Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'apprendimento della probabilità: un'indagine su un gruppo di studenti

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:
Guido Cavrini

I Sessione
Anno Accademico 2016-2017

Le domande più importanti
della vita sono, per la gran parte,
soltanto problemi di probabilità.

(Pierre Simon Laplace)

Indice

Introduzione

Quasi ogni giorno sentiamo parlare di probabilità, e se non ne sentiamo parlare l'argomento è sottinteso. Ogni attività umana è soggetta a qualche incertezza, per cui è quanto mai importante saper prevedere nel modo più preciso possibile come i fatti si evolveranno.

Soltanto in un tempo relativamente recente il Calcolo delle probabilità è divenuto una vera scienza, all'interno delle scienze matematiche; per molto tempo si è pensato che il Caso non potesse essere oggetto di studi matematici (e anche adesso molte persone, soprattutto se non hanno una buona conoscenza matematica, la pensano così).

Personalmente sono stato affascinato da questa branca della Matematica fin da quando ne ho appreso a scuola i primi elementi, limitati a problemi relativi a dadi, carte, monete e simili.

La prima parte della mia tesi contiene una breve rassegna storica dell'evoluzione del Calcolo delle probabilità.
La conoscenza della storia di una disciplina è certamente utile per un insegnante che, una volta conosciute le difficoltà che quella disciplina ha incontrato nel suo sviluppo, potrà più facilmente prevedere quali saranno gli aspetti più critici nel suo insegnamento.

Dopo aver poi inserito un riferimento alle attuali Indicazioni Nazionali, che stabiliscono i contenuti essenziali delle diverse discipline nei diversi corsi di studio della Scuola Secondaria nel nostro Paese, ho esaminato un libro di testo, ampiamente adottato nelle scuole italiane, per vedere come l'argomento viene trattato.

Successivamente ho consultato diversi lavori di ricerca in Didattica della Matematica attinenti alla probabilità riportandoli poi nella mia tesi.

La parte principale del mio lavoro di tesi riguarda però un'indagine condotta su un gruppo di studenti di scuola secondaria e sugli studenti frequentanti il primo anno del Corso di Laurea in matematica a Bologna.

A questi ragazzi è stato sottoposto un test anonimo (che avevo preparato in precedenza), uguale per tutti, contenente sette problemi di probabilità.
Alcuni degli studenti liceali non avevano ancora affrontato l'argomento; di ciò ero consapevole, e su di loro lo scopo era mettere alla prova la loro intuizione, vedere come il loro buon senso poteva aiutarli (oppure ingannarli) nel rispondere a ciascun quesito.
Alcuni dei problemi proposti hanno soluzioni *controintuitive*; ciò accade spesso in questa disciplina.

I risultati del test confermano che anche studenti con una maggiore età anagrafica e per di più *'selezionati'*, in quanto studenti di un corso di laurea in matematica, hanno spesso idee non molto chiare su argomenti di questo tipo.

Alcune risposte, giudicate particolarmente interessanti, sono state poi riportate e analizzate nel presente lavoro di tesi.

Capitolo 1

Cenni storici

1.1 Il gioco d'azzardo

La nascita del Calcolo delle Probabilità è strettamente legata al gioco d'azzardo il quale è molto antico.
Nella Bibbia sono presenti molti riferimentialle lotterie sia nel Vecchio sia nel Nuovo Testamento. Per esempio, nella scelta tra Barabba e Mattia come successore dell'apostolo Giuda Iscariota, si ricorre al caso e non a Dio (Atti $1:23-26$). Un esempio ancora più drammatico si trova nei Vangeli quando i soldati romani presenti alla Crocifissione si dividono le vesti di Gesù giocando a dadi (Matteo $27:35$, Marco $15:24$, Luca $23:24$ e Giovanni $19:24$).
Ben prima del Medio Evo, il gioco era diffusissimo in Europa. In un primo momento si giocava utilizzando gli astragali (piccoli prismi ricavati da ossi di animali) che, non avendo facce tutte uguali, rendevano molto interessante il problema delle probabilità. Ad un certo momento, ignoto, i dadi rimpiazzarono gli astragali come strumenti di gioco.
Le carte da gioco apparvero verso la metà del Trecento e quindi i giochi per un migliaio d'anni dovettero essere condotti prevalentemente con i dadi.
C'è da dire che il gioco d'azzardo veniva aspramente combattuto (seppur con scarsi risultati) dalla Chiesa e dallo Stato che cercavano di combattere i vizi legati al gioco e, in particolare, alle scommesse.
Con una serie di editti la Chiesa cercava di fronteggiare il dilagare di vizi come il bere e la bestemmia che si associavano al gioco mentre lo Stato era intento a combattere l'ozio, l'assenza di attenzione per i beni e il crimine che così spesso si rinvenivano fra i giocatori. Nel 1255 Luigi IX, re di Francia, emanò la proibizione non solo del gioco ma persino della costruzione dei dadi. Non furono risparmiati neanche gli scacchi.

E il suo è solo uno dei tanti esempi di leggi proibizioniste nei confronti del gioco. Nonostante tutto, il gioco con i dadi (o più tardi con le carte) continuò senza interruzione, dai tempi dei romani sino al Rinascimento e fu praticato non solo dalle classi elevate ma anche dalla classe media e dalle classi basse e, sebbene vari governi e la Chiesa scoraggiarono il gioco sino a proibirlo, una grande quantità di giochi fu praticata sia come innocente passatempo sia in sfida alla legge, con l'approvazione popolare.
Per quanto riguarda molti riferimenti a giochi di dadi fra il 1000 ed il 1500 gli autori presumono che i loro lettori siano familiari con i giochi che considerano e, di conseguenza, non fanno riferimento alle regole dei giochi presentati. Siamo così del tutto al buio sull'esatta natura dei giochi che venivano praticati.
Si sarebbe potuto supporre nel migliaio di anni che precedettero, diciamo, il 1400, che qualche idea della costanza dei rapporti statistici e i rudimenti della teoria delle frequenze sarebbe potuta apparire.
Sino al secolo XV troviamo poche tracce del calcolo delle probabilità e poco che suggerisca l'emergere dell'idea che fosse possibile un calcolo sui risultati dei dadi. Potrebbe essere che i giocatori avessero un'idea approssimativa delle frequenze relative d'occorrenza: difficilmente si vede come avrebbero potuto mancare di cogliere tale idea e come vi sia qualche prova della costruzione di dadi distorti sin dai tempi dei romani. Presumibilmente era presente la nozione complementare di lanci corretti. Potrebbe anche essere che qualche persona intelligente abbia sviluppato gli elementi di una teoria per se stesso, ma deve aver tenuto per sé il segreto a motivo del valore monetario.
Il più antico modo di contare il numero dei modi in cui tre dadi possono cadere (incluse le permutazioni) sembra capiti nel poema latino *De vetula (L'anziana signora)*. Questo notevole lavoro per qualche tempo è stato ascritto ad Ovidio e incluso in alcune edizioni medioevali dei suoi poemi. L'ascrizione è comunque solo supposta. Molto interessante ciò che Ovidio afferma sul gioco d'azzardo nella sua opera *Ars Amandi (L'arte di amare)*:

Sic, ne perdiderit, non cessa perdere lusor. (Così ai dadi il giocator perdente per non restare in perdita continua a perdere.)

Altro aspetto molto legato alla probabilità è tutto ciò che riguarda ciò che comunemente chiamiamo Caso o Fortuna. Cicerone afferma:

«Cosa c'è di più incerto del lancio dei dadi? Eppure ci sono alcuni, dediti al gioco, che ottengono qualche volta una venere (quando i quattro dadi mostrano facce diverse) e persino due o tre volte di seguito. E allora dobbiamo essere così stolti da affermare che è accaduto per volontà di Venere, piuttosto che per caso ?»

Anche il poeta Lucrezio nel *De Rerum Natura (Sulla natura delle cose)* fa osservare che molti fenomeni naturali sono casuali. Il primo che inizia a parlare di percentuali riguardanti la Fortuna è Machiavelli nel *Principe*:

Nondimanco, perchè il nostro libero arbitrio non sia spento, iudico poter esser vero che la fortuna sia arbitra della metà delle azioni nostre, ma che etiam lei ne lasci governare l'altra metà, o presso, a noi.

Nonostante il gioco d'azzardo fosse molto antico e la Fortuna fosse oggetto di interesse già da molto tempo bisogna aspettare il Cinquecento per trovare qualche interessante documento sul Calcolo delle Probabilità.

1.2 La nascita del calcolo delle probabilità

Prima tra tutte ricordiamo lopera del matematico (nonché giocatore d'azzardo) Girolamo Cardano ($1501 - 1507$) *De Ludo Aleae (Il gioco dei dadi)* nella quale troviamo due importanti idee che sarebbero poi diventate importanti teoremi: la regola delle *probabilità congiunte* (che consiste nel moltiplicare le singole probabilità nel caso di eventi indipendenti) e la *Legge dei Grandi Numeri* (applicata in un caso particolare).
Di notevole interesse lopera di Galileo Galilei ($1564-1642$) *Sopra le scoperte dei dadi* nella quale l'illustre scienziato si occupa di analizzare da un punto di vista matematico il gioco della Zara. Tale gioco (citato anche da Dante nella Divina Commedia), probabilmente di origine araba, era molto diffuso all'epoca. Venivano lanciati 3 dadi e si scommetteva su quale sarebbe stata la somma dei risultati usciti dal lancio dei 3 dadi. Si era visto che tutti i numeri dal 3 al 18 (compresi) potevano uscire anche se vi erano alcuni numeri (9, 10, 11 e 12) più probabili. Si riteneva (erroneamente) che tali numeri dovessero uscire con la stessa frequenza ma giocando ci si accorgeva che i numeri 10 e 11 erano più probabili dei numeri 9 e 12. Non comprendendo il motivo di questo fatto, il Granduca di Toscana chiese delucidazioni a Galileo.

Galileo affronta il problema in modo estremamente preciso e rigoroso. L'errore che veniva commesso era il seguente: siccome sia il 9 sia il 10 si possono ottenere con 6 triplette diverse allora devono uscire con la stessa frequenza. Non si teneva conto quindi delle permutazioni. Si ha infatti che una tripletta i cui numeri sono tutti uguali deve essere contata una volta sola mentre quelle con due numeri uguali (e il terzo diverso) va contata 3 volte e quelle con tre numeri tutti diversi devono essere contate 6 volte. Così facendo (e Galileo lo spiega molto bene) si vede che il 10 è il risultato più probabile.

Viene poi fatto notare al Granduca di Toscana che c'è simmetria (il numero 11 compare con la stessa frequenza del numero 10, il 12 compare con la stessa frequenza del numero 9 e così via). Dopo un'accurata spiegazione, Galileo fornisce una tabella in cui riassume tutto spiegando come si legge. Una volta che uno ha la tabella sottomano è sufficiente guardarla per capire se una scommessa è conveniente o no. Il suo è quindi un lavoro molto didattico.

Veniamo ora all'episodio che ha portato alla nascita vera e propria del calcolo della probabilità. Citando Poisson, l'origine del calcolo delle probabilità sta in *'un problema intorno ai giuochi d'azzardo proposto ad un austero giansenista (Pascal) da un uomo di mondo (Gombaud)'*.

A detta di molti storici della matematica l'anno chiave fu il 1654 quando Antoine Gombaud $(1607-1684)$, scrittore e filosofo francese, meglio noto con lo pseudonimo di Cavalier de Méré, presentò al matematico francese Blaise Pascal $(1623-1662)$ alcuni problemi sul gioco d'azzardo.
Gombaud aveva capito che lanciando un dado non truccato avrebbe ottenuto un 6 con probabilità $\frac{1}{6}$ e sapeva pure che, lanciando due dadi, avrebbe ottenuto il doppio 6 con probabilità $\frac{1}{36}$. Nonostante questo, egli si trovò spiazzato quando dovette analizzare due giochi all'epoca molto popolari.
Nel primo gioco ci si chiedeva quale fosse il più piccolo numero n_1 di lanci di un dado da effettuare per rendere vantaggiosa una scommessa alla pari sull'uscita di almeno un 6 mentre nel secondo gioco si effettuavano n_2 lanci di due dadi e ci si chiedeva quale fosse il valore minimo di n_2 per ottenere un doppio 6 con probabilità maggiore di $\frac{1}{2}$. Il Cavalier de Méré era convinto che dovesse valere

$$\frac{n_1}{6} = \frac{n_2}{36}$$

Ma un numero sufficiente di prove lo convinse che non era così. Nella lettera a Pascal, l'accanito giocatore di azzardo sfoga tutto il suo sdegno affermando che *'questo è un grande scandalo'* e che *'la stessa aritmetica tradiva se stessa'*. Pascal riuscì a calcolare i valori di n_1 ed n_2 che sono rispettivamente 4 e 25 (Gombaud era convinto fosse 24).
L'altro problema era quello della *'partita interrotta'* già proposto da Luca Pacioli $(1445-1517)$. Il problema era il seguente: si gioca una partita che finirà quando uno dei due giocatori arriverà ad un prefissato numero di vittorie (nel nostro caso 6). Il vincitore guadagnerà una certa posta. Ci si chiede com'è equo ripartire la vincita tra i due giocatori qualora si decidesse di terminare prima la partita (nel nostro caso sul punteggio di $5-3$).
Si era visto che fare una semplice divisione della vincita per il numero di partite giocate e assegnare tante parti in base a quante partite erano state vinte da ogni giocatore (come proponeva Pacioli) non era equo.

Fu Niccolò Fontana (1499−1557), matematico bresciano noto come Tartaglia (in quanto balbuziente), ad accorgersi dell'errore nel suo *General Trattato* del 1556.
Tartaglia fa notare che, secondo la regola di Pacioli, se un giocatore avesse vinto 1 partita e l'altro nessuna si sarebbe dovuto impossessare di tutta la posta, il che è ovviamente ingiusto. Egli propose quindi un'altra soluzione, anch'essa sbagliata.
Il suo ragionamento era il seguente: la differenza di vittorie tra i due giocatori A e B era di 2 partite $(5-3)$ che corrispondeva ad $\frac{1}{3}$ della posta totale e quindi la posta andava divisa in 3 parti e una sola sarebbe aspettata a B mentre le altre due ad A. Solo due anni dopo un altro matematico di nome Peverone $(1509-1559)$ considerò un problema simile senza però citare né Pacioli né Tartaglia e cercò di fornire la soluzione. Neanche lui ci riuscì e si dovette per l'appunto aspettare l'intervento di Pascal e di Fermat.
Per risolvere questo problema, Pascal si consultò con Pierre de Fermat (1601−1665) e ne nacque una famosa corrispondenza epistolare.
Entrambi si resero conto che per risolvere il problema bisognava guardare al numero di partite che mancavano prima di vincere. Pascal utilizzò quello che noi chiamiamo il triangolo di Tartaglia mentre Fermat studiò il numero di casi favorevoli all'uno e all'altro giocatore. Entrambi arrivarono comunque allo stesso risultato tant'è che il 29 luglio 1654 Pascal scriveva a Fermat *'Vedo che la verità è la stessa a Tolosa come a Parigi'*.
In queste lettere possiamo notare che erano state scoperte le prime leggi della probabilità ed era stato inventato il calcolo combinatorio. Erano inoltre ricomparsi i coefficienti binomiali. Da notare che né Pascal né Fermat usarono l'espressione *calcolo delle probabilità*.
Durante il suo secondo soggiorno in Francia Christiaan Huygens (1629−1695) conobbe il Cavalier de Méré e venne a sapere a Parigi della corrispondenza intercorsa tra Pascal e Fermat tramite conoscenti di questi due protagonisti. Huygens era di intelligenza vivace e penetrante e capì subito che la speranza di un guadagno costituiva il nocciolo di molti problemi di probabilità.
Introdusse quindi, trattandola in modo assiomatico, la nozione di *aspettativa* con il termine *'geometrica expectatio'* che è ciò che noi chiamiamo oggi *speranza matematica*. Questo concetto era già comparso in Pascal nel suo famoso argomento apologetico della scommessa in favore della credenza in Dio nell' *Apologia della Religione Cristiana*.

1.3 Gli sviluppi del calcolo delle probabilità

Un altro importante filone era quello legato alle assicurazioni e al calcolo dei rischi. Infatti nel periodo intercorso tra i lavori di Huygens e quelli di Bernoulli si nota un moltiplicarsi di documenti statistici. Nel 1662 John Graunt (1620 − 1674), statistico britannico, utilizzò le tavole di mortalità di Londra per studiare il tasso di mortalità nella città. Lodewijck Huygens (1631 − 1699), dopo aver letto il libro di Graunt, consultò il fratello Christaan sul come calcolare l'attesa di vita di un bambino appena nato. Negli stessi anni due matematici olandesi, Johannes Hudde (1628 − 1704) e Jan de Witt (1625 − 1672) utilizzarono i dati sulle assicurazioni in Olanda per inferire una curva di mortalità su cui basare il prezzo equo di una rendita vitalizia. Si cominciava quindi in questo periodo a speculare sulla durata della vita. Bisogna però precisare che certe forme di assicurazioni marittime erano praticate fin dall'antichità in quanto i pericoli marittimi erano molto più impellenti.
Il primo matematico che provò ad applicare la probabilità ad alcuni casi legali fu Leibniz (1646 − 1716). Ma è dal Settecento che la probabilità diventò una teoria in grado di stimolare l'interesse di molti all'interno della comunità scientifica in quanto si scoprirono un gran numero di applicazioni. Nel 1713 venne pubblicata postuma l'opera di Jakob Bernoulli (1654 − 1705) dal titolo *Ars Conjectandi (L'arte di concludere)*. In questo volume venne dimostrata la legge empirica del caso o legge dei grandi numeri.

Solo 5 anni più tardi Abraham de Moivre (1667 − 1754), nella sua opera *Doctrine of Chances (Dottrina delle possibilità)*, dimostrò il teorema centrale nel caso di variabili aleatorie di Bernoulli simmetriche. Lo stesso De Moivre riuscì a risolvere il classico problema della rovina di un giocatore, problema a cui si era interessato anche Joseph Louis Lagrange (1736 − 1813). Nella teoria della rovina di un giocatore si arriva a dimostrare che in un gioco equo le probabilità di rovina (ossia la perdita di tutto il capitale) sono inversamente proporzionali ai capitali disponibili per giocare. Si ha, in particolare, che in un gioco equo contro un banco illimitato la rovina è certa.

Nel 1738, Daniel Bernoulli (1700 − 1782) affrontò il famosissimo Paradosso di San Pietroburgo in cui l'applicazione diretta della teoria delle decisioni (che tiene conto solo del guadagno atteso) suggerisce una linea di condotta che nessuna persona ragionevole si sentirebbe di adottare. Ricordiamo poi Thomas Simpson (1710 − 1761), noto soprattutto per il procedimento di calcolo approssimato di integrali definiti, e Thomas Bayes (1702 − 1761), noto per il suo teorema sulla probabilità condizionata.

Con Georges Louis Leclerc, Conte di Buffon, $(1707-1788)$ si arriva a dare interpretazioni probabilistiche a questioni geometriche. Rimasto famoso il problema dell'ago, di cui si era occupato il Conte di Buffon. Il problema era il seguente: se si lancia a caso un ago di lunghezza l su un piano dove vi sono rette parallele a distanza d l'una dall'altra (con $l < d$), la probabilità che l'ago intersechi una delle rette è $\frac{2l}{\pi d}$.
Con Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$, senza dubbio uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, troviamo la famosa curva a campana utilizzata dal grande matematico nello studio della distribuzione degli errori in alcuni dei suoi lavori di astronomia. L'importanza e la bellezza della scoperta di Gauss è ben espressa da Sir Francis Galton $(1822-1911)$, naturalista inglese, che afferma:

'Non ho mai conosciuto altro così adatto ad impressionare l'immaginazione come la meravigliosa forma dell'ordine cosmico espresso dalla Legge della frequenza degli errori. Se i Greci l'avessero conosciuta ne avrebbero fatto una dea. [...] Essa è la legge suprema dell'irragionevolezza'.

Merito di Pierre Simon Laplace $(1749 - 1827)$ l'aver formalizzato la definizione classica di probabilità. Lo stesso Laplace si stupì per la centralità della probabilità nella vita dell'uomo e affermò:

'E' sorprendente che una scienza, nata per questioni riguardanti il gioco d'azzardo, stia diventando l'oggetto più importante della conoscenza umana [...] Le questioni serie della vita sono quasi sempre solo problemi di calcolo delle probabilità'.

La probabilità trovò applicazioni anche nella fisica, scienza sperimentale per eccellenza ma fu solo nella seconda metà dell'Ottocento che ci si rese conto di quanto la probabilità fosse utile anche in fisica tant'è che Clerk Maxwell $(1831 - 1879)$ nel 1854 scrisse:

'La vera logica di questo mondo è il calcolo delle probabilità che tiene conto del concetto di probabilità che è, o dovrebbe essere, nella mente di ogni uomo ragionevole'.

Dell'importanza della probabilità se ne rese conto anche il botanico e sacerdote Gregor Mendel $(1822 - 1884)$ nei suoi studi sulla genetica. La probabilità trovò applicazioni anche in quello che comunemente chiamiamo moto browniano (dal nome del botanico inglese Robert Brown $(1773-1858)$ che lo scoprì nel 1828), ossia il moto incessante di particelle di polline sospese in un liquido, e nel fenomeno della diffusione di un gas.

La spiegazione del moto browniano in termini probabilistici fu dovuta ad Albert Einstein ($1879 - 1955$) che scoprì, senza saperlo, che tutto il mondo degli atomi, studiato in meccanica quantistica, era governato da leggi probabilistiche.

Tra i grandi che si occuparono di probabilità bisogna ricordare anche Nicolai Ivanovic Lobacesky ($1792-1856$), famoso anche per essersi occupato di geometrie non euclidee, Simeon Denis Poisson ($1781 - 1840$) e Pafnutij L'vovic Chebychev ($1821-1894$), il quale stabilì tra l'altro alcune disuguaglianze molto utili in statistica.
Nel convegno mondiale dei matematici tenutosi a Parigi nel 1900, David Hilbert ($1862 - 1943$), nella sua famosa enumerazione dei più rilevanti e non risolti problemi di matematica, pose la questione dei fondamenti della probabilità. Di probabilità si occupò anche Andrej Andreevic Markov ($1856-1922$). Ormai la probabilità occupava un posto rilevante nel panorama scientifico mondiale. Max Born ($1882-1970$), illustre fisico, commentava così:

'Dio gioca a dadi con il mondo'.

contraddicendo quello che diceva Einstein. Ben nota anche l'ironica affermazione fatta da Bertrand Russell ($1872 - 1970$), filosofo e matematico gallese, nel 1927:

'il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato'.

La questione dei fondamenti della probabilità si chiuse solo nel 1933 grazie al matematico russo Kolmogorov ($1903-1987$) con la sua opera *Fondamenti della Teoria della Probabilità* (il cui titolo originale è *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*).

Tra i risultati più significativi di questo ultimo mezzo secolo vi è sicuramente il metodo Monte Carlo, un'idea che solitamente si fa risalire al Progetto Manhattan e poi sviluppata da menti prestigiose come John Von Neumann ($1903 - 1957$).
Non si può però non menzionare la grande rivoluzione portata avanti da un certo Bruno de Finetti ($1906 - 1985$). De Finetti, nato il 13 giugno 1906 a Innsbruck, italiano di origine e di sentimenti, a seguito di un'infanzia difficile si occupò prima di ingegneria per rendersi poi conto che la sua passione era la matematica. A soli 21 anni si laureò in matematica applicata. Numerosi furono i suoi contributi nelle scienze assicurative.

Il grande De Finetti aprì la porta alla visione soggettiva della probabilità affermando che

'La probabilità non è nient'altro che il grado di fiducia (speranza o timore) nel fatto che qualcosa di atteso (temuto o sperato o indifferente) si verifichi e risulti vero'.

Nella sua rivoluzione contro tutti (o quasi), il nostro De Finetti ebbe due terribili handicap: il primo fu quello che solitamente scriveva in italiano e non in inglese, il secondo fu dato dalla sua mania di perfezionismo che si manifestava nella ricerca di parole auliche. Le sue idee rivoluzionarie vennero fatte conoscere al mondo soprattutto dal famoso statistico Leonard Jimmie Savage (1917 – 1971).

1.4 Considerazioni finali

Abbiamo visto che il Calcolo delle Probabilità non solo si sviluppò tardivamente ma che, una volta iniziato, progredì lentamente. In un primo momento la probabilità è stata associata ai giochi d'azzardo.
Il fatto di non avere inizialmente strumenti di gioco regolari (gli astragali, ad esempio, non avevano facce tutte uguali) rendeva difficile fare previsioni probabilistiche. Questo però non basta per spiegare i motivi per cui il calcolo delle probabilità ci mise tanto tempo per emergere.
Non si può certo dire che i Greci non fossero capaci di fare generalizzazioni anche se erano un po' impacciati nello sviluppare la loro Aritmetica e la loro Algebra. Lo stesso vale per gli arabi e per gli europei del Basso Medioevo.

Qualcuno suggerisce che l'imperfezione dei dadi possa aver avuto ripercussioni sul ritardo nello sviluppo del calcolo delle probabilità ma sembra una spiegazione un po' semplicistica.

Tra le altre ragioni ci può essere una mancanza di conoscenza dell'Algebra Combinatoria, in quanto questa disciplina suscitò l'interesse dei matematici solo a partire dal XVI e XVII secolo. C'è da dire, però, che sia Cardano sia Galileo se la cavarono abbastanza bene anche senza strumenti combinatori.

Altri motivi potrebbero essere quelli legati alla superstizione dei giocatori e alle barriere (se così si possono definire) religiose e morali. La superstizione dei giocatori è ben nota fin dall'antichità e come si sa bene l'età della superstizione precede spesso l'età della ragione.

Il Calcolo delle Probabilità, inoltre, non era ben visto in quanto, occupandosi di gioco d'azzardo, non sembrava riguardare la ricerca della Verità ma piuttosto l'inseguimento di un vile arricchimento. Inoltre, il gioco d'azzardo era visto come un illecito morale in quanto sostituisce in modo esplicito l'intelletto (che ci è dato da Dio) con la sottomissione al caso.

Ad ogni modo la storia della probabilità ci insegna che la risoluzione di certi problemi elementari, nel senso che richiedono solo strumenti di base di matematica, non sia stata proprio così immediata. Il fatto che noi oggi risolviamo senza difficoltà (ma non troppo) certi problemi non ci deve far erroneamente pensare che i nostri studenti non possano ricadere, spinti soprattutto dal loro intuito, in errori sistematici.

Per questo è importante per ogni docente avere un'idea di quella che è stata la storia della matematica, e nel nostro caso della probabilità. In tal modo non ci si stupirà più di tanto nel vedere certi studenti ricadere in errori simili a quelli che hanno compiuto anche altri matematici illustri della storia.

Capitolo 2

L'insegnamento della probabilità in Italia

2.1 Le Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni Nazionali per il Curriculum sono un testo di riferimento unico per tutte le scuole che sostituiscono quelli che, un tempo, si chiamavano programmi ministeriali.

Il testo entra in vigore nel Novembre 2012, sostituendo le precedenti Indicazioni Nazionali.

Queste, come previsto dall'autonomia scolastica, forniscono alle scuole obiettivi di apprendimento e competenze che ogni studente dovrebbe acquisire; confermano la validitá dell'impianto educativo della scuola di base, ma indicano alcune necessità per garantire a tutti i ragazzi delle solide conoscenze e competenze.

Nelle Indicazioni Nazionali per l'insegnamento della matematica compare la sezione chiamata Dati e Previsioni, a cui si riferisce la probabilità e la statistica.

2.1.1 Primo Grado

Notiamo che già nella versione precedente a quella attuale nelle Indicazioni Nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di 1° grado, comparivano argomenti relativi alla statistica e alla probabilità.

Nella sezione relativa a matematica, si trovava infatti:

- Fasi di un'indagine statistica;
- Tabelle e grafici statistici;
- Valori medi e campo di variazione;
- Concetto di popolazione e di campione;
- Probabilità di un evento: valutazione di probabilità in casi semplici.

Sempre nelle Indicazioni Nazionali, tra i Traguardi per lo sviluppo delle competenze troviamo:

- Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni;
- Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza;
- Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi;
- Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta;
- Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità.

Negli *Obiettivi specifici di apprendimento*, nella sezione *Dati e Previsioni* si trovano le competenze che gli studenti dovrebbero acquisire, nell'ambito della probabilità e statistica:

- Rappresentare insiemi di dati, facendo uso di un foglio elettronico. In situazioni significative, confrontare dati al fine di prendere decisioni, utilizzando le distribuzioni delle frequenze e delle frequenze relative. Scegliere ed utilizzare valori medi (moda, mediana, media aritmetica) adeguati alla tipologia ed alle caratteristiche dei dati a disposizione. Saper valutare la variabilità di un insieme di dati determinandone, ad esempio, il campo di variazione;
- In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti;
- Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti.

2.1.2 Secondo Grado: Liceo Scientifico

Nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici si trova nella sezione *'linee generali e competenze'*:

'Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.'

Inoltre, tra i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio, si trova:
4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;
Si può notare come venga data importanza all'utilizzo di strumenti informatici che possono risultare molto utili per un approccio frequentista alla probabilità.
Sempre nelle Indicazioni Nazionali per il liceo scientifico, tra gli *Obiettivi Specifici di Apprendimento*, nella sezione *'Dati e Previsioni'*:

'Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti. Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici. Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica. Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.'

Ma l'apprendimento della probabilità deve essere sempre più approfondito ed è di grande importanza formativa già nel primo biennio.

Come riportano gli *Obiettivi Specifici* per il secondo biennio:

'Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.'

E per quanto riguarda il quinto anno:

'Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson). In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.'

2.2 L'insegnamento della probabilità e della statistica

2.2.1 Il legame tra statistica e probabilità

La probabilità ha il compito di affrontare lo studio dell'incertezza, appartiene alla matematica e, come il ragionamento matematico, è deduttiva (Anichini, 2010). La statistica, invece, è il metodo per lo studio scientifico dei fenomeni collettivi, ossia quei fenomeni che si possono conoscere solo eseguendo una massa di osservazioni individuali (Gini, 1962). Per raggiungere il suo scopo la statistica si avvale della matematica in modo strumentale utilizzandone il linguaggio.
L'osservazione e la raccolta dei dati quantitativi e qualitativi sono necessari per rilevare la variabilità dei fenomeni naturali (compito della statistica) e l'incertezza degli eventi (compito della probabilità). Di fronte alla variabilità dei fenomeni l'uomo cerca regolarità che possono portare alla scoperta di leggi di natura.
Il legame tra statistica e probabilità è ben presente nella definizione *frequentista* della probabilità, secondo la quale la probabilità di un *evento ripetibile* (in senso statistico e classificatorio) si stima con la sua frequenza di accadimento, calcolata in un numero sufficiente di osservazioni.

2.2.2 L'importanza di tale insegnamento

Pensandoci bene la vita di tutti i giorni è costellata da considerazioni di natura probabilistica (anche se non necessariamente formalizzate come tali). Sono esempi di ciò la valutazione, uscendo di casa, della possibilità che quel giorno piova o meno (per decidere se prendere o no l'ombrello), la rinuncia a partecipare ad una gara per la convinzione di non potercela fare e tanti altri aspetti.

Se poi apriamo un giornale o ascoltiamo un telegiornale ci rendiamo conto benissimo che una buona parte di informazioni che vengono fatte circolare prevede numeri, statistiche, grafici e probabilità.
Un'adeguata preparazione in materia diventa quindi una necessità per ogni studente che deve diventare poi un cittadino consapevole. Non possiamo quindi aggirare l'ostacolo evitando l'insegnamento di statistica e probabilità nelle scuole ma dobbiamo, in qualche modo, affrontarlo.

Non sono poche le iniziative portate avanti in questo senso. Tra le numerose iniziative della SIS (Società Italiana di Statistica), che ha creato collegamenti attivi con la scuola, ricordiamo le Olimpiadi della Statistica, che propone e gestisce dal 2011, e la partecipazione mediante progetti di statistica al PLS (Piano Lauree Scientifiche).

Anche l'$ISTAT$ porta avanti alcune iniziative tra cui la celebrazione, a partire dal 2010 della Giornata della Statistica.

Ciò che va assolutamente evitato è introdurre la statistica come un insieme di calcoli sui numeri inventati e senza significato in un contesto reale. Tra l'altro operare in contesti quantitativi coinvolgenti e interessanti perché derivanti da fenomeni in parte conosciuti può essere un utile supporto per passare dalla realtà alla sua astrazione simbolica. Questo per aiutare i nostri studenti a comprendere meglio che le formule sono un linguaggio che ha il vantaggio della concisione e della non ambiguità.

Merito notevole nel promuovere l'introduzione di statistica e probabilità nel curriculum scolastico di ogni ordine l'ha avuto il progetto internazionale $PISA$ (Programme for International Student Assessment), che valuta le competenze dei quindicenni scolarizzati in numerosi Paesi dell'$OECD$. Iniziato nel 2000, il progetto prosegue ogni tre anni sui temi: lettura, matematica, scienze.

Per quanto riguarda la matematica le competenze rischieste hanno riguardato quattro nuclei chiave:

- Quantità: assimilabile ad Aritmetica ed Algebra;
- Spazio e Forma: assimilabile a Geometria;
- Cambiamento e Relazioni: assimilabile a Relazioni e Funzioni;
- Incertezza: assimilabile a Dati e Previsioni.

Come prevedibile si è visto che gli studenti italiani erano molto deboli in questi ultimi due nuclei, segno evidente della difficoltà nell'insegnamento e nell'apprendimento di statistica e probabilità.

2.2.3 Il problema dell'aggiornamento degli insegnanti

Si è visto che, a livello curricolare, l'insegnamento della statistica ha ormai una tradizione consolidata a livello internazionale. Molti Paesi, in anni recenti, hanno introdotto l'insegnamento della statistica anche nella scuola primaria ponendo attenzione al ragionamento statistico da sviluppare verticalmente nel corso dei successivi livelli scolastici.
Vi è però un grosso problema (soprattutto in Italia): l'aggiornamento degli insegnanti. Una larga parte degli insegnanti di matematica di oggi durante i loro percorsi di studi all'università non ha seguito corsi di statistica. La statistica non è quindi molto conosciuta dai nostri insegnanti e la probabilità non se la passa meglio.
Non vi è quindi tradizione nell'insegnamento della probabilità e della statistica. Quando un insegnante si trova a dover spiegare ai propri studenti un argomento che conosce poco solitamente non è ben disposto nei confronti di esso e difficilmente avrà voglia di studiarlo e approfondirlo pur comprendendone l'importanza.
Tutto questo ha una ricaduta notevole sui nostri studenti che faticano a sentirsi motivati nello studio di un argomento che capiscono essere non molto amato anche dai loro insegnanti.
Per ovviare a questo problema è necessario far conoscere meglio la statistica e la probabilità agli insegnanti in modo che quest'ultimi possano farsi un'idea più precisa di queste discipline e di come queste siano in relazione con gli altri nuclei della matematica.
Il Web può essere una grande risorsa per i nostri insegnanti in quanto vi sono numerosi progetti che possono essere utilizzati in vari modi.

L'insegnante può decidere, ad esempio, di proporre certi progetti ai propri studenti o di usarli in modo trasversale integrando elementi di unità diverse o limitandosi ad analizzarle per il proprio personale approfondimento prendendo magari spunto per qualche esercizio da sottoporre a verifica.

2.2.4 Alcune considerazioni

L'importanza dell'introduzione dell'insegnamento della probabilità già a partire dalla scuola primaria è ben sottolineata da Brousseau che afferma:

'Una certa demistificazione, una certa comprensione e una certa pratica della statistica e della probabilità è diventata, per il cittadino, una delle condizioni per una società democratica e di conseguenza uno degli obiettivi dell'educazione'.

Aggiungendo poi:

'Si può immaginare che l'uso cosciente dei modelli probabilistici sia ritardato dall'assenza di un linguaggio efficace sufficientemente familiare e dalla formazione esclusivamente determinista data dalla scuola.'

Come fa poi notare giustamente D'Amore:

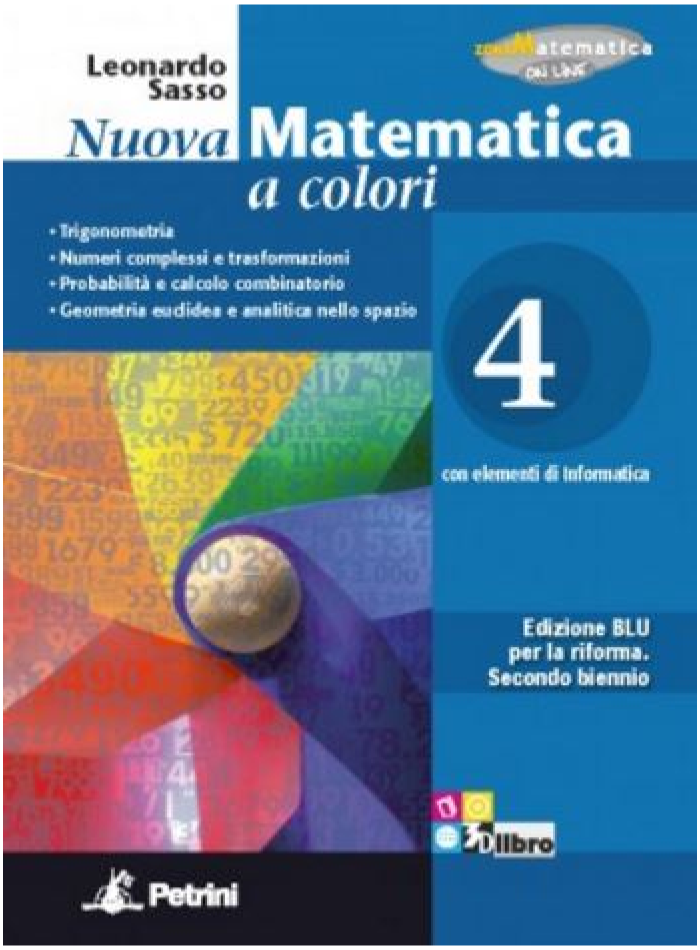
'I bambini sviluppano immagini mentali concernenti il concetto di probabilità già a partire dalla scuola dell'infanzia: scommettono, valutano i rischi prima di decidere, credono nella fortuna e nella sfortuna e stimano probabilità in modo soggettivo. Se tutto ciò non è accompagnato da un intervento educativo della scuola, può facilmente generare misconcezioni che col passare del tempo si radicano e diventano modelli parassiti, quindi tali da inibire nuovi apprendimenti.'

Come noto a molti, la scuola italiana predilige un apprendimento di tipo algoritmico ad un apprendimento concettuale tant'è vero che gli studenti sono più interessati al 'come fare' piuttosto che al 'perché delle cose'. E un apprendimento che nasce in questo contesto non può che essere superficiale, incompleto o 'non robusto' (Arrigo, 2007).
L'insegnamento della probabilità nella scuola obbligatoria è da svolgersi aiutando gli allievi a sviluppare un aspetto strategico mediante la pratica di problemi veri in situazioni a-didattiche.
Vi sono poi diversi modi per rappresentare una probabilità: si può esprimere sotto forma di frazione (ridotta o meno ai minimi termini), di percentuale o di numero decimale. Lo studente solitamente sceglierà uno di questi ma è fondamentale che sappia passare da un registro all'altro per fare passi avanti nell'apprendimento del concetto.

2.3 Analisi critica di un libro di testo

Analizziamo ora come viene proposta la probabilità in un libro di testo attualmente in uso (pur con differenti edizioni) in alcune scuole bolognesi.

Si tratta di *'Nuova Matematica a colori* 4*'* di Leonardo Sasso, Edizione Blu per il secondo biennio, casa editrice Petrini, edizione del gennaio 2013.



Dopo aver già trattato il calcolo combinatorio nell'unità precedente, nell'unità 12 troviamo la Probabilità.

L'argomento viene introdotto fin dall'inizio in modo formale: si parte subito con il dare le definizioni di spazio campionario ed evento (specificando poi cosa significa evento elementare, certo o impossibile). Vengono poi elencate le operazioni tra eventi: intersezione, unione di eventi e complementare di un evento. Segue poi un esempio tratto dal lancio di un dado. Viene poi fatto notare che se l'intersezione tra eventi è un evento impossibile allora i due eventi sono incompatibili.
Si entra poi nel vivo del concetto di probabilità e, partendo da tre esempi, viene data la definizione di probabilità classica, frequentista e soggettiva. Vengono poi giustamente evidenziati gli inconvenienti che ognuna di queste definizioni presenta.
Viene poi riportata l'impostazione assiomatica dovuta a Kolmogorov e viene enunciata (senza dimostrazione) la *Legge dei grandi numeri*.
Tutto questo si trova nel primo paragrafo intitolato *Introduzione al calcolo delle probabilità*.

