cdot p_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \pi_j \cdot p_{j,i}$$

dato che π è reversibile, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_j \cdot p_{j,i} = \pi_j \sum_{i=1}^{m} p_{j,i} = \pi_j \cdot 1 = \pi_j.$$

□

Non vale il viceversa di questo Teorema per cui se non si riesce a provare che π sia reversibile non significa che non sia invariante.

Esempio 3.12. Consideriamo a tal proposito un nuovo esempio che rientra nella gamma dei problemi *'con barriere riflettenti'*, cioè consideriamo due giocatori A e B con i rispettivi patrimoni di partenza pari ad $\mathbf{a}$ euro e $\mathbf{b}$ euro; in questo caso quando un giocatore esaurisce il suo patrimonio allora l'altro gli da 1 euro in modo che la partita possa continuare.
Supponiamo che i patrimoni di partenza siano $\mathbf{a} = 1$ e $\mathbf{b} = 2$ così che l'insieme degli stati della catena di Markov sia $E = \{0, 1, 2, 3\}$. La matrice di transizione di una catena di Markov di questo tipo relativa al giocatore A è:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in cui si vede subito che quando il giocatore A raggiunge lo stato $\mathbf{a} = 0$ con probabilità 1 passa allo stato $\mathbf{a} = 1$ perchè il giocatore B gli da 1 euro in modo da proseguire col gioco; analogamente quando il patrimonio di A sale a 3 significa che il giocatore B possiede un patrimonio di $\mathbf{b} = 0$ euro e quindi A gli fornisce 1 euro per continuare la partita e allora con probabilità 1 passa allo stato $\mathbf{a} = 2$ euro. Vogliamo calcolarne la probabilità invariante; per il Teorema di Markov-Kakutani 3.8.2 sappiamo che esiste almeno una probabilità invariante, dobbiamo verificare se è anche unica. La matrice P non è regolare perchè

$$P^n = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{per } n \text{ pari}$$

e

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

per cui non troveremo mai un n per il quale la matrice abbia elementi tutti maggiori di 0.

La matrice P è però irriducibile infatti 0 bi-comunica con 1, 1 bi-comunica con 2, 2 bi-comunica con 3, inoltre 1 bi-comunica con 3 e 0 bi-comunica con 2; quindi tutti gli stati comunicano fra loro.
Allora l'unicità della probabilità invariante è garantita del Teorema 3.8.6 e la calcoliamo risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x\ y\ z\ t) \cdot P = (x\ y\ z\ t) \\ x + y + z + t = 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

che diventa

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ x - y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}y - z + t = 0 \\ \frac{1}{2}z - t = 0 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

che restituisce la soluzione $\pi = \left(\frac{1}{6}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\right)$. Quindi dopo un tempo lungo la catena di Markov possiamo trovarla con probabilità $\frac{1}{6}$ nello stato 0 o nello stato 3 mentre con probabilità $\frac{1}{3}$ nello stato 1 o 2.
In particolare la probabilità invariante π è anche reversibile perchè

$$\pi_0 \cdot p_{0,1} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \pi_1 \cdot p_{1,0}\ \pi_1 \cdot p_{1,2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \pi_2 \cdot p_{2,1}$$

$$\pi_2 \cdot p_{2,3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \pi_3 \cdot p_{3,2}$$

cioè verifica l'equazione del bilancio dettagliato.

Definizione 3.18. Una matrice P si dice *bistocastica* se la somma degli elementi in riga è uguale a 1 e la somma degli elementi in colonna è 1. Cioè deve essere una matrice stocastica in cui la somma degli elementi di ogni colonna sia pari a 1.

Esempio 3.13. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è bistocastica perchè è stocastica e sommando gli elementi in colonna si ottiene 1.

Proposizione 3.8.8. *Sia P la matrice bistocastica associata alla catena di Markov che si sposta sugli stati $E = \{x_1, ..., x_m\}$, una probabilità invariante per P è data da $\pi = \left(\frac{1}{m}, ..., \frac{1}{m}\right)$.*

Non è datto che π sia l'unica probabilità invariante, questo dipenderà se la matrice sarà regolare o irriducibile.

Dimostrazione. Non avendo ipotesi di regolarità o irriducibilità della matrice P non possiamo sfruttare i Teoremi visti per cui dobbiamo utilizzare la definizione di probabilità invariante:

$$\left(\frac{1}{m}...\frac{1}{m}\right) \cdot P = \left(\frac{1}{m}...\frac{1}{m}\right) \tag{3.20}$$

Ma questa è banalmente verificata perchè il tutto si traduce nel sistema

$$\begin{cases} (p_{1,1} + ... + p_{1,m})\,\frac{1}{m} = \frac{1}{m} \\ \vdots \\ (p_{m,1} + ... + p_{m,m})\,\frac{1}{m} = \frac{1}{m} \end{cases} \tag{3.21}$$

che sono tutte banalmente verificate dato che $p_{1,1} + ... + p_{1,m} = ... = p_{m,1} + ... + p_{m,m} = 1$. Quindi la distribuzione π è invariante. □