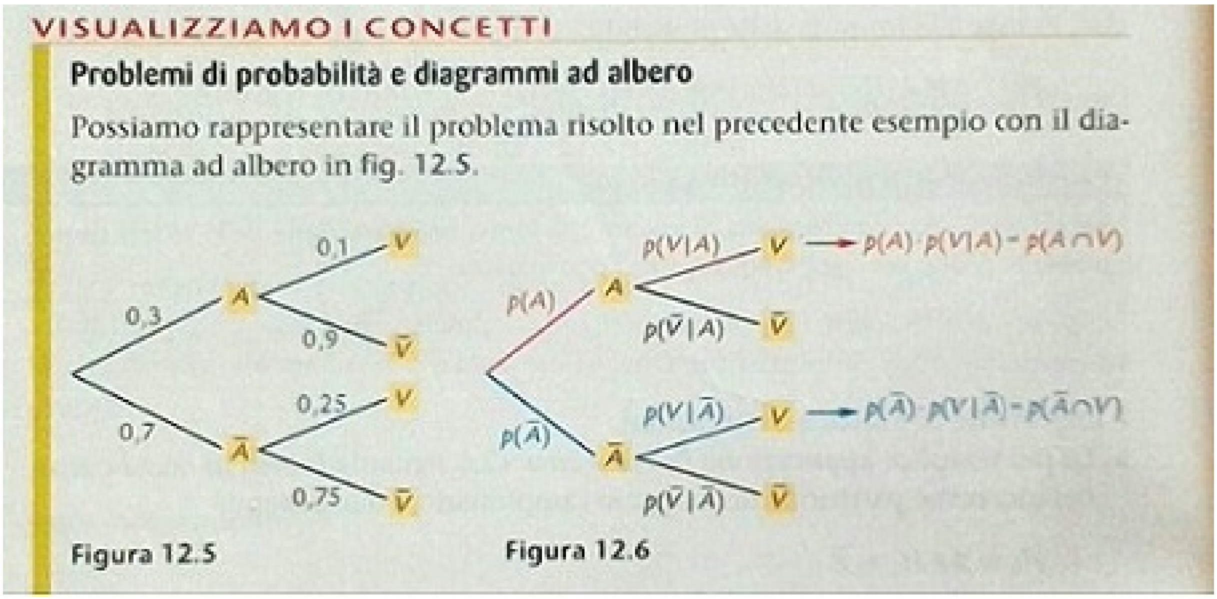
Nel secondo paragrafo, dal titolo *Valutazione della probabilità secondo la definizione classica*, si deduce la definizione classica a partire dagli assiomi e viene spiegata l'ipotesi di equiprobabilità.
Dato che il conteggio di esiti favorevoli ed esiti possibili può risultare non facile, è utile mostrare tecniche adatte per agevolare questo compito. Nel libro vengono riportati tre esempi di calcolo delle probabilità in spazi equiprobabili finiti utilizzando dapprima un diagramma ad albero e poi una tabella a doppia entrata. Nell'ultimo esempio si utilizza quello che il libro chiama il principio fondamentale del calcolo combinatorio:

'Se un oggetto è univocamente individuato da una sequenza di n scelte successive in cui vi siano k_1 possibilità per la prima scelta, k_2 per la seconda, ..., k_n per la n-esima, il numero totale di oggetti che si possono formare è il prodotto $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$'.

Nel terzo paragrafo, intitolato *I primi teoremi sul calcolo delle probabilità*, vengono enunciati e dimostrati i teoremi sul calcolo della probabilità di: un evento contrario, un evento impossibile, differenza tra due eventi e unione di due eventi. Dopo ogni dimostrazione compare sempre un esempio per chiarire meglio.

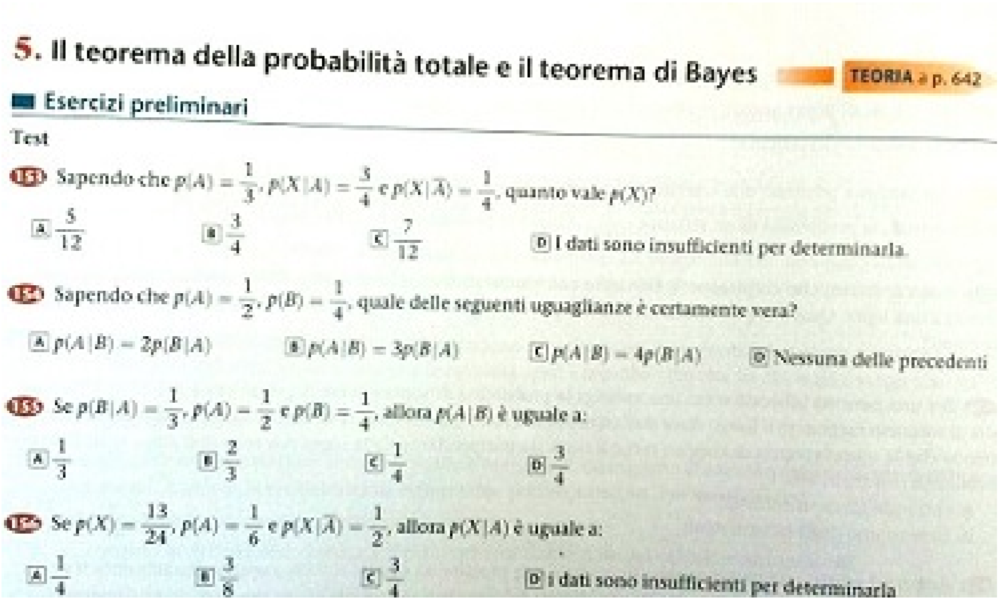
Il quarto paragrafo, dal titolo *Probabilità composte ed eventi indipendenti* è dedicato alla probabilità condizionata e agli eventi indipendenti mentre l'ultimo paragrafo, *Il teorema della probabilità totale e il teorema di Bayes*, è ovviamente dedicato a questi due teoremi.

Da notare la precisione con cui viene rappresentata tramite diagramma ad albero la soluzione di un problema sul teorema della probabilità totale.



Un ulteriore paragrafo è dedicato alla storia della probabilità e, seppur abbastanza poco dettagliato, è completo di tutte le informazioni essenziali. Infine vi è una pagina di sintesi in cui vengono riportate tutte le formule e le proprietà importanti.

Per quanto riguarda la parte di esercizi è delle più standard. Vi sono inizialmente esercizi divisi per paragrafi che seguono in modo dettagliato l'impostazione teorica data nel libro.
Per ogni paragrafo vi sono prima domande più teoriche per fissare i concetti (possono essere risposte multiple, vero o falso ecc...), poi esercizi svolti e/o guidati seguiti da una serie di esercizi (tutti molto simili tra loro) che si svolgono in modo molto simile a quanto visto nell'esercizio svolto e/o guidato.
Infine troviamo esercizi di riepilogo, esercizi tratti dalle gare di matematica, esercizi in inglese e verso l'esame di stato.
Dopo un interessante laboratorio di informatica, troviamo a conclusione del libro esercizi verso l'esame e l'università e verso le invalsi (ma questi ultimi riguardano anche argomenti trattati nelle unità precedenti del libro e quindi non sono solo esercizi di probabilità ma anche di geometria solida, trigonometria ecc...).
Seguono alcune immagini che mostrano esempi di esercizi che si trovano sul libro.



5. Il teorema della probabilità totale e il teorema di Bayes

TEORIA a p. 642

Esercizi preliminari

Test

153 Sapendo che $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(X|A) = \frac{5}{4}$ e $p(X|\overline{A}) = \frac{1}{4}$, quanto vale $p(X)$?

A $\frac{5}{12}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{7}{12}$ D I dati sono insufficienti per determinarla.

154 Sapendo che $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{4}$, quale delle seguenti uguaglianze è certamente vera?

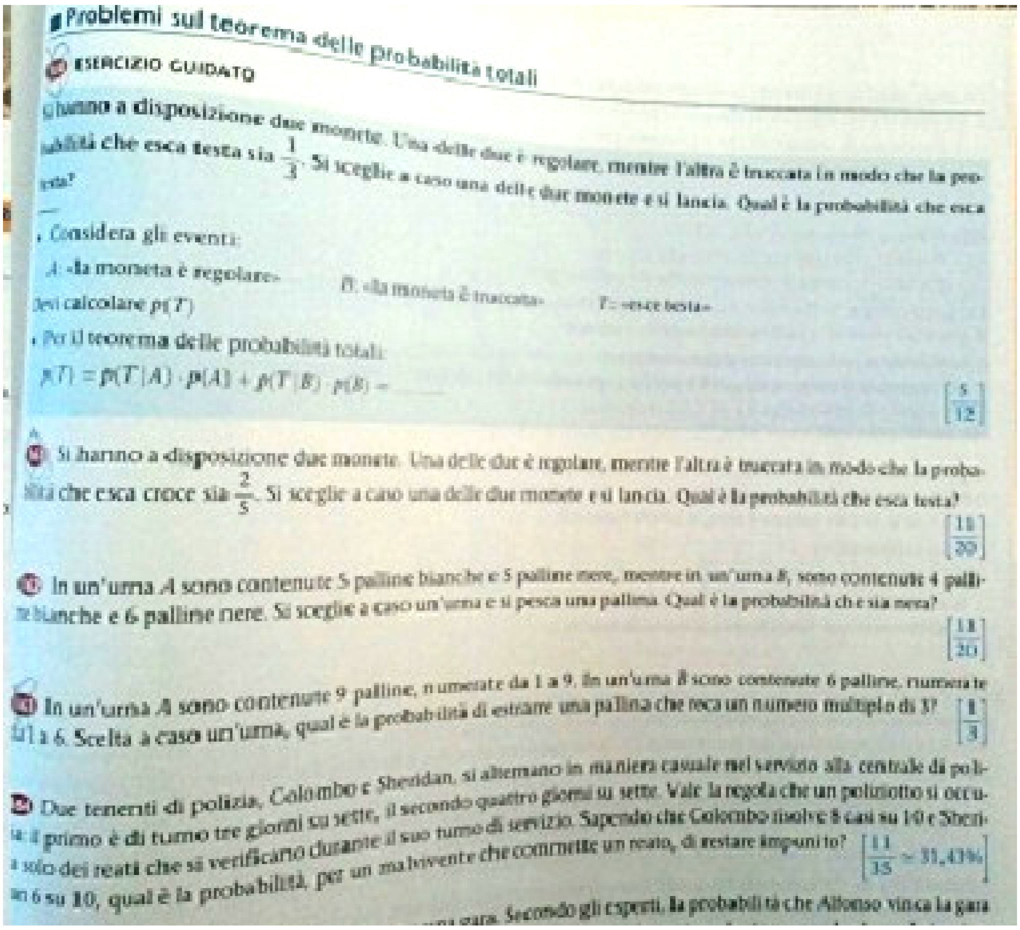
A $p(A|B) = 2p(B|A)$ B $p(A|B) = 3p(B|A)$ C $p(A|B) = 4p(B|A)$ D Nessuna delle precedenti

155 Se $p(B|A) = \frac{1}{3}$, $p(A) = \frac{1}{2}$ e $p(B) = \frac{1}{4}$, allora $p(A|B)$ è uguale a:

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{3}{4}$

156 Se $p(X) = \frac{13}{24}$, $p(A) = \frac{1}{6}$ e $p(X|\overline{A}) = \frac{1}{2}$, allora $p(X|A)$ è uguale a:

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{3}{8}$ C $\frac{3}{4}$ D i dati sono insufficienti per determinarla



Problemi sul teorema delle probabilità totali

ESERCIZIO GUIDATO

...hanno a disposizione due monete. Una delle due è regolare, mentre l'altra è truccata in modo che la pro-...abilità che esca testa sia $\frac{1}{3}$. Si sceglie a caso una delle due monete e si lancia. Qual è la probabilità che esca ...esta?

- Considera gli eventi:

A: «la moneta è regolare» B: «la moneta è truccata» T: «esce testa»

...evi calcolare $p(T)$

- Per il teorema delle probabilità totali:

$p(T) = p(T|A) \cdot p(A) + p(T|B) \cdot p(B) =$ ......

$\left[\frac{5}{12}\right]$

Si hanno a disposizione due monete. Una delle due è regolare, mentre l'altra è truccata in modo che la proba-...lità che esca croce sia $\frac{2}{5}$. Si sceglie a caso una delle due monete e si lancia. Qual è la probabilità che esca testa?

$\left[\frac{11}{20}\right]$

In un'urna A sono contenute 5 palline bianche e 5 palline nere, mentre in un'urna B, sono contenute 4 palli-...e bianche e 6 palline nere. Si sceglie a caso un'urna e si pesca una pallina. Qual è la probabilità che sia nera?

$\left[\frac{11}{20}\right]$

In un'urna A sono contenute 9 palline, numerate da 1 a 9. In un'urna B sono contenute 6 palline, numerate ...a 1 a 6. Scelta a caso un'urna, qual è la probabilità di estrarre una pallina che reca un numero multiplo di 3?

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Due tenenti di polizia, Colombo e Sheridan, si alternano in maniera casuale nel servizio alla centrale di poli-... il primo è di turno tre giorni su sette, il secondo quattro giorni su sette. Vale la regola che un poliziotto si occu-...a solo dei reati che si verificano durante il suo turno di servizio. Sapendo che Colombo risolve 8 casi su 10 e Sheri-...an 6 su 10, qual è la probabilità, per un malvivente che commette un reato, di restare impunito?

$\left[\frac{11}{35} \simeq 31,43\%\right]$

... gara. Secondo gli esperti, la probabilità che Alfonso vinca la gara

229 Quante parole di quattro lettere (anche prive di senso compiuto) si possono scrivere utilizzando solo le lettere A, B, E, M, O (ammettendo che le lettere possano essere ripetute) in modo che nessuna delle lettere successive a una B (andando da sinistra verso destra) sia una M? (Quindi, per esempio, *ABEB* deve essere contata ma *OBAM* no).

A $4^3 \cdot 5$ B $4^2 \cdot 5^2$ C $4 \cdot 5^3$ D 2^9 E 5^4

(Giochi di Archimede 2005) [D]

230 La percentuale di femmine che nascono nei parti gemellari è del 48,5%. Supponendo che nei parti gemellari la probabilità che i due nati siano di sesso differente sia del 33%, qual è la probabilità che in un parto gemellare nascano due femmine?

A 32% B 33% C 33,33% D 35% E 50%

(Giochi di Archimede 2002) [A]

231 **Solve math in English** A group consists of four women and five men. Three people are selected to attend a conference. Find the probability that the selected group will consist of all men. $\left[\frac{5}{42}\right]$

232 **Solve math in English** If you are dealt 4 cards from a deck of 32 cards, find the probability of getting three queens and one king. $\left[\frac{2}{4495}\right]$

VERSO L'ESAME
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Problemi

1 Un dado cubico regolare ha una faccia bianca, due facce nere e tre facce rosse. Si lancia il dado consecutivamente per due volte e, in ciascuno dei due lanci, si prende nota del colore della faccia ottenuta. Calcola la probabilità:

a. che le due facce ottenute siano entrambe nere;
b. che le due facce ottenute siano entrambe bianche o entrambe nere;
c. che le due facce ottenute abbiano lo stesso colore;
d. che le due facce ottenute abbiano colori differenti;
e. che le due facce ottenute siano entrambe bianche, sapendo che hanno lo stesso colore.

2 Un'urna contiene 20 palline bianche e 10 palline nere. Si estrae a caso una pallina dall'urna, quindi:

se la pallina estratta è bianca, si rimette la pallina nell'urna e se ne aggiungono altre n bianche;
se la pallina estratta è nera, si rimette la pallina estratta nell'urna e se ne aggiungono altre n nere.

Si estrae quindi una seconda pallina dall'urna.

a. Calcola la probabilità che sia la prima sia la seconda pallina estratta siano bianche.
b. Calcola la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca.
c. La seconda pallina estratta è bianca. Qual è la probabilità che anche la prima pallina estratta sia bianca?
d. Qual è la probabilità che le due palline estratte siano di colori differenti?
e. Qual è il minimo valore di n per cui la probabilità di estrarre due palline di colori differenti è inferiore al 10%?

VERSO L'ESAME

Quesiti

1 Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono tre a caso. Qual è la probabilità che siano tutti maschi?

(Sessione ordinaria PNI 2001)

$\left[\frac{11}{28}\right]$

2 Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3 .. 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari. Determinare la probabilità che siano ambedue dispari.

(Sessione suppletiva PNI 2001)

$\left[\frac{5}{8}\right]$

3 È più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di 2 dadi?

(Sessione ordinaria PNI 2002)

$\left[\text{Le due probabilità valgono } \frac{671}{1296} \text{ e } 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\right]$

4 Assumendo che i risultati 1, 2 e X delle 13 partite di Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, finiscano in parità.

(Sessione ordinaria PNI 2002)

$\left[\frac{26}{3^{13}}\right]$

VERSO L'UNIVERSITÀ

1 Considera tutti gli anagrammi della parola FUNGHI, ovvero tutte le parole (anche prive di senso) che si ottengono permutando le sei lettere. Tra esse, quante sono le parole che non cominciano per F?

A 360 B 600 C 720 D 120

(Test di ingresso, Facoltà di Scienze, 2009)

2 Utilizzando solo i caratteri «0» e «1», quante sequenze diverse di 5 caratteri si possono scrivere?

A 50 B 10 C 25 D 32

(Test di ingresso per i corsi di laurea scientifici, 2008)

3 Aldo, Bea, Carlo, Dario, Ebe, Franco vanno in treno e trovano uno scompartimento a sei posti libero. Considerando che Aldo e Bea devono stare vicino al finestrino, quanti modi diversi hanno i sei amici di disporsi nello scompartimento?

A 48 B 4 C 240 D 8 E 10

(Prova di ammissione, Ingegneria, 2007)

Come si può ben notare, la trattazione teorica è di buon livello anche se mancano ovviamente alcuni dettagli che si possono vedere solamente all'Università. Anche la parte degli esercizi è molto curata e ce ne sono davvero tanti ma, come spesso accade nei libri di matematica, sono quasi tutti uguali. Questo comporta, a mio avviso, una confusione iniziale da parte di molti studenti che faticano a rendersi conto del filo conduttore che lega certi esercizi tutti simili tra loro (solo uno sguardo un po' più esperto può notarlo quasi subito).
Se, però, uno studente, dopo aver fatto un po' di pratica, riesce a rendersi conto di ciò può davvero riuscire a comprendere meglio quei concetti che deve imparare.

Rimane comunque il forte problema degli esercizi meccanici che possono condurre gli studenti a prestare minor attenzione perché tanto gli esercizi, una volta capito il meccanismo, sono tutti uguali. La difficoltà sta quindi nel rendersi conto, in verifica, di che tipo di esercizio si tratta.
Questo comunque è un problema più generale ma, se si pensa in modo particolare alla probabilità, ci si rende subito conto della pericolosità di tale aspetto. La probabilità infatti è alle volte altamente anti-intuitiva.

Ciò che però deve risaltare maggiormente è il fatto che, seguendo un'impostazione troppo meccanica, gli studenti perdono il gusto di potersi mettere in gioco. Come vedremo, è importante insegnare la probabilità partendo da esempi concreti e facendo lavorare i nostri studenti alla soluzione di certi esercizi.

Solo così gli studenti saranno costretti ad affrontare i vari problemi di probabilità mettendo a fuoco, se seguiti con cura dall'insegnante, le loro misconcezioni in merito alla matematica dell'incertezza.
Nel breve capitolo sui cenni storici abbiamo potuto notare quante siano state le difficoltà, dovute a misconcezioni dure a morire, che lo sviluppo del calcolo della probabilità ha dovuto superare. Aiutare gli studenti a ripercorrere questo cammino, partendo quindi da una didattica che li ponga al centro dell'apprendimento come soggetti attivi, penso sia il modo migliore per approcciare lo studio di questa materia.

Ovviamente un libro di testo tiene conto del progresso già raggiunto nella conoscenza e omette di descrivere l'evoluzione della conoscenza passata anche attraverso errori, imprecisioni e ingenuità. Tali errori possono ovviamente riemergere negli studenti ed è compito del professore intervenire per risolvere queste situazioni.

Insegnare la probabilità penso sia una delle più grandi sfide per un professore in quanto sono davvero tante le misconcezioni degli studenti relativamente a questa disciplina e, cosa ben peggiore, sono molto radicate (almeno fino a quando non verrà dato maggior spazio all'insegnamento della probabilità nella scuola primaria ... ma come abbiamo visto ci vogliono insegnanti esperti).

Capitolo 3

Risultati di ricerca in didattica della probabilità

3.1 La ricerca di Fischbein

La ricerca di Efraim Fischbein $(1920 - 1988)$, psicologo e insegnante di matematica romeno, si basò soprattutto sul ruolo dell'intuizione nel pensiero matematico e scientifico e sullo sviluppo del pensiero probabilistico. Di notevole importanza il suo lavoro *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children (Le fonti intuitive del pensiero probabilistico nei bambini)* del 1975.

Fischbein, per *apprendimento probabilistico*, intende una qualsiasi situazione sperimentale in cui ad un soggetto, che si trova davanti ad una successione di prove nelle quali sono possibili solo due esiti, è richiesto di prevedere il risultato prima che venga mostrato.
Si può vedere facilmente (aiutandosi se mai con un diagramma ad albero) che se un evento A ha probabilità nota p di accadere (e quindi il suo complementare avrà probabilità $1 - p$) e viene chiesto di indovinare se accade o non accade A, la probabilità che un generico intervistatore dia la risposta corretta è $p^2 + (1 - p)^2$.
In tal caso la strategia migliore (detta appunto di *massimizzazione*) è quella di scegliere ad ogni prova l'evento che ha probabilità maggiore. Questo perché la sequenza risulta essere casuale.

In tali circostanze è molto diffuso il fenomeno chiamato *probability matching* in cui le frequenze relative previste approssimano la probabilità dell'evento.

Se ad esempio prendo nota durante la mia permanenza in una città dei giorni in cui c'è bel tempo e dei giorni in cui invece c'è brutto tempo (e sono quindi in grado di calcolarmi la frequenza relativa delle giornate di bello e brutto tempo), la probabilità che assegnerò di trovare bel tempo (o brutto tempo) in quella città in un dato giorno distante nel tempo (in modo da non poter avere previsioni metereologiche sotto mano) sarà vicino alla frequenza relativa che ho valutato.

Il *probability matching* appare già nei bambini di $3-4$ anni e si stabilizza all'età di 6 anni. Tale fenomeno è espressione di una *'particolare intuizione, l'intuizione della frequenza relativa'* e quando questo avviene si può affermare, secondo Fischbein, che *'l'individuo possiede già una particolare intuizione di caso e di probabilità'*.

Possono poi verificarsi alcuni comportamenti tipici negativi come l'errata convinzione che eventi passati possano influire su eventi futuri governati dal caso (se ad esempio per più volte è uscita croce al lancio ripetuto di una moneta, si è portati a pensare che sia più probabile l'uscita di una testa al lancio successivo). Ci può essere anche il fenomeno opposto in quanto si può essere portati a pensare che la probabilità di un evento cresca perché tale evento si è ripetuto più volte. Succede anche che i ragazzi, convinti dell'esistenza di una regola che determina sequenze casuali, cerchino strategie sempre più sofisticate basandosi alle volte su un numero troppo piccolo di prove.

Fischbein concorda con Piaget $(1896-1980)$, illustre psicologo e pedagogista svizzero, per quanto riguarda la complessità dello sviluppo di idee probabilistiche e sul fatto che la scoperta del caso avvenga gradualmente ma vi sono diversi aspetti sui quali si trova in disaccordo.
Fischbein pone la sua attenzione soprattutto sul ruolo dell'intuizione e afferma:

'Se si cercano di analizzare le difficoltà e le misconcezioni degli studenti non si identificano solo mancanze logiche. Si identificano molto spesso tendenze e interpretazioni e modelli intuitivi, consci o meno, che sono in contrasto con la conoscenza formale che la scuola cerca di trasmettere agli studenti'.

Fischbein non concorda con Piaget sul fatto che l'idea di caso emerga intorno ai 7 anni in quanto è convinto che si debba fare una distinzione tra una *primaria intuizione* di caso e il concetto stesso di caso. La prima è presente nei bambini già in tenera età ed è legata alle esperienze di tutti i giorni.

Altra differenza sostanziale suggerita da Fischbein è quella tra il *concetto* di probabilità come un'esplicita e corretta computazione di eventi e l'*intuizione* di probabilità come stima soggettiva di eventi. Anche questo aspetto è in contrapposizione con la visione di Piaget, convinto che *'le nozioni fondamentali di probabilità non vengono costruite prima di giungere al livello di operazioni formali'*.

Un'altra convinzione molto forte di Fischbein è legata al fatto che se uno studente non è in grado di risolvere un certo problema ad una certa età non si può affermare a priori che non sia in grado di acquisire, grazie ad un'attenta istruzione, la capacità per risolverlo.

Non c'è quindi solo l'aspetto dell'intuizione da tenere in considerazione in quanto anche l'istruzione risulta essere importante. Lo sviluppo di un pensiero probabilistico è infatti legato all'interazione tra intuizione, pensiero logico ed istruzione. In particolare, Fischbein si sofferma sulla differenza tra *intuizioni primarie* (che abbiamo già citato prima) e *intuizioni secondarie*, che hanno le stesse caratteristiche delle primarie ma si formano a seguito di un'educazione scientifica (solitamente quella ricevuta a scuola).

Per una corretta costruzione di un'*intuizione secondaria* è necessario utilizzare adeguati *generative models*, ovvero schemi in grado di rappresentare intere classi di fenomeni collegati tra di loro e che si possono in qualche modo adattare ad altre situazione simili.

In una ricerca di Fischbein, Pampu e Minzat, effettuata su studenti di 10, 12 e 14 anni, si è visto che la stima intuitiva del numero di permutazioni di 3, 4 o 5 oggetti è molto bassa in ogni fascia di età. Questo porta a pensare che, al livello di operazioni formali, le tecniche combinatorie non sono acquisite spontaneamente ed è quindi necessaria l'istruzione. Si è però visto che, a livello di operazioni concrete, è possibile indurre gli studenti ad assimilare più velocemente alcune tecniche combinatorie mediante rappresentazioni grafiche come i *'diagrammi ad albero'*.

Nonostante l'intuizione abbia la capacità di adattarsi, spesso ci porta ad errori di giudizio. Secondo Fischbein, questo è dovuto principalmente a due fattori: da un lato l'esperienza umana limitata e dall'altro la difficoltà di astrazione (si pensi ad esempio a come vengono rappresentate le rette in geometria e a quale sia la loro definizione).

Non si può fare a meno di notare che c'è grande differenza tra gli esperimenti tipicamente usati per mettere in luce ragionamenti probabilistici errati o errori legati all'intuizione e l'esperienza, spesso confusa, che le persone hanno di situazioni di incertezza.
Infatti, ragionamenti probabilistici dovrebbero guidare le scelte razionali di un individuo in condizioni di incertezza; tuttavia, un giocatore di poker che ha avuto una mano fortunata faticherà a convincersi che la sua strategia di gioco non fosse la più razionale, e viceversa.
Non è facile rendersi conto che si possono prendere decisioni razionali anche in situazioni governate dal caso e che, per poter osservare l'andamento generale, c'è bisogno di molte prove ripetute.
C'è poi la tentazione ad attribuire probabilità maggiori ad eventi più facili da ricordare (si vedrà meglio nel prossimo paragrafo). Ne è un esempio il fatto che un bambino a cui è richiesto di ottenere un 6 con il lancio di un dado per poter cominciare a giocare assegnerà una probabilità più bassa all'uscita del numero 6 nel lancio di un dado se gli è capitato più volte di dover aspettare un tempo che gli sembrava molto lungo prima di giocare (dettato anche dalla presenza di un fattore emotivo legato al fatto che solitamente un bambino non sopporta aspettare prima di iniziare un gioco).

Come giustamente fanno poi notare Borovcnik e Bentz:

'I bambini contano e calcolano quantità nella vita di ogni giorno. [...] Per la probabilità non è così: la probabilità molto piccola di vincere al lotto è controbilanciata dal fatto che le persone vincono ogni settimana'.

Per quanto riguarda il ruolo dell'istruzione, si è visto che nelle classi esaminate (ragazzi tra i 10 e i 13 anni di Israele) ci sono state conseguenze positive per quanto riguarda alcune misconcezioni di base mentre vi è stato un effetto negativo su altre.
Più nel dettaglio, si è visto che gli studenti si sono dimostrati più abili in situazioni in cui bisognava utilizzare il concetto di proporzionalità per comparare vari casi.
Ad ogni modo, l'istruzione è necessaria per costruire solide e corrette intuizioni secondarie. Inutile però illudersi di poter far sparire le cosìdette intuizioni primarie. Esse ci saranno sempre e continueranno ad influenzare i nostri giudizi. Questo fatto è inevitabile ma bisogna affrontarlo con una strategia didattica appropriata.
Fischbein chiama *dilemma pedagogico* il fatto che certi modelli intuitivi che ci costruiamo per analizzare certi concetti diventino parte integrante del nostro pensiero rimanendo tali anche quando andrebbero cambiati e/o modificati.

3.2 La ricerca di Tversky e Kahneman

Un procedimento euristico è un metodo di approccio alla soluzione dei problemi che non segue un chiaro percorso ma si affida all'intuito. Si tratta quindi di un procedimento opposto a quello algoritmico.
La ricerca di Amos Tversky $(1937-1996)$ e Daniel Kahneman (1934), psicologi israeliani famosi per i loro studi sulle euristiche, sugli errori sistematici umani e sulle decisioni in condizione di incertezza, ha lo scopo di studiare i meccanismi psicologici che stanno alla base delle valutazioni di probabilità di eventi o di frequenze di classi. Le persone, infatti, tendono a valutare le probabilità o le frequenze soffermandosi su un numero ristretto di euristiche attraverso le quali possono ridurre tali giudizi a giudizi più semplici.
Un'euristica molto diffusa è la *rappresentatività*. Secondo tale euristica, viene associata una probabilità alta al fatto che un oggetto A appartenga ad una classe B se l'oggetto A *'assomiglia'* a quelli della classe B. Se, ad esempio, viene data una descrizione di una persona e si elencano alcune caratteristiche comportamentali e caratteriali ritenute tipiche di persone che svolgono un determinato lavoro, per rappresentatività si considera alta la probabilità che anche quella persona svolga quel lavoro. Questo succede anche se ci sono poche persone che svolgono un tale lavoro (e quindi è assai poco probabile che, scelta a caso una persona, essa faccia proprio quel lavoro).
Altra euristica molto diffusa è la *disponibilità* in quanto spesso si valuta la probabilità di un evento o la frequenza di un fenomeno in base alla facilità (o difficoltà) con cui si ricordano eventi o fenomeni simili. Se da un lato è vero che eventi frequenti sono più facili da ricordare rispetto ad eventi rari, dall'altro è anche vero che la *disponibilità* è soggetta ad altri fattori che non sono legati alla frequenza degli eventi. Ad esempio se recentemente si assiste ad un incidente stradale si tende a valutare con una probabilità maggiore il verificarsi di un incidente stradale.
Vediamo ora alcuni esempi tratti dalla ricerca di Tversky e Kahneman.

3.2.1 Valutazione di disponibilità

Nel primo studio venivano somministrati 6 problemi a 42 soggetti e veniva chiesto di stimare in 7 secondi quante parole (di almeno 3 lettere) si riuscivano a formare in 2 minuti con una determinata lista di 9 lettere. Nei 2 minuti veniva quindi richiesto di scrivere le parole che venivano in mente. Successivamente, i soggetti intervistati venivano divisi in 2 gruppi distinti in modo tale che un gruppo si occupasse della stima e l'altro di creare parole per poi scambiarsi i ruoli.

Nel secondo studio, la procedura era analoga ma le parole da trovare dovevano appartenere ad una determinata categoria (ad esempio: fiori, animali con quattro zampe, nomi di città con la lettera F ecc...).
Tali studi mostrarono che le persone potevano valutare la disponibilità in modo accurato e veloce.

3.2.2 Disponibilità per costruire

Nel terzo studio veniva chiesto se erano più frequenti le parole inglesi che iniziavano con la lettera K o quelle che avevano la lettera K nella terza posizione. Veniva poi richiesto di dare una stima del rapporto tra questi due valori.
Dato che risulta più facile ricordare parole che iniziano con la lettera K piuttosto che trovarne alcune che hanno la K come terza lettera, più di $\frac{2}{3}$ degli intervistati (per la precisione 105 su 152), ha valutato più probabile la prima ipotesi. Ovviamente si sbagliavano. Non solo... valutavano mediamente in rapporto 2 : 1 queste due probabilità.

Il quarto studio riguardava le permutazioni. Veniva fornita la seguente immagine.

Consider the two structures, A and B, which are displayed below.

```
(A)                          (B)
x x x x x x x x              x x
x x x x x x x x              x x
x x x x x x x x              x x
                             x x
                             x x
                             x x
                             x x
                             x x
                             x x
```

A path in a structure is a line that connects an element in the top row to an element in the bottom row, and passes through one and only one element in each row.

In which of the two structures are there more paths?

How many paths do you think there are in each structure?

e veniva chiesto di dire quanti cammini si potevano creare partendo da un elemento della prima riga arrivando ad un elemento dell'ultima passando una e una sola volta da ogni riga. In particolare veniva richiesto di dire in quale dei due casi vi erano più cammini.

Ovviamente vi sono le stesso numero di cammini (esattamente $8^3 = 2^9 = 512$). Si è visto però che ben 46 persone su 54 riteneva che nella figura A ci fossero più cammini. Tale risultato non stupisce in quanto in A ci sono 8 colonne mentre in B solo 2 e risulta quindi più facile immaginare un cammino in A. Inoltre i cammini in B sono difficilmente distinguibili in quanto tendono a sovrapporsi molto per via del poco spazio a disposizione.
Il numero medio di cammini nella figura A è risultato essere di 40 mentre per la figura B il risultato è stato di 18. In entrambi i casi decisamente inferiore al valore esatto.

Nel quinto studio veniva richiesto di stimare il numero di combinazioni. Più nel dettaglio veniva chiesto di stimare il numero di differenti gruppi di r $(2 \leq r \leq 8)$ persone diverse scelte da un gruppo di 10 persone. Tale quantità è $\binom{10}{r}$ che assume il massimo (252) per $r = 5$. Si ha anche che il numero di gruppi di r persone è uguale al numero di gruppi di $10 - r$ persone (questo perché selezionare r persone su 10 significa non selezionare gli altri $10-r$).

Lo stesso quesito veniva poi proposto in modo differente: si chiedeva di stimare quanti differenti gruppi di r $(2 \leq r \leq 8)$ fermate poteva fare un bus che da inizio a fine viaggio poteva fermarsi in al più 10 fermate.
Di seguito i risultati

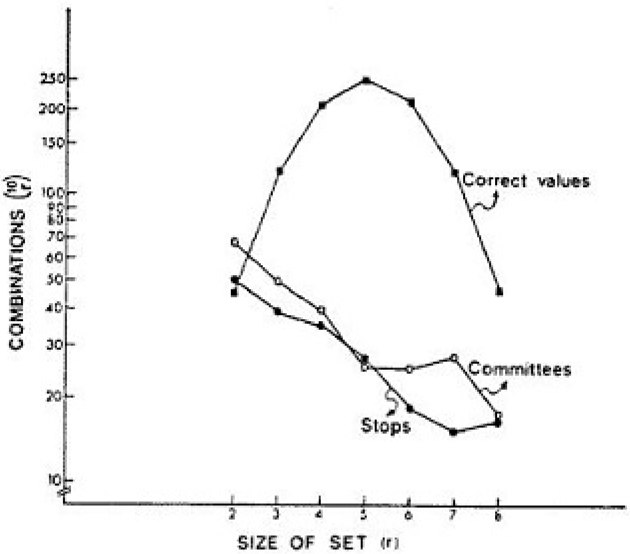


Figure 1. Correct values and median judgments (on a logarithmic scale) for the Committees problem and for the Stops problem.

Si nota innanzitutto la tendenza a sottostimare (e non poco) il numero di combinazioni (eccezion fatta per il caso $r = 2$). Si vede poi un andamento decrescente (seppur non del tutto monotono) e questo poiché risulta molto più facile creare, ad esempio, gruppi di 2 persone piuttosto che di 8.

Nel sesto studio veniva richiesto di stimare 8! in un tempo di 5 secondi. Ad un gruppo veniva proposto come $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e ad un altro gruppo come $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Nel primo caso la stima media è stata di 2250 mentre nel secondo di 512, entrambi lontani dal valore reale di 40320.
Questo è dovuto al fatto che il tempo per fare il calcolo era troppo poco e quindi si facevano le prime moltiplicazioni per poi aggiustare un po' il risultato. Ecco quindi il perché della grande differenza tra le risposte dei due gruppi.

Molto interessante il settimo studio in cui si vede come la *disponibilità* e la *rappresentatività* influiscano sulla stima di una distribuzione binomiale. Ecco il quesito:

onsider the following diagram:

X	X	O	X	X	X
X	X	X	X	O	X
X	O	X	X	X	X
X	X	X	O	X	X
X	X	X	X	X	O
O	X	X	X	X	X

path in this diagram is any descending line which starts at the top row, ends at he bottom row, and passes through exactly one symbol (X or O) in each row.

Vhat do you think is the percentage of paths which contain

6 – X and no – O ____%

5 – X and 1 – O ____%

.

.

.

No – X and 6 – O ____%

Jote that these include all possible path-types and hence your estimates should dd to 100%.

Qui i risultati

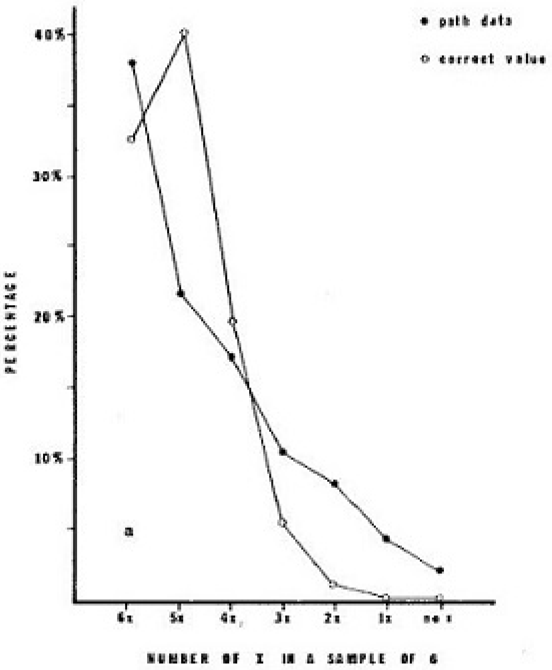


Figure 2. Correct values and median judgments: Path problem.

Anche qui si nota una tendenza a sottostimare la probabilità dei vari eventi (eccezion fatta per il primo caso). Per verificare il fatto che la decrescenza monotona possa essere un fenomeno generale si è provato a somministrare il medesimo problema in modo differente.

Mentre nel primo caso non veniva data una proporzione esatta del rapporto tra le due popolazioni ma veniva fornita una rappresentazione grafica, nel secondo caso veniva data esplicitamente senza fornire una visualizzazione grafica del problema. In questo caso scompare la decrescenza monotona e la tendenza a sottostimare le probabilità vi è solo nei primi eventi.

Le figure seguenti mostrano la formulazione del secondo quesito e i relativi risultati.

x players participate in a card game. On each round of the game, each player ceives a single card drawn blindly from a well-shuffled deck. In the deck, 5/6 of e cards are marked X and the remaining 1/6 are marked O. In many rounds of e game, what is the percentage of rounds in which

6 players receive X and no player receives O __%

5 players receive X and 1 player receives O __%

.

.

.

No player receives X and 6 players receive O __%

ote that these include all the possible outcomes and hence your estimates should ld to 100%.