3.9 Tempo medio di ritorno in uno stato in caso di catena di Markov irriducibile

Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov irriducibile, allora tutti gli stati sono ricorrenti per la Proposizione 3.8.1. Di conseguenza non ha senso calcolare la probabilità di assorbimento all'interno di classi ergodiche ma ha senso calcolare il tempo medio che si impiega a passare da uno stato x_i ad uno stato x_j; si pone

$$\tau^{(j)} = \min\{n \in \mathbb{N}; n \geq 1; X_n = x_j\}.$$

Allora il tempo medio che si impiega ad andare dallo stato x_i allo stato x_j è dato da

$$\tau_{i,j} = \mathbb{E}\left(\tau^{(j)} | X_0 = x_i\right).$$

Lemma 3.9.1. *I numeri $\tau_{i,j}$ soddisfano il sistema*

$$\tau_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} \cdot \tau_{k,j}. \tag{3.22}$$

Dimostrazione.

$$\tau_{i,j} = \mathbb{E}\left(\tau^{(j)} | X_0 = x_i\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P\left(\tau^{(j)} = n | X_0 = x_i\right) =$$

$$P\left(\tau^{(j)} = 1 | X_0 = x_i\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} nP\left(\tau^{(j)} = n | X_0 = x_i\right) =$$

$$P\left(\tau^{(j)} = 1 | X_0 = x_i\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, P\left(\tau^{(j)} = n+1 | X_0 = x_i\right) =$$

$$P\left(\tau^{(j)} = 1 | X_0 = x_i\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\tau^{(j)} = n+1 | X_0 = x_i\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} nP\left(\tau^{(j)} = n+1 | X_0 = x_i\right) =$$

$$P\left(\tau^{(j)} < +\infty | X_0 = x_i\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} nP\left(\tau^{(j)} = n+1 | X_0 = x_i\right) =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} nP\left(\tau^{(j)} = n+1 | X_0 = x_i\right).$$

La $P\left(\tau^{(j)} < +\infty | X_0 = x_i\right) = 1$ perchè la catena è irriducibile e quindi lo stato x_i comunica con lo stato x_j certamente entro un tempo finito.
Se $n \geq 1$ allora $\tau^{(j)} = n + 1$ si verifica se accadono contemporaneamente i fatti:

- La prima transizione avviene da x_i in $x_k \neq x_j$ e ciò avviene con probabilità $p_{i,k}$;
- Dallo stato x_k occorrono n transizioni per giungere per la prima volta in x_j. La probabilità di raggiungere per la prima volta in n passi lo stato x_j partendo da x_k è ciò che abbiamo indicato con $P\left(\tau^{(j)} = n | X_0 = x_k\right)$. Allora

  $$P\left(\tau^{(j)} = n+1 | X_0 = x_i\right) = \sum_{k \neq j} p_{i,k} \cdot P\left(\tau^{(j)} = n | X_0 = x_k\right)$$

  e quindi, inserendo questa espressione nel risultato ottenuto sopra si ottiene

  $$\tau_{i,j} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \sum_{k \neq j} p_{i,k} \cdot P\left(\tau^{(j)} = n | X_0 = x_i\right) =$$

$$1+\sum_{k\neq j} p_{i,k}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot P\left(\tau^{(j)}=n|X_0=x_k\right)=1+\sum_{k\neq j} p_{i,k}\cdot\tau_{k,j}.$$

□

Teorema 3.9.2. *Indicata con π la distribuzione invariante della catena di Markov irriducibile $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, risulta per ogni i*

$$\tau_{i,i}=\frac{1}{\pi_i}.$$

La formula è anche abbastanza intuitiva dato che il tempo medio di ritorno sullo stato x_i da cui eravamo partiti sarà tanto più lungo quanto più è improbabile che la catena una volta a regime vi si trovi.

Dimostrazione. Addizioniamo e sommiamo al secondo membro di 3.22 l'addendo in cui $k=j$; poi moltiplichiamo entrambi i membri per π_i; probabilità dello stato x_i nella distribuzione invariante π della catena di Markov irriducibile $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$; infine sommiamo per i così da ottenere:

$$\tau_{i,j}=1+\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\cdot\tau_{k,j}-p_{i,j}\cdot\tau_{j,j}$$

e poi

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}\pi_i\cdot\tau_{i,j}}=\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\pi_i}_{1}\cdot 1+\sum_{i=1}^{m}\pi_i\cdot\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\cdot\tau_{k,j}-\tau_{j,j}\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\pi_i\cdot p_{i,j}}_{\pi_j}=$$

$$1+\sum_{k=1}^{m}\tau_{k,j}\sum_{i=1}^{m}\pi_i\cdot p_{i,k}-\pi_j\cdot\tau_{j,j}=1+\underline{\sum_{k=1}^{m}\pi_k\cdot\tau_{k,j}}-\pi_j\cdot\tau_{j,j}.$$

Da cui si ricava, semplificando le espressioni sottolineate, che

$$\pi_j\cdot\tau_{j,j}=1,$$

cioè

$$\tau_{j,j}=\frac{1}{\pi_j}.$$

□

Esempio 3.14. Tornando all'esempio 3.12 in cui la matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la probabilità invariante è

$$\pi = \left(\frac{1}{6} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{6} \right),$$

usando il risultato del Teorema 3.9.2 si vede che il tempo medio di ritorno, ad esempio, sullo sato 2 è pari a

$$\tau_{2,2} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

cioè partendo dallo stato 2 dopo mediamente 3 colpi la catena si riposiziona sullo stato 2.

3.10 Periodicità

Nell'ultima parte della sezione precedente ci siamo dedicati al calcolo del tempo medio di ritorno su uno stato. Ora ci proponiamo di definire quando uno stato è periodico e qual è il suo periodo.

Definizione 3.19. Consideriamo l'insieme

$$R_i = \left\{ n \geq 1, p_{i,i}^{(n)} > 0 \right\}$$

formato dai numeri n per i quali la probabilità di tornare in x_i in n passi partendo dal medesimo stato sia strettamente positiva. Indichiamo con d_i il massimo comune divisore dei numeri che stanno in R_i, ovvero

$$d_i = MCD\left(R_i\right).$$

Qualora il periodo d_i fosse uguale a 1 lo stato si definirà *aperiodico*, altrimenti si parlerà di stato periodico di periodo d_i.

Osservazione 10. Si può provare che $p_{i,i}^{(n)}$ è strettamente positiva se e solo se n è multiplo di d_i. Di conseguenza uscendo dallo stato x_i è possibile farvi ritorno solo in un numero di passi multiplo del periodo d_i.

Proposizione 3.10.1. *Tutti gli stati di una stessa classe di equivalenza rispetto alla bi-comunicatività hanno il medesimo periodo o sono tutti aperiodici.*

Dimostrazione. Siano x_i, x_j della classe $[x_j]$ e siano d_i, d_j i loro rispettivi periodi. Dato che appartengono alla stessa classe, esistono due interi n, m tali che $p_{i,j}^{(n)} > 0$ e $p_{j,i}^{(n)} > 0$. Dunque è positiva la probabilità che il sistema uscendo da x_i vi ritorni in $n+m$ colpi perchè

$$p_{i,i}^{(n+m)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,i}^{(n)},$$

ne segue che $n+m$ è multiplo di d_i. Sia ora r un intero positivo, grande sufficientemente perchè riesca $p_{j,j}^{(rd_j)} > 0$, e per il resto arbitrario. Sussiste la:

$$p_{i,i}^{(n+rd_j+m)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,j}^{(rd_j)} \cdot p_{j,i}^{(n)} > 0,$$

sicchè anche $n + rd_j + m$ è multiplo di d_i; ciò comporta che rd_j sia divisibile per d_i e, per la arbitrarietà di r, d_j è divisibile per d_i.
Scambiando il ruolo di i, j si prova che d_i è divisibile per d_j e quindi

$$d_i = d_j.$$

□

Con questo risultato potremo dire che $d = d_i = d_j$ è il periodo della classe di equivalenza e la classe sarà detta *ciclica di periodo d*.
In vista di esaminare il comportamento asintotico del processo abbandoniamo le classi non ergodiche perchè per la Proposizione 3.4.2 hanno la matrice di transione che tende alla matrice nulla, concentreremo la nostra attenzione sulle classi ergodiche cicliche.

Teorema 3.10.2. *Se d è il periodo di una classe ergodica, la classe può essere decomposta in d sottoclassi distinte, C_1, C_2,...,C_d, che godono della seguente proprietà: se il sistema è in uno stato di C_h, con $1 \leq h \leq d$, esso passa in un colpo necessariamente in uno stato di C_{h+1}; se il sistema è in C_d passa, al prossimo colpo, in C_1.*

Dimostrazione. Sia $[x_i]$ una classe ergodica ciclica di periodo d, sia $x_j \in [x_i]$ e risulti $p_{j,i}^{(s)} > 0$. Se n, m sono due interi tali che $p_{i,j}^{(n)} > 0$ e $p_{i,j}^{(m)} > 0$, riesce che:

$$n \equiv -s \ \ (mod\ d)\,,$$

$$m \equiv -s \ \ (mod\ d)\,.$$

Sono positive infatti le probabilità di ritornare in x_i in $n + s$ e anche in $m + s$ passi; entrambi i numeri $n + s$ ed $m + s$ sono dunque divisibili per d. La congruenza è una relazione che gode della proprietà transitiva; dunque $n \equiv m \ \ (mod\ d)$; ovvero dividendo n ed m per d si ottiene il medesimo resto r_j.
Concludendo, sarà $p_{i,j}^{(n)} > 0$ solo se $n \equiv r_j \ \ (mod\ d)$, fissati ora lo stato x_i e il numero r, con $1 \leq r \leq d$, consideriamo l'insieme $A = \left\{x_k \in [x_i]\,; \exists n, p_{i,k}^{(n)} > 0 \wedge n \equiv r \ \ (mod\ d)\right\}$, variando r tra 1 e d si ottengono d classi di stati che costituiscono una partizione della classe $[x_i]$.
Sia ora x_h uno stato di C_h e x_k uno stato di $[x_i]$ tale che $p_{h,k} > 0$. Per la definizione di C_h esiste un intero n tale che $n \equiv h \ \ (mod\ d)$ per il quale $p_{i,h}^{(n)} > 0$. Ne segue che

$$p_{i,k}^{(n+1)} \geq p_{i,h}^{(n)} \cdot p_{h,k} > 0$$

e

$$n + 1 \equiv h + 1 \ \ (mod\ d)\,;$$

ovvero lo stato x_k appartiene alla classe C_{h+1}.
Ciò prova che in un passo il sistema si trasferisce dalla C_h alla C_{h+1} e che nessuna delle C_h è vuota. □

Esempio 3.15. Consideriamo l'insieme degli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e la catena di Markov con la seguente matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che il ritorno agli stati $1, 3, 4, 5, 6$ non è possbile in meno di 3 passi, mentre negli stati $2, 7$ non si può ritornare in meno di 6. Poichè in questi ultimi due si può ritornare anche in 9 passi, ne segue che tutti gli stati sono di periodo 3. Gli stati possono essere riordinati raggruppando, nell'ordine, quelli delle sottoclassi C_1, C_2, C_3. così che la matrice diventi:

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{*} \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In generale la rappresentazione della matrice P in una forma che evidenzi le sottoclassi periodiche di una classe ciclica non è unica e quindi non è unico il riordinamento degli stati.