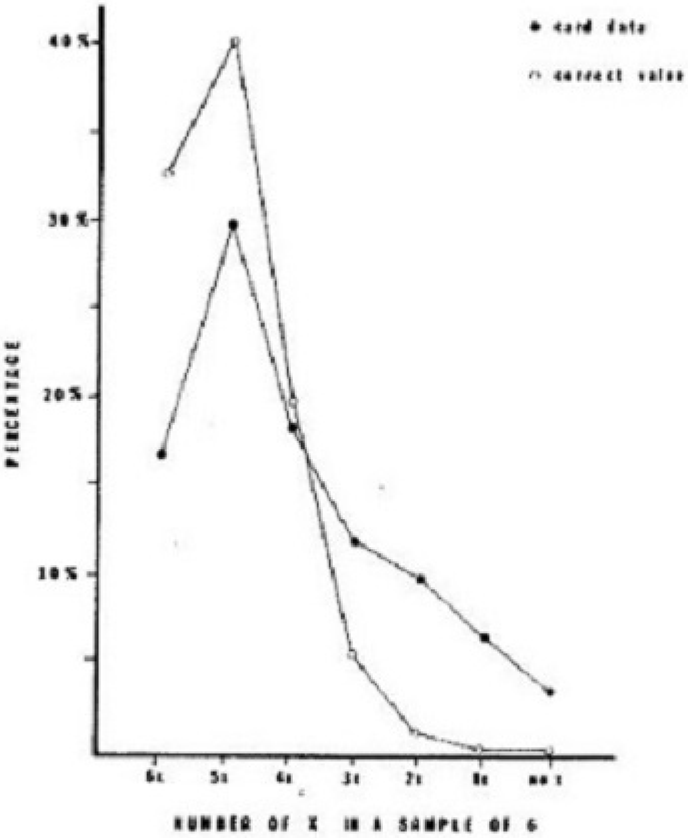


Figure 3. Correct values and median judgments: Card problem.

3.2.3 Disponibilità a ricordare

Nell'ottavo studio venivano letti alcuni nomi di persone (circa uno ogni due secondi) e veniva chiesto di dire se nella lista vi erano più nomi maschili o femminili. Si è visto che nomi di personaggi famosi erano più facili da ricordare ed influivano quindi sul risultato. Se in una lista vi erano più donne rispetto agli uomini ma i nomi maschili erano quelli di personaggi famosi succedeva spesso di essere portati a credere che nella lista vi fossero più nomi maschili.

La *disponibilità* a ricordare porta spesso a dare valutazioni errate di probabilità. Succede, infatti, che eventi drammatici si ricordano più facilmente. Pensiamo ad esempio ad uno psichiatra che ha in cura diverse persone che soffrono di depressione. Tra queste è plausibile pensare che un certo numero (si spera alto) riesca ad uscire dalla depressione, mentre qualcuno decida di ricorrere al suicidio.

Il suicidio è un evento drammatico e i casi di suicidi rimarranno sicuramente più impressi nella mente dello psichiatra che tenderà con il tempo a dimenticarsi di alcuni pazienti che sono invece guariti. Questo lo porterà molto probabilmente a sovrastimare la probabilità che un paziente che soffre di depressione arrivi al suicidio.

Anche il fattore temporale influenza molto la nostra *disponibilità* a ricordare. Sarà sicuramente maggiore la nostra stima della probabilità di un attentato terroristico se ne abbiamo appena sentito parlare in televisione o sui giornali.

Siamo poi tentati a sovrastimare anche le probabilità di eventi che ci fanno tornare alla mente un numero elevato di scenari che ci ricordano quell'evento. Se non ci viene in mente nessun scenario simile riteniamo poco probabile che un tale evento accada.

Se, ad esempio, tra le persone che conosciamo ve ne sono poche che convivono senza sposarsi riteniamo poco probabile che una coppia possa convivere senza sposarsi.

3.3 Altri risultati di ricerca

In un intervento di Fischbein al Convegno di Castel San Pietro del 1992 sono stati presentati alcuni risultati interessanti relativi ad una ricerca su 618 studenti di scuola elementare e media di Pisa. Tale ricerca aveva lo scopo di comprendere meglio l'origine e la natura di alcuni ostacoli intuitivi in ambito probabilistico. Tale ricerca ha evidenziato che:

- esiste un fattore linguistico: sembra infatti che per molti ragazzi sia più difficile capire il concetto di 'evento certo' che quello di 'evento impossibile';
- nei problemi in cui intervengono i numeri, le valutazioni di probabilità sono influenzate dalla grandezza dei numeri considerati: secondo i ragazzi, nei giochi aleatori, è più probabile ottenere numeri grandi che numeri piccoli;
- sembra che molti ragazzi siano incapaci di risolvere questioni di probabilità perché non riescono a considerare la struttura razionale di una situazione aleatoria: il caso è, per se stesso, un fattore che 'uguaglia' le probabilità.

Secondo Jean Claude Girard (1882 – 1929), politico francese dell' IUFM (Istituto Universitario di Formazione dei Maestri) di Lione, la formazione di immagini mentali relative alla casualità è più delicata e richiede ancora più tempo di quanto ce ne voglia, ad esempio, con la geometria. C'è da dire che molti lavori di ricerca nel campo della Didattica della Probabilità, sono stati stimolati da una serie di affermazioni abbastanza significative, come fa ben notare Gianfranco Arrigo. Indicando con il termine 'gente comune' chi non ha seguito una corretta formazione probabilistica, possiamo vedere che:

- La gente comune usa la propria esperienza per valutare in modo molto casuale la probabilità;
- La gente comune tratta l'informazione in modo parecchio incompleto;
- La gente comune tratta l'informazione lasciandosi influenzare dagli eventi salienti;
- La gente comune incontra difficoltà nel valutare probabilità molto grandi o molto piccole;
- La gente comune non assegna probabilità 0 all'evento impossibile e probabilità 1 all'evento certo;

- La gente comune associa certezza e impossibilità a eventi fisici piuttosto che a eventi logici;
- La gente comune assegna le probabilità $50\% - 50\%$ ai due eventi legati al lancio di una qualsiasi moneta;
- La gente comune assegna equiprobabilità a situazioni sconosciute;
- La gente comune si dimostra incoerente quando assegna e valuta probabilità;
- La gente comune si comporta in modo sovra-additivo.

Merita di essere menzionato anche il lavoro di Jones e dei suoi colleghi $(1997, 1999)$ in cui si parte dal presupposto che il pensiero probabilistico sia multiforme e si sviluppi lentamente nel tempo. Vengono sottolineati quattro costrutti principali per catturare in modo soddisfacente la molteplice natura del pensiero probabilistico e le sue interconnessioni. Questi costrutti sono:

- spazio campionario,
- probabilità di un evento,
- confronto di probabilità
- probabilità condizionata.

Inoltre, il pensiero probabilistico dei bambini piccoli è descritto in quattro livelli per ciascuno dei quattro costrutti:

- Piano soggettivo,
- Livello di transizione,
- Livello quantitativo informale,
- Livello numerico

3.3.1 'Sequenza di monete' vs 'Combinazione di monete'

Nella probabilità è evidente un comportamento da parte di molti studenti a rimanere ancorati alle loro credenze e misconcezioni. Molto spesso, infatti, come testimoniano molte ricerche, le vecchie misconcezioni degli studenti sul calcolo delle probabilità non vengono risolti con un'istruzione tradizionale.

Un esempio significativo è la differenza tra una *'sequenza di monete'* e una *'combinazione di monete'*. Risulta, infatti, corretto affermare che, lanciando più volte una moneta (e denotando con T = 'esce testa' e con C = 'esce croce'), le sequenze T, T, T, T, T e T, C, T, T, C sono equiprobabili (*'sequenza di monete'*) in quanto i lanci di una moneta sono tutti eventi indipendenti.

Non è però vero che lanciando 5 volte una moneta, l'uscita di 5 teste ha la stessa probabilità dell'uscita di 3 teste e 2 croci. Infatti ci sono molti più modi di avere 3 teste e 2 croci (precisamente 10) mentre c'è solo un modo di avere esattamente 5 teste (*'combinazione di monete'*).

Gli studenti faticano molto di più a comprendere la *'combinazione di monete'* e spesso confondono le due e le misconcezioni arrivano quando si interpreta una con l'altra. Nelle scuole bisognerebbe prestare una maggiore attenzione alle due.

Mentre la *'sequenza di monete'* porta a riflettere sugli eventi indipendenti, la *'combinazione di monete'* pone l'attenzione sullo studio della distribuzione binomiale.

3.3.2 L'aspetto affettivo

Secondo la definizione classica della probabilità, la probabilità di un evento è il rapporto tra i casi favorevoli e i casi totali qualora tutti questi casi siano equiprobabili. Quando viene data tale definizione solitamente gli studenti non si preoccupano più di tanto perché la ritengono 'accettabile' ma, come mostra questo interessante rapporto di ricerca, queste idee di base sul concetto stesso di Probabilità non sono presenti in un approccio intuitivo alla materia.

Riportiamo successivamente il quesito su 'Pierino e le liquirizie', proposto a studenti di $16-17$ anni da Bagni, Perelli D'Argenzio e Rigatti Luchini e pubblicato nel 1999 sugli Atti del Convegno del Cairo, seguito dai risultati.

In a room, there are two boxes, a white one and a black one, both containing liquorice and peppermint candies. A young boy, named Pierino, likes liquorice candies and does *not* like peppermint candies. In particular, there are:

Room 1

White box	Liquorice candies: 50	Peppermint candies: 60
Black box	Liquorice candies: 30	Peppermint candies: 40

Question 1. Pierino wants to get a candy from one box. Do you think that it's better for him to get it from the white box or from the black box?

Let us consider moreover two different boxes, in a different room, once again a white one and a black one, containing:

Room 2

White box	Liquorice candies: 60	Peppermint candies: 30
Black box	Liquorice candies: 90	Peppermint candies: 50

Question 2. Pierino wants to get a candy from one box. Do you think that it's better for him to get it from the white box or from the black box?

Room 3

Now both white boxes are poured in a new big white box and both black boxes are poured in a new big black box.

Question 3. Pierino wants to get a candy from one of these new big boxes. Do you think that it's better for him to get it from the big white box or from the big black box?

Answer to question 1	*Pupils*	*Percentage*
It's better to get the candy from *white* box	38	73 %
It's better to get the candy from *black* box	10	19 %
No answer	4	8 %

Answer to question 2	*Pupils*	*Percentage*
It's better to get the candy from *white* box	43	82 %
It's better to get the candy from *black* box	5	10 %
No answer	4	8 %

Answer to question 3	*Pupils*	*Percentage*
It's better to get the candy from *white* box	33	63 %
It's better to get the candy from *black* box	12	23 %
No answer	7	14 %

Si nota che gli studenti sanno applicare bene la definizione laplaciana di probabilità nei primi due casi (non lasciandosi ingannare da numeri grandi) mentre nell'ultimo quesito appare evidente che quello che possiamo definire *aspetto affettivo* non è per nulla trascurabile.

La scatola bianca era risultata vincente in entrambe le situazioni precedenti e molti studenti si sono lasciati andare ad una risposta 'intuitiva'.

Una sola occhiata alla situazione numerica avrebbe permesso di rispondere senza neanche eseguire una divisione in quanto nella scatola bianca vi erano 110 caramelle alla liquirizia e 90 alla menta mentre nella scatola nera erano presenti 120 caramelle alla liquirizia e 90 alla menta.

3.4 Alcune considerazioni

3.4.1 Giudizi qualitativi in problemi probabilistici

In tutte le situazioni reali si tende a esprimere giudizi probabilistici di tipo qualitativo e non quantitativo.
Possiamo esprimere tre tipi fondamentali di giudizi qualitativi: classificatori, comparativi, di rapporto.

- Un giudizio di tipo classificatorio è espresso su un unico evento A, ad esempio 'A è probabile',
- Un giudizio di tipo comparativo è espresso confrontando direttamente le probabilità di due eventi, ad esempio 'A è più probabile di B',
- Un giudizio di rapporto è espresso per due eventi A e B e considera il rapporto tra le loro probabilità, ad esempio 'A è almeno il doppio più probabile di B'.

Un giudizio di rapporto può essere visto come un giudizio comparativo generalizzato.

Un primo punto fondamentale è riuscire a quantificare in qualche maniera i giudizi espressi a parole. Dato un certo evento A, il nostro obiettivo è esprimere la sua probabilità $P(A)$.
I giudizi probabilistici qualitativi sono in generale piuttosto vaghi, di conseguenza sarà molto difficile ottenere un numero preciso per $P(A)$; il caso più frequente sarà che $P(A)$ appartiene a un intervallo.

Vediamo qualche esempio di quantificazione.
Se una persona afferma che 'A è probabile' significa che pensa che sia più probabile che succeda A piuttosto che 'non A'. Questo giudizio può essere quindi quantificato come: $P(A) > \frac{1}{2}$.
Analogamente, 'A è improbabile' viene ad essere espresso con $P(A) < \frac{1}{2}$; 'A è più probabile di B' con $P(A) > P(B)$ mentre 'A è almeno il triplo più probabile di B' con $P(A) \geq 3 \cdot P(B)$.

Ogni giudizio qualitativo espresso a parole viene riassunto con una o più disuguaglianze, perciò tendiamo a trovare intervalli che contengono $P(A)$ piuttosto che valori precisi di $P(A)$.

Solitamente, quanti più giudizi vengono espressi tanto più precisa è la stima della probabilità ottenuta. Occorre però fare attenzione, perché questa non è una regola applicabile in generale: parte dei giudizi possono risultare ridondanti (capita spesso).

D'altra parte, gli stessi possono essere incoerenti. Si capisce anche come, disponendo di soli giudizi qualitativi, sia praticamente impossibile ottenere valori unici di probabilità.
Due giudizi sono coerenti se esiste almeno un punto in comune ai loro insiemi di probabilità.

3.4.2 L'abuso dell'equiprobabilità

Un'altra insidia è costituita dalla supposizione dell'equiprobabilità delle diverse alternative. Non è poi così difficile lanciare in aria con la mano una moneta in modo che ricada nel palmo con la stessa faccia iniziale! Nel qual caso, supporre che le due facce della moneta siano equiprobabili porterebbe l'ingenuo scommettitore a sperimentare delle amare sorprese.
Non è tuttavia necessario pensare ad imbrogli da parte del lanciatore. Esistono diverse esperienze che dimostrano come la rotazione di una moneta su una superficie liscia, invece del suo lancio, possa portare a significative differenze nella frequenza delle facce legate alla posizione del centro di massa della moneta determinata dalle inevitabili diversità delle due facce.

Uscendo dal campo dei giochi, l'ipotesi che la distribuzione di probabilità del picco orario di chiamate ad un call center sia uniforme sulle 24 ore può essere certamente semplificatrice dal punto di vista del calcolo, ma ne appare evidente il limite (a meno che non si stia considerando un call center operante su scala mondiale).

L'equiprobabilità, inoltre, può creare diversi problemi a molti studenti (di varia formazione). Si è visto, ad esempio, che quasi il 60% degli studenti ritiene equiprobabili i due eventi *'ottenere un 5 e un 6 lanciando due dadi'* e *'ottenere due volte il 6 lanciando due dadi'*. In realtà il primo evento ha probabilità doppia rispetto al secondo.

Considerare equiprobabili due eventi che in realtà non lo sono è dovuto spesso, tra la gente comune, al credere erroneamente che un evento possa accadere oppure no ed essendoci due possibilità, i due eventi sono equiprobabili. Formalmente: sia A un evento nell'insieme degli eventi S, allora $P(A)$ è il rapporto tra la misura di A e la misura di S.

Se si considera S come formato dai due eventi A e 'non A' si arriva a concludere che $P(A) = \frac{1}{2}$.

Occorre ricordare che un modello probabilistico, come ogni modello, costituisce comunque un'approssimazione della realtà; ipotesi semplificatrici possono essere opportune per un primo approccio ad una situazione complessa. Spesso la semplificazione permette di ottenere risposte comunque utili, che un modello più complesso non riuscirebbe a fornire per le difficoltà, analitiche o computazionali, che insorgerebbero nel trattarlo. È tuttavia importante che le ipotesi sulle quali il modello si basa vengano apertamente dichiarate per mettere in guardia su possibili limiti delle conclusioni a cui l'analisi del modello ha portato, in vista di eventuali raffinamenti successivi.

Eventi rari, inoltre, possono accadere. Un errore in cui incorre spesso il senso comune è quello di equiparare eventi rari, cioè eventi a cui è associata una probabilità piccola di verificarsi, ad eventi impossibili. Il fatto che una determinata persona vinca ad una lotteria nazionale è sicuramente un evento raro, ma se la sua vincita venisse considerata impossibile si dovrebbe considerare impossibile la vincita da parte di chiunque altro (perché l'estrazione dovrebbe fare preferenze?) e di conseguenza si dovrebbe ritenere impossibile che ci sia un vincitore della lotteria, il che è assurdo. D'altra parte, il fatto che eventi rari prima o poi si verificano potrebbe essere poco interessante ai fini pratici, se il tempo di attesa è molto elevato.

Come sostenuto da Shaughnessy (1992), la modellizzazione di situazioni probabilistiche è complessa e l'insegnamento dei concetti di probabilità è spesso ostacolato da intuizioni primitive degli studenti e concezioni alternative.
Lo sviluppo di un modello probabilistico è però fondamentale in quanto permette il trattamento matematico dell'incertezza. Il modello permette di derivare conclusioni logiche e rigorose in base alle ipotesi formulate, evitando le trappole nelle quali è facile cadere procedendo in modo non rigoroso.

Infatti, se da un lato è possibile trattare situazioni interessanti con una matematica relativamente semplice e utilizzando concetti intuitivi, dall'altro l'affidarsi solamente all'intuizione può portare a conclusioni scorrette, come spesso capita all' uomo comune quando si cimenta con giochi e lotterie. Come ogni modello matematico, anche il modello probabilistico è un' astrazione e approssimazione della realtà.

3.4.3 Alcuni errori apparsi sui giornali o in televisione

Come ben sappiamo, sui giornali e in televisione si trovano spesso percentuali o problemi sul calcolo delle probabilità ed è interessante vedere come talvolta vengano fatte alcune considerazioni errate.

Vediamone alcuni esempi.

Nel suo numero del 1 Novembre 1989, il quotidiano americano *The Star-Democrat* riportava la seguente affermazione, tragica trasposizione alla vita reale della barzelletta di quel tale che pretende di viaggiare in aereo portandosi una bomba perché è nulla la probabilità di 2 bombe sullo stesso aereo:

'secondo il padre, il pilota (morto mentre cercava di atterrare sulla nave USS Lexington) era certo che non sarebbe mai stato coinvolto in un incidente aereo perché il suo compagno di stanza era morto in uno di questi e la probabilità era contraria'.

Nel bollettino mensile di una nota carta di credito, nel numero di settembre 2002 si poteva leggere:

'da sempre [il circuito mondiale di sportelli Bancomat] offre un servizio ai massimi livelli in termini di qualità, con una percentuale di transazioni con esito positivo pari al 99%*'.*

La percentuale di successi vantata non è poi così favorevole se si pensa che, usando la carta per un anno una volta alla settimana la probabilità che almeno una transazione abbia esito negativo è pari a circa il 41%.

L'errore sistematico più conosciuto è forse quello del giocatore d'azzardo (*gambler's fallacy*) ossia la convinzione errata che, ad esempio, se, lanciando una moneta, otteniamo per 4 volte consecutive croce sia più probabile nel quinto lancio ottenere testa per 'riequilibrare' la proporzione. Tale errore di valutazione della probabilità è lo stesso che induce molte persone a puntare sui così detti 'numeri ritardatari' del lotto.
Riportiamo un esempio apparso su un noto quotidiano il 10 gennaio 2003:

'sulla ruota di Roma, dal 1945 *ad oggi, non si era mai fatto attendere per più di* 82 *estrazioni consecutive: il numero attualmente in maggiore ritardo potrebbe ritornare da un momento all'altro'.*

Un altro esempio ben noto è quello proposto il 31 luglio 2011 dalla popolare Marilyn vos Savant sulla sua rubrica *Chiedi a Marilyn* sul *Parade Magazine* dove si chiedeva ai lettori di rispondere alla seguente domanda:

Se lanciate un dado equo per 20 *volte, quale dei seguenti risultati è più probabile?*

- 11111111111111111111
- 66234441536125563152

La risposta di vos Savant fu:

In teoria tutti i risultati sono ugualmente probabili. Entrambi ci dicono il numero che deve apparire ogni volta che si lancia il dado. Ogni numero (da 1 *a* 6*) ha la stessa probabilità di uscire (che è* $\frac{1}{6}$*). Ma poniamo che abbiate tirato i dadi mentre non vi guardavo e sosteniate che il risultato è uno dei due indicati. Quale delle due è più probabile sia la vostra? Il tiro c'è già stato, pertanto la risposta è la seconda.*

Si tratta per l'appunto di un errore dettato dalla *rappresentatività*. Chiaramente ci sono un sacco di possibili sequenze di numeri a casaccio che possono uscire mentre ce n'è una sola con soltanto numeri 1 ma nella domanda era richiesto di confrontare la probabilità di una sequenza di 20 numeri 1 con una *particolare* sequenza a casaccio. Quindi sono ugualmente probabili.

Nel Natale del 2011 veniva pubblicata, sempre sul *Parade Magazine*, questa lettera di un lettore:

Gestisco un programma di verifiche sull'assunzione di droga in un'organizzazione con 400 *impiegati. Ogni tre mesi, un generatore di numeri casuali seleziona* 100 *nomi da sottoporre al test. Dopo di che, i nomi ritornano nella lista dei seleionabili. Ovviamente la probabilità per ogni impiegato di essere scelto in un trimestre è di* $\frac{1}{4}$*. Ma qual è la probabilità di essere scelti nel corso di un anno?*

La risposta di Marilyn fu:

Resta di $\frac{1}{4}$ *nonostante il test ripetuto. Potresti pensare che aumentando il numero di prove, la probabilità di essere scelti aumenti ma fintanto che la dimensione della lista da selezionare resta uguale anche la probabilità è la stessa. Va contro l'intuizione, vero?*

Anche qui si sbaglia. Infatti la probabilità di non essere scelti in un trimestre è $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ da cui segue che la probabilità di non essere scelti in un anno è $(\frac{3}{4})^4 \approx 0,32$ e quindi la probabilità di essere scelti nel corso di un anno è circa $1 - 0,32 = 0,68$.

Sorprende che anche una mente prestigiosa come vos Savant abbia commesso certi sbagli. D'altronde come diceva il grande matematico vittoriano Augustus De Morgan $(1806 - 1871)$: *'Tutti quanti prendiamo qualche abbaglio, a volte, con la probabilità, e sono belli grossi'*.

Capitolo 4

Questionario

4.1 A chi è stato proposto

Il questionario è stato somministrato a 4 classi ($4°B, 4°G, 4°M, 3°G$)del liceo scientifico Enrico Fermi di Bologna e ad una classe ($4°A$) del liceo scientifico Enrico Mattei di San Lazzaro di Savena (Bologna) per un totale quindi di 5 classi.
Di queste, solo 2 avevano affrontato il calcolo delle probabilità (per la precisione la $4°G$ e la $4°B$), una classe (la $4°M$) stava affrontando il calcolo delle probabilità mentre le altre 2 classi non avevano ancora affrontato l'argomento.
Il numero totale di studenti a cui è stato sottoposto il questionario è risultato essere 100 di cui 58 maschi e 42 femmine. Per la precisione vi erano 43 studenti senza una formazione in probabilità (20 della $4°A$ e 23 della $4°G$), 22 studenti (quelli della $4°M$) che stavano affrontando la probabilità e 35 che avevano già trattato l'argomento (18 studenti della $4°G$ e 17 della $4°B$).
A tutti è stato concesso un tempo di 45 minuti per la compilazione del questionario ed è stato permesso di usare la calcolatrice. Prima di somministrare il questionario nelle varie classi ho chiesto agli studenti di scrivere solo negli appositi spazi senza 'sforare' e, tranquilizzandoli dicendo che non sarebbero stati in nessun modo valutati, ho insistito sul fatto che dovevano sentirsi liberi di dare le loro risposte (anche solo qualitative se non erano in grado di impostare procedimenti quantitativi) e di motivarle nel miglior modo possibile, cercando di essere i più precisi possibili.
Lo stesso questionario è stato poi somministrato a 100 matricole (45 maschi e 55 femmine) della facoltà di matematica di Bologna. Anche a loro sono state fornite le stesse indicazioni.

QUESTIONARIO DI PROBABILITA'
(45 minuti)

QUESITO 1
Stefano ha 2 figli. Uno di loro si chiama Federico.

- Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?
- Tale probabilità cambia se so che Federico è il primogenito?

QUESITO 2
Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni.
Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?

QUESITO 3
Un dado viene lanciato per 10 volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero 3, che i numeri 2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

QUESITO 4
Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

QUESITO 5
Nella scatola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola C ho 2 monete d'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro.
Qual è la probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

QUESITO 6
Ti propongo un gioco. Ci sono tre scatole (A, B e C). Solo una di esse è piena di soldi mentre le altre 2 sono piene di pezzi di carta di nessun valore. Tu ovviamente sei interessato alla scatola con i soldi ma non sai quale sia mentre io che ti propongo il gioco so dove si nascondono i soldi. Ti faccio scegliere una scatola e, successivamente, ti faccio vedere che in una delle altre due scatole c'erano solo i pezzi di carta. Ti chiedo poi se vuoi cambiare la tua scelta. Pensi che il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

QUESITO 7
Una malattia colpisce 5 persone su 1000. Esiste però un test molto preciso che nel 98% dei casi riesce ad individuare la presenza della malattia qualora essa sia presente (ossia, se una persona malata si sottopone al test nel 98% dei casi il test darà esito positivo). C'è poi l'1% di possibilità di avere "falsi positivi" (ossia, se una persona sana si sottopone al test, c'è probabilità dell' 1% che il test dia esito positivo).
Una persona si sottopone al test e risulta positiva. Quale delle seguenti stime per la probabilità che l'individuo sia malato ritieni più attendibile?

- Più del 75%
- Esattamente il 98%
- Tra il 25% e il 50%
- Tra il 50% e il 75%

Per sicurezza, la persona risultata positiva al primo test riprova il test una seconda volta. Risulta ancora positiva. Alla luce di questo nuovo fatto come cambia la probabilità che sia effettivamente malata?

- Aumenta
- Rimane invariata
- Diminuisce

4.2 Analisi delle domande

Il quesito 1 sembra banale ma non lo è affatto. Intuitivamente siamo portati a pensare che in entrambi i casi la probabilità sia $\frac{1}{2}$ ma questo è vero solo nella seconda parte della domanda. Nel primo caso, infatti, la probabilità è $\frac{1}{3}$. Il fatto che nello stesso quesito siano presenti entrambe le domande penso possa indurre gli studenti a non dare una risposta affrettata (dettata dall'intuito che, come abbiamo visto, qui porterebbe a sbagliare). Il modo in cui la domanda è stata posta fa pensare che le due situazioni possano essere diverse (e infatti lo sono).

Un simile esercizio comparve come quesito 7 alla maturità scientifica PNI del 2010. Il quesito era il seguente:

Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

Il quesito 2 è chiaramente legato alla *gambler's fallacy*. Si spera che, essendo questa una delle misconcezioni più famose legate alla probabilità, un'adeguata istruzione abbia portato ad abbatterla. Non è insensato, però, temere che qualcuno non abituato a pensare in modo razionale sia convinto che il numero 84 abbia più possibilità di uscire. Altri (pochi forse) potranno invece essere indotti a pensare che il numero 7 sia, per questioni irrazionali che non comprendiamo, talmente 'fortunato' che avrà più probabilità di uscire ancora rispetto al numero 84.
Ovviamente, probabilisticamente parlando, hanno entrambi la stessa possibilità di essere estratti ($\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$).

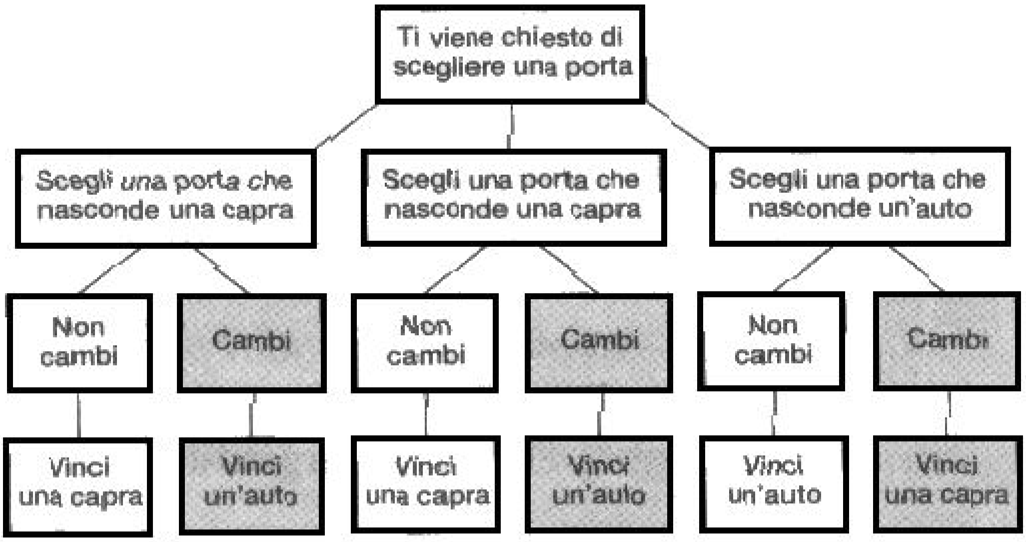
Il quesito 3 è risultato più difficile del precendente. La risposta giusta è che le tre sequenze hanno tutte la stessa probabilità di realizzarsi. Molti però saranno indotti a pensare che sia più probabile l'ultima sequenza (appare molto più casuale). Tale quesito richiama il problema delle sequenze di monete.

Il quesito 4 è tratto dalla storia della matematica (anche se formulato in modo un po' diverso). Si tratta infatti di uno dei due problemi posti da Gombaud a Pascal. Avevamo visto che 25 era il più piccolo numero di lanci di due dadi che rendesse vantaggiosa la scommessa sull'uscita del 'doppio 6' e quindi la risposta giusta è 'preferisco non scommettere'.

Gli ultimi tre quesiti riguardano la probabilità condizionata.

Il quesito 5 è una normale applicazione della definizione di probabilità condizionata. Penso che quasi tutti quelli che non hanno ancora affrontato la probabilità cadranno in errore. Non per tutti gli altri, però, sarà facile rendersi conto che si tratta di un problema di probabilità condizionata. La risposta giusta è $\frac{2}{3}$.

Il quesito 6 è il famoso problema di Monty-Hall e, a differenza di quanto si possa pensare, il cambio risulta vantaggioso. Un diagramma ad albero aiuta a capire meglio questo problema molto famoso.



Il quesito 7 è quello del test clinico. La prima parte è presa dal libro di testo analizzato nel capitolo 2 che lo usava come esempio teorico (i dati sono gli stessi). La seconda parte della domanda è forse la più difficile da risolvere in maniera rigorosa ma intuitivamente è chiaro che la probabilità di essere malati aumenta.

Un quesito molto simile (cambiavano solo i dati) fu proposto ad alcuni medici tedeschi durante una ricerca dell'Istituto Max Planck di Berlino. Si potè osservare che la maggior parte dei medici non utilizzava un approccio corretto nella stima della probabilità.

Più precisamente il quesito che era stato proposto ad un campione scientificamente significativo di medici tedeschi era il sequente:

Per facilitare la diagnosi precoce del cancro al seno, le donne da una certa età in poi vengono incoraggiate a sottoporsi ad intervalli regolari a cotrolli sistematici, anche se non avvertono alcun sintomo.
Lei supponga di condurre in una certa regione di un Paese uno screening mammografico del cancro al seno e supponga di sapere le seguenti cose riguardo alle donne tra i 40 *e i* 50 *anni che si sottopongono, senza sintomi evidenti, ad una mammografia regolare.*
La probabilità che una di loro abbia il cancro al seno è di $0,8\%$. *Se una donna ha il cancro al seno la probabilità che il mammogramma risulti positivo è del* 90%. *Se non ha il cancro al seno c'è comunque una probabilità del* 7% *che il mammogramma risulti positivo.*
Immaginiamo dunque una donna con il mammogramma positivo. Quanto è probabile che abbia il cancro?

e i risultati furono i seguenti:

- Un terzo del gruppo giunse alla conclusione che la probabilità fosse del 90%;
- Un altro terzo del gruppo stimò la probabilità tra 50% e 80%;
- Solo alcuni ritennero che la probabilità fosse meno del 10%;
- La stima media fu del 70%

Utilizzando correttamente il teorema di Bayes e le regole di probabilità condizionata si poteva vedere che la probabilità era del 9%.

Un altro studio simile fu fatto da David Eddy, consulente dell'amministrazione Clinton per la riforma del sistema sanitario, con dati molto simili. Ben il 95% di medici americani rispose che la probabilità di un cancro al seno, dato un mammogramma positivo, era più del 75%.

Quello che preoccupa è il fatto che la stragrande maggioranza dei medici, sia tedeschi sia americani, non riescono a dare il giusto valore ai dati numerici che vengono loro forniti in questi casi.
Vedremo se i nostri studenti sapranno fare di meglio.

Come si è visto la maggior parte dei quesiti porta quindi a risultati controintuitivi. E di esempi ce ne sarebbero molti altri.

4.3 Ipotesi e scopi della ricerca

Quando si mettono alla prova gli studenti è molto difficile prevedere cosa accadrà soprattutto se non si ha esperienza nel campo dell'insegnamento.

Inoltre, quasi tutte le domande sono lasciate aperte e quindi gli studenti sono liberi di agire come meglio credono. Questo rende più difficile fare una trattazione di tipo statistico ma rende decisamente più interessante analizzare sotto vari aspetti ogni singola risposta.

Ad ogni modo possiamo aspettarci che:

- Ci sarà una buona percentuale di errori nella prima domanda del quesito 1 soprattutto da chi non utilizzerà una qualche rappresentazione grafica;
- Quasi tutti risponderanno in modo corretto al quesito 2 soprattutto se hanno fatto probabilità;
- Molti saranno tentati a dare probabilità maggiore alla sequenza 'casuale' del quesito 3 non rendendosi conto del fatto che, seppur vero che ci sono molte più sequenze casuali rispetto a quelle 'particolari', ogni lancio è indipendente e la probabilità che esca esattamente quella sequenza 'casuale' non è maggiore delle altre. Non credo ci sarà grande differenza tra chi ha affrontato probabilità e chi no;
- Un buon divario tra chi ha fatto probabilità e chi ancora non l'ha trattata si noterà dal quesito 4 in poi;
- Pochi risponderanno bene al quesito 6 (a meno che non l'abbiano già visto);
- Le matricole di matematica risponderanno meglio ai primi 3 quesiti e al 6 mentre troveremo risposte più precise tra gli studenti che hanno fatto probabilità nei quesiti 5 e 7 (sono tipici esercizi da verifica);
- Quasi nessuno darà una risposta quantitativa all'ultima domanda del quesito 7;
- Miglioramenti all'aumentare del grado d'istruzione

Diversi sono gli scopi di questi ricerca:

- Analizzare le idee degli studenti per quanto riguarda la probabilità;
- Verificare quali misconcezioni sono presenti e, in particolare, quali possono essere risolte, almeno in parte, grazie ad una buona istruzione;
- Vedere se influisce maggiormente *l'effetto tempo* o *l'effetto selezione*, ossia se i risultati migliori si avranno tra gli studenti liceali freschi di studio di probabilità o tra le matricole di matematica di Bologna (che, si spera, abbiano una certa consapevolezza della materia).

Capitolo 5

Analisi dei risultati

Cerchiamo ora di analizzare in modo critico i risultati che abbiamo ottenuto.

Per ogni quesito vedremo se ci sono state particolari differenze tra i risultati ottenuti dai liceali e dai matematici e, nel caso, cercheremo di comprenderne le motivazioni. Ci aiuta il fatto che i due campioni sono ugualmente numerosi.

Valuteremo poi, per ogni quesito, se tra i liceali ci sono particolari differenze tra chi la probabilità non l'ha ancora affrontata e chi invece l'ha già affrontata.

Nel questionario era stato chiesto anche di indicare il proprio sesso per vedere se vi erano alcune differenze particolari nei risultati. Come ci aspettavamo non sono state evidenziate differenze significative (anzi, l'andamento era lo stesso più o meno in tutti i quesiti) e quindi nell'analisi che segue non verrà riportata la differenziazione tra maschi e femmine.

Vi è stato un solo studente (una matricola di matematica) che ha fatto il questionario perfetto motivando correttamente ogni risposta e questo non può che farci piacere dato che non si trattava di un questionario così semplice.

Ciò che ci interessa maggiormente, però, non è tanto la soluzione del quesito quanto piuttosto ciò che ci sta dietro. Analizzeremo quindi alcune risposte *particolari* per osservare alcuni modi di ragionare interessanti (quantunque sbagliati) degli studenti sottoposti all'indagine.

Per quanto riguarda le risposte più interessanti, la maggior parte di esse sono fornite dai liceali in quanto si è visto un maggior interessamento da parte di questi nel compilare il questionario.

Sono comunque tanti, soprattutto tra i matematici, quelli che si sono limitati spesso a fornire una risposta senza argomentarla. Non è quindi possibile verificare quale sia stato il loro ragionamento e dove siano caduti in errore o se abbiano dato la risposta giusta pur seguendo strade sbagliate.

Un aspetto positivo è che si nota in tutti i quesiti un miglioramento di risposte all'aumentare del livello di conoscenza sul calcolo delle probabilità almeno per quanto riguarda i liceali anche se non mancano risposte brillanti da parte di chi probabilità non l'ha ancora affrontata e questo è incoraggiante.

Ad ogni modo, come si vedrà, la ricerca ha prodotto risultati interessanti: alcuni prevedibili, altri meno.

Per facilitare il lettore, denoteremo con:

- L-NO: studenti/esse liceali che non hanno ancora affrontato la probabilità;

- L-SI : studenti/esse liceali che hanno già affrontato la probabilità;

- MAT: matricole del corso di laurea in matematica di Bologna

Specificheremo, vista la particolarità della classe, se lo studente (o la studentessa) frequentava la $4°M$.

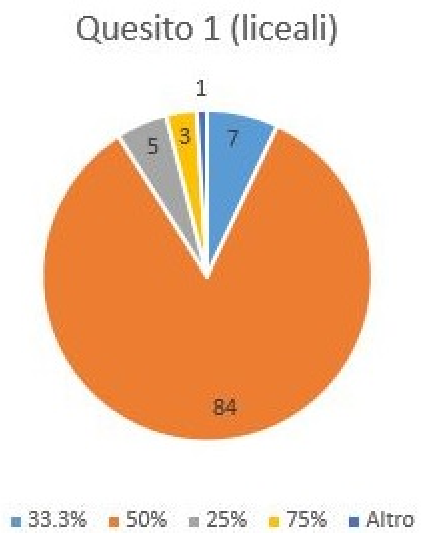
5.1 Quesito 1

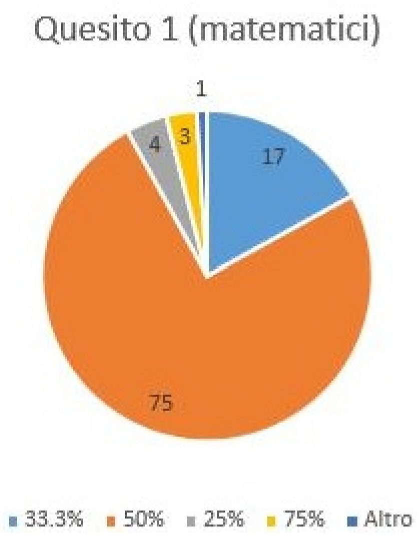
Riportiamo il quesito.

Stefano ha 2 figli. Uno di loro si chiama Federico.

- *Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?*
- *Tale probabilità cambia se so che Federico è il primogenito?*

5.1.1 I risultati





Questo è il quesito in cui la risposta giusta trova le percentuali minori. Le percentuali di studenti che hanno risposto 50% sono impressionanti e praticamente tutti quelli che hanno risposto in tal modo sono convinti che la risposta non cambi nel caso in cui venga specificato che Federico è il primogenito.

Tra quelli che hanno risposto 50% affermando poi che la probabilità cambia sapendo che Federico è il primogenito non troviamo risposte soddisfacenti in quanto o non specificano come cambia o sostengono che aumenta per questioni genetiche.