In generale si può provare che le potenze successive di una matrice di una catena ciclica non possono presentare mai tutti gli elementi positivi. Si può tuttavia provare che, essendo $0 \leq l < d$, in generale riesce:

$$\lim_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(nd+l)} = \begin{cases} \pi_j > 0 \text{ se } x_i \in C_h \text{ e } x_j \in C_{h+l}, \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{3.23}$$

nel caso $l = 0$ la relazione diventa

$$\lim_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(nd)} = \begin{cases} \pi_j > 0 \text{ se } x_i, x_j \in C_h, \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{3.24}$$

in cui π_j rappresenta la j-esima componente della probabilità invarinte π; di conseguenza si ha che la matrice di transizione P di una catena ciclica non può mai essere regolare e quindi non vi si potrà applicare il Teorema di Markov; perciò la successione $\left(P^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ delle potenze della matrice di transizione non converge.

Esempio 3.16. Continuando con l'esempio 3.12 si vede gli ognuno degli stati dell'insieme E è periodico di pediodo 2 perchè se consideriamo lo stato 0 si vede che prendendo

$$R_0 = \left\{ n \geq 1; p_{0,0}^{(n)} > 0 \right\}$$

si vede che

$$d_0 = MCD\left(R_0\right) = 2$$

dato che in 0 posso tornare in $2, 4, 6, ...$ passi.
Dato che tutti gli stati sono transitori e appartengono alla stessa classe per la Proposizione 3.10.1 si ha che tutti gli stati della catena hanno periodo 2.
Come abbiamo già visto la distribuzione invariante esiste ed è unica dato che la matrice è irriducibile ma come abbiamo già provato in precedenza, la matrice P non è regolare e di conseguenza non abbiamo la convergenza garantita dal Teorema di Markov.

Concludiamo questo capito con un esempio in cui cerchiamo di riepilogare quanto visto sulle catene di Markov

Esempio 3.17. Supponiamo di avere una scacchiera come in figura su cui si muove di un passo una pedina in maniera casuale (sia in verticale, sia in orrizzontale, sia in diagonale)

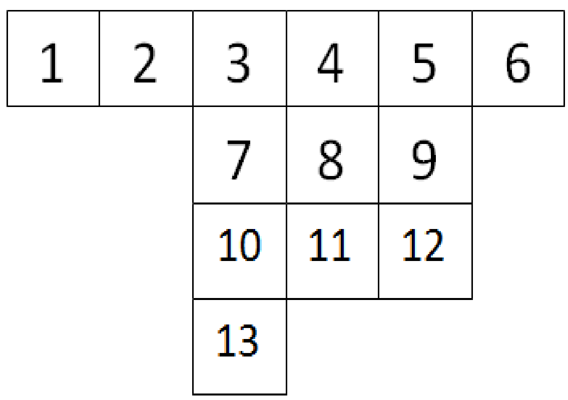

Figura 3.6: *Scacchiera su cui si muove la pedina*

Abbiamo che la matrice di transizione di questa catena di Markov è nella forma

$$P = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

La matrice è regolare perchè si può vedere che

$$P^{(5)}_{1,i} > 0 \ \forall x_i$$

e

$$P^{(5)}_{j,1} > 0 \ \forall x_j$$

così

$$P^{(10)}_{i,j} \geq P^{(5)}_{i,1} P^{(5)}_{1,j} > 0 \ \forall i, \forall j.$$

Sappiamo che una catena regolare è anche irriducibile, dato che la catena di Markov ha un numero finito di stati ammette almeno uno stato ricorrente di conseguenza tutti gli stati della catena sono ricorrenti proprio perchè la catena è anche irriducibile.
Grazie al Teorema di Markov esiste un'unica probabilità invariante π che verificherà

$$\lim_{n \to +\infty} \nu P^n = \pi \text{ con } \nu \text{ vettore probabilità.}$$

Riformuliamo il problema come una passeggiata aleatoria sul grafo dato da

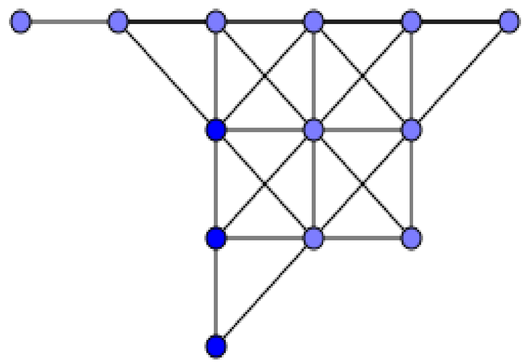

Figura 3.7: *Grafo asscociato alla scacchiera del problema*

Definiamo il vettore $u = (u_1, ..., u_{13})$ che contiene il numero di rami che fanno a capo ad ogni vertice i; diciamo che u è un vettore invariante, infatti

$$(uP)_j = \sum_i u_i p_{i,j} = \sum_{i \in A_j} u_i \frac{1}{u_i}$$

dove A_j è l'insieme dei vertici dai quali si accede a j in un solo passo; A_j possiede u_j elementi e perciò:

$$\sum_{i \in A_j} u_i \frac{1}{u_i} = u_j,$$

e ciò prova che u è un vettore invariante. Quindi per il Teorema di Markov si ha che

$$\sum_i u_i p_{i,j} = u_j \longrightarrow \sum_i u_i \pi_j = u_j \text{ per } n \to +\infty;$$

di conseguenza la j-esima componente della distribuzione invariante unica sarà data da:

$$\pi_j = \frac{u_j}{\sum_i u_i}.$$

Nel nostro caso il risultato che si trova è

$$\pi = \left(\frac{1}{54}, \frac{3}{54}, \frac{4}{54}, \frac{5}{54}, \frac{4}{54}, \frac{2}{54}, \frac{6}{54}, \frac{8}{54}, \frac{6}{54}, \frac{4}{54}, \frac{6}{54}, \frac{3}{54}, \frac{2}{54} \right),$$

cioè una volta che la catena è a regime la pedina si troverà con maggiore probabilità nella casella 8 che è proprio quella centrale; la cosa è anche abbastanza naturale perchè è la casella raggiungibile col maggior numero di percorsi.

Capitolo 4

Il problema dell'ispezione

In questo ultimo capitolo vogliamo presentare un altro problema che possiamo risolvere usando quanto visto sulle catene di Markov.

4.1 Il problema

Un impianto è costituito da alcuni pezzi ciascuno dei quali ha una durata aleatoria T che chiameremo vita, supponiamo che essa possa assumere solo valori interi (superiormente limitati) e supponiamo di conoscerne la sua legge. Determinare, a regime, la legge di probabilità dell'età del pezzo ispezionato.

Per esempio possiamo pensare di osservare un rasoio usa e getta con cadenza giornaliera, se risulta usurato lo sostituiamo e dopo 5 giorni lo sostituiamo in ogni caso. In queste condizioni la vita del rasoio rappresentata dalla variabile aleatoria T può assumere i valori $1, 2, 3, 4, 5$ con probabilità p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 che assumiamo note.
In generale supponiamo che la variabile aleatoria T possa assumere i valori $1, 2, 3, ..., N$ con probabilità $p_1, ..., p_N$ dove

$$p_1 + ... + p_N = 1.$$

Sia ora, per $1 \leq r \leq N$,

$$q_r = P(T \geq r) = p_r + ... + p_n.$$

Allora si ha che

$$q_1 + q_2 + ... + q_N = \underbrace{p_1 + p_2 + ... + p_N}_{q_1} + \underbrace{p_2 + ... + p_N}_{q_2} + ... + \underbrace{p_N}_{q_N} =$$

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 \cdot ... \cdot N \cdot p_N = \mathbb{E}[T] = \mu$$

cioè la somma dei q_r è pari al valore medio μ della variabile aleatoria T.
Se $k, i \in \{1, 2, ..., N\}$ e $k > i$ allora

$$P(T = k | T \geq i) = \frac{P(T = k \wedge T \geq i)}{P(T \geq i)} = \frac{P(T = k)}{P(T \geq i)} = \frac{p_k}{q_i}$$

e, se $i \leq N - 1$

$$P(T \geq i + 1 | T \geq i) = \frac{P(T \geq i + 1 \wedge T \geq i)}{P(T \geq i)} = \frac{P(T \geq i + 1)}{P(T \geq i)} = \frac{q_{i+1}}{q_i}.$$

Definiamo una catena di Markov dove ogni stato esprime l'*età incompleta* di un pezzo che occupa una determinata posizione sotto osservazione (ad esempio possiamo considerare il rasoio usa e getta che sta utilizzando Mario Rossi). Con il termine *'età incompleta'* intendiamo l'età che il pezzo osservato compirà alla scadenza futura più prossima, cioè l'età arrotondata per eccesso.
Gli stati in cui si può trovare il pezzo sono $1, 2, ..., N$; dallo stato $i \leq N - 1$ si può passare allo stato $i + 1$ se il pezzo supera l'ispezione; questo avviene con probabilità

$$\frac{q_{i+1}}{q_i}$$

perchè rappresenta la probabilità che la vita T del pezzo sia maggiore o uguale a $i + 1$ sapendo che ha un età pari ad i. Altrimenti se il pezzo non supera l'ispezione viene sostituito sicuramente e quindi la catena si sposta sul valore $T = 1$ con probabilità

$$1 - \frac{q_{i+1}}{q_i}$$

che è esattamente la probabilità dell'evento complementare al superamento dell'ispezione.
Qualora il pezzo abbia età $T = N$ verrà sicuramente sostituito quindi si passerà con probabilità 1 allo stato $T = 1$.