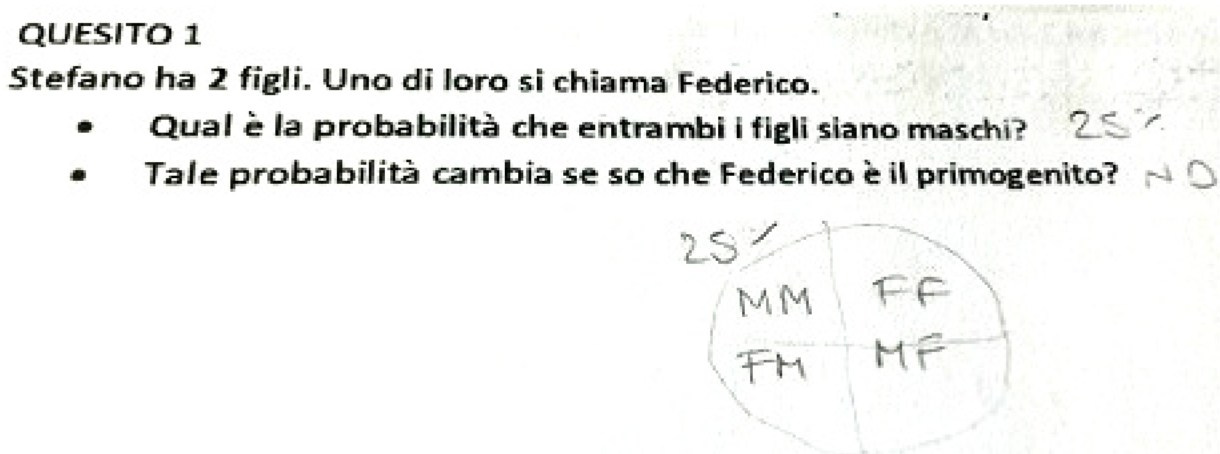
Tutti quelli che hanno risposto in modo corretto si sono aiutati con una rappresentazione grafica nel senso che hanno riportato i casi MM, MF, FM, FF e hanno poi escluso quest'ultimo in quanto un figlio si chiamava Federico.

Va precisato anche che quei pochi che hanno risposto giusto alla prima parte della domanda hanno anche risposto giusto alla seconda (ma qualcuno si è limitato a dire che la probabilità cambia senza specificare come).

Pochissimi quelli che rispondono in altro modo e ne vedremo qualche esempio.

5.1.2 Analisi di alcune risposte

Partiamo dalla risposta di questa studentessa L-NO.



QUESITO 1

Stefano ha 2 figli. Uno di loro si chiama Federico.

- **Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?** 25%
- **Tale probabilità cambia se so che Federico è il primogenito?** NO

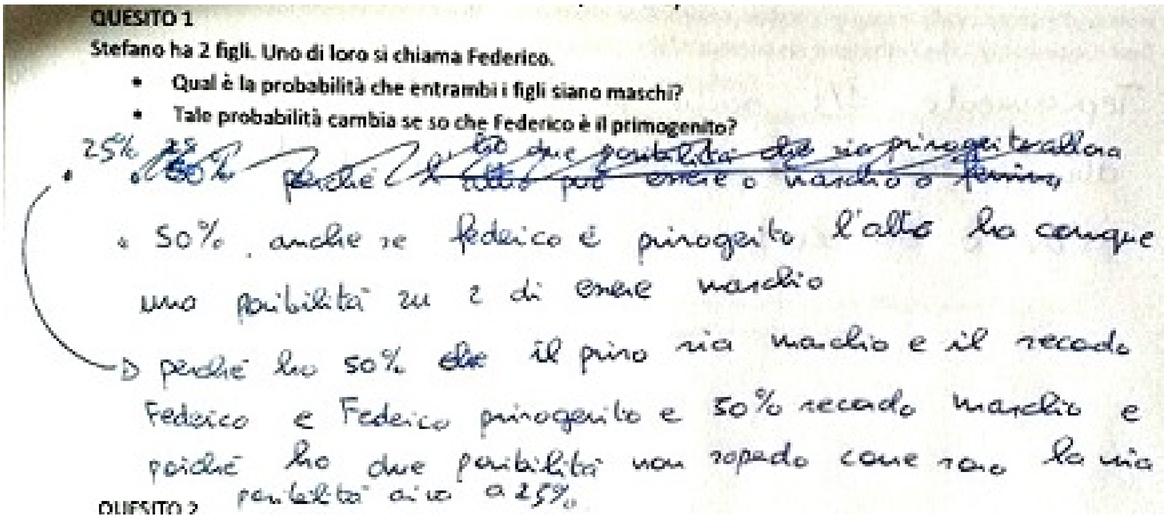
Si nota che è ben consapevole del fatto che ci sono 4 casi possibili (ugualmente probabili trascurando discorsi genetici) di cui solo uno è quello favorevole (MM). La probabilità risulta quindi essere del 25%.

Non tiene conto però del fatto che veniva detto esplicitamente che uno era maschio (chiamandosi Federico) e quindi andava escluso il caso FF. Questa considerazione l'avrebbe portata sicuramente ad una risposta giusta.

Non possiamo sapere se sia stata solo una disattenzione dovuta ad una lettura superficiale della domanda o se abbia ritenuto ininfluente il fatto che uno dei due figli si chiamasse Federico.

Inizialmente si potrebbe pensare alla prima ipotesi ma il fatto che abbia risposto che la probabilità non cambia sapendo che Federico è il primogenito fa pensare che non abbia riflettuto a sufficienza sulla domanda in quanto la rappresentazione grafica l'avrebbe dovuta sicuramente aiutare.

Vi è però anche uno studente MAT che risponde 25% ma la sua risposta è ben diversa.


QUESITO 1

Stefano ha 2 figli. Uno di loro si chiama Federico.

- Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?
- Tale probabilità cambia se so che Federico è il primogenito?

25% ~~25 50% perché l'altro può essere o maschio o femmina~~

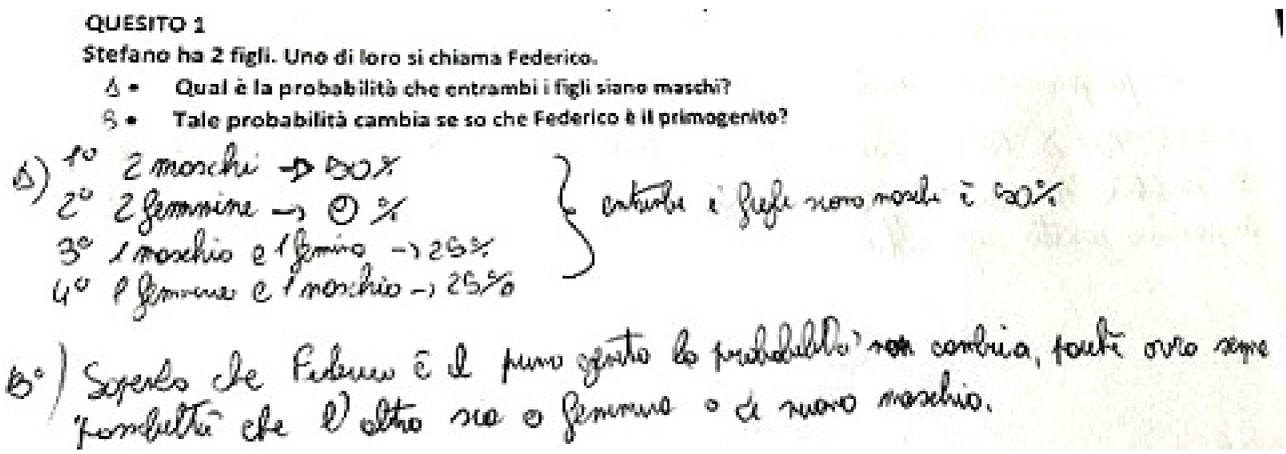
• 50% anche se Federico è primogenito l'altro ha comunque una possibilità su 2 di essere maschio

→ perché ho 50% che il primo sia maschio e il secondo Federico e Federico primogenito e 50% secondo maschio e poiché ho due possibilità non sapendo come sono la mia probabilità si riduce a 25%

QUESITO 2

Come si può notare non si avvale di nessuna rappresentazione grafica ma porta avanti un ragionamento in cui è ben chiaro che si rende conto dell'importanza dell'ordine ma viene indotto in errore dal fatto che è convinto (non si sa bene per quale motivo) che le probabilità debbano essere dimezzate.

Un'altra risposta sorprendente è quella di questo ragazzo L-NO:


QUESITO 1

Stefano ha 2 figli. Uno di loro si chiama Federico.

a) • Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?

b) • Tale probabilità cambia se so che Federico è il primogenito?

a) 1° 2 maschi → 50%
2° 2 femmine → 0 %
3° 1 maschio e 1 femmina → 25%
4° 1 femmina e 1 maschio → 25%

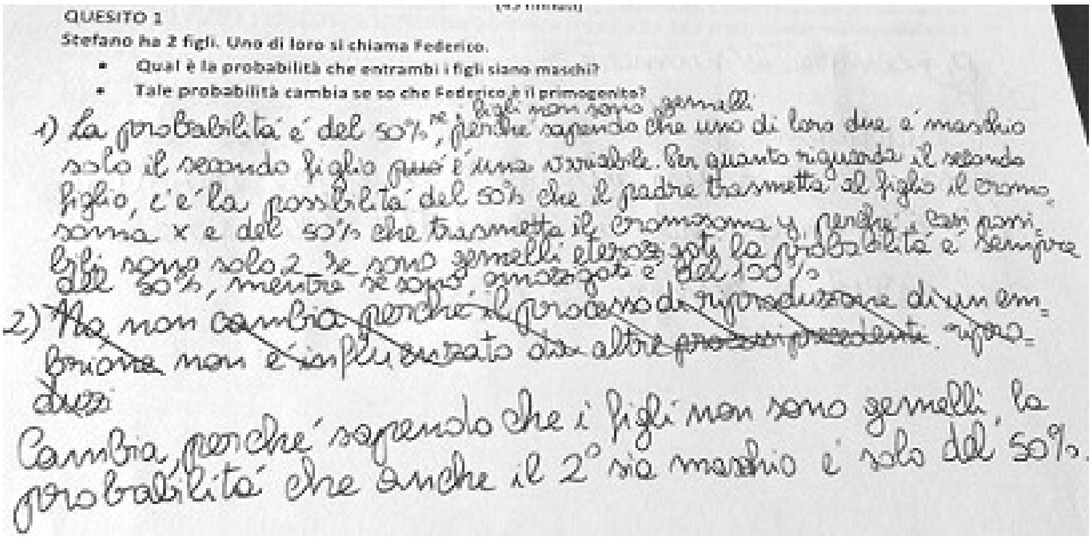
entrambi i figli sono maschi è 50%

b°) Sapendo che Federico è il primogenito la probabilità non cambia, perché avrò sempre possibilità che l'altro sia o femmina o di nuovo maschio.

Quello che stupisce è il fatto che abbia correttamente elencato le 4 possibilità, che si sia accorto del fatto che la possibilità '2 femmine' fosse da escludere ma non si capisce perché abbia voluto assegnare probabilità del 50% al caso dei 2 maschi.

Avrebbe dovuto correttamente osservare che le 3 possibilità rimaste erano tutte equiprobabili. Possiamo forse supporre che abbia ritenuto più probabile quella possibilità perché risulta più facile avere un figlio di nome Federico se i maschi sono due ma ci sembra veramente una forzatura.

La risposta forse più interessante da analizzare per quanto riguarda questo quesito la fornisce questa studentessa L-NO.


QUESITO 1

Stefano ha 2 figli. Uno di loro si chiama Federico.

- Qual è la probabilità che entrambi i figli siano maschi?
- Tale probabilità cambia se so che Federico è il primogenito?

1) La probabilità è del 50%, se i figli non sono gemelli, perché sapendo che uno di loro due è maschio solo il secondo figlio può è una variabile. Per quanto riguarda il secondo figlio, c'è la possibilità del 50% che il padre trasmetta al figlio il cromosoma x e del 50% che trasmetta il cromosoma y, perché i suoi figli sono solo 2. Se sono gemelli eterozigoti la probabilità è sempre del 50%, mentre se sono omozigoti è del 100%.

2) ~~Ma non cambia perché il processo di riproduzione di un embrione non è influenzato da altre processi precedenti. riproduzi~~

Cambia, perché sapendo che i figli non sono gemelli, la probabilità che anche il 2° sia maschio è solo del 50%.

Quello che si nota è che è l'unica che si preoccupa del caso in cui i figli siano gemelli e, da come scrive, sembra essersene preoccupata in un momento successivo.

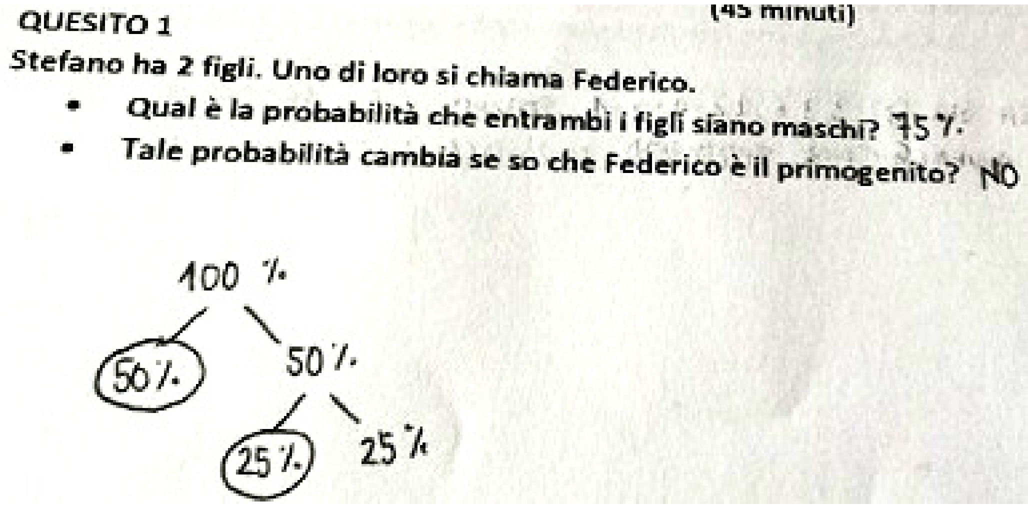
Si vede che, come la stragrande maggioranza di studenti, anche lei è tratta in inganno dal fatto che se un figlio è maschio (si chiama infatti Federico) per indagare la probabilità che entrambi siano maschi è sufficiente concentrarsi sul secondo e, dato che si nasce maschio o femmina e non ci sono altre possibilità, la probabilità risulta essere del 50%.

Lei però si preoccupa di considerare il fatto che i due figli possano essere gemelli e si preoccupa di valutare sia il caso omozigoti sia quello eterozigoti. Perché fa questo? E soprattutto come mai è l'unica che se ne preoccupa?

Apparentemente è importante valutare tutti i casi possibili ma qui non è necessario distinguere tra gemelli e non gemelli.

La risposta 75% appare strana ed è stata data da chi ha realizzato un diagramma ad albero concludendo in modo scorretto.

Un esempio che vediamo è quello di uno studente L-NO.



Non vi sono scritte e non è ben chiaro cosa abbia pensato nel costruire un tale diagramma.

Molto probabilmente si ricorda di esercizi di probabilità svolti (forse alle medie) grazie ad una rappresentazione ad albero in cui le probabilità si moltiplicano 'in verticale' e si sommano 'in orizzontale' (il fatto che si ricordi questo è comunque positivo).

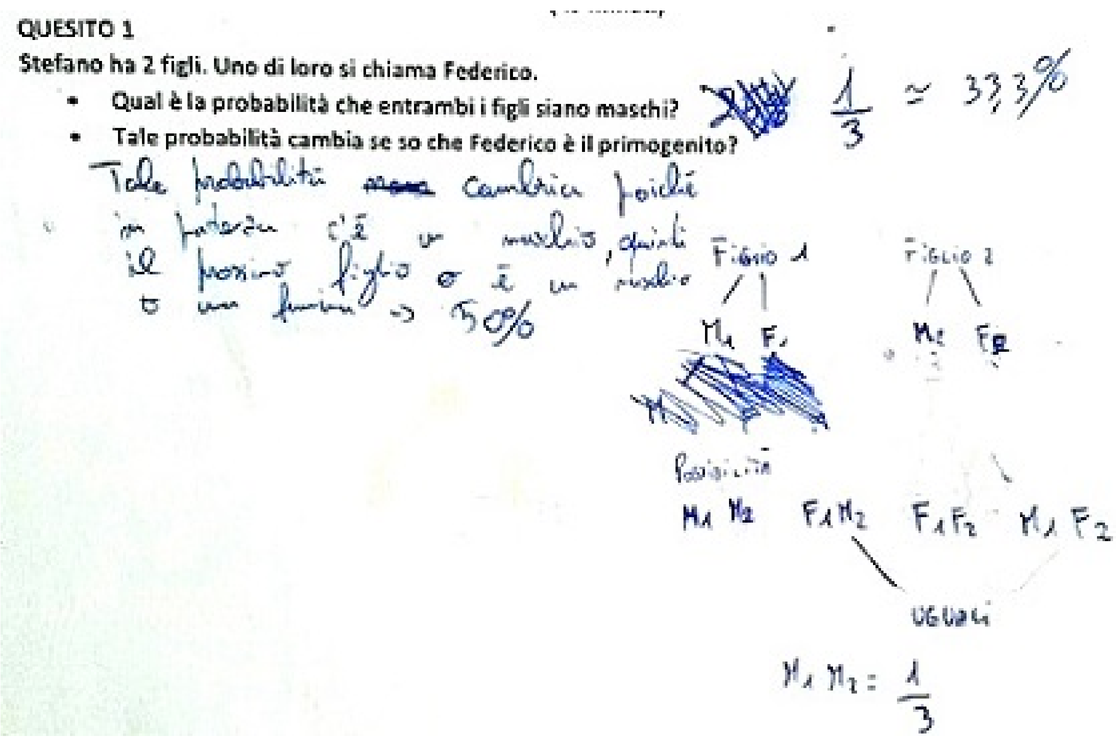
Qui però il diagramma ad albero non ha alcun senso. Tipico di chi impara dei meccanismi risolutivi senza capire perché si usano e soprattutto quando ha senso usarli.

Questo sappiamo essere un problema generale di molti studenti.

La risposta 75% appare inoltre molto anti-intuitiva. Non sappiamo se lo studente abbia poi riflettuto su questo fatto o non se ne sia occupato.

Capita spesso, infatti, di vedere studenti che, una volta applicato un metodo risolutivo ad un dato problema, non si preoccupano più del risultato che hanno ottenuto. Anche questo è causato da un apprendimento di tipo meccanico.

Non può non essere menzionata la risposta di questo studente della classe $4°M$ che pare rispondere giusto ma con un po' di fortuna.



Apparentemente sembra tutto giusto ma quella scritta *uguali* fa temere che abbia considerato una sola delle due possibilità, ossia ha risposto correttamente $\frac{1}{3}$ in quanto le possibilità erano 'due maschi', 'un maschio e una femmina' (non conta l'ordine per lui) e 'due femmine' (che, come detto, andava invece escluso e lui non sembra averlo fatto).

Non sono chiare le motivazioni di questo fatto.

Questo studente aveva dimostrato grande attenzione nell'affrontare questo problema e nel capire la diversità delle due situazioni.

Pare dunque strano che abbia commesso una simile ingenuità.

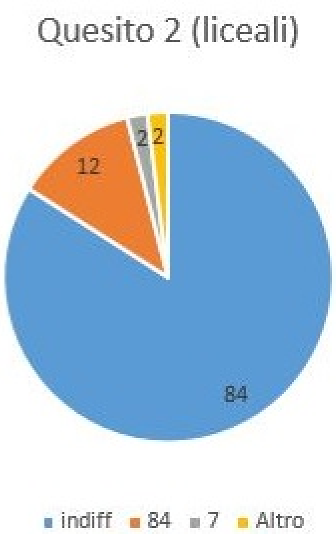
Tuttavia la sua risposta è giusta, nonostante vi siano ancora delle perplessità sulla completa correttezza del suo ragionamento.

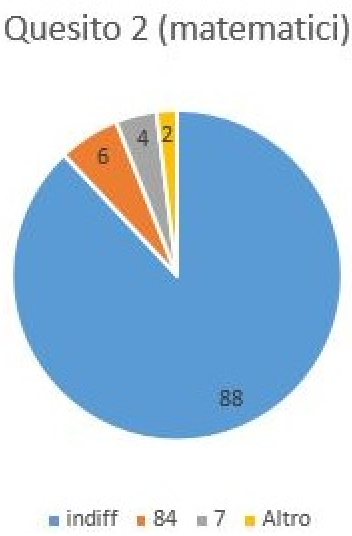
5.2 Quesito 2

Riportiamo il quesito.

Ti viene detto che il numero 7 *è uscito per* 2 *volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero* 84 *non esce da ben* 178 *estrazioni. Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero* 7 *o del numero* 84 *o è indifferente?*

5.2.1 I risultati





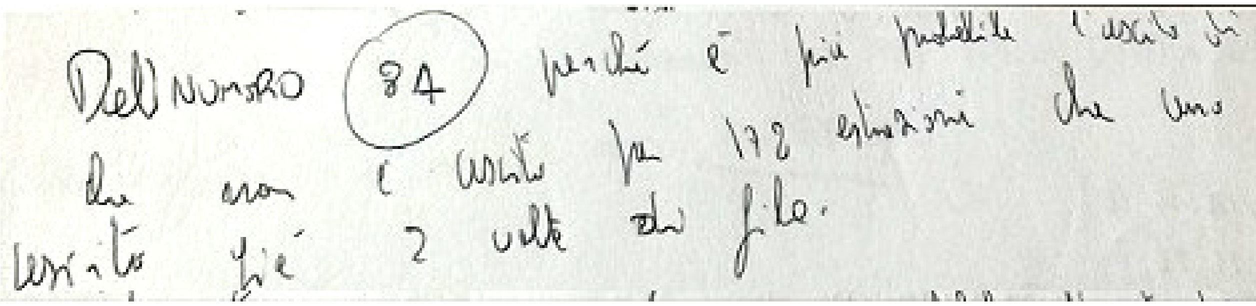
Anche il quesito 2 ci porta a riflettere su questioni interessanti.
Si nota, per fortuna, che la stragrande maggioranza di studenti non si lascia trarre in inganno dai cosiddetti *numeri ritardatari* e risponde in modo corretto.
Deve però far riflettere che ci sono 16 liceali su 100 e 12 matematici su 100 che non sono convinti del fatto che ogni estrazione sia indipendente dalle altre e sono indotti a dare risposte sbagliate o quantomeno confuse.
Chiaramente il *distrattore* più importante è il numero *ritardatario* 84 anche se c'è qualcuno che preferirebbe puntare sull'uscita del *fortunatissimo* 7.

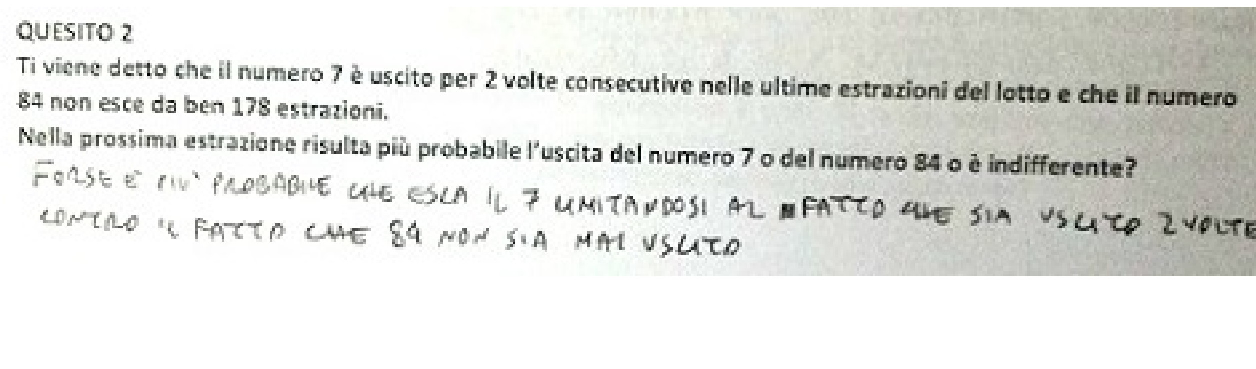
L'aspetto più interessante legato ai risultati di questo quesito è il fatto che gli errori tra i liceali sono tutti tra chi probabilità non l'ha ancora fatta o l'ha appena cominciata. Tutti i liceali freschi di calcolo delle probabilità hanno dato senza esitazione la risposta giusta.

Sembrava quindi che l'istruzione potesse abbattere definitivamente l'idea errata che sta dietro la ben nota *gambler's fallacy* ma non è così, come mostrano i risultati ottenuti tra i matematici.
Questa misconcezione presente, seppur in piccola parte, tra i ragazzi che non hanno ancora ricevuto una preparazione probabilistica sembra sparire una volta ricevuta un'adeguata istruzione ma torna fuori nuovamente una volta che non si è più freschi di calcolo delle probabilità.
Questo fa ben capire come certi modi di ragionare errati siano però molto intuitivi e rimangono nonostante l'istruzione abbia cercato di abbatterli.
Si nota, come vedremo nel paragrafo successivo, che alcuni sono indotti a puntare sul *ritardatario* 84 per la *legge dei grandi numeri.*

5.2.2 Analisi di alcune risposte

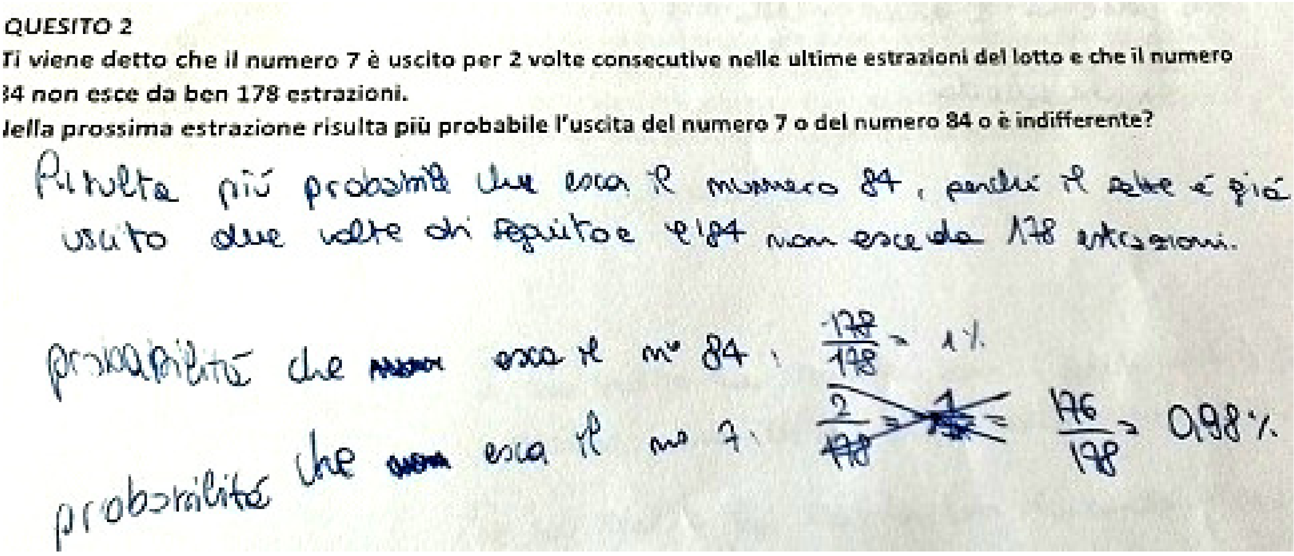
Come detto tutti gli studenti che hanno svolto il modulo di calcolo delle probabilità a scuola hanno risposto bene e quindi tutte le immagini riguardano studenti che ancora dovevano iniziare l'argomento. Vediamo che ci sono alcuni che non motivano in modo particolare ma sono tratti in inganno dai *ritardi* del numero 84 o dall'incredibile fortuna del numero 7.


Dell NUMERO 84 perché è più probabile l'uscita di
uno che non è uscito per 178 estrazioni che uno
uscito già 2 volte di fila.


QUESITO 2
Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni.
Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?
FORSE È PIÙ PROBABILE CHE ESCA IL 7 LIMITANDOSI AL FATTO CHE SIA USCITO 2 VOLTE
CONTRO IL FATTO CHE 84 NON SIA MAI USCITO

Vi sono poi un paio di studenti che cercano di dare risposte quantitative mettendo insieme i numeri che hanno senza però un senso logico preciso.

Uno di questi azzarda persino una proporzione.


QUESITO 2

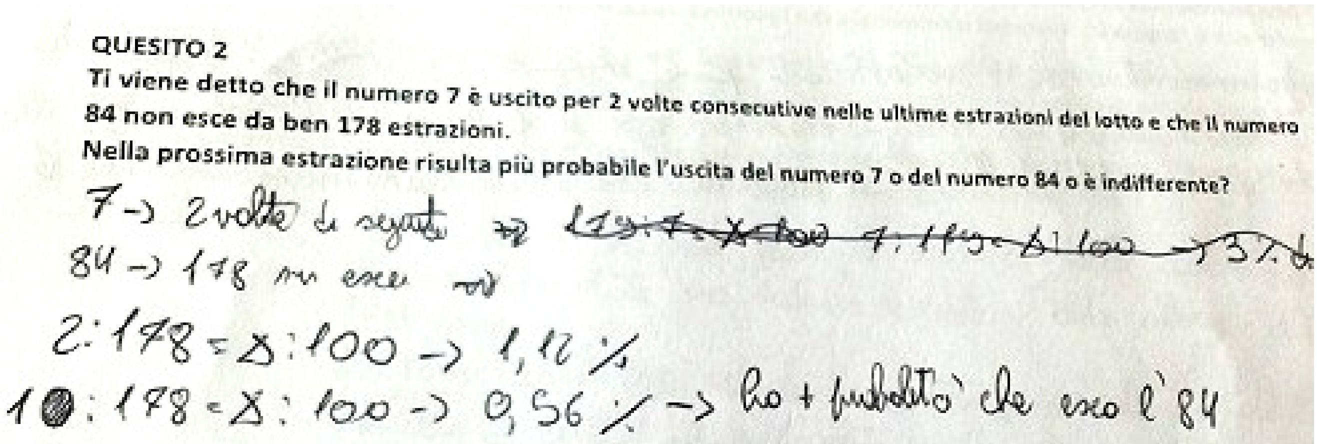
Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni.

Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?

Risulta più probabile che esca il numero 84, perchè il sette è già uscito due volte di seguito e l'84 non esce da 178 estrazioni.

probabilità che ~~non~~ esca il n° 84: $\frac{178}{178} = 1\%$

probabilità che ~~non~~ esca il n° 7: ~~$\frac{2}{178} = \frac{1}{89}$~~ $= \frac{176}{178} = 0{,}98\%$


QUESITO 2

Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni.

Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?

7 -> 2 volte di seguito

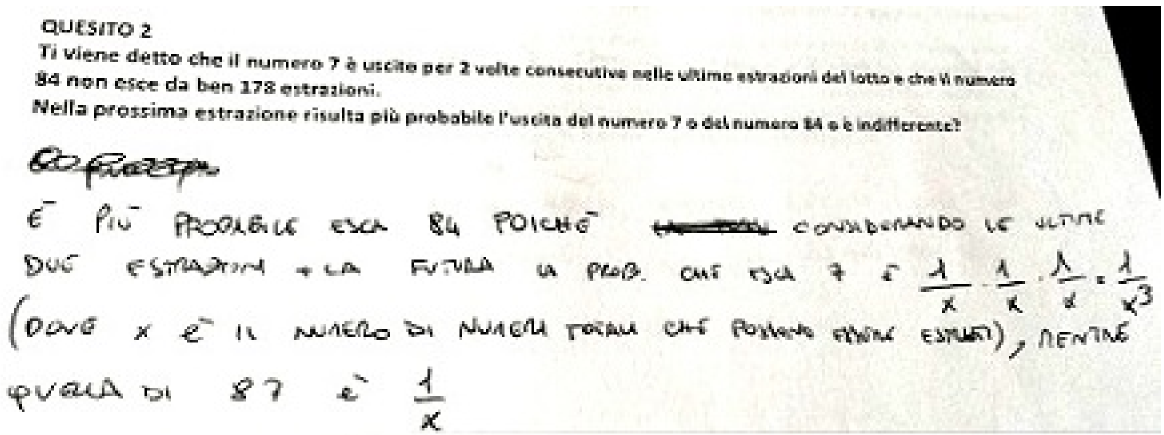
84 -> 178 non esce

2 : 178 = x : 100 -> 1,12 %

1 : 178 = x : 100 -> 0,56 % -> ho + probabilità che esca l'84

Interessante vedere poi come questo studente calcoli in modo corretto la probabilità che il numero 7 esca per 3 volte consecutive ... peccato che non fosse questo il punto.

Nessuna estrazione è influenzata dalle precedenti come ben sappiamo.



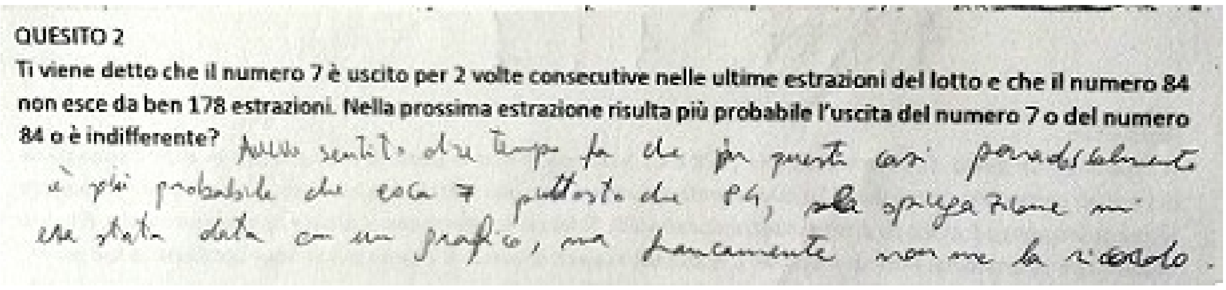
QUESITO 2

Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni.

Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?

É PIÙ PROBABILE ESCA 84 POICHÉ CONSIDERANDO LE ULTIME DUE ESTRAZIONI + LA FUTURA LA PROB. CHE ESCA 7 È $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}$ (DOVE x È IL NUMERO DI NUMERI TOTALI CHE POSSONO ESSERE ESTRATTI), MENTRE QUELLA DI 87 È $\frac{1}{x}$

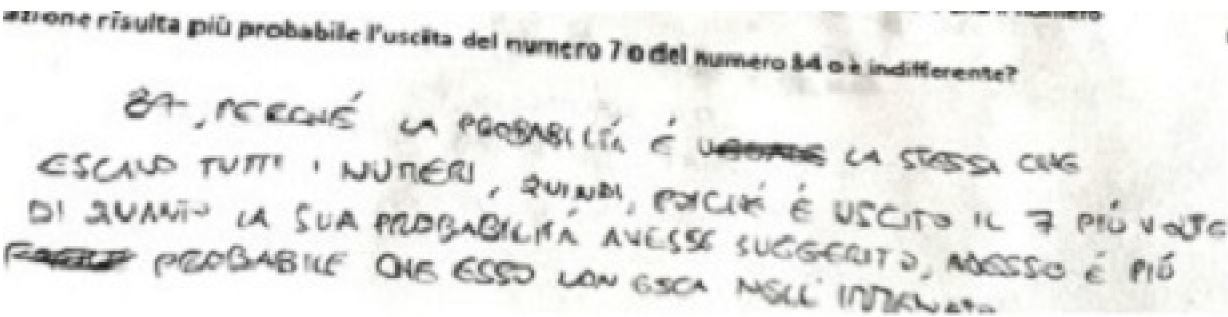
Divertente (forse) la risposta di questa matricola di matematica che purtroppo è stata ingannata da qualcuno che con un discorso errato ma probabilmente all'apparenza convincente gli ha fatto credere che fosse più probabile l'uscita di *numeri fortunati*.



QUESITO 2

Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni. Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente? Avevo sentito altro tempo fa che per questi casi paradossalmente è più probabile che esca 7 piuttosto che 84, la spiegazione mi era stata data con un grafico, ma francamente non me la ricordo.

Ma veniamo ora alle risposte più interessanti, due delle quali provengono da studenti L-NO mentre le altre due (dove si parla della legge dei grandi numeri) sono state date da matricole di matematica.



...azione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?

84, PERCHÉ LA PROBABILITÀ È LA STESSA CHE ESCANO TUTTI I NUMERI, QUINDI, POICHÉ È USCITO IL 7 PIÙ VOLTE DI QUANTO LA SUA PROBABILITÀ AVESSE SUGGERITO, ADESSO È PIÙ PROBABILE CHE ESSO NON ESCA NELL'IMMEDIATO

QUESITO 2

Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni.
Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?

Da un primo ragionamento si potrebbe dire che un'estrazione vale l'altra e che quindi ogni numero ha la stessa probabilità di uscire di un'altro. Tuttavia se si prende tutto nel suo insieme si capisce che è difficile che esca per la terza volta successiva il numero 7, mentre un numero che non esce da tanto come l'84 potrebbe avere più chance.

QUESITO 2

Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numero 84 non esce da ben 178 estrazioni. Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del numero 84 o è indifferente?

Se guardiamo alla sola estrazione le probabilità risultano uguali... Secondo la legge dei grandi numeri entrambi con un numero infinito di lanci usciranno gli stessi numeri di volte, quindi penso che la probabilità aumenti leggermente

QUESITO 2

Ti viene detto che il numero 7 è uscito per 2 volte consecutive nelle ultime estrazioni del lotto e che il numer non esce da ben 178 estrazioni. Nella prossima estrazione risulta più probabile l'uscita del numero 7 o del num 84 o è indifferente?

È più probabile che esca 84 per la legge dei grandi numeri.

Appare evidente qui che si fa strada l'idea che il numero 7 sia stato finora troppo fortunato e, dovendo tornare prima o poi ad un equilibrio, risulta più facile che esca il numero 84.
Interessante vedere che si tratta di riflettere sul significato della legge dei grandi numeri (il fatto che essa venga citata solo dai matematici ma che compaia in modo abbastanza evidente anche nei ragionamenti dei liceali fa pensare che le matricole di matematica abbiano, come lecito aspettarsi, una conoscenza maggiore di cosa sia anche se manifestano qui di non averla ben compresa).

Secondo la legge dei grandi numeri, per un numero di prove sufficientemente grande ci si aspetta una frequenza relativa di successi vicina alla probabilità teorica.
Nel nostro caso specifico, dato un numero di estrazioni sufficientemente grande (e 178 estrazioni non sono così poche), è molto probabile che la frequenza relativa delle uscite dei numeri 7 e 84 (e quindi anche di tutti gli altri numeri presenti nel gioco del lotto) si avvicini a quella che è la probabilità teorica (che avevamo visto essere di $\frac{1}{18}$).
Questo significa che, a priori, è molto probabile che in 178 estrazioni, ogni numero compaia circa 10 volte.

Nel testo veniva detto, però, che il numero 84 non usciva da ben 178 estrazioni.
Questo fatto è altamente improbabile ma è successo e quindi bisogna semplicemente prenderne atto.
L'equivoco in cui molto sono caduti consiste nel trascurare il fatto che le 178 estrazioni sono già avvenute (e come abbiamo visto hanno dato risultati che a priori erano poco probabili).

Come abbiamo già detto più volte, eventi rari possono accadere proprio perché non sono impossibili.
Non avendo motivo per mettere in discussione la regolarità delle estrazioni, possiamo soltanto prendere atto di questo fatto, il quale non può influenzare l'esito delle estrazioni successive.

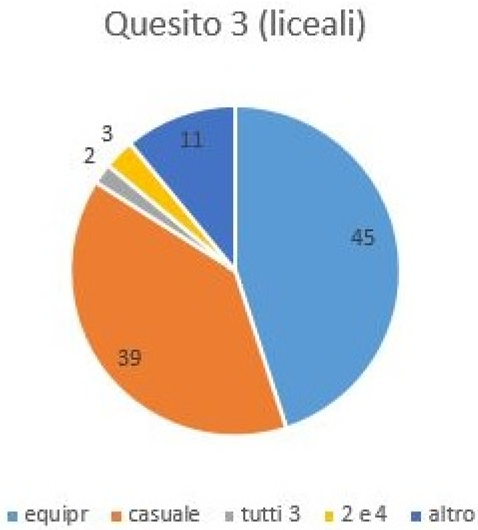
Questo però è un aspetto interessante su cui sarebbe bene soffermarsi maggiormente in quanto, come abbiamo potuto constatare, può non essere del tutto chiara la differenza tra fare previsioni a priori (in cui è lecito utilizzare la legge dei grandi numeri) e prendere atto del fatto che eventi rari siano accaduti.

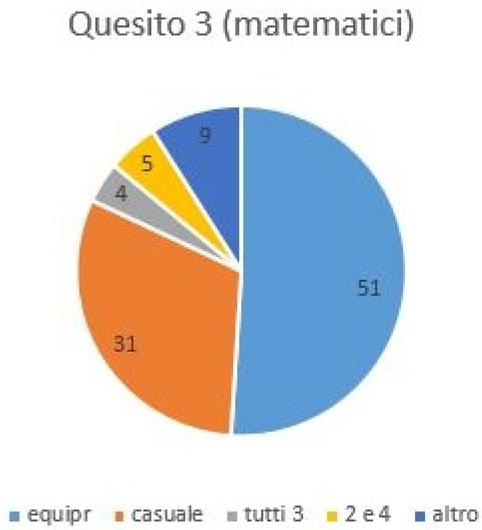
5.3 Quesito 3

Riportiamo il quesito.