Quindi la matrice di transizione della catena di Markov in questione sarà

$$P = \begin{pmatrix} 1-q_2 & q_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1-\frac{q_3}{q_2} & 0 & \frac{q_3}{q_2} & 0 & ... & 0 \\ 1-\frac{q_4}{q_3} & 0 & 0 & \frac{q_4}{q_3} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1-\frac{q_N}{q_{N-1}} & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{q_N}{q_{N-1}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

La catena di Markov in questione è regolare per il Teorema 3.8.3, infatti ha tutti gli stati che comunicano fra loro e ha l'elemento

$$p_{1,1} = 1 - q_2 = 1 - (p_2 + ... + p_N) = p_1 > 0$$

di conseguenza sappiamo che esiste ed è unica la distribuzione invariante $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)$ che rappresenta la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria *'età del pezzo osservato'* quando n è abbastanza grande.
La distribuzione invariante si ricava algebricamente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \pi = \pi \cdot P \\ \pi_1 + ... + \pi_N = 1 \end{cases}$$

che si può scrivere come

$$\begin{cases} \pi \cdot (P - I) = 0 \\ \pi_1 + ... + \pi_N = 1 \end{cases}$$

quindi

$$P - I = \begin{pmatrix} -q_2 & q_2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1-\frac{q_3}{q_2} & -1 & \frac{q_3}{q_2} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1-\frac{q_4}{q_3} & 0 & -1 & \frac{q_4}{q_3} & ... & 0 & 0 \\ 1-\frac{q_5}{q_4} & 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1-\frac{q_N}{q_{N-1}} & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & \frac{q_N}{q_{N-1}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si nota che la prima equazione del problema è combinazione lineare delle altre per cui il sistema si traduce in

$$\begin{cases} q_2\pi_1 - \pi_2 = 0 \\ \frac{q_3}{q_2}\pi_2 - \pi_3 = 0 \\ \frac{q_4}{q_3}\pi_3 - \pi_4 = 0 \\ \vdots \\ \pi_1 + ... + \pi_N = 1 \end{cases}$$

che si traduce in

$$\begin{cases} \pi_2 = q_2\pi_1 \\ \pi_3 = q_3\pi_1 \\ \pi_4 = q_4\pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N = q_N\pi_1 \\ \pi_1 + ... + \pi_N = 1 \end{cases}$$

imponendo l'ultima condizione del sistema si ottiene

$$\pi_1 (1 + q_2 + ... + q_N) = \pi_1 (q_1 + q_2 + ... + q_N) = 1$$

cioè

$$\pi_1 = \frac{1}{q_1 + q_2 + ... + q_N} = \frac{1}{\mu}$$

quindi la distribuzione invariante sarà

$$\pi = \left(\frac{q_1}{\mu}, ..., \frac{q_N}{\mu}\right).$$

Si vede subito che le componente di π_i sono decrescenti all'aumentare di i e questo è ragionevole perchè fra i pezzi osservati prevalgono quelli giovani.
Quindi abbiamo determinato la distribuzione di probabilità della variabile *'eta del pezzo osservato'* che risulta essere la distribuzione invariante della catena di Markov che transita tra i valori della variabile aleatoria $T =$ *'vita del pezzo'*.

4.2 Il paradosso

Consideriamo ora la variabile aleatoria

$$S = \textit{'età incompleta del pezzo osservato'}.$$

La distribuzione che assegniamo alla variabile S è π per quanto detto sopra; se pensiamo di nuovo all'esempio del rasoio il valore della variabile S è la risposta di Mario Rossi alla domanda

'da quanto tempo stai usando questo rasoio?'

dopo che la catena di Markov è in azione già da un certo tempo. Risulta interessante calcolare il valore medio della variabile S che risulterà diverso da quello T perchè T descrive, ad esempio, la vita di un rasoio acquistato e non ancora utilizzato; S invece rappresenta la vita del rasoio che Mario Rossi sta utilizzando.
Sappiamo che la distribuzione della variabile T è $(p_1, ..., p_N)$ mentre quella di S è $(\pi_1, ..., \pi_N)$, calcoliamo quindi

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{N} i \cdot \frac{q_i}{\mu} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{N} i \cdot q_i = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{N} i \cdot \sum_{k=i}^{N} p_k = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{N} p_k \cdot \sum_{i=1}^{k} i =$$

$$\frac{1}{2\mu} \sum_{k=1}^{N} p_k \cdot k(k+1) = \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{k=1}^{N} p_k \cdot k^2 + \sum_{k=1}^{N} p_k \cdot k \right) =$$

$$\frac{1}{2\mu} \left(\mathbb{E}\left[T^2\right] + \mathbb{E}[T] \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbb{E}\left[T^2\right] + \mu \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma^2(T) + \mu^2 + \mu \right) = \frac{\sigma^2(T)}{2\mu} + \frac{1}{2}(\mu + 1).$$

Consideriamo ora una terza variabile aleatoria

$$Q = \textit{durata del pezzo osservato}$$

chiedo a Mario di informarmi, quando lo sostituirà, per quanti giorni ha utilizzato il rasoio che aveva in uso quando gli ho fatto la richiesta. La risposta di Mario costituisce il valore della variabile Q.
Esattamente come per la variabile T anche la Q può assumere i valori $1, 2, ..., N$, la differenza fra le variabili T e Q sta nel fatto che Q rappresenta la durata complessiva di un pezzo ispezionato già in opera da un tempo che non conosciamo, T quella di un

pezzo nuovo: il pezzo ispezionato in opera è già operativo da un certo tempo e questo influenza la previsione di durata complessiva del pezzo.
Calcoliamo ora la probabilità che la variabile Q assuma tali valori spezzando l'evento $(Q = k)$ nell'unione di eventi disgiunti:

$$(Q = k) = ((Q = k) \wedge (S = 1)) \cup ((Q = k) \wedge (S = 2)) \cup ... \cup ((Q = k) \wedge (S = k)) =$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} ((Q = k) \wedge (S = i))$$

e quindi

$$P\left(Q = k\right) = \sum_{i=1}^{k} P\left((Q = k) \wedge (S = i)\right).$$

Se $S > k$, cioè il rasoio che utilizza Mario è in funzione da più di k giorni la sua durata, che è espressa da Q, sarà di certo maggiore di k; per cui gli eventi scritti al secondo membro esauriscono le possibilità che si verifichi l'evento $(Q = k)$.
Per ciascun $i \leq k$ si ha

$$P\left((Q = k) \wedge (S = i)\right) = P\left(S = i\right) \cdot P\left((Q = k) \,|\, (S = i)\right);$$

sappiamo che $P\left(S = i\right) = \pi_i$, mentre l'altro fattore esprime la probabilità che la durata complessiva del rasoio sia k, sapendo che lo si è osservato in età i con $i \leq k$; cioè la probabilità che la sua durata sia k sapendo che ha già un età i.
Cioè

$$P\left((Q = k) \,|\, (S = i)\right) = P\left((T = k) \,|\, (T \geq i)\right) = \frac{P\left(T = k\right)}{P\left(T \geq i\right)} = \frac{p_k}{p_i + ... + p_N} = \frac{p_k}{q_i}.$$

In questo caso possiamo cambiare Q con T perchè conosciamo il valore di S che ci dice l'età del rasoio al momento dell'ispezione, di conseguenza la differenza fra T e Q sparisce.
Quindi

$$P\left((Q = k) \wedge (S = i)\right) = \pi_i \cdot \frac{p_k}{q_i} = \frac{q_i}{\mu} \cdot \frac{p_k}{q_i} = \frac{p_k}{\mu},$$

che è un valore costante rispetto ad i con $1 \leq i \leq k$; allora

$$P\left(Q = k\right) = \sum_{i=1}^{k} P\left(Q = k \wedge S = i\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_k}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(\underbrace{p_k + ... + p_k}_{k \text{ volte}}\right) = k\frac{p_k}{\mu},$$

e infine

$$\mathbb{E}\left[Q\right]=\sum_{k=1}^{N}k\cdot P\left(Q=k\right)=\sum_{k=1}^{N}k^{2}\frac{p_{k}}{\mu}=\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\left[T^{2}\right]=\frac{1}{\mu}\left(\sigma^{2}\left(T\right)+\mu^{2}\right)=\mu+\frac{\sigma^{2}\left(T\right)}{\mu}.$$

Proprio per via di questo risultato si parla di *'paradosso dell'ispezione'*: la durata media di un pezzo applicato in un certo ruolo è μ; ma se noi osserviamo il pezzo in funzione in una determinata posizione, la durata media di quel pezzo ha un valore maggiore; l'incremento di durata attesa è direttamente proporzionale alla varianza della durata dei pezzi nuovi.
In realtà non c'è nessuna contraddizione; dato che la durata di un pezzo è aleatoria, alcuni pezzi rimangono operativi più a lungo di altri; in un'ispezione casuale è perciò più probabile incontrare pezzi longevi, piuttosto che pezzi che durano poco.
Supponiamo di osservare la storia di 20 rasoi utilizzati in sequenza e sostituiti quando sono esauriti o hanno raggiunto i 5 giorni di vita. Supponiamo anche che la distribuzione della variabile T sia uniforme, cioè $p_i=\frac{1}{5}$.
La durata complessiva di quella dotazione di rasoi è data da

$$4\cdot 1+4\cdot 2+4\cdot 3+4\cdot 4+4\cdot 5=4+8+12+16+20=60 \text{ giorni}.$$

Quindi in questi 60 giorni ci saranno 4 rasoi dalla vita breve di un giorno, 4 con una vita di 2 giorni, fino ad avere 4 rasoi con la vita massima di 5 giorni.
Se allo scadere di un giorno casuale fra i 60 ci informassimo della durata totale Q del rasoio che si sta utilizzando in quel momento, con probabilità $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ ci verrà risposto che $Q=5$, mentre con probabilità $\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$ ci verrà risposto che $Q=1$.
Invece se avessimo contrassegnato un rasoio prima che venisse utilizzato e chiedessimo di essere informati quando questo verrà sostituito riceveremmo l'informazione $T=1$ con probabilità $\frac{1}{5}$, che è la stessa di ricevere l'informazione $T=2$, $T=3$, $T=4$ oppure $T=5$.
Proprio per questa ragione la media della variabile aleatoria T è minore di quella di Q: perchè i rasoi longevi restano in servizio più a lungo e quindi aumentano la loro probabilità di essere scelti nell'ispezione fatta in un giorno casuale, rispetto alla scelta casuale del rasoio fra i 20 che consideriamo.

Esempio 4.1. Facciamo un esempio numerico di quanto detto sino ad ora.
Consideriamo un pezzo che viene installato e che al massimo dopo due periodi di tempo per cui è stato utilizzato viene sostituito. Quindi usando la notazione precedente si ha che

$$N = 2.$$

Supponiamo inoltre che la distribuzione della variabile $T =$ *'vita del pezzo'* sia data da

$$p_1 = 0,9 \; p_2 = 0,1$$

cioè un pezzo ha il 90% di possibilità di durare un periodo e il 10% di durare due periodi. In questo caso abbiamo:

$$q_1 = 0,9 + 0,1 = 1 \text{ e } q_2 = 0,1$$

quindi

$$\mu = q_1 + q_2 = 1 + 0,1 = 1,1;$$

quindi la durata media della vita è

$$\mathbb{E}\left[T\right] = 1,1 \text{ periodi.}$$

La distribuzione invariante è

$$\pi = \left(\frac{q_1}{\mu}, \frac{q_2}{\mu}\right) = (0,91; 0,09)\,;$$

di conseguenza l'età media del pezzo osservato è

$$\mathbb{E}\left[S\right] = 1 \cdot 0,91 + 2 \cdot 0,09 = 1,09.$$

La varianza di T è data da

$$\sigma^2\left(T\right) = \mathbb{E}\left[T^2\right] - \mu^2 = 1,3 - 1,1^2 = 0,09.$$