Un dado viene lanciato per 10 *volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero* 3*, che i numeri* 2 *e* 4 *si siano sempre alternati (ossia* $2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4$*) o che i risultati siano stati i seguenti* $5, 2, 3, 3, 6, 1, 2, 4, 2, 1$*?*

5.3.1 I risultati





Anche se la risposta giusta ottiene in entrambi i casi la maggioranza (relativa nel caso dei liceali, assoluta anche se di poco tra i matematici), non è per nulla trascurabile il distrattore della *sequenza casuale*.

Anche qui si tratta di capire che ogni lancio di un dado è indipendente. Se vogliamo quello che c'è dietro è lo stesso ragionamento del quesito precedente ma i risultati qui non sono così confortanti. Perché succede questo?

Chiaramente l'errore di affidarsi ai *numeri ritardatari* è ben noto e molti, anche se non hanno compreso bene il concetto di eventi indipendenti, non si lasciano ingannare. Qui la questione è più complicata.

Questo apparente paradosso che una sequenza molto particolare come quella di soli 3 o di 2 e 4 che si alternano abbia la stessa probabilità di una *ben precisa* sequenza casuale non sempre appare evidente.

Innanzitutto è lecito pensare che alcuni abbiamo letto l'ultima sequenza come una *qualunque* sequenza casuale (e non *proprio quella*). Chiaramente ci sono molte più sequenze casuali che una particolare. Di questo ne avevamo parlato in modo abbastanza approfondito quando abbiamo trattato alcuni errori apparsi nei giornali e in televisione.

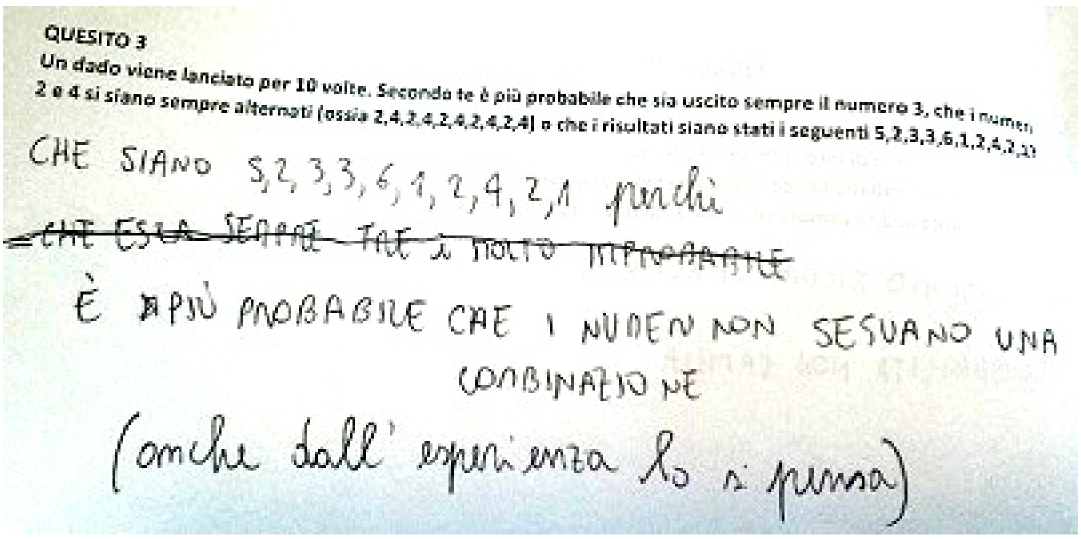
Vi è poi una maggior *disponibilità* a ricordare esperienze di vita in cui una sequenza di lanci di un dado ha fornito un'uscita *'casuale'* di numeri. E questo è ovvio per quanto detto sopra. Questo aspetto ha senza dubbio influenzato le risposte di alcuni studenti tant'è che alcuni commentavano che non succede quasi mai di avere una sequenza regolare.

Entrambi i quesiti (2 e 3) sono molto interessanti da proporre agli studenti prima di iniziare a spiegar loro il concetto di *eventi indipendenti* per vedere cosa sono portati a pensare intuitivamente.

Come detto più volte, nell'insegnamento della probabilità è molto importante partire dalle misconcezioni degli studenti per poter intervenire finché si è in tempo ed evitare che tali errori si sedimentino e diventino difficili da evitare.

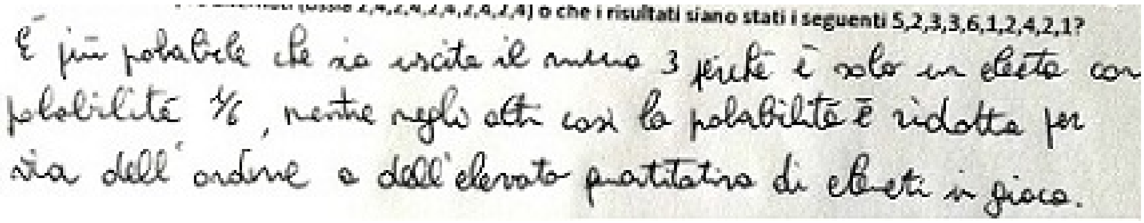
5.3.2 Analisi di alcune risposte

Come ci si poteva aspettare c'è chi punta tranquillamente sulla sequenza casuale. Troviamo ad esempio questa risposta di uno studente L-NO.

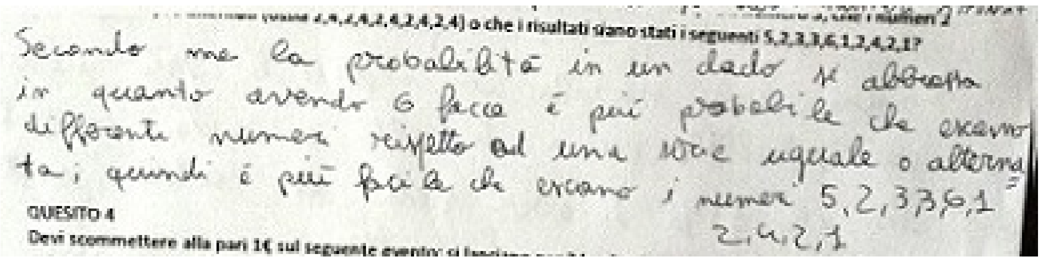

QUESITO 3
Un dado viene lanciato per 10 volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero 3, che i numeri 2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1

CHE SIANO 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1 perchè
~~CHE ESCA SEMPRE TRE È MOLTO IMPROBABILE~~
È PIÙ PROBABILE CHE I NUMERI NON SEGUANO UNA COMBINAZIONE
(anche dall'esperienza lo si pensa)

Anche tra le matricole di matematica non mancano quelli sicuri della loro risposta sbagliata. Ne vediamo qualche esempio.


(ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

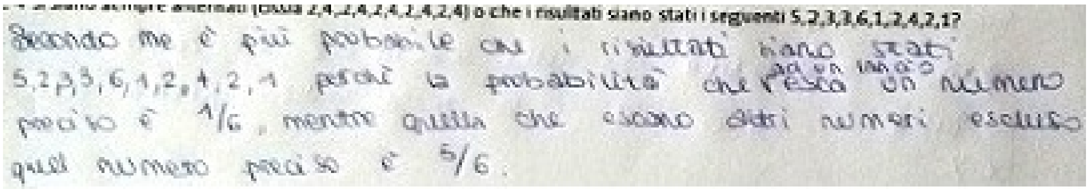
È più probabile che sia uscito il numero 3 perché è solo un evento con probabilità 1/6, mentre negli altri casi la probabilità è ridotta per via dell'ordine e dell'elevato quantitativo di eventi in gioco.


(ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

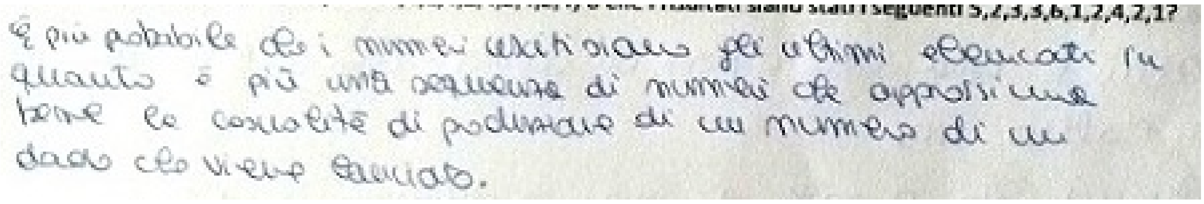
Secondo me la probabilità in un dado si abbassa in quanto avendo 6 facce è più probabile che escano differenti numeri rispetto ad una serie uguale o alternata; quindi è più facile che escano i numeri 5,2,3,3,6,1 2,4,2,1

QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano


siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

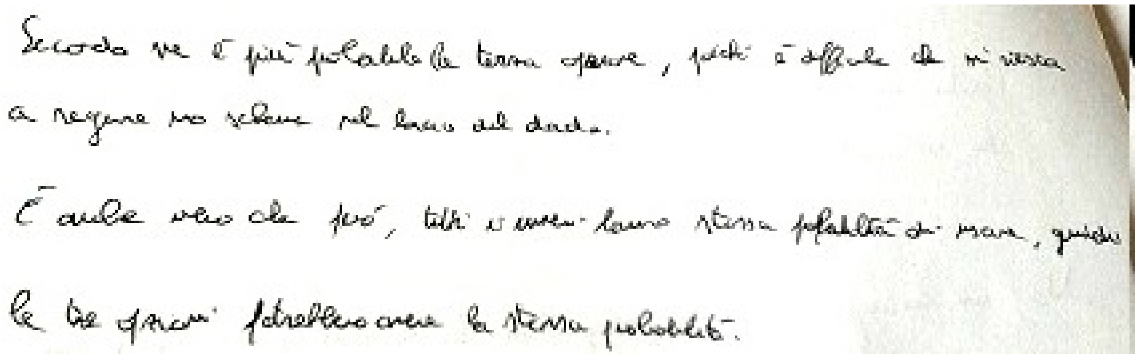
Secondo me è più probabile che i risultati siano stati 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1 perché la probabilità che esca ad un lancio un numero preciso è 1/6, mentre quella che escano altri numeri escluso quel numero preciso è 5/6.



... e che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

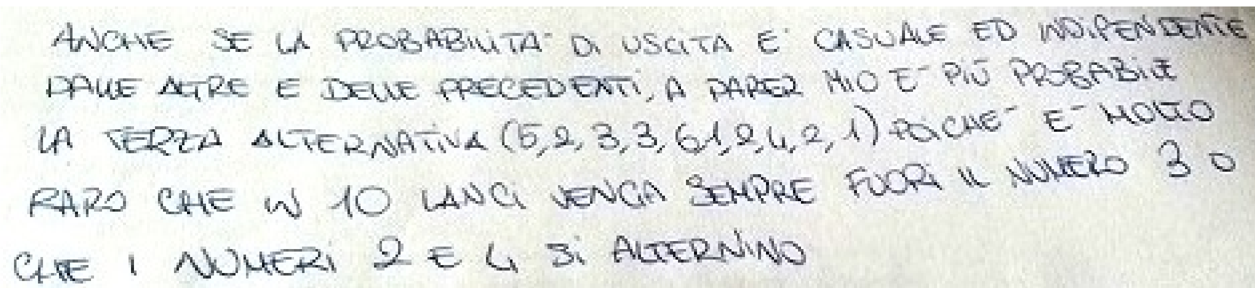
È più probabile che i numeri usciti siano gli ultimi elencati in quanto è più una sequenza di numeri che approssima bene la casualità di produzione di un numero di un dado che viene lanciato.

Passiamo poi alle risposte indecise di questi studenti L-NO.

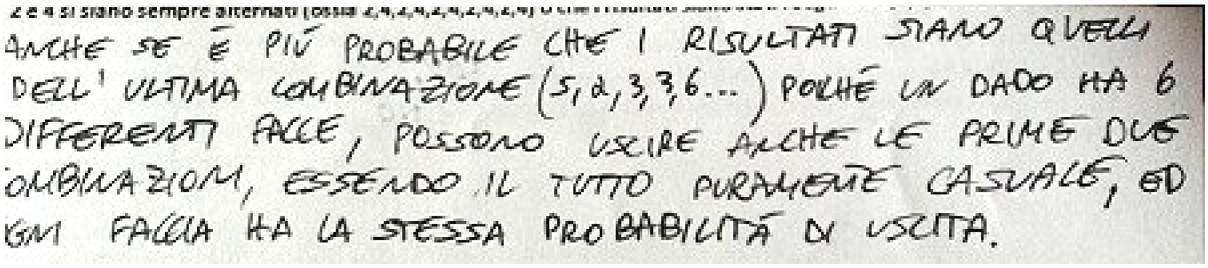


Secondo me è più probabile la terza opzione, perché è difficile che si riesca a seguire uno schema nel lancio del dado.

È anche vero che però, tutti i numeri hanno stessa probabilità di uscire, quindi le tre opzioni potrebbero avere la stessa probabilità.



ANCHE SE LA PROBABILITA' DI USCITA E' CASUALE ED INDIPENDENTE DALLE ALTRE E DALLE PRECEDENTI, A PARER MIO E' PIÙ PROBABILE LA TERZA ALTERNATIVA (5,2,3,3,6,1,2,4,2,1) POICHE' E' MOLTO RARO CHE IN 10 LANCI VENGA SEMPRE FUORI IL NUMERO 3 O CHE I NUMERI 2 E 4 SI ALTERNINO

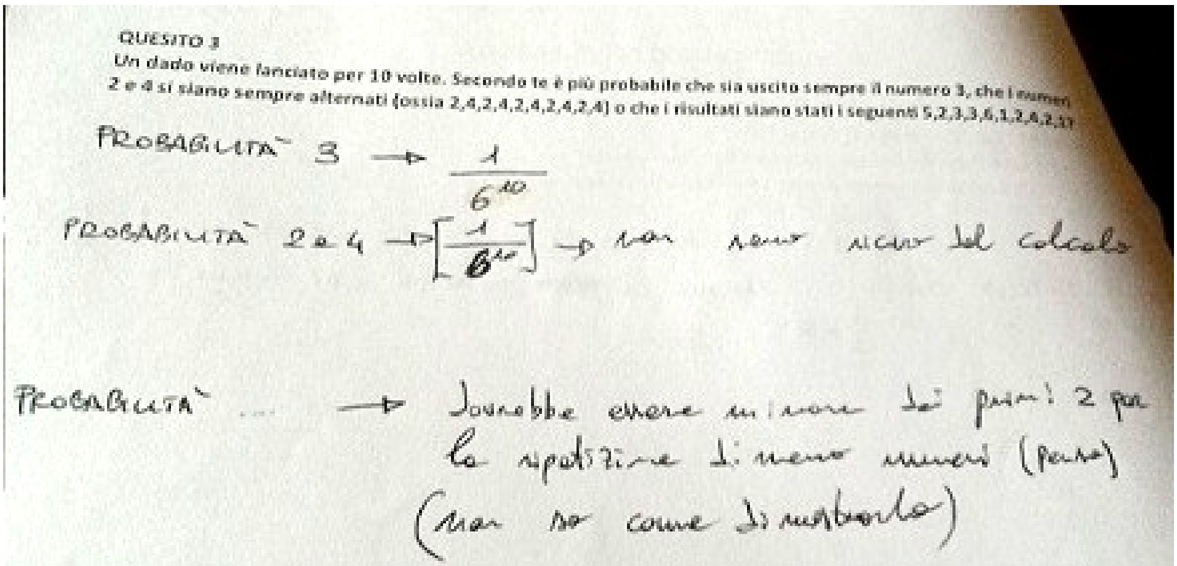


2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti …

ANCHE SE È PIÙ PROBABILE CHE I RISULTATI SIANO QUELLI DELL' ULTIMA COMBINAZIONE (5,2,3,3,6...) POICHÉ UN DADO HA 6 DIFFERENTI FACCE, POSSONO USCIRE ANCHE LE PRIME DUE COMBINAZIONI, ESSENDO IL TUTTO PURAMENTE CASUALE, ED OGNI FACCIA HA LA STESSA PROBABILITÀ DI USCITA.

Dalle risposte di questi 3 studenti si nota che in loro vi è una 'lotta'. Da un lato si rendono conto che ogni lancio deve essere indipendente ma, trascinati dal loro intuito, non riescono ad accettare che la sequenza all'apparenza casuale non sia la più probabile. Immaginiamo che anche la loro esperienza suggerisca loro di puntare sulla sequenza casuale.

Sono in diversi che si preoccupano dell'ordine e delle ripetizioni di numeri ma arrivano a risposte errate. Vediamo qualche esempio.



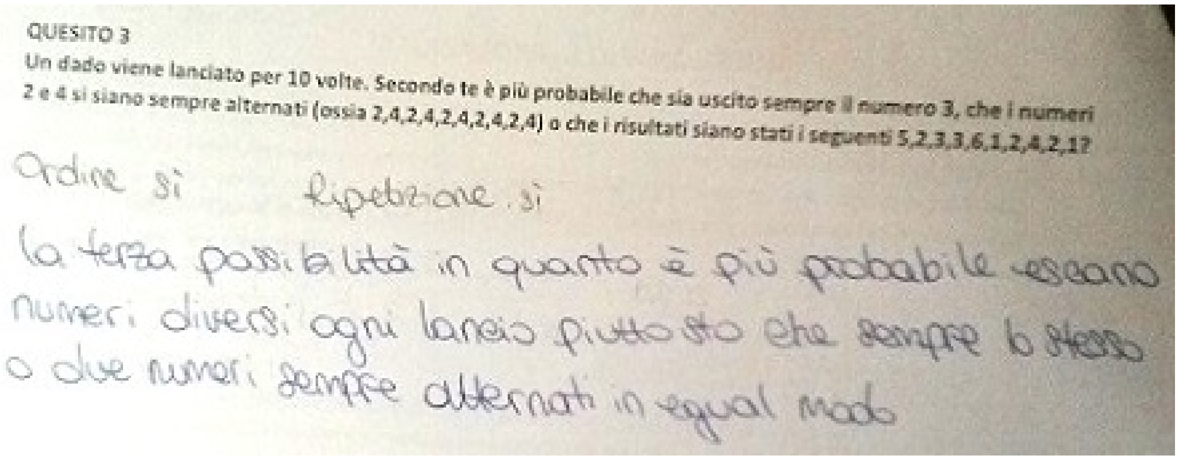
QUESITO 3

Un dado viene lanciato per 10 volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero 3, che i numeri 2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,3?

PROBABILITÀ 3 → $\frac{1}{6^{10}}$

PROBABILITÀ 2 e 4 → $\left[\frac{1}{6^{10}}\right]$ → non sono sicuro del calcolo

PROBABILITÀ ... → dovrebbe essere minore dei primi 2 per la ripetizione di meno numeri (penso) (ma non so come dimostrarlo)

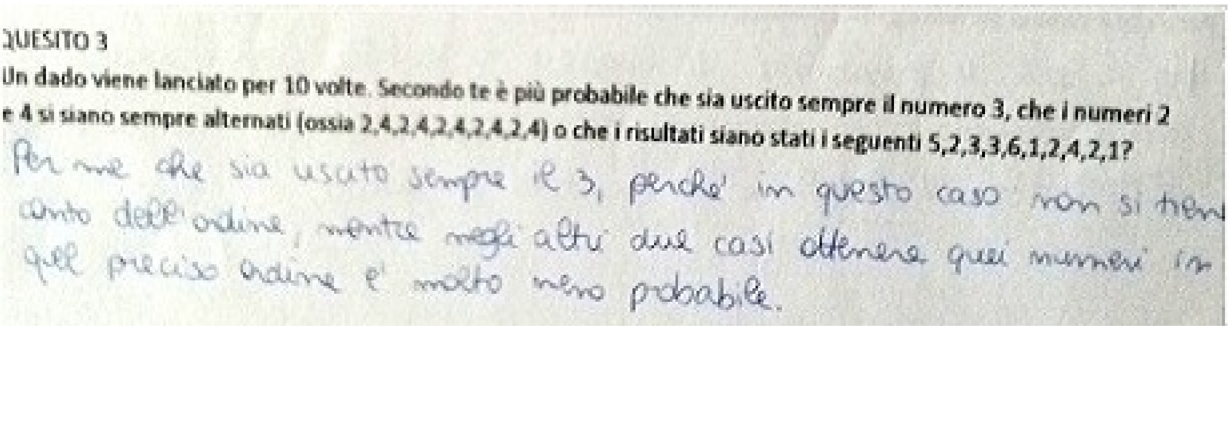


QUESITO 3

Un dado viene lanciato per 10 volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero 3, che i numeri 2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

Ordine si ripetizione si

la terza possibilità in quanto è più probabile escano numeri diversi ogni lancio piuttosto che sempre lo stesso o due numeri sempre alternati in egual modo

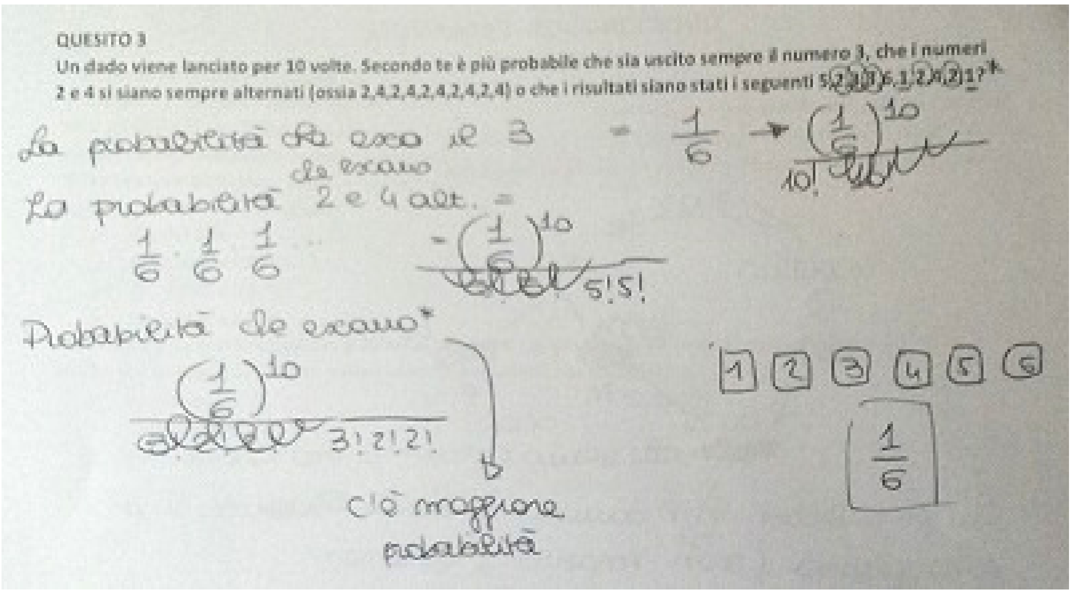


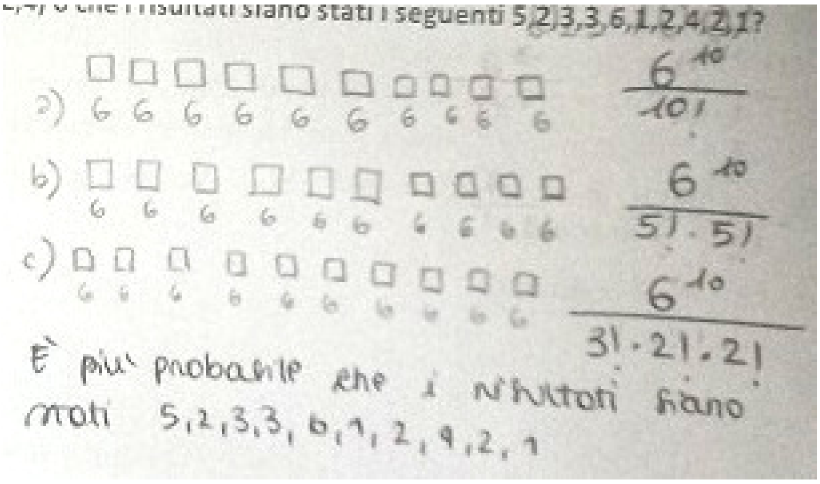
QUESITO 3

Un dado viene lanciato per 10 volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero 3, che i numeri 2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

Per me che sia uscito sempre il 3, perché in questo caso non si tiene conto dell'ordine, mentre negli altri due casi ottenere quei numeri in quel preciso ordine e' molto meno probabile.

Troviamo poi due risposte molto simili da parte di due studentesse della $4°M$.

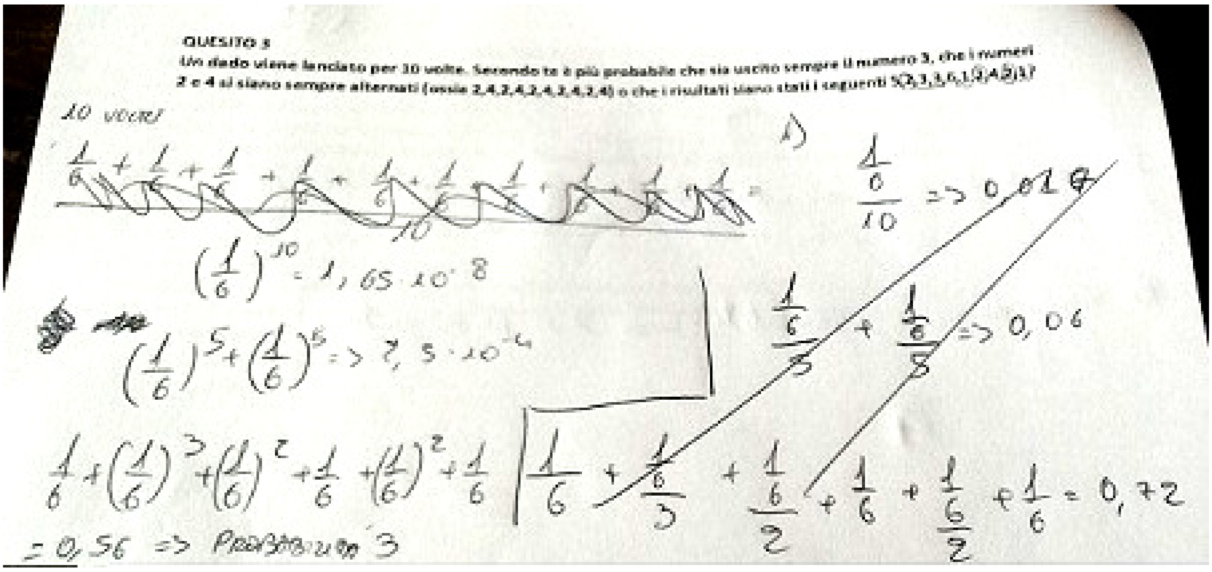




Come si può ben notare avevano appena concluso il capitolo sul calcolo combinatorio e cercano di usare le nozioni che hanno appreso per rispondere alla domanda. Fanno però un po' di confusione.
La prima cerca di calcolare direttamente la probabilità inserendo già la frazione $\frac{1}{6}$ al numeratore mentre la seconda cerca di contare quante possibilità ci sono.

I calcoli non sono comunque corretti in quanto, ad esempio, nessuna delle due si rende conto che una volta scelti i 5 posti in cui avere il numero 2 vengono scelti anche i 5 posti del numero 4. Inoltre, non era richiesto questo in quanto i posti dovevano essere esattamente quelli indicati. Ad ogni modo si tratta di un tentativo ammirevole.

Curioso anche il metodo trovato da questo studente L-NO per risolvere il quesito. Vengono sommate le probabilità e non moltiplicate e viene data importanza alla differenza dei vari numeri.



QUESITO 3

Un dado viene lanciato per 10 volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero 3, che i numeri 2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

10 volte

$\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 1,65 \cdot 10^{-8}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^{5} \Rightarrow 2,5 \cdot 10^{-4}$

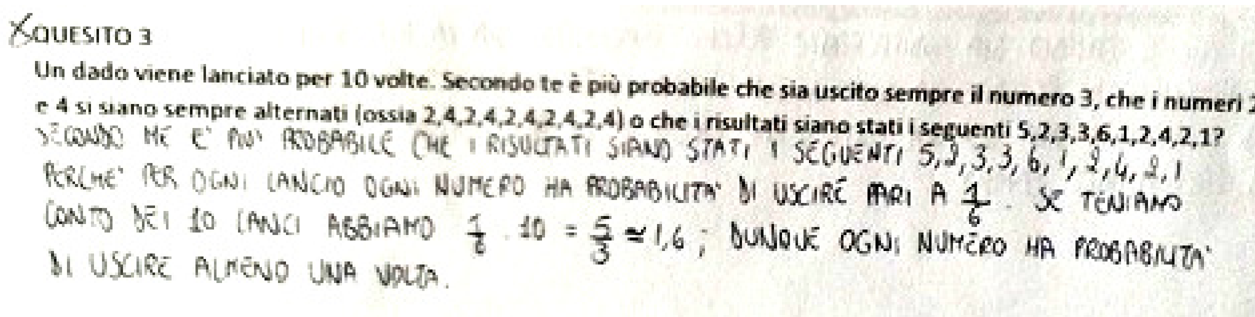
$\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^{2} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^{2} + \frac{1}{6} = 0,56 \Rightarrow$ PROBABILITÀ 3

$\frac{\frac{1}{6}}{10} \Rightarrow 0,017$

$\frac{\frac{1}{6}}{5} + \frac{\frac{1}{6}}{5} \Rightarrow 0,06$

$\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{6}}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{6}}{2} + \frac{1}{6} = 0,72$

Vi è anche il caso di una studentessa MAT che utilizza la speranza matematica in modo inappropriato.



QUESITO 3

Un dado viene lanciato per 10 volte. Secondo te è più probabile che sia uscito sempre il numero 3, che i numeri 2 e 4 si siano sempre alternati (ossia 2,4,2,4,2,4,2,4,2,4) o che i risultati siano stati i seguenti 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1?

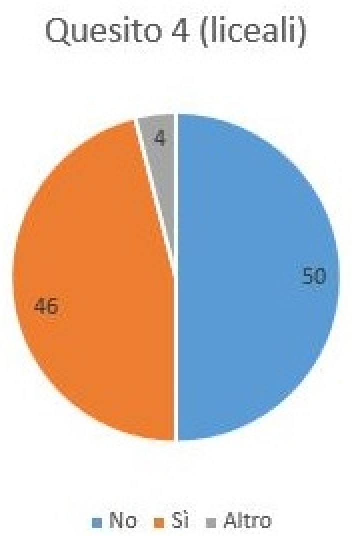
SECONDO ME E' PIU' PROBABILE CHE I RISULTATI SIANO STATI I SEGUENTI 5,2,3,3,6,1,2,4,2,1 PERCHE' PER OGNI LANCIO OGNI NUMERO HA PROBABILITA' DI USCIRE PARI A $\frac{1}{6}$. SE TENIAMO CONTO DEI 10 LANCI ABBIAMO $\frac{1}{6} \cdot 10 = \frac{5}{3} \simeq 1,6$; DUNQUE OGNI NUMERO HA PROBABILITA' DI USCIRE ALMENO UNA VOLTA.

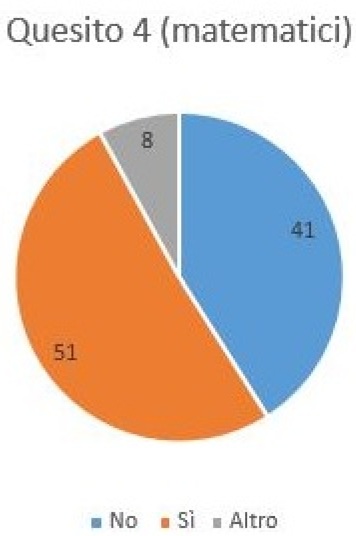
5.4 Quesito 4

Riportiamo il quesito.

Devi scommettere alla pari 1 *sul seguente evento: si lanciano per* 24 *volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il 'doppio* 6*'. Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?*

5.4.1 I risultati



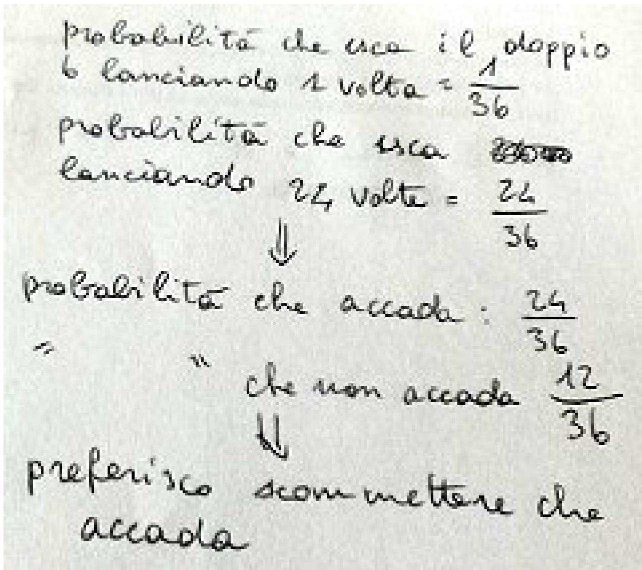


Notiamo qui la prima *vittoria dei liceali* anche se poco significativa in quanto vi sono solo 8 risposte corrette anche dal punto di vista del ragionamento da parte dei liceali (tutti tra quelli che hanno affrontato probabilità). Per quanto riguarda questo quesito, infatti, i risultati sono poco interessanti mentre c'è davvero tanto da dire per quanto riguarda le strategie risolutive degli studenti.
I risultati non sono tanto significativi, soprattutto per quanto riguarda i matematici, in quanto molti non hanno specificato il perché delle loro scelte ed è molto probabile che abbiano risposto senza pensarci troppo.
Abbondano comunque, soprattutto tra i liceali che non hanno affrontato ancora la probabilità, strategie risolutive interessanti (anche se sbagliate!).
Tutto ciò verrà analizzato nel paragrafo successivo.

5.4.2 Analisi di alcune risposte

In questo quesito le strategie risolutive sbagliate sono delle più disparate, soprattutto tra studenti che non hanno mai fatto probabilità.

L'errore più comune (che si è visto in tutte le classi e anche tra le matricole di matematica) è stato quello di moltiplicare il numero di lanci (24) per la probabilità di ottenere il 'doppio 6' lanciando due dadi ($\frac{1}{36}$). Il risultato che si ottiene è $\frac{2}{3}$ che porta a concludere che sia meglio puntare sull'uscita del 'doppio 6'.
Ne riportiamo un esempio

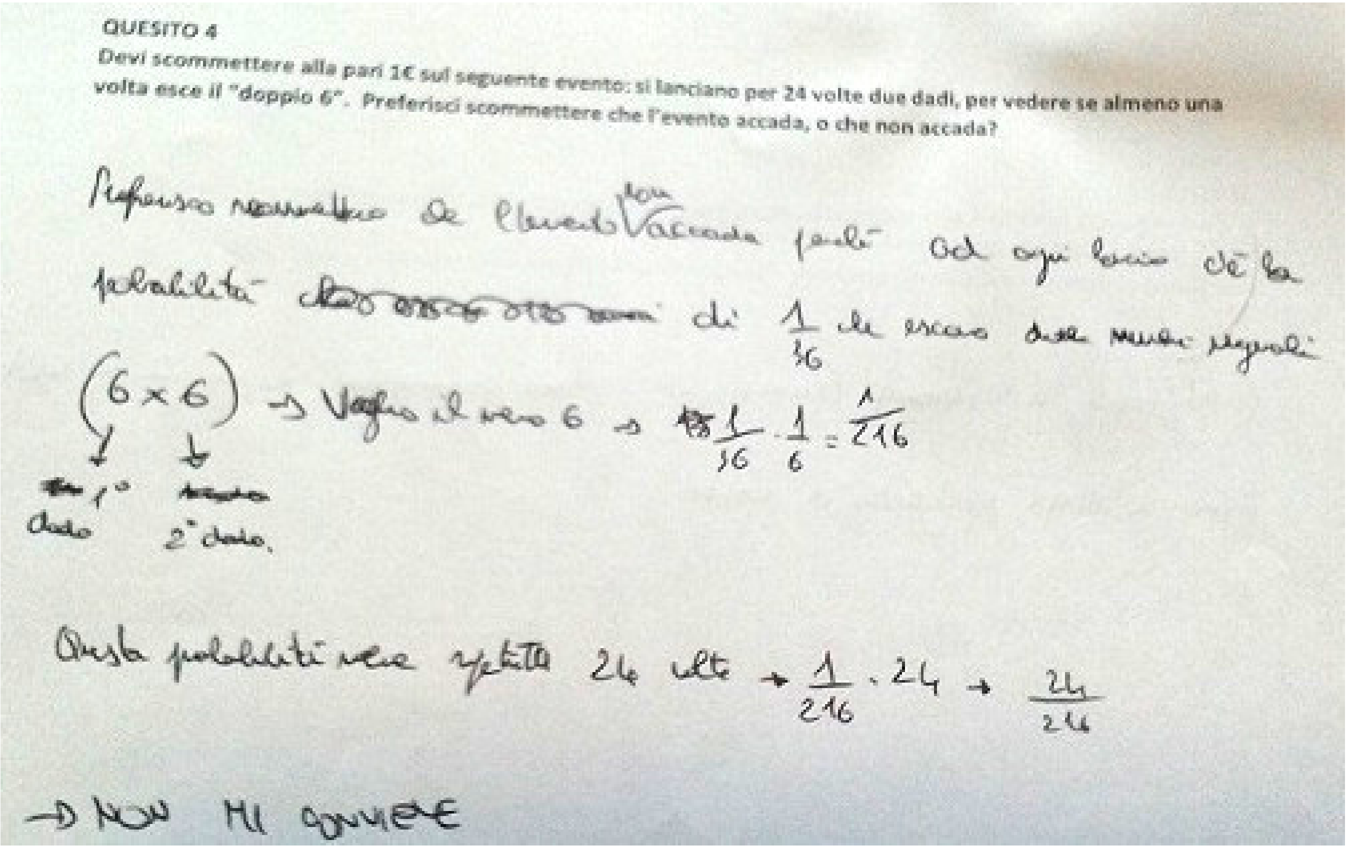


Vi sono poi i casi di chi valuta in modo sbagliato la probabilità dell'uscita del 'doppio 6' dal lancio di due dadi ma procede nello stesso modo.

Troviamo ad esempio questo studente L-NO che nomina il 'vero 6' (che non si capisce cosa sia) e ritiene quindi che la probabilità di ottenere il 'doppio 6' sia di $\frac{1}{216}$.

Siamo indotti a pensare che questo studente abbia fatto un ragionamento simile a questo: *c'è probabilità* $\frac{1}{36}$ *che escano due numeri uguali ma poiché voglio proprio che esca il 'doppio* 6*' devo moltiplicare ancora per* $\frac{1}{6}$.

Ovviamente il suo ragionamento è completamente sbagliato.



QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

Preferisco scommettere che l'evento non accada perché ad ogni lancio c'è la probabilità ~~che esca ...~~ di $\frac{1}{36}$ che escano due numeri uguali

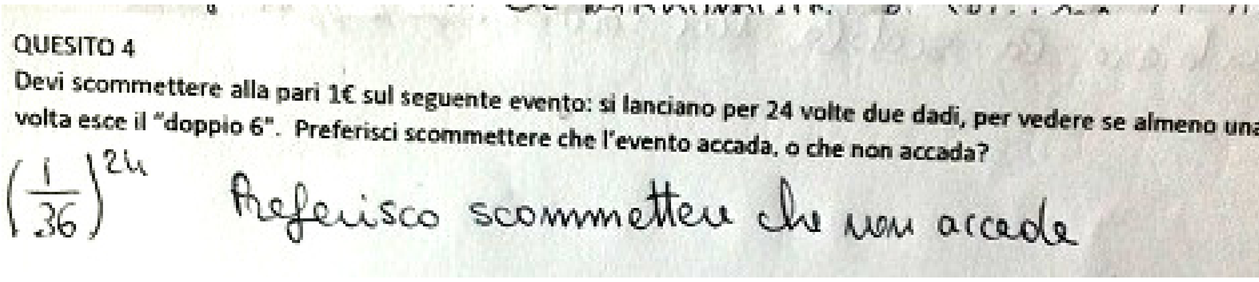
(6×6) → Voglio il terzo 6 → $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

1° dado 2° dado.

Questa probabilità viene ripetuta 24 volte → $\frac{1}{216} \cdot 24$ → $\frac{24}{216}$

→ NON MI CONVIENE

Sono poi in diversi, soprattutto tra chi ha una certa conoscenza della matematica (e quindi studenti con una preparazione in probabilità e matricole di matematica), che non passano all'evento complementare per risolvere il quesito ma calcolano in realtà la probabilità che 'doppio 6' esca esattamente 24 volte e concludono ovviamente che è sconveniente.
Vediamo, a titolo di esempio, la risposta di questo matematico

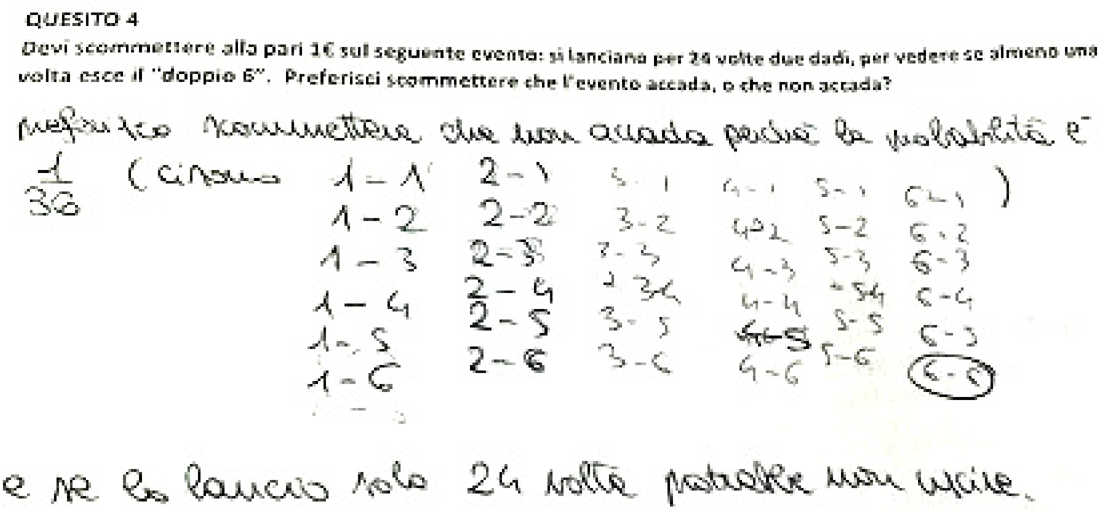


QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

$\left(\frac{1}{36}\right)^{24}$ Preferisco scommettere che non accada

Vi sono poi quelli che calcolano la probabilità di uscita del 'doppio 6' (talvolta sbagliando) e valutano il fatto che si facciano 24 lanci come conveniente (o meno) ritenendoli abbastanza (o troppo pochi) per vedere l'uscita del 'doppio 6'.
Troviamo ad esempio questi 3 studenti L-NO



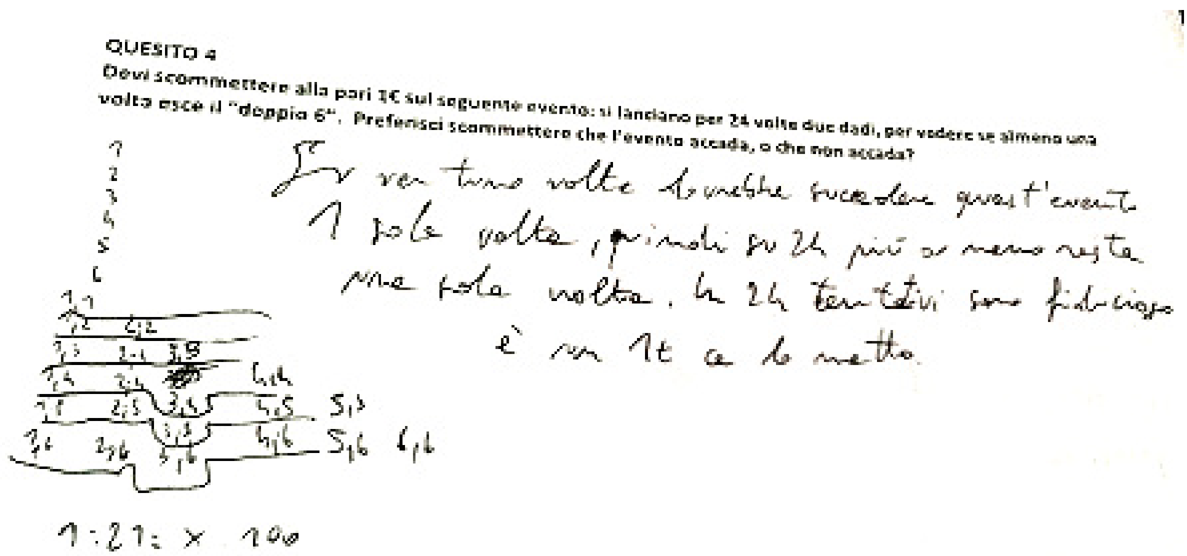
QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

preferisco scommettere che non accada perché la probabilità è $\frac{1}{36}$ (circa

1 – 1	2 – 1	3 - 1	4 - 1	5 - 1	6 - 1)
1 – 2	2 – 2	3 - 2	4 - 2	5 - 2	6 - 2
1 – 3	2 – 3	3 - 3	4 - 3	5 - 3	6 - 3
1 – 4	2 – 4	3 - 4	4 - 4	5 - 4	6 - 4
1 – 5	2 – 5	3 - 5	4 - 5	5 - 5	6 - 5
1 – 6	2 – 6	3 - 6	4 - 6	5 - 6	6 - 6

e se lo lancio solo 24 volte potrebbe non uscire.

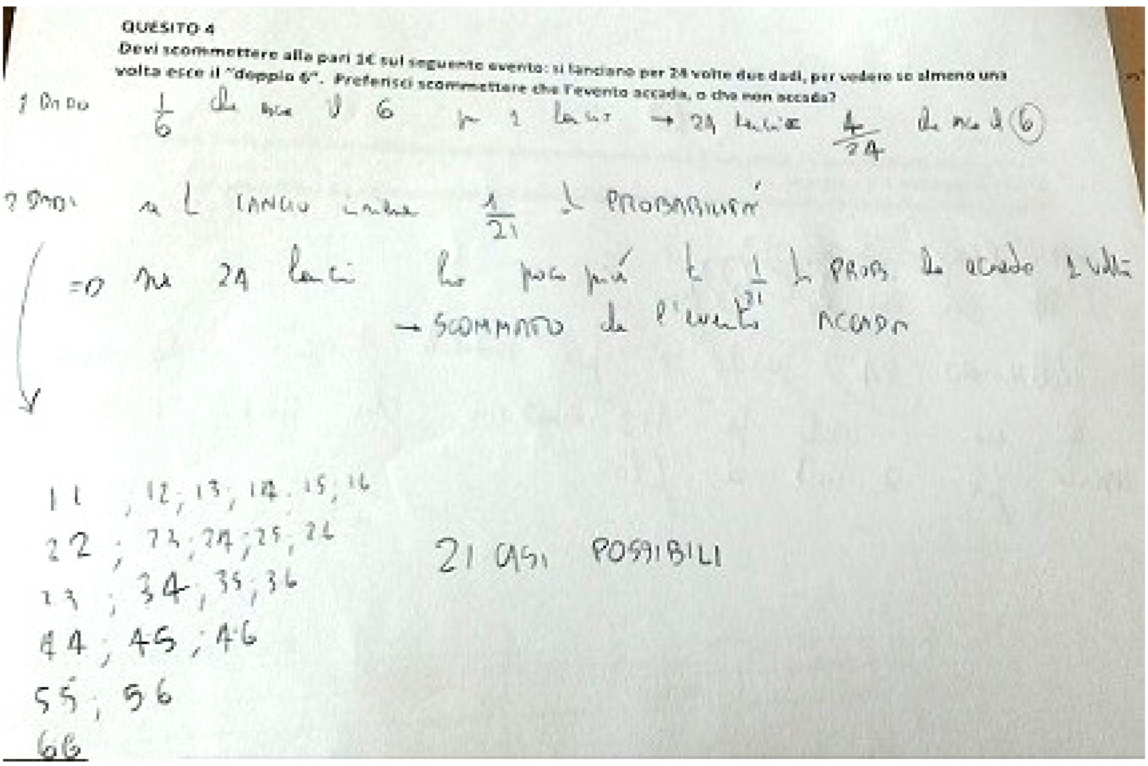


QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

Su ventuno volte dovrebbe succedere quest'evento 1 sola volta, quindi su 24 più o meno resta una sola volta. In 24 tentativi sono fiduciosa è un 1€ e lo metto.

1:21 = x : 100



QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

1 dado $\frac{1}{6}$ che esce il 6 in 1 lancio → 24 lanci $\frac{4}{24}$ che esca il 6

2 dadi a lancio c'è $\frac{1}{21}$ di probabilità

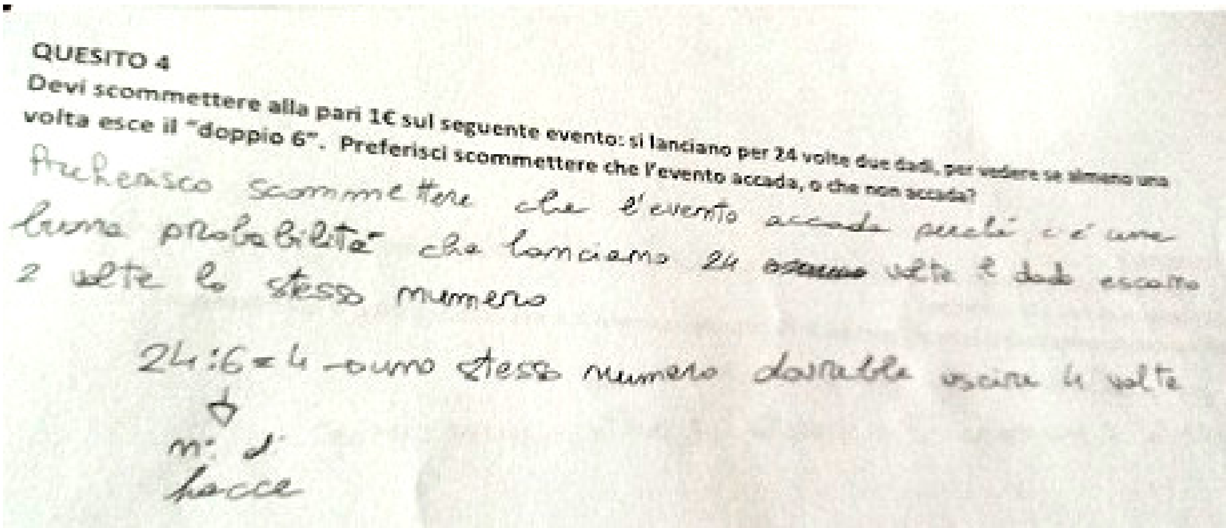
⇒ su 24 lanci ho poco più di $\frac{1}{21}$ di prob. che accada 1 volta

→ scommetto che l'evento accada

11; 12; 13; 14; 15; 16
22; 23; 24; 25; 26
33; 34; 35; 36
44; 45; 46
55; 56
66

21 casi possibili

Un po' fuori dagli schemi è anche la risposta di questa studentessa L-NO che ritiene che essendoci 24 lanci e avendo un dado 6 facce, l'evento 'doppio 6' accada 4 volte (ossia il rapporto tra il numero di lanci e le facce del dado).

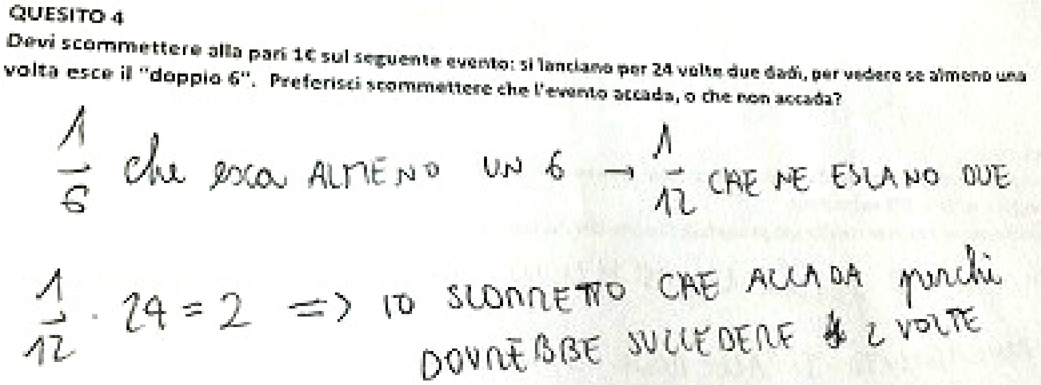

QUESITO 4
Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

Preferisco scommettere che l'evento accada perché c'è una buona probabilità che lanciamo 24 volte i dadi escano 2 volte lo stesso numero

$24:6=4$ → uno stesso numero dovrebbe uscire 4 volte

n° di facce

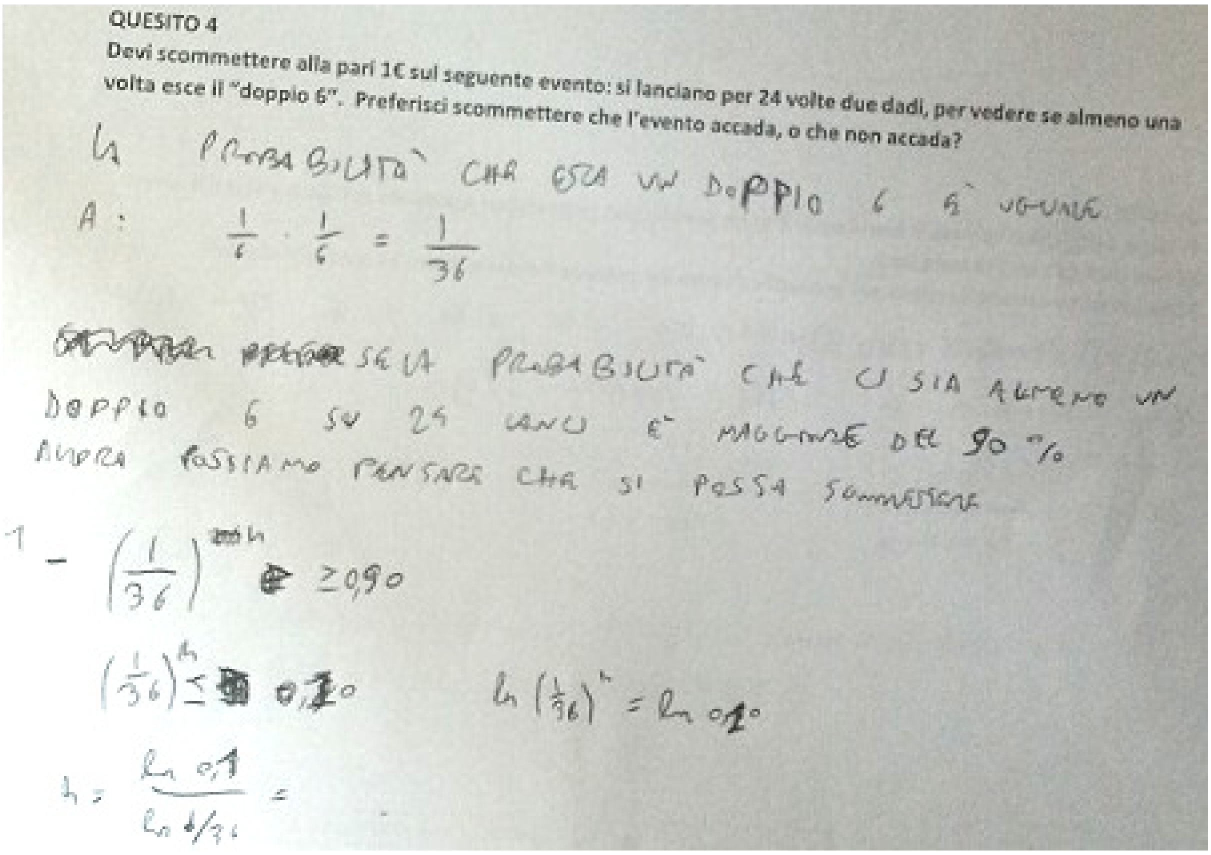
Vi è poi un suo compagno di classe convinto che l'evento debba accadere due volte perché ci sono 24 lanci e ritiene che la probabilità del 'doppio 6' sia di $\frac{1}{12}$.


QUESITO 4
Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

$\frac{1}{6}$ che esca ALMENO UN 6 → $\frac{1}{12}$ CHE NE ESCANO DUE

$\frac{1}{12} \cdot 24 = 2$ ⇒ IO SCOMMETTO CHE ACCADA perché DOVREBBE SUCCEDERE 2 VOLTE

Curioso il fatto che questo studente L-SI imposti correttamente la soluzione del problema senza però rendersi conto che non deve trovare il più piccolo numero n di lanci che renda favorevole il puntare sul 'doppio 6'.
Questa sarebbe stata una domanda più difficile e infatti lui non si ricorda bene come andare avanti perché forse non ha ben chiaro come procedere con i logaritmi.
Fa comunque piacere vedere che ha avuto l'intuizione giusta.



QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

LA PROBABILITÀ CHE ESCA UN DOPPIO 6 È UGUALE

A: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

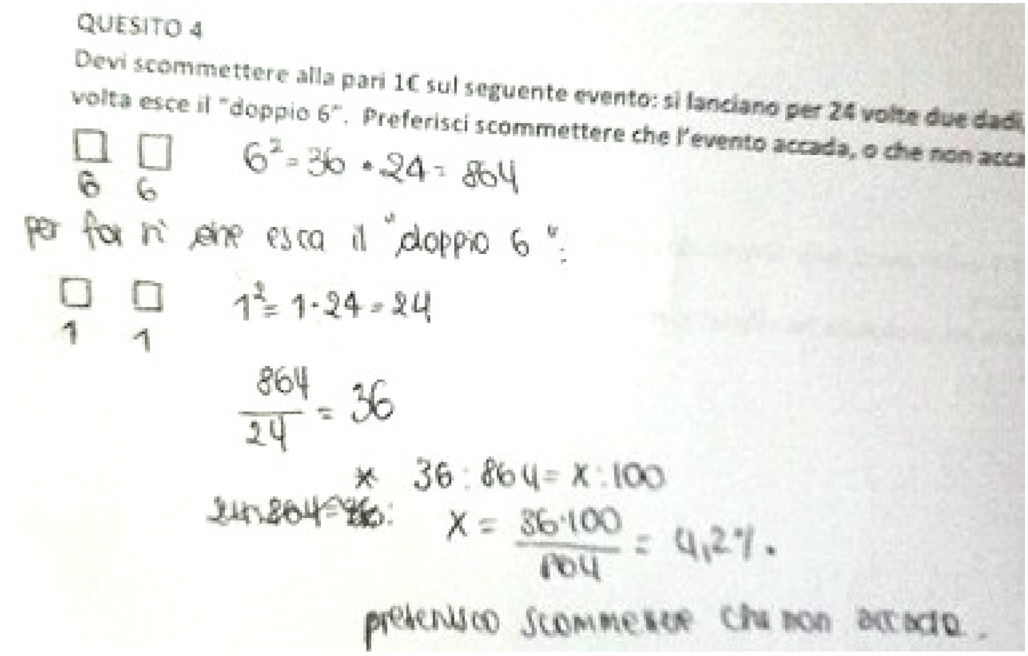
SE LA PROBABILITÀ CHE CI SIA ALMENO UN DOPPIO 6 SU 24 LANCI È MAGGIORE DEL 90 % ALLORA POSSIAMO PENSARE CHE SI POSSA SCOMMETTERE

$1 - \left(\frac{1}{36}\right)^{n} \geq 0{,}90$

$\left(\frac{1}{36}\right)^{n} \leq 0{,}10$ $\quad \ln\left(\frac{1}{36}\right)^{n} = \ln 0{,}10$

$n = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 1/36} =$

Sono poi in diversi quelli che cercano di usare il calcolo combinatorio il più delle volte a sproposito. Si tratta di uno studente della $4°M$ (che aveva da pochissimo finito l'argomento) e di una studentessa MAT.



QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, [...] volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non acca[...]

□ □ $6^2 = 36 \cdot 24 = 864$

6 6

per far sì che esca il "doppio 6":

□ □ $1^2 = 1 \cdot 24 = 24$

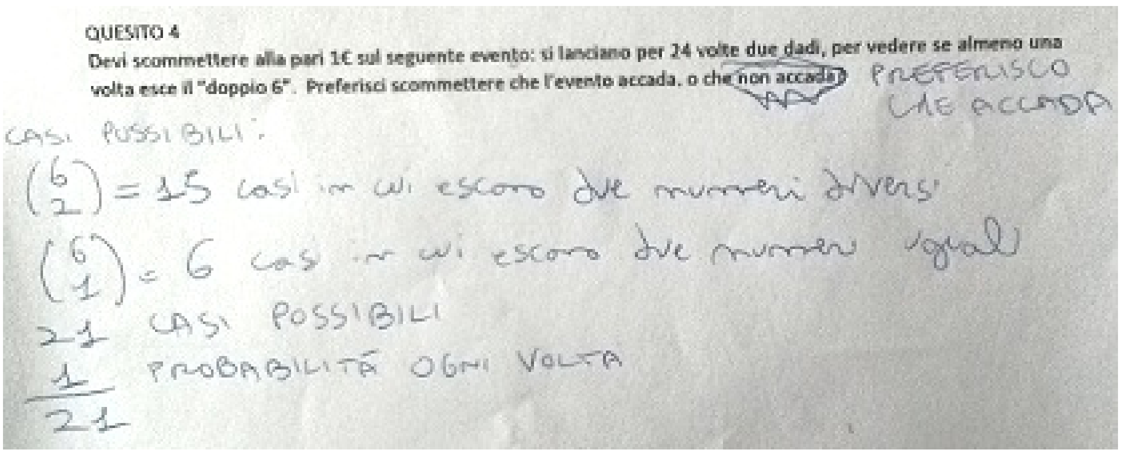
1 1

$\frac{864}{24} = 36$

$x \quad 36 : 864 = x : 100$

~~24:864=36~~: $x = \frac{36 \cdot 100}{864} = 4{,}2\%$.

preferisco scommettere che non accada.



QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada? PREFERISCO CHE ACCADA

CASI POSSIBILI:

$\binom{6}{2} = 15$ casi in cui escono due numeri diversi

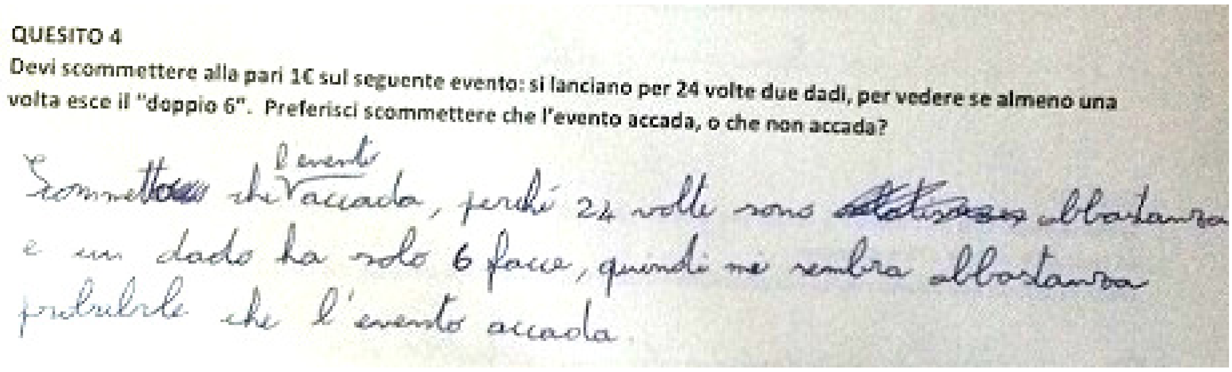
$\binom{6}{1} = 6$ casi in cui escono due numeri uguali

21 CASI POSSIBILI

$\frac{1}{21}$ PROBABILITÀ OGNI VOLTA

Non manca poi chi fornisce risposte puramente qualitative.

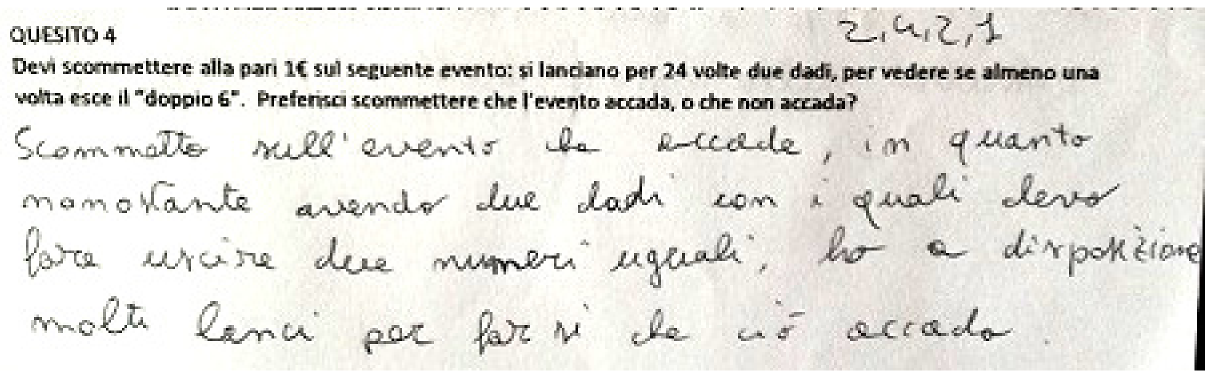
Si tratta di uno studente di $4°M$ e di una matricola di matematica che ritengono che 24 lanci siano un numero sufficientemente alto per vedere con probabilità superiore al 50% l'uscita del 'doppio 6'.



QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

Scommetto l'evento che accada, perché 24 volte sono abbastanza e un dado ha solo 6 facce, quindi mi sembra abbastanza probabile che l'evento accada.



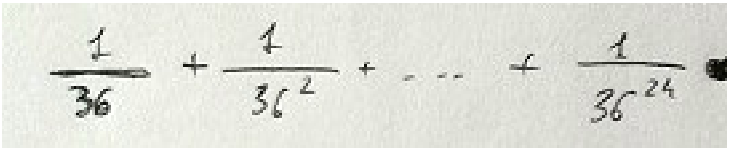
2,4,2,1

QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

Scommetto sull'evento che accade, in quanto nonostante avendo due dadi con i quali devo fare uscire due numeri uguali, ho a disposizione molti lanci per far sì che ciò accada.

Stravagante la risposte di questa studentessa MAT che utilizza una successione geometrica (senza il primo termine).

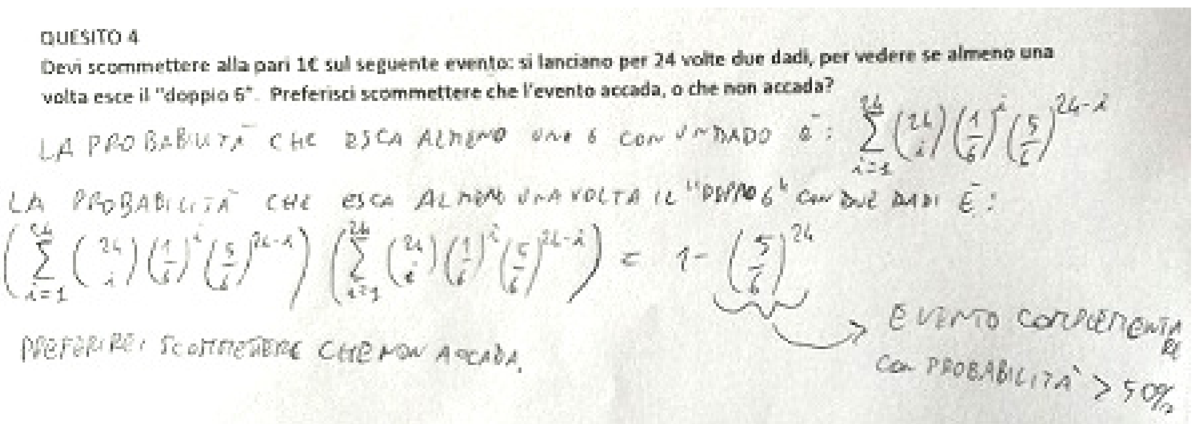


$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36^2} + \dots + \frac{1}{36^{24}}$$

Bisogna precisare che ci sono stati tantissimi altri modi di procedere che però abbiamo ritenuto di poca rilevanza.

Non sono stati pochi quelli che non hanno considerato i 24 lanci e hanno risposto che non conveniva scommettere sull'uscita del 'doppio 6' perché hanno calcolato una probabilità di $\frac{1}{36}$.

Infine ci sembra giusto riportare la risposta di questo brillante studente di matematica che non passa all'evento complementare e utilizza anche un buon formalismo.



QUESITO 4

Devi scommettere alla pari 1€ sul seguente evento: si lanciano per 24 volte due dadi, per vedere se almeno una volta esce il "doppio 6". Preferisci scommettere che l'evento accada, o che non accada?

LA PROBABILITÀ CHE ESCA ALMENO UN 6 CON UN DADO È: $\sum_{i=1}^{24} \binom{24}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{24-i}$

LA PROBABILITÀ CHE ESCA ALMENO UNA VOLTA IL "DOPPIO 6" CON DUE DADI È:

$$\left(\sum_{i=1}^{24} \binom{24}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{24-i}\right) \left(\sum_{i=1}^{24} \binom{24}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{24-i}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{24}$$

EVENTO COMPLEMENTARE CON PROBABILITÀ > 50%

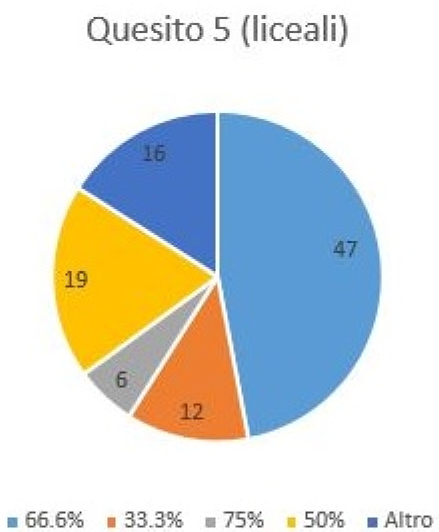
PREFERIREI SCOMMETTERE CHE NON ACCADA.

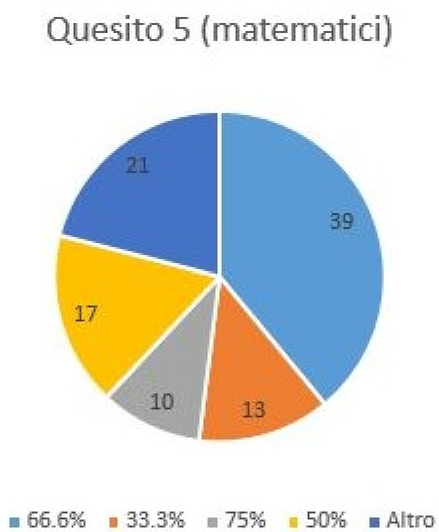
5.5 Quesito 5

Riportiamo il quesito.

Nella scatola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola C ho 2 monete d'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro. Qual è la probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

5.5.1 I risultati





Anche qui vanno meglio i liceali ma questa volta i risultati sono davvero interessanti.
La risposta giusta ottiene in entrambi i casi la maggioranza relativa e le risposte sono delle più varie (in altro vi sono risposte mancate, discorsi lasciati a metà o frazioni senza un particolare significato in quanto saltano fuori per lo più da errori di calcolo in chi ha applicato correttamente o meno la definizione di probabilità condizionata o il teorema di Bayes).
Non vi è qui un *distrattore* particolarmente dominante ma ve ne sono 3 tutti degni di essere menzionati.
La percentuale del 50% (che molti hanno scritto come frazione $\frac{1}{2}$ è stata la risposta sbagliata più gettonata sia dai liceali sia dai matematici. Ma non sono stati pochi quelli che hanno risposto $\frac{3}{4}$ (o equivalentemente 75%) o $\frac{1}{3}$ (o in modo equivalente $33.\overline{3}\%$).

Come possiamo interpretare i ragionamenti di coloro che hanno dato risposte errate?

- Ho tre scatole, la probabilità che venga scelta la A è dunque $\frac{1}{3}$. Questo è vero in partenza ossia se non considero il fatto che mi viene detto che è stata estratta una moneta d'oro. Chi ha risposto $\frac{1}{3}$ non ha quindi ritenuto rilevante l'essere a conoscenza dell'estrazione di una moneta d'oro;

- Ho tre scatole e viene estratta una moneta d'oro e quindi l'estrazione non può essere avvenuta dalla scatola C in quanto lì non vi sono monete d'oro. Rimangono quindi le scatole A e B e, ritenendo equiprobabili l'estrarre da una o dall'altra scatola, rispondo $\frac{1}{2}$;

- Ho tre scatole e viene estratta una moneta d'oro e quindi l'estrazione non può essere avvenuta dalla scatola C in quanto lì non vi sono monete d'oro. Rimangono quindi le scatole A e B. In tutto hanno 4 monete e 3 sono d'oro e quindi rispondo $\frac{3}{4}$.

Si nota che il ragionamento che sta dietro al dare come risposta $\frac{3}{4}$ non ha molto senso in quanto non veniva chiesta la probabilità di estrarre una moneta d'oro (sarebbe stato comunque sbagliato ma avrebbe avuto un senso). Eppure non sono pochissimi quelli che l'hanno scelta.
Il ragionamento che sta dietro la risposta $\frac{1}{2}$ è più fine rispetto a quello che sta dietro alla risposta $\frac{1}{3}$ in quanto tiene conto del fatto che la scatola C non può essere stata scelta ed è per questo che è stato il *distrattore* principale.
Bisogna precisare, però, che la risposta corretta $\frac{2}{3}$ (o equivalentemente $66.\overline{6}\%$) si può ottenere in due modi:

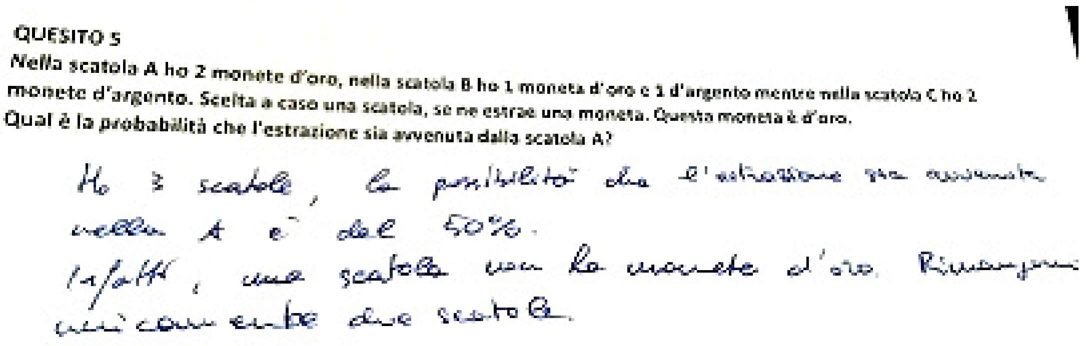
- nel modo formalmente corretto utilizzando la definizione di probabilità condizionata;

- considerando che ci sono in tutto nelle tre scatole 3 monete d'oro di cui 2 sono in A.

Non è un caso questo in quanto la domanda è stata pensata proprio per mantenere questa ambiguità. Non è dato sapere se alcuni che hanno risposto bene (specialmente i matematici) l'hanno fatto seguendo la strada corretta o quella sbagliata ma si possono trovare esempi di risposte corrette seguendo ragionamenti corretti e risposte corrette seguendo ragionamenti sbagliati.
Questo si vedrà meglio nel paragrafo successivo.

5.5.2 Analisi di alcune risposte

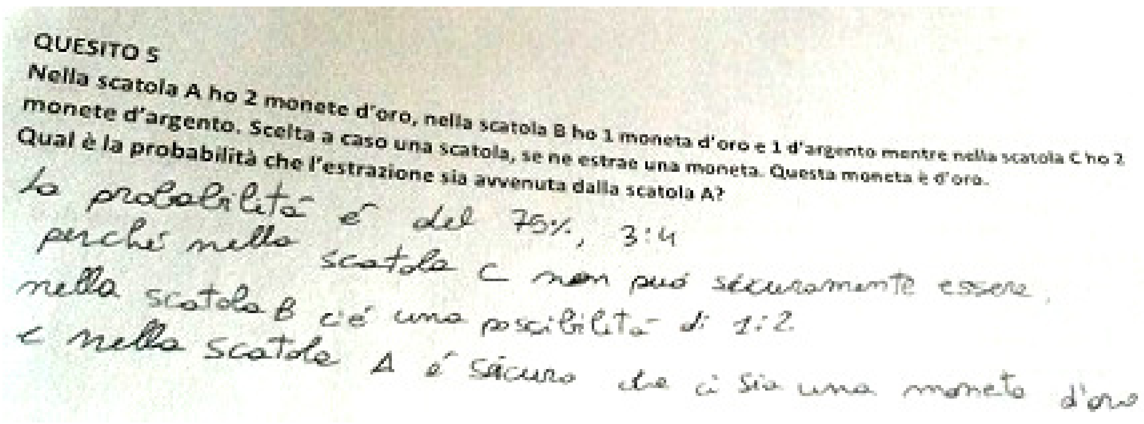
I primi casi che riportiamo sono quelli di due ragazzi L-NO che spiegano la motivazione delle loro risposte $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Le motivazioni che li hanno portati a fornire queste risposte sono proprio quelle di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente.



QUESITO 5

Nella scatola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola C ho 2 monete d'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro.
Qual è la *probabilità* che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

Ho 3 scatole, la possibilità che l'estrazione sia avvenuta nella A è del 50%.
Infatti, una scatola non ha monete d'oro. Rimangono quindi [illegible] due scatole.

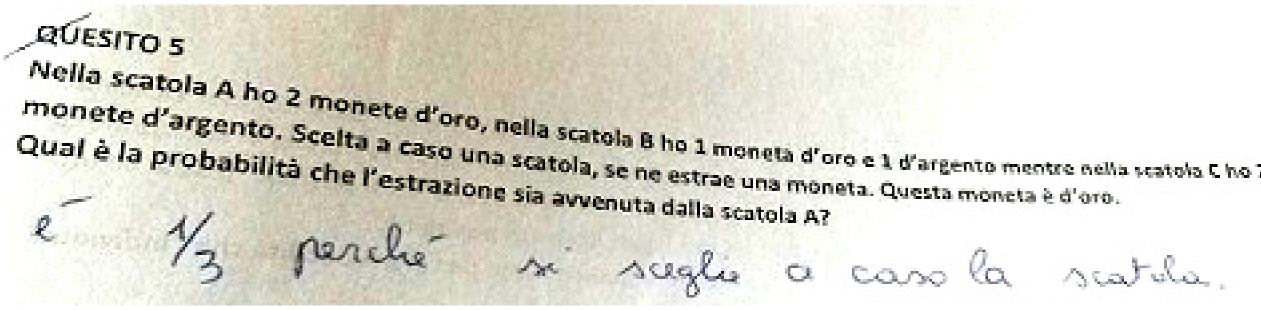


QUESITO 5

Nella scatola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola C ho 2 monete d'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro.
***Qual* è la probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?**

la probabilità è del 75%, 3:4
perché nella scatola C non può sicuramente essere,
nella scatola B c'è una possibilità di 1:2
e nella scatola A è sicuro che ci sia una moneta d'oro

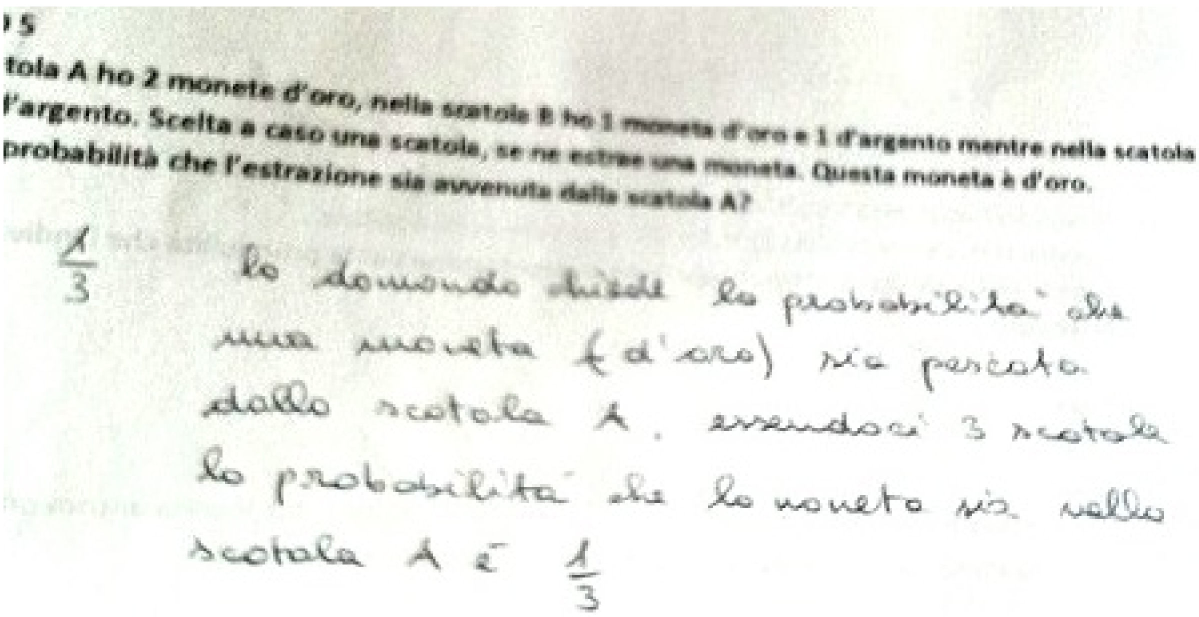
Da altri due ragazzi L-NO provengono i due esempi che seguono in cui spiegano (il primo in modo rapido, il secondo in modo più dettagliato) il perché hanno scelto come risposta $\frac{1}{3}$. Anche qui la motivazione è quella di cui avevamo già parlato.



QUESITO 5

Nella scatola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola C ho
monete d'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro.
Qual è la probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

è $1/3$ perché si sceglie a caso la scatola.

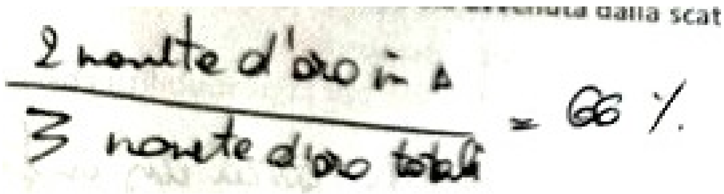


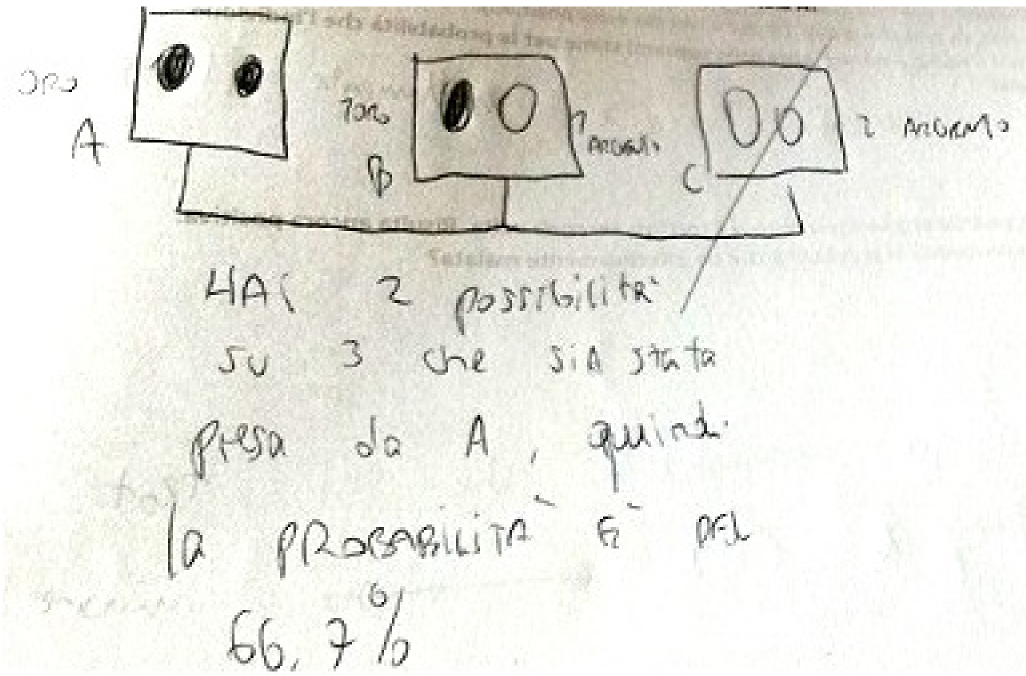
5

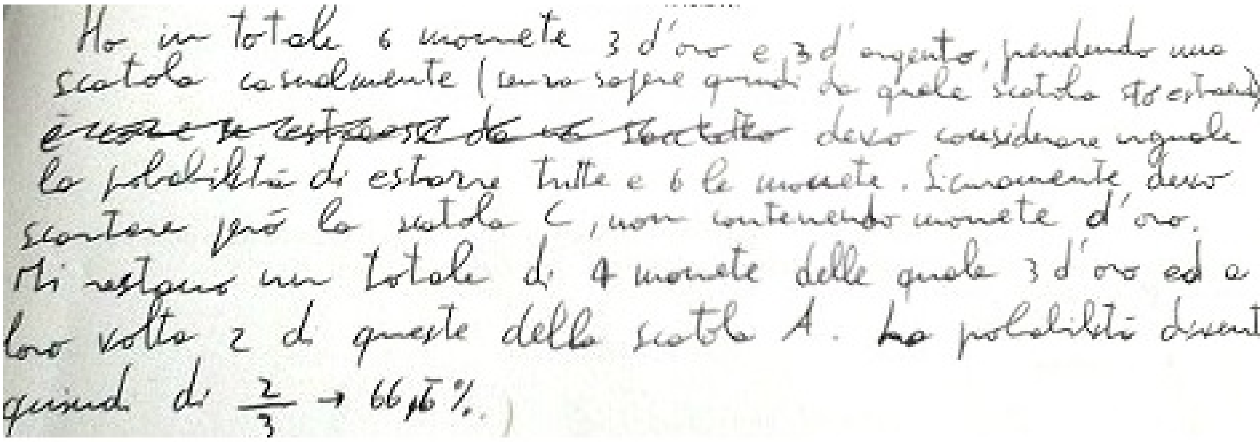
tola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola
l'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro.
probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

$\frac{1}{3}$ la domanda chiede la probabilità che una moneta (d'oro) sia pescata dalla scatola A. essendoci 3 scatole la probabilità che la moneta sia nella scatola A è $\frac{1}{3}$

Veniamo ora a chi ha risposto $\frac{2}{3}$ fornendo una motivazione sbagliata (non utilizzando la probabilità condizionata).






Ho in totale 6 monete 3 d'oro e 3 d'argento, prendendo una scatola casualmente (senza sapere quindi da quale scatola sto estraendo) ~~ovvero se estraessi da una scatola~~ devo considerare uguale la probabilità di estrarre tutte e 6 le monete. Sicuramente devo scartare però la scatola C, non contenendo monete d'oro. Mi restano un totale di 4 monete delle quale 3 d'oro ed a loro volta 2 di queste della scatola A. La probabilità diventa quindi di $\frac{2}{3} \to 66,\overline{6}\%$.)

Interessante notare che nel primo caso non vengono spese parole, vi è una grande sintesi in quanto allo studente pare ovvio usare quella formula.

Nel secondo caso, lo studente si aiuta con una rappresentazione grafica (che, a parer mio, è sempre utile nella risoluzione di problemi probabilistici). Non usa una rappresentazione ad albero perché probabilmente non l'ha mai vista ma comunque è chiaro il suo ragionamento.

Il terzo studente, invece, arriva alla stessa conclusione ma ci arriva argomentandola solo a parole.

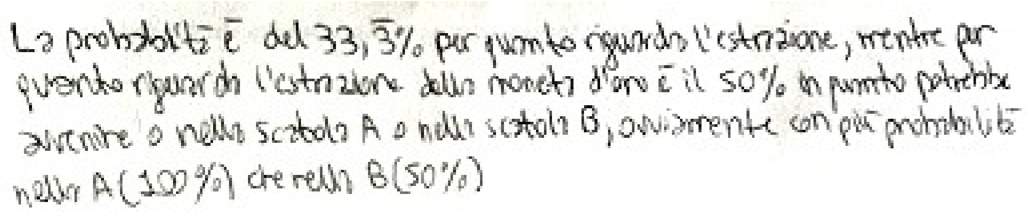
Vi sono quindi 3 differenti registri tutti validi anche se ci sembra più adatto il secondo. Limitarsi all'uso di formule, se non si è sicuri che sia la formula giusta e non si è abituati a riflettere sui risultati ottenuti, può essere controproducente.

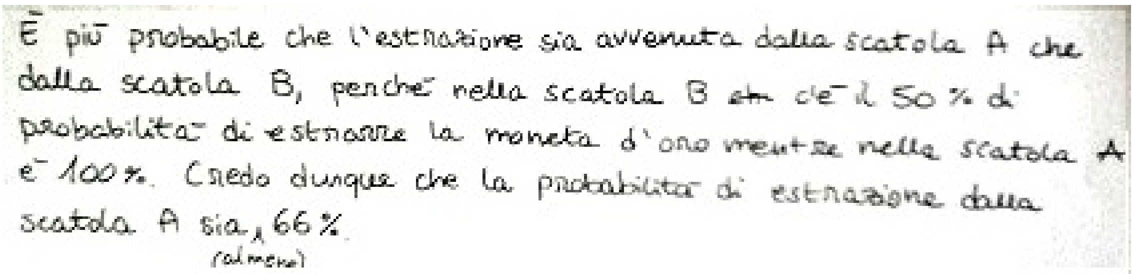
Un tipo di approccio solo a parole è forse il più rischioso in quanto sono proprio certi ragionamenti, all'apparenza corretti, a condurre in errore nei più tipici paradossi probabilistici.

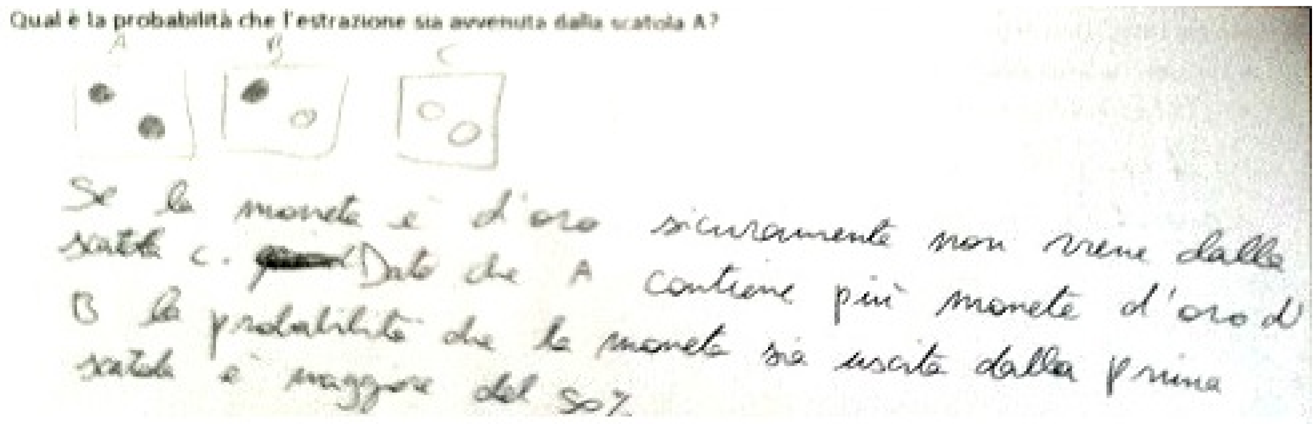
Si è poi visto che, tra questi, solo lo studente abituato a fare rappresentazioni grafiche è riuscito a risolvere correttamente il quesito su Monty Hall.

Bisogna comunque precisare che nessuno di questi studenti aveva svolto lezioni di probabilità ed è quindi chiaro che non potessero risolvere il quesito in modo formalmente corretto. Il loro sforzo però è ammirabile.

Riportiamo poi 3 risposte più qualitative che quantitative in cui si nota che lo studente L-NO e le due studentesse di matematica 'sentono' che la probabilità deve superare il 50%.


La probabilità è del 33,$\bar{3}$% per quanto riguarda l'estrazione, mentre per quanto riguarda l'estrazione della moneta d'oro è il 50% in quanto potrebbe avvenire o nella scatola A o nella scatola B, ovviamente con più probabilità nella A (100%) che nella B (50%)


È più probabile che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A che dalla scatola B, perchè nella scatola B ~~c~~ c'è il 50% di probabilità di estrarre la moneta d'oro mentre nella scatola A è 100%. Credo dunque che la probabilità di estrazione dalla scatola A sia (almeno) 66%.

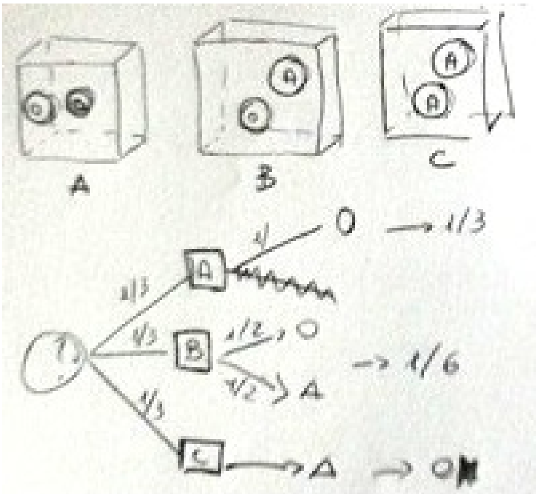

Qual è la probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

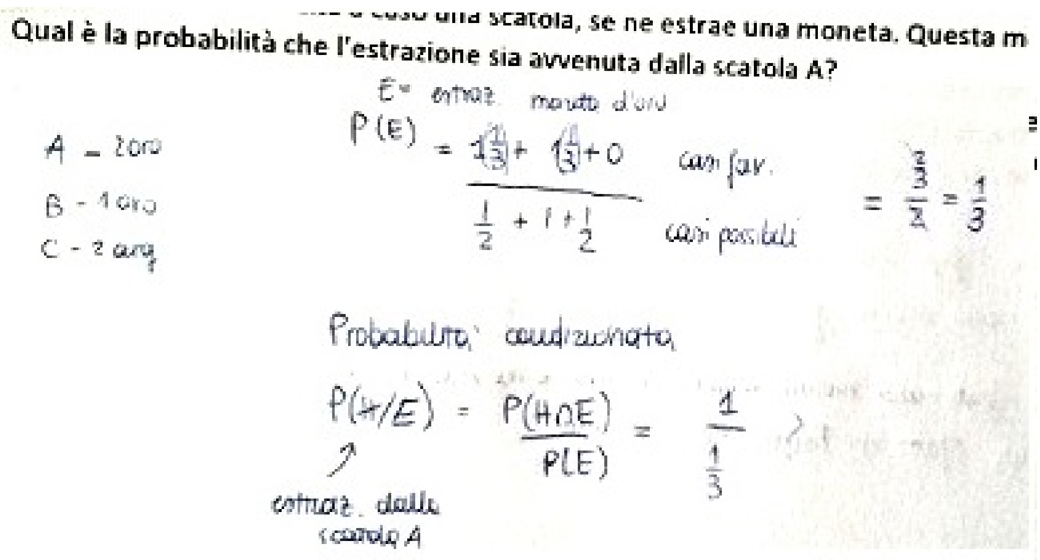
Se la moneta è d'oro sicuramente non viene dalla scatola C. Dato che A contiene più monete d'oro di B la probabilità che la moneta sia uscita dalla prima scatola è maggiore del 50%

Nel caso dello studente liceale si vede che sa calcolare le singole probabilità ma non ha idea di come calcolare una probabilità condizionata (ovviamente in quanto non l'ha ancora fatta!) ma il fatto che non si sbilanci troppo è indice del fatto che comunque si rende conto che ci deve essere un modo particolare di risolvere l'esercizio, modo che lui ancora non conosce.
Una delle due studentesse di matematica si sbilancia maggiormente affermando che la probabilità, a parer suo, debba essere 'almeno del 66%'.

Ammirevole il suo intuito. Possiamo supporre che sia stata indecisa se mettere come risposta definitiva $\frac{2}{3}$ o 75% (media tra il 50% e il 100% di probabilità di cui ha parlato) e per stare più sicura abbia scritto 'almeno il 66%'.

Vi sono poi due risposte forse incomplete da parte di due studenti MAT (un maschio e una femmina per la precisione).



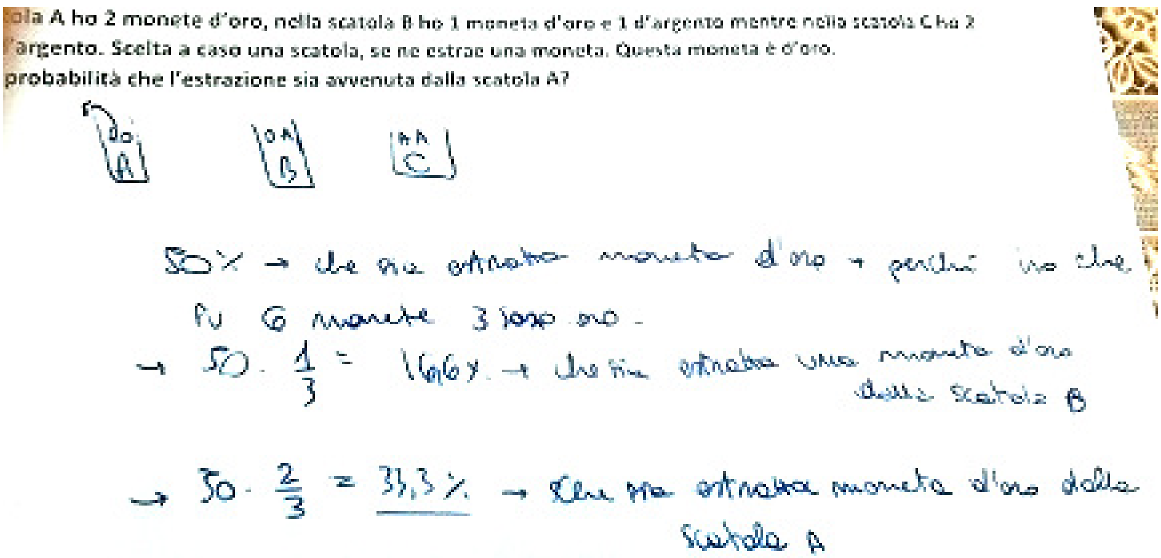


Appare chiaro che alla matematica si sanno approcciare bene in quanto il primo studente si rende conto che un diagramma ad albero lo può aiutare molto e non sbaglia la rappresentazione mentre la seconda capisce di dover usare la probabilità condizionata.

Nel primo caso è lecito pensare che lo studente non si ricordasse come usare la probabilità condizionata, sperava forse che gli sarebbe tornato in mente rappresentando con un diagramma ad albero la situazione ma così non è stato.

Per quanto riguarda la studentessa, invece, appare chiaro che si ricorda la probabilità condizionata ma fa un po' di confusione. Probabilmente se i due avessero potuto lavorare insieme sarebbe uscita la risposta corretta.

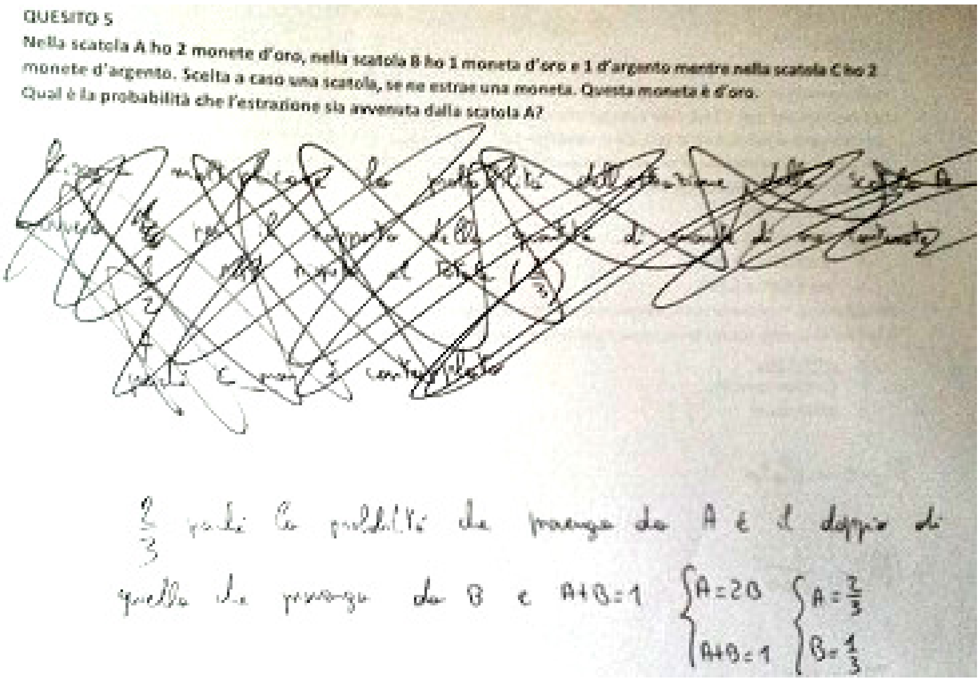
Arriviamo poi ad analizzare due risposte davvero curiose a parer mio. Sono di due liceali, il primo L-NO, il secondo L-SI .


...ola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola C ho 2 ...'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro. ...probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

50% → che sia estratta moneta d'oro → perché ho che su 6 monete 3 sono oro.

→ $50 \cdot \frac{1}{3} = 16,6\%$ → che sia estratta una moneta d'oro dalla scatola B

→ $50 \cdot \frac{2}{3} = 33,3\%$ → che sia estratta moneta d'oro dalla scatola A



QUESITO 5

Nella scatola A ho 2 monete d'oro, nella scatola B ho 1 moneta d'oro e 1 d'argento mentre nella scatola C ho 2 monete d'argento. Scelta a caso una scatola, se ne estrae una moneta. Questa moneta è d'oro.
Qual è la probabilità che l'estrazione sia avvenuta dalla scatola A?

$\frac{2}{3}$ quindi la probabilità che provenga da A è il doppio di quella che provenga da B e A+B=1 $\begin{cases} A=2B \\ A+B=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$

Nel primo caso osserviamo un ragionamento brillante ma purtroppo sbagliato. Lo studente crede infatti che ci sia il 50% di prendere una moneta d'oro e il 50% di prendere una moneta d'argento e fin qui nulla da obbiettare se non fosse che le monete non sono messe tutte in un'unica scatola ma sono suddivise in 3 scatole e noi scegliamo una scatola.
Si convince poi del fatto che il 50% di prendere una moneta d'oro vada suddiviso (e lo fa in proporzione corretta) tra le scatole A e B. Non tiene però conto che si sa già che la moneta estratta è d'oro. Ovviamente la risposta che fornisce è sbagliata ma il suo ragionamento merita di essere analizzato poi meglio dall'insegnante in compagnia dello studente.

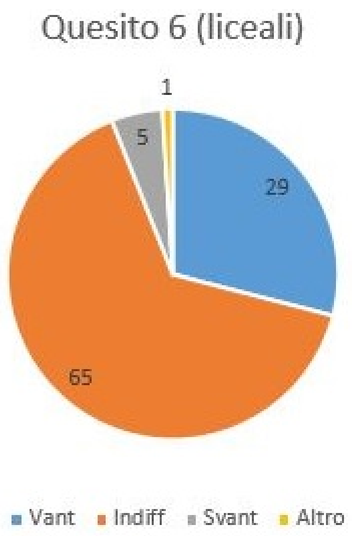
Il secondo caso è ancora più degno di analisi. Il ragazzo aveva fatto la probabilità condizionata ma evidentemente non se la ricordava o non si era reso conto di poterla utilizzare.
Inizialmente scrive qualcosa di strano che appare poco sensato. Poi si corregge e imposta un sistema (correttamente) affermando con sicurezza che se la moneta estratta è d'oro la probabilità che provenga da A è il doppio rispetto alla probabilità che provenga da B. Tale affermazione è vera, forse non sufficientemente motivata dallo studente che credeva forse di aver detto un'ovvietà e di non doverla specificare. Davvero curioso il suo modo di procedere e assolutamente fuori dagli schemi.

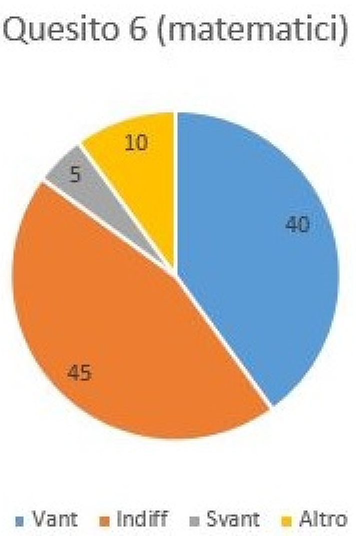
5.6 Quesito 6

Riportiamo il quesito.

Ti propongo un gioco. Ci sono tre scatole (A, B e C). Solo una di esse è piena di soldi mentre le altre 2 sono piene di pezzi di carta di nessun valore. Tu ovviamente sei interessato alla scatola con i soldi ma non sai quale sia mentre io che ti propongo il gioco so dove si nascondono i soldi. Ti faccio scegliere una scatola e, successivamente, ti faccio vedere che in una delle altre due scatole c'erano solo i pezzi di carta. Ti chiedo poi se vuoi cambiare la tua scelta. Pensi che il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

5.6.1 I risultati





Anche qui i risultati sono poco significativi anche se è ben evidente che la risposta giusta (*vantaggioso*) non riesce ad ottenere la maggioranza in quanto si è indotti a pensare che il cambio sia indifferente.

Infatti quando si arriva all'apertura della scatola con i pezzi di carta sono rimaste due scatole, la mia e l'altra e in una ci sono i soldi mentre nell'altra i pezzi di carta. Pare scontato che sia indifferente scegliere una scatola o l'altra perché non sapendo dove sono i soldi pare ragionevole supporre che la probabilità di avere la scatola con i soldi sia del 50% e quindi anche la probabilità di avere quella con la carta sia del 50%.

Questo però non è vero perché si deve tener conto che inizialmente ci sono $\frac{2}{3}$ di possibilità di scegliere una scatola inutile contro $\frac{1}{3}$ di possibilità di aver scelto quella giusta.

Ciò che rende vantaggioso il cambio è proprio questo in quanto era più probabile aver scelto inizialmente la scatola con la carta piuttosto che quella giusta e quindi il cambio sarebbe risultato vantaggioso.

Equivalentemente si può affermare che ciò che rende vantaggioso il cambio è il fatto che chi propone il gioco, qualora il giocatore abbia scelto la scatola giusta, ha libertà di aprire una o l'altra scatola mentre, nel caso di scelta iniziale sbagliata da parte del giocatore, sia costretto ad aprire l'unica scatola con la carta rimasta.

Questo quesito poteva essere risolto con il teorema di Bayes aiutandosi magari con una rappresentazione ad albero oppure analizzando le varie possibilità una per una.

Si nota che nessuno ha usato Bayes e a giudicare dalle risposte ai quesiti 5 e 7 non erano pochi quelli che lo sapevano usare bene.

In effetti questo quesito è un po' particolare e, per come viene scritto, non induce a pensare di poter utilizzare il teorema di Bayes o le varie formule di probabilità condizionata.

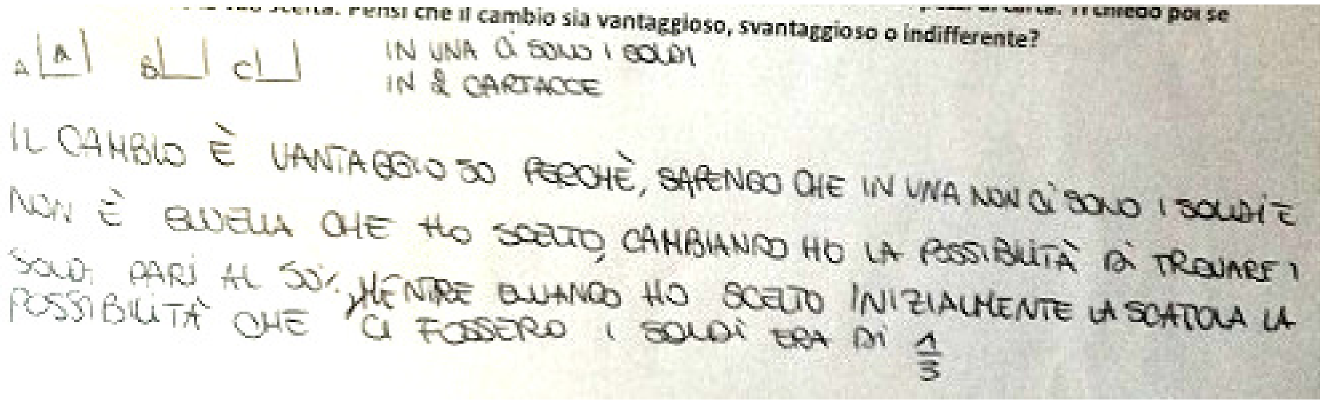
Si è comunque visto che il problema di Monty Hall è più conosciuto tra i matematici (come lecito aspettarsi) che tra i liceali ma non mancano quelli che già ne erano a conoscenza.

Vi sono, infatti, diverse risposte di studenti che hanno confessato di conoscere il paradosso e quindi di conoscere già la risposta (anche se qualcuno ammette che non aveva comunque capito il motivo di una tale risposta).

Poche le risposte motivate ma anche qui non mancano casi interessanti come vedremo. Tra i liceali si possono trovare 12 risposte motivate correttamente (almeno parzialmente) di cui 6 tra chi probabilità l'aveva già fatta e 6 (di cui 2 in $4°M$) tra chi non l'aveva ancora vista.

5.6.2 Analisi di alcune risposte

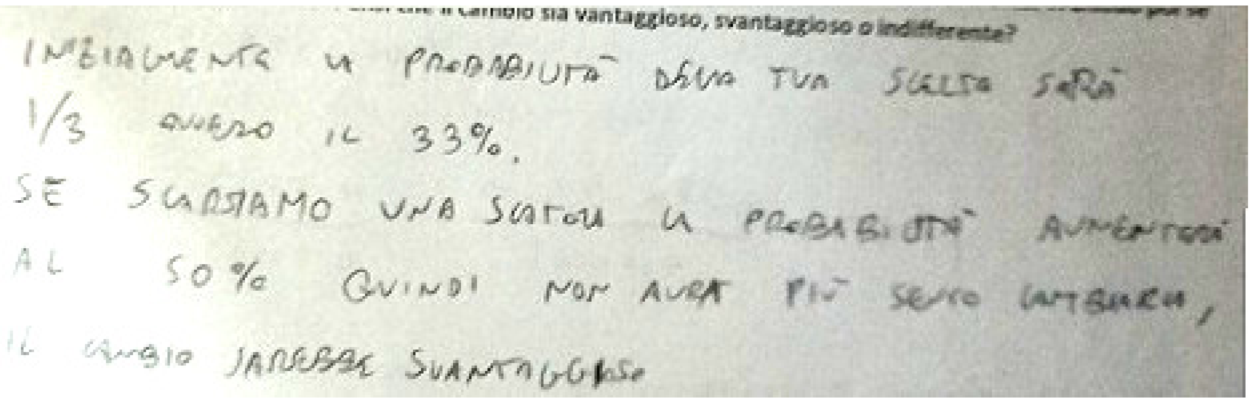
Non sono pochi i liceali che non hanno compreso il problema e che hanno valutato vantaggioso il fatto di cambiare in quanto prima dell'apertura di una delle scatole senza soldi la probabilità di aver indovinato quella giusta era $\frac{1}{3}$ mentre dopo l'apertuna è diventata di $\frac{1}{2}$.
E non si capisce che senso abbia ... è ovvio che la probabilità di aver la scatola giusta sia aumentata ma il cambio non centra niente.
Riportiamo di seguito la risposta di questa studentessa L-SI ma ripetiamo che è solo uno dei tanti esempi.


Pensi che il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

A [A] B [ ] C [ ] IN UNA CI SONO I SOLDI
IN 2 CARTACCE

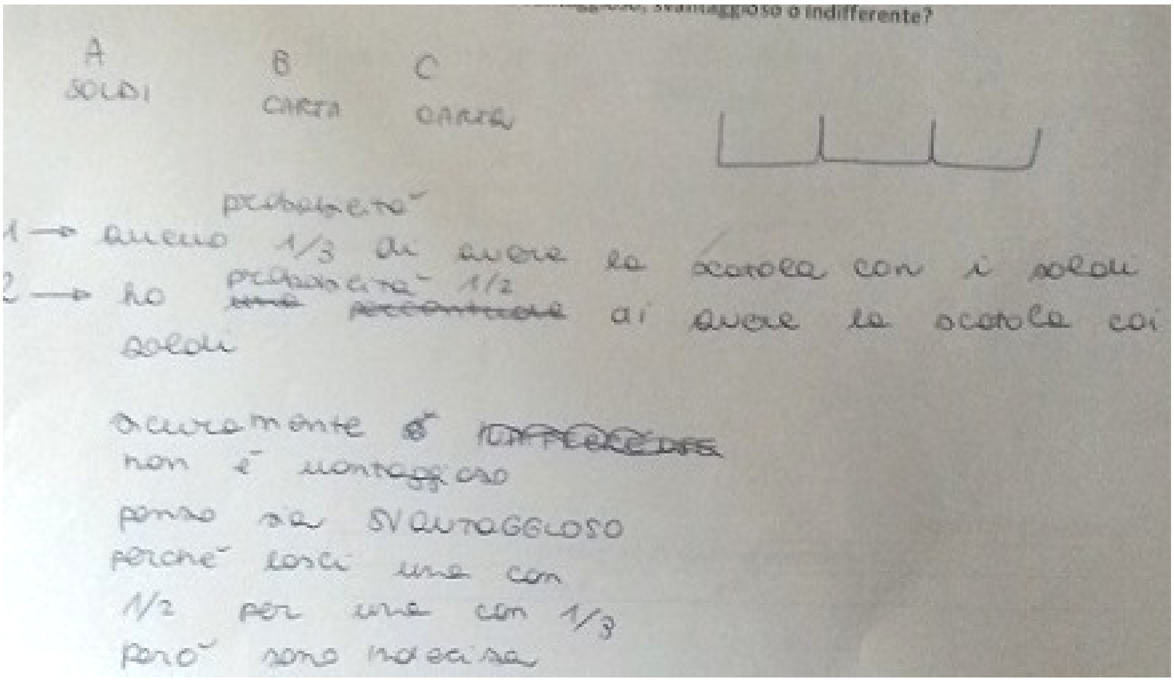
IL CAMBIO È VANTAGGIOSO PERCHÈ, SAPENDO CHE IN UNA NON CI SONO I SOLDI E NON È QUELLA CHE HO SCELTO, CAMBIANDO HO LA POSSIBILITÀ DI TROVARE I SOLDI PARI AL 50%, MENTRE QUANDO HO SCELTO INIZIALMENTE LA SCATOLA LA POSSIBILITÀ CHE CI FOSSERO I SOLDI ERA DI $\frac{1}{3}$

C'è, però, anche chi è arrivato alla conclusione che il cambio sia svantaggioso proprio perché la mia probabilità di vincita è già aumentata. Ma anche qui non ha ben chiaro il problema. Si tratta sempre di uno studente L-SI .


il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

INIZIALMENTE LA PROBABILITÀ DELLA TUA SCELTA SARÀ 1/3 OVVERO IL 33%.
SE SCARTIAMO UNA SCATOLA LA PROBABILITÀ AUMENTERÀ AL 50% QUINDI NON AVRÀ PIÙ SENSO CAMBIARLA, IL CAMBIO SAREBBE SVANTAGGIOSO

Notiamo poi che anche una ragazza L-SI fa lo stesso discorso ma arriva a non concludere perché indecisa. Ecco la sua risposta.



vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

A SOLDI B CARTA C CARTA

probabilità

1 → avevo 1/3 di avere la scatola con i soldi

2 → ho probabilità 1/2 ~~una~~ ~~percentuale~~ di avere la scatola coi soldi

sicuramente ~~è~~ ~~indifferente~~

non è vantaggioso

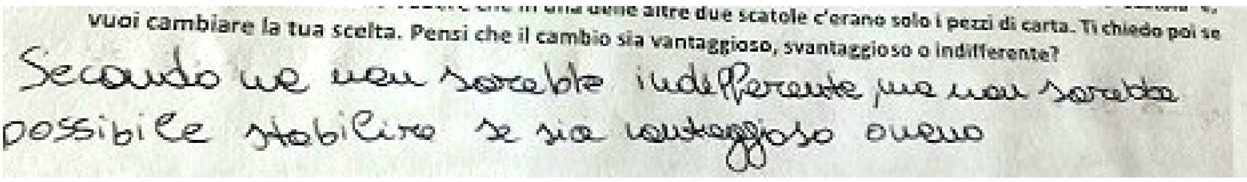
penso sia SVANTAGGIOSO

perché lasci una con 1/2 per una con 1/3

però sono indecisa

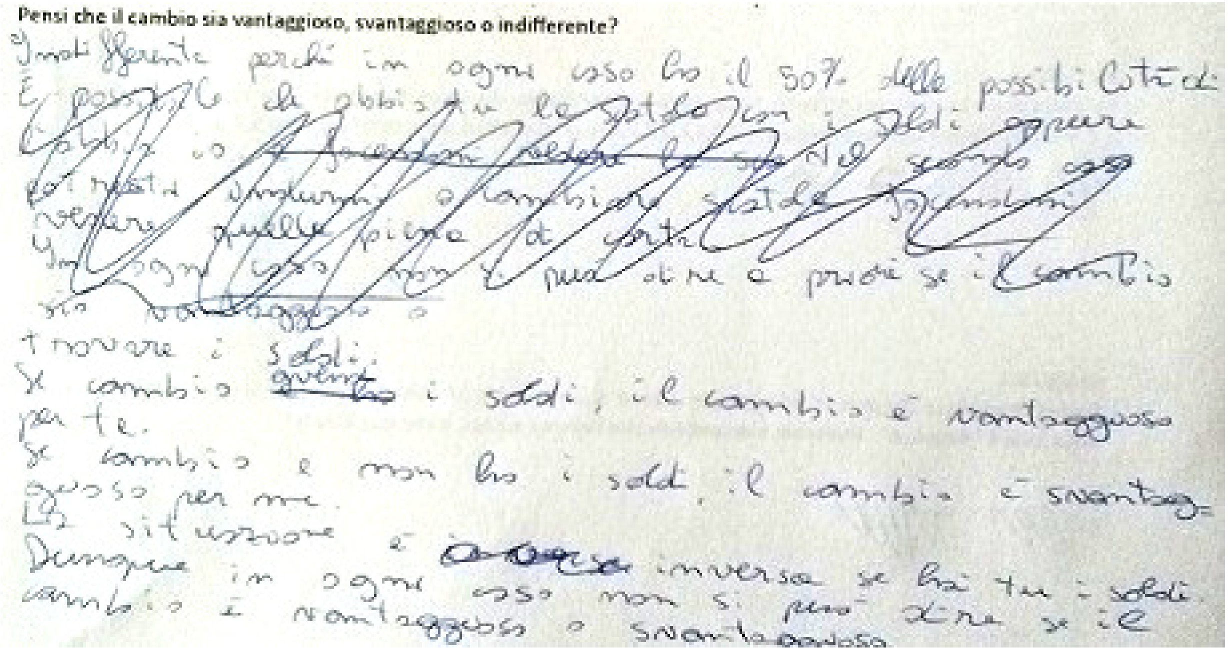
Vi sono poi una studentessa L-NO e uno studente MAT che non si sbilanciano e pensano non sia possibile affermare se il cambio è vantaggioso o svantaggioso. Si rendono conto che non è indifferente ma non riescono a valutare le probabilità di successo con o senza il cambio.

Ecco qui le loro risposte.



vedere che in una delle altre due scatole c'erano solo i pezzi di carta. Ti chiedo poi se vuoi cambiare la tua scelta. Pensi che il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

Secondo me non sarebbe indifferente ma non sarebbe possibile stabilire se sia vantaggioso o meno


Pensi che il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

Indifferente perchè in ogni caso ho il 50% delle possibilità di

In ogni caso non si può dire e prima se il cambio sia vantaggioso o trovare i soldi.

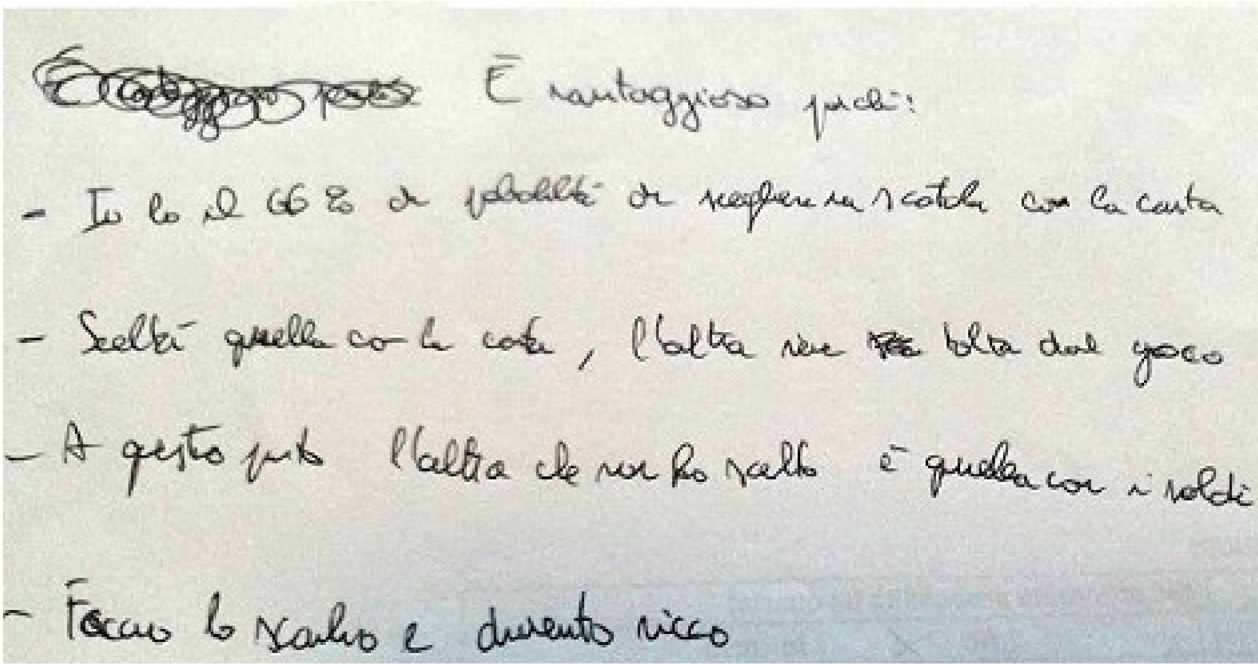
Se cambio ~~guadagno~~ trovo i soldi, il cambio è vantaggioso per te.

Se cambio e non ho i soldi, il cambio è svantaggioso per me.

La situazione è ~~opposta~~ inversa se hai tu i soldi.

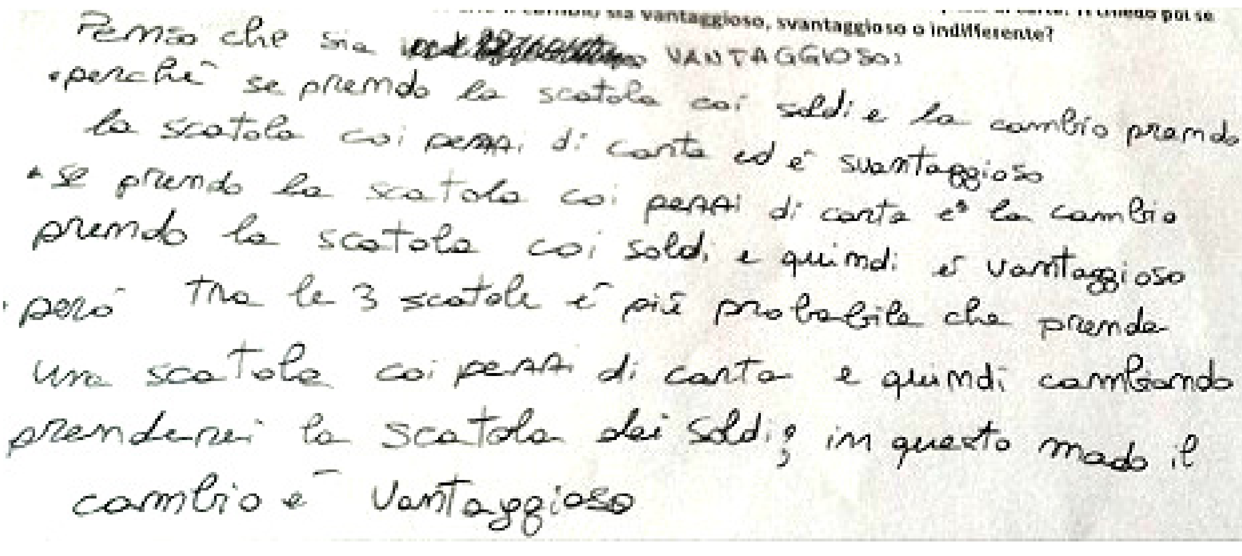
Dunque in ogni caso non si può dire se il cambio è vantaggioso o svantaggioso

Meritano di essere citati questi 6 ragazzi che rispondono correttamente al quesito fornendo anche risposte valide. Quello che sorprende è che i primi 4 esempi sono di studenti L-NO e solo l'ultimo è di un ragazzo L-SI . Il quinto esempio è di un ragazzo della $4°M$ che è un po' la classe 'ponte' tra chi non ha ancora fatto il modulo di probabilità e chi invece l'ha già affrontato durante l'anno.



È vantaggioso perché:

- Io ho il 66% di probabilità di scegliere una scatola con la carta
- Scelgo quella con la carta, l'altra viene tolta dal gioco
- A questo punto l'altra che non ho scelto è quella con i soldi
- Faccio lo scambio e divento ricco



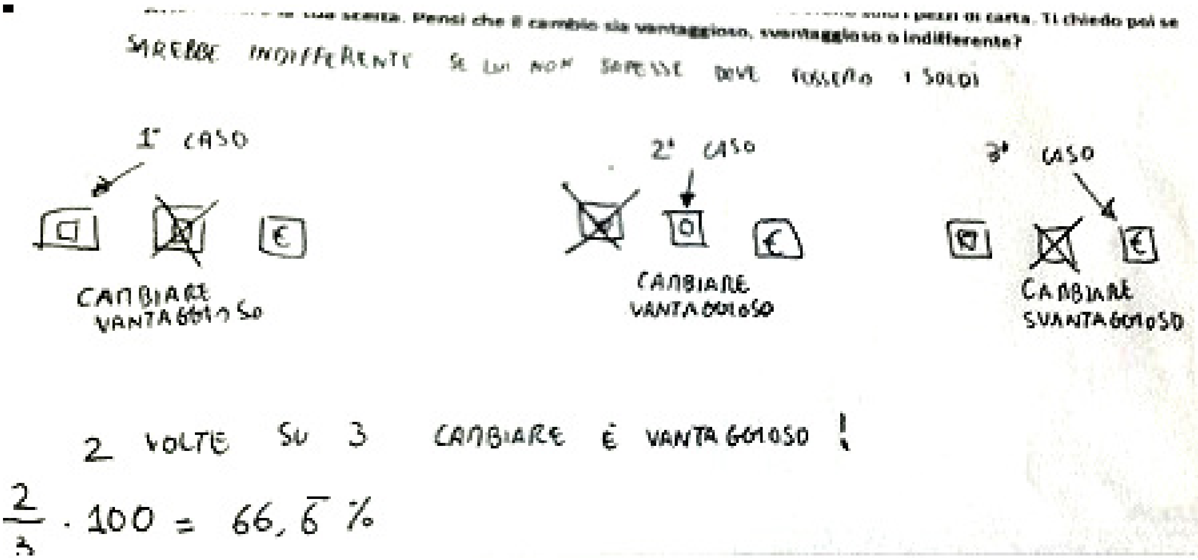
... il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente? ... Ti chiedo poi se

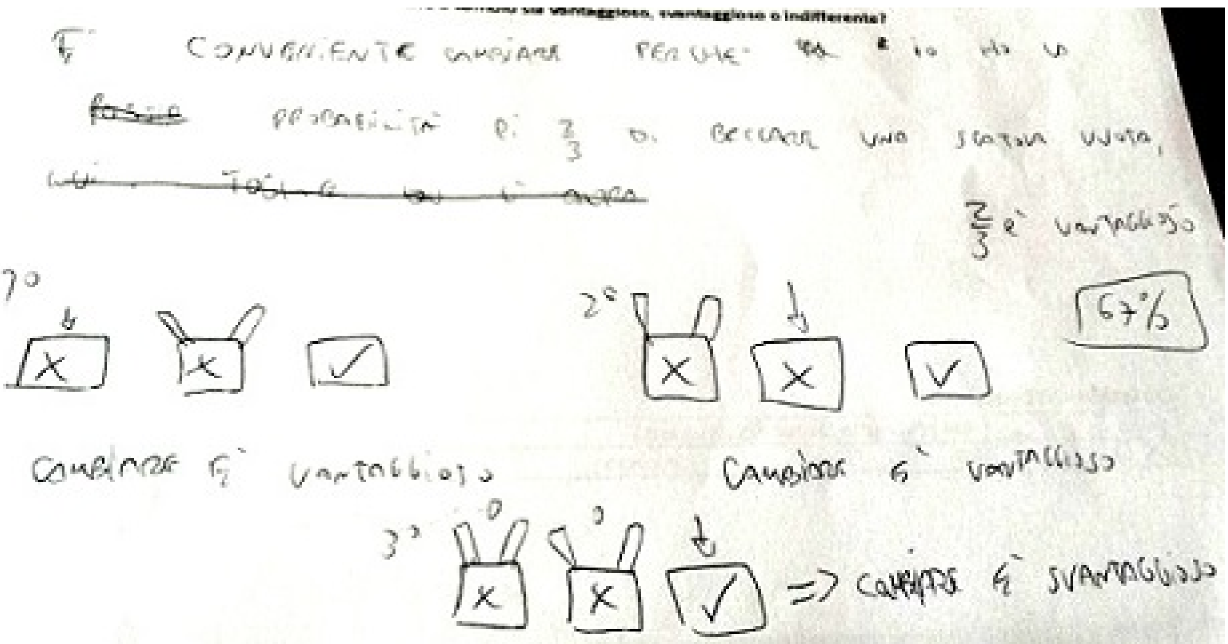
Penso che sia VANTAGGIOSO:

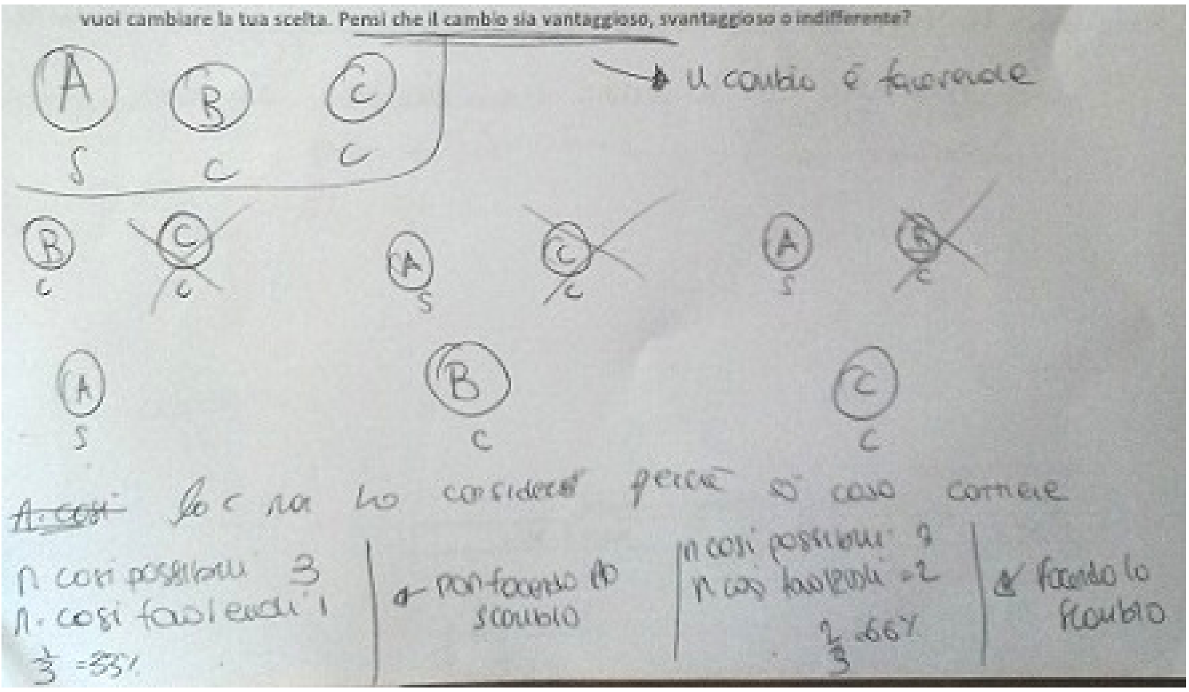
• perché se prendo la scatola coi soldi e la cambio prendo la scatola coi pezzi di carta ed è svantaggioso

• se prendo la scatola coi pezzi di carta e la cambio prendo la scatola coi soldi e quindi è vantaggioso

• però tra le 3 scatole è più probabile che prenda una scatola coi pezzi di carta e quindi cambiando prenderei la scatola dei soldi; in questo modo il cambio è vantaggioso


Pensi che il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?
SAREBBE INDIFFERENTE SE LUI NON SAPESSE DOVE FOSSERO I SOLDI
1° CASO
2° CASO
3° CASO
CAMBIARE VANTAGOIOSO
CAMBIARE VANTAGOIOSO
CAMBIARE SVANTAGOIOSO
2 VOLTE SU 3 CAMBIARE È VANTAGOIOSO!
2/3 · 100 = 66,6 %


sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?
È CONVENIENTE CAMBIARE PERCHÉ io ho u
probabilità di 2/3 di beccare una scatola vuota,
2/3 è vantaggioso
67%
1°
2°
cambiare è vantaggioso
cambiare è vantaggioso
3°
=> cambiare è svantaggioso



vuoi cambiare la tua scelta. Pensi che il cambio sia vantaggioso, svantaggioso o indifferente?

il cambio è favorevole

A B C
S C C

B ~~C~~ A ~~C~~ A ~~B~~
C ~~C~~ S ~~C~~ S ~~C~~

A B C
S C C

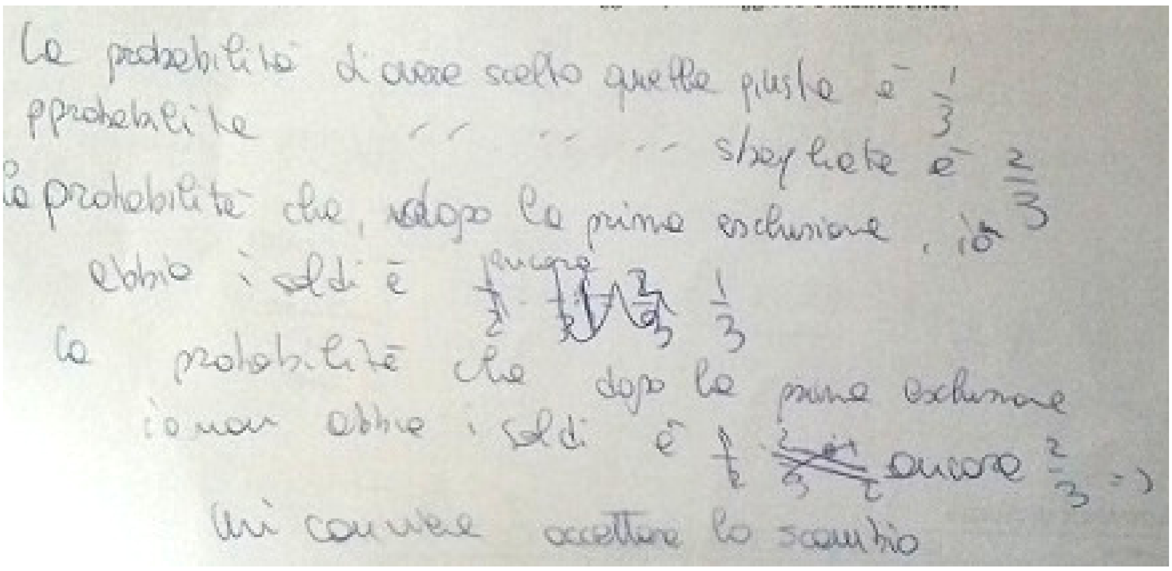
~~A. casi~~ la C non lo considero perché è caso contrario

n casi possibili 3
n. casi favorevoli 1
$\frac{1}{3}$ = 33%

non facendo lo scambio

n casi possibili 3
n casi favorevoli = 2
$\frac{2}{3}$ = 66%

facendo lo scambio



La probabilità d'avere scelto quella giusta è $\frac{1}{3}$
probabilità " " " sbagliata è $\frac{2}{3}$
la probabilità che, dopo la prima esclusione, io abbia i soldi è ancora $\frac{1}{3}$
la probabilità che dopo la prima esclusione io non abbia i soldi è ancora $\frac{2}{3}$:)
mi conviene accettare lo scambio

5.7 Quesito 7

Riportiamo il quesito.

Una malattia colpisce 5 *persone su* 1000. *Esiste però un test molto preciso che nel* 98% *dei casi riesce ad individuare la presenza della malattia qualora essa sia presente (ossia, se una persona malata si sottopone al test nel* 98% *dei casi il test darà esito positivo).*

*C'è poi l'*1% *di possibilità di avere 'falsi positivi' (ossia, se una persona sana si sottopone al test, c'è probabilità dell'* 1% *che il test dia esito positivo).*

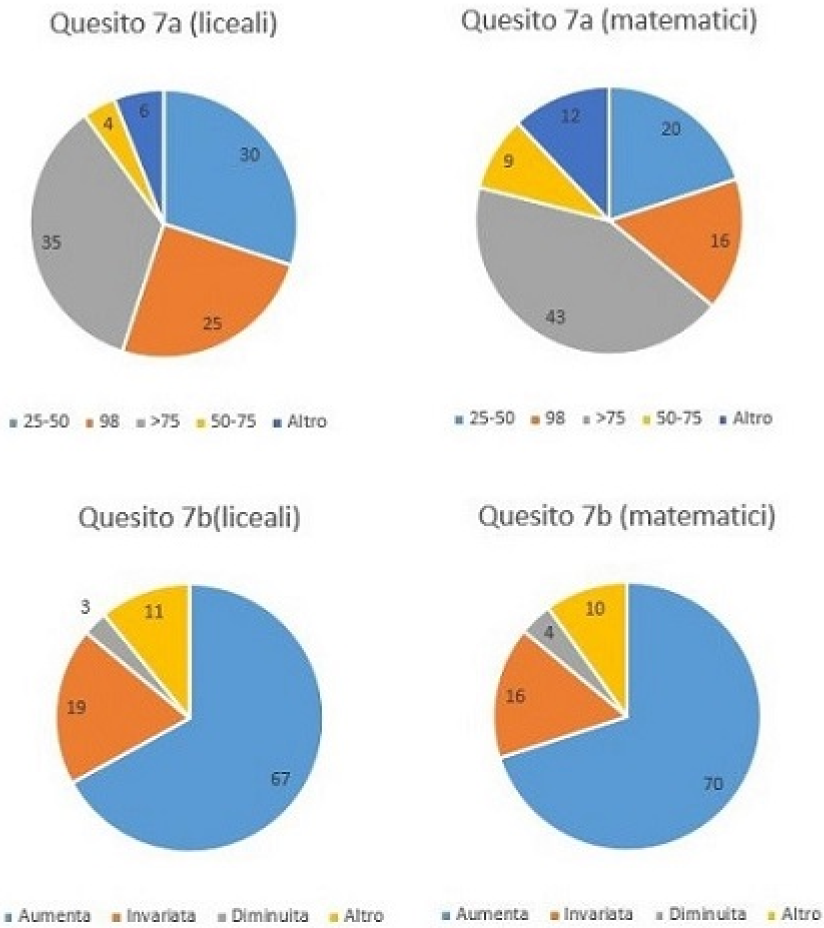
Una persona si sottopone al test e risulta positiva. Quale delle seguenti stime per la probabilità che l'individuo sia malato ritieni più attendibile?

- *Più del* 75%
- *Esattamente il* 98%
- *Tra il* 25% *e il* 50%
- *Tra il* 50% *e il* 75%

Per sicurezza, la persona risultata positiva al primo test riprova il test una seconda volta. Risulta ancora positiva. Alla luce di questo nuovo fatto come cambia la probabilità che sia effettivamente malata?

- *Aumenta*
- *Rimane invariata*
- *Diminuisce*

5.7.1 I risultati



Nella prima domanda del quesito i risultati non sono molto incoraggianti in quanto la risposta corretta non raggiunge in nessuno dei due casi la maggioranza relativa, anzi.

Nel caso dei liceali si nota che, nonostante la risposta più gettonata sia stata 'Più del 75%', non vi è grande differenza tra questa risposta, quella giusta (tra il 25% e il 50%) e 'esattamente il 98%'.

Ben diversa la situazione nei matematici il cui il *distrattore* 'Più del 75%' è stato decisamente più forte doppiando addirittura il numero di risposte giuste. E anche qui il numero di risposte giuste e di studenti indotti a pensare che la probabilità sia esattamente del 98% più o meno si equivalgono.

Cerchiamo di capire quale sia il motivo di questa differenza. Sicuramente chi ha risposto 98% lo ha fatto perché non ha ben compreso il testo. Infatti viene detto che una persona malata che si sottopone al test ha il 98% di vedere esito positivo del test. Si richiedeva però quale fosse la probabilità che una persona scelta a caso (non si sa quindi se è malata o meno) risulti positiva al test.

Questo *distrattore* ha colpito maggiormente tra i liceali, segno forse che gli studenti di matematica hanno compreso meglio cosa gli veniva richiesto.

A giudicare dalle risposte, si è visto che chi ha risposto giusto l'ha fatto principalmente per 3 motivi:

- ha utilizzato in modo corretto il teorema di Bayes o si è aiutato con una rappresentazione ad albero per utilizzare in modo corretto la probabilità condizionata;
- ha intuito che la bassissima percentuale di malati doveva in qualche modo abbassare di molto la probabilità di risultare positivi al test;
- ha svolto calcoli errati (mettendo un po' insieme i numeri che trovava) ed è stato fortunato.

La maggior parte di coloro che hanno risposto 'Più del 75%' l'ha fatto perché non poteva essere, secondo loro, esattamente il 98% ma non poteva comunque essere tanto di meno.

Nella seconda domanda del quesito, invece, sono molti quelli che rispondono in modo corretto in quanto il risultato è conforme a quello che intuitivamente si è portati a pensare. Se il test afferma per due volte consecutive che si è malati sempre sempre meno probabile che si stia sbagliando.

Tuttavia quasi uno studente su tre (sia per i liceali sia per i matematici) non è convinto di questo. Chiaramente sono pochi quelli che ritengono che sia diminuita la probabilità di aver contratto la malattia nel caso di un'ulteriore risposta positiva da parte del test.

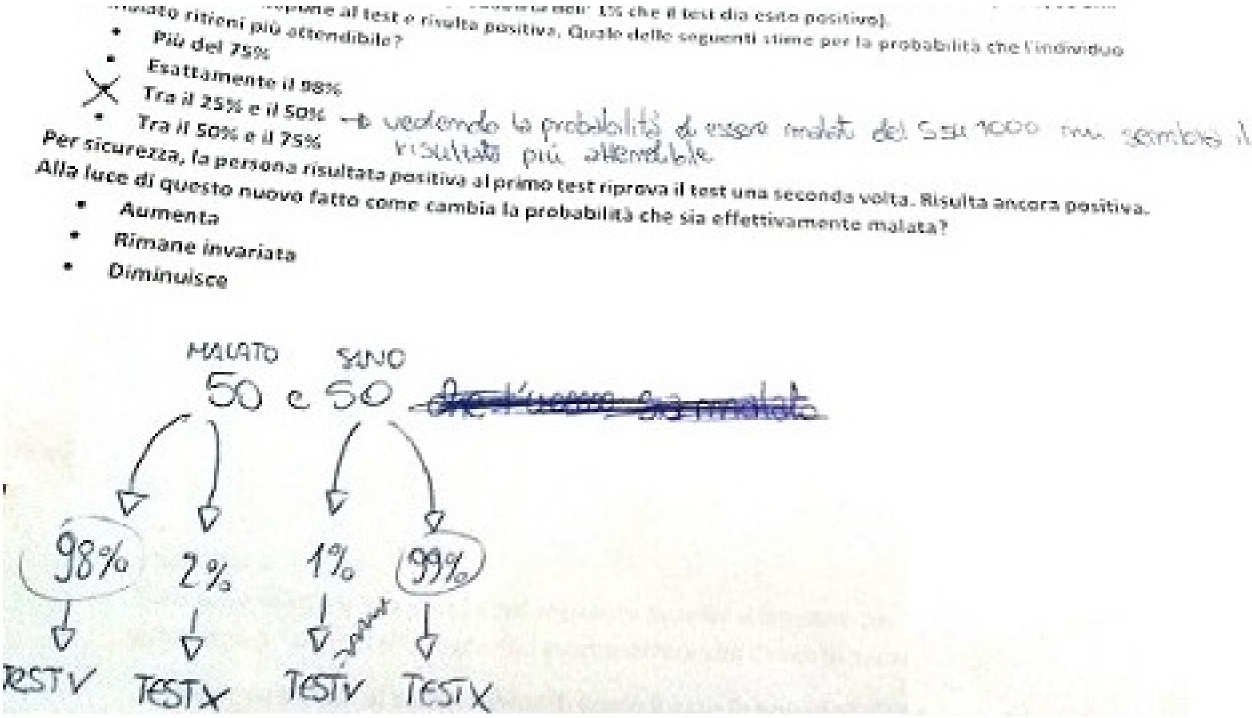
La maggior parte di quelli che sbagliano ritengono erroneamente che la probabilità rimanga la stessa in quanto il test è sempre quello. Ritengono cioè che i due esiti siano indipendenti (il che è vero) e che non sia importante che per due volte il test abbia dato lo stesso risultato.

Vi è però un certo numero non del tutto trascurabile che preferisce non sbilanciarsi, lascia il quesito senza risposta o appare confuso. Si tratta, in entrambi i campioni, di uno studente su 10.

Nessuno, come ci si aspettava, ha fornito un calcolo di quanto aumentasse la probabilità. Si sono tutti limitati a dare argomentazioni qualitative (nel caso in cui abbiano argomentato le loro risposte).

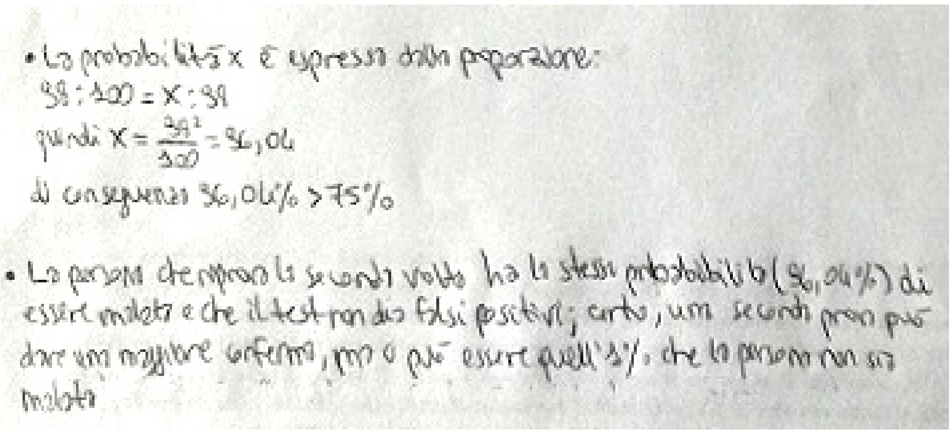
5.7.2 Analisi di alcune risposte

Una risposta molto valida è quella di questa studentessa L-NO.



La risposta e la motivazione sono giuste. Ovviamente non sa che calcoli fare ma a differenza di molti non si lascia andare a calcoli senza senso per trovare una risposta accettabile. Corretta anche la rappresentazione ad albero anche se ritiene erroneamente equiprobabile che una persona sia sana o malata (nel testo era esplicitamente detto che vi erano solo 5 malati su 1000). Molto probabilmente le era sfuggito questo dettaglio ma ammirevole la sua risposta.

Un'altra risposta tipica è quella di impostare una proporzione come fa questo ragazzo L-NO.

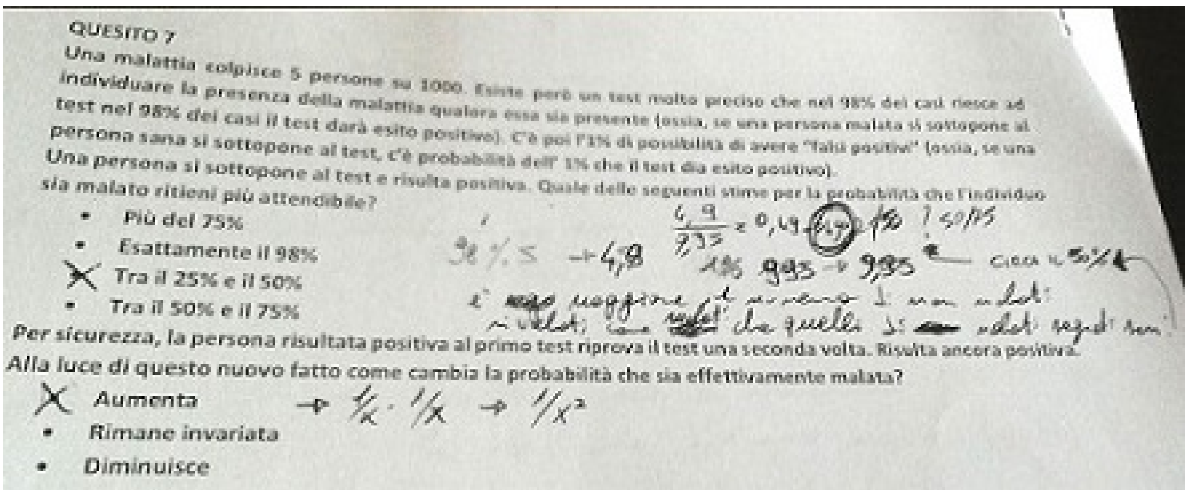

• La probabilità x è espressa dalla proporzione:
98 : 100 = x : 98
quindi $x = \frac{98^2}{100} = 96{,}04$
di conseguenza 96,04% > 75%

• La persona che riprova la seconda volta ha la stessa probabilità (96,04%) di essere malata e che il test non dia falsi positivi; certo, una seconda prova può dare una maggiore conferma, ma c'è può essere quell'1% che la persona non sia malata

La sua idea non è male. Sono molti gli esercizi di matematica in cui è richiesta una proporzione ma la proporzione deve effettivamente avere un senso e qui non è adatta. Il risultato comunque sembra ragionevole e questo induce lo studente a pensare di aver fatto bene.

Non ha però minimamente considerato il fatto che ci sono poche persone malate e questo non è un dato superfluo.

Curiosa anche la risposta di questo studente L-NO che si calcola il 98% di 5 (avrebbe dovuto fare il 98% di $\frac{5}{1000}$), poi si calcola l'1% di 995 (anche qui commette lo stesso errore) e poi fa il rapporto tra i due risultati ottenuti.


QUESITO 7

Una malattia colpisce 5 persone su 1000. Esiste però un test molto preciso che nel 98% dei casi riesce ad individuare la presenza della malattia qualora essa sia presente (ossia, se una persona malata si sottopone al test nel 98% dei casi il test darà esito positivo). C'è poi l'1% di possibilità di avere "falsi positivi" (ossia, se una persona sana si sottopone al test, c'è probabilità dell' 1% che il test dia esito positivo).
Una persona si sottopone al test e risulta positiva. Quale delle seguenti stime per la probabilità che l'individuo sia malato ritieni più attendibile?

• Più del 75%
• Esattamente il 98%
X Tra il 25% e il 50%
• Tra il 50% e il 75%

98% 5 → 4,9
1% 995 → 9,95
$\frac{4,9}{9,95} = 0,49$
circa il 50%

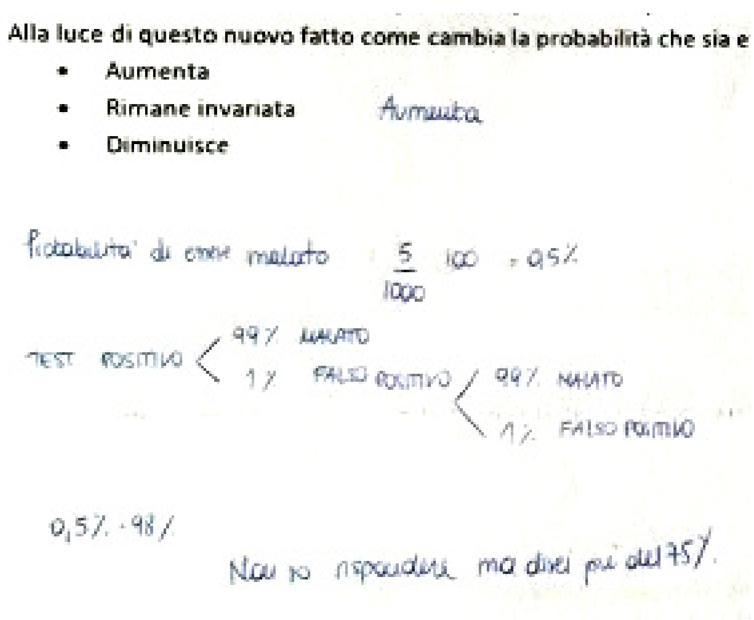
Per sicurezza, la persona risultata positiva al primo test riprova il test una seconda volta. Risulta ancora positiva.
Alla luce di questo nuovo fatto come cambia la probabilità che sia effettivamente malata?

X Aumenta $\rightarrow \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x^2}$
• Rimane invariata
• Diminuisce

La prima intuizione (di dover moltiplicare le probabilità) era buona (peccato per l'errore) ma farne poi il rapporto non credo abbia una qualche spiegazione sensata se non l'applicare in modo casuale operazioni matematiche che forniscono risultati all'apparenza sensati.

Ancora più bella la risposta che questo stesso studente fornisce alla seconda domanda del quesito in quanto risponde correttamente *aumenta* ma dalla sua motivazione appare il contrario (e non se ne rende conto) in quanto $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^2}$ (nel caso di $x \geq 1$ ma qui è ovvio che si tratta di analizzare questo caso).

Veniamo poi alla risposta di una studentessa MAT che cerca di visualizzare il problema con una rappresentazione ad albero. Si vede che ha delle buone idee in testa ma non riesce a trovare la strada giusta e lo ammette rispondendo poi come il suo intuito le suggerisce (ovviamente sbagliando in quanto la risposta a questo quesito è anti-intuitiva).


Alla luce di questo nuovo fatto come cambia la probabilità che sia e

- Aumenta
- Rimane invariata Aumenta
- Diminuisce

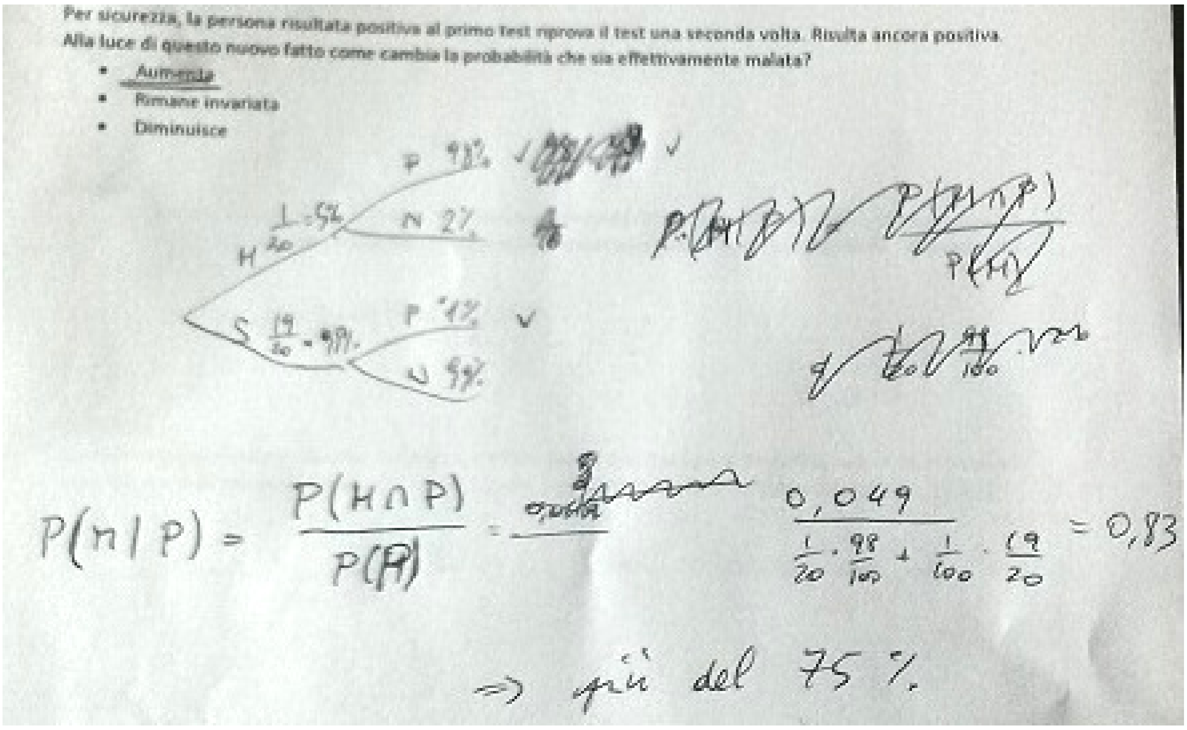
Probabilità di essere malato $\frac{5}{1000} \cdot 100 = 0,5\%$

TEST POSITIVO < 99% MALATO / 1% FALSO POSITIVO < 99% MALATO / 1% FALSO POSITIVO

0,5% · 98%

Non so rispondere ma direi più del 75%.

Riportiamo infine la risposta di questo studente MAT che si rende conto di dover applicare la definizione di probabilità condizionata, l'applica bene ma commette una disattenzione che lo porta a concludere in modo sbagliato: considera $\frac{1}{20}$ (e non $\frac{1}{200}$) la probabilità di essere malato (ha probabilmente letto che le persone malate sono 5 su 100 e non su 1000). Peccato! Queste disattenzioni, però, sono molto frequenti tra gli studenti e il fatto di non essere poi valutati ha comunque influito sul fatto di non ricontrollare.



Capitolo 6

Conclusioni

Possiamo concludere che per quanto riguarda la probabilità nulla può essere dato per scontato ed esercizi all'apparenza banali come il quesito 1 possono diventare i più insidiosi.

Molti studenti continuano a credere al Caso come ad un qualcosa di imprevedibile e non credono alla razionalità che si cela dietro discorsi probabilistici.

Quando ci credono lo fanno solo perché così riescono a risolvere gli esercizi come il professore e il libro vogliono ma non appena possono cimentarsi liberamente nella risoluzione di esercizi sul calcolo delle probabilità tornano ad usare l'idea che loro stessi si sono fatti della materia, ossia che il Caso non rispetta le regole della matematica.

La probabilità è piena di ragionamenti all'apparenza corretti ma in realtà sbagliati e, come abbiamo visto, l'esperienza non sempre aiuta.

Molto spesso quando si cerca di spiegare la fallacia di un ragionamento ad uno studente ci si trova davanti a studenti spaesati che pensano di essere in qualche modo *presi in giro* dal discorso dell'insegnante. Questo è il bello e il brutto dei paradossi: si pensa di aver ragione ma si ha torto e quando qualcuno ti spiega il motivo rimani convinto delle tue idee anche se non capisci dove stia sbagliando l'altro a proporti la soluzione.

Con questa ricerca ho potuto toccare con mano che non è sempre facile capire come lo studente sia arrivato ad una certa conclusione. Si capisce facilmente che ha sbagliato perché il suo ragionamento non risulta chiaro ma non è per nulla facile fargli capire dove sbaglia.

Dopo questo lavoro di tesi sono ancora più convinto che l'insegnamento della probabilità debba partire dai ragionamenti degli studenti in quanto dargli delle regole precise senza farli provare a trovare una soluzione con i loro mezzi non li aiuta. Faticano, infatti, a riconoscere le situazioni simili in cui poter applicare le regole che gli son state insegnate e non sono sicuri che i loro modi di pensare siano validi.

Ciò li porta a non cimentarsi con la propria testa nella risoluzione di problemi ma a cercare di applicare le regole che hanno appreso con il risultato che, al di fuori di un contesto prettamente scolastico, fanno uso dei loro modi di ragionare senza avere però la supervisione di un insegnante esperto che possa aiutarli a capire se e dove sbagliano.

Lasciar lavorare gli studenti in autonomia (ma anche in piccoli gruppi) nella