Quindi abbiamo che la durata media del pezzo osservato è data da

$$\mathbb{E}\left[Q\right] = \mu + \frac{\sigma^2\left(T\right)}{\mu} = 1,1 + \frac{0,09}{1,1} = 1,18.$$

In questo caso vediamo che le medie delle variabili T e Q sono piuttosto vicine e questo trova conferma nel fatto che la probabilità che un pezzo duri due periodi è piuttosto bassa quindi è molto probabile che le ispezioni casuali si trovino di fronte un pezzo nuovo piuttosto che uno che sia in uso da più di un periodo.

Introduciamo ora un'ultima variabile aleatoria data da

$$R = \text{'}\textit{vita residua del pezzo dopo l'ispezione}\text{'}.$$

In questo caso si avrà che

$$P\left((Q = i + r) \cap (S = i)\right) = \frac{p_{i+r}}{\mu};$$

quindi

$$P(R = r) = P(Q = i + r) = \sum_{i=1}^{N-r} P\left((Q = i + r) \cap (S = i)\right) = \sum_{i=1}^{N-r} \frac{p_{i+r}}{\mu} =$$

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{N-r} p_{i+r} = \frac{1}{\mu}\left(p_{r+1} + \dots + p_N\right) = \frac{q_{r+1}}{\mu}.$$

Osserviamo che

$$P(R + 1 = r) = P(R = r - 1) = \frac{q_r}{\mu} = P(S = r)$$

ossia le variabili aleatorie $(R + 1)$ e S sono equidistribuite e questo perchè

$$(R + 1) + S = (R + S) + 1 = Q + 1.$$

Cioè la probabilità che il pezzo resista $r - 1$ periodi sapendo che l'età del pezzo osservato è i è proprio uguale alla probabilità che l'età del pezzo sia r.
Per ultima cosa calcoliamo la probabilità che, facendo l'ispezione, il pezzo sia da cambiare, e con quale probabilità lo si debba fare per anzianità (cioè il pezzo ha età $S = N$) o per avaria (il pezzo ha età inferiore ad N ma non funziona più).
La probabilità che si debba fare una sostituzione è data da

$$\pi_1 = \frac{1}{\mu}$$

perchè π è stazionaria e, se si sostituisce il pezzo, all'ispezione successiva al suo posto ci sarà un pezzo che ha un età di 1 periodo, quindi la probabilità di fare una sostituzione è pari a quella di trovarsi di fronte un pezzo nuovo.
Il risultato trova conferma nella concezione comune perchè, dato che la vita media di un

pezzo è μ, ogni pezzo andrà sostituito mediamente ogni μ periodi.
La sostituzione per anzianità avrà probabilità π_N che rappresenta la probabilità di passare da un pezzo che ha finito il suo mandato ad uno nuovo.
Infine la probabilità che la sostituzione avvenga per avaria (cioè in un età compresa tra 1 e N) è data da

$$\pi_1 - \pi_N.$$

In particolare possiamo notare che

$$P\left(\textit{pezzo in età } N | \textit{pezzo da sostituire}\right) = \frac{\pi_N}{\frac{1}{\mu}} = \mu\pi_N = q_N = p_N$$

e

$$P\left(\textit{pezzo in età} < N | \textit{pezzo da sostituire}\right) = \frac{\pi_1 - \pi_N}{\frac{1}{\mu}} = \mu\left(\pi_1 - \pi_N\right) = 1 - p_N;$$

cioè se assumiamo come dato di fatto che il pezzo sia da cambiare ritroviamo le probabilità di partenza della variabile T e questo perchè se noi sappiamo che il pezzo è da sostituire si neutralizza la maggiore esposizione dei pezzi più longevi, e quindi la probabilità condizionale di trovare un pezzo in età N coincide con la probabilità che un pezzo nuovo lavori per N periodi.

Bibliografia

[1] P.Baldi; Calcolo delle probabilità e statistica; McGraw-Hill 1993

[2] Nicolò Pintacuda; Primo corso di probabilità; Franco Muzzio & c. Editore 1983

[3] Luciano Daboni; Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica; 3 edizione; UTET Torino 1992

[4] Hugh Gordon; Discrete probability; Springer 1997

[5] L.Brugnano Dispense del corso di Modelli Numerici per la Simulazione a.a 2016/2017 Università di Firenze

[6] F.Astengo Dispense del corso di Analisi 3 a.a 2011/2012 Università di Genova

[7] Catene di Markov Dispense (http://www.dima.unige.it/~riccomag/Teaching/ProcessiStocastici/DispenseAggiornateNonComplete.pdf)

[8] Giuseppe Sanfilippo; Processi; Università di Palermo (http://www1.unipa.it/sanfilippo/pub/processi/anniprec/aa0506/4-DTCM_new.pdf.pdf)

[9] Giuseppe Sanfilippo; Processi Stocastici; (http://www1.unipa.it/sanfilippo/pub/processi/main_noslide_20100604.pdf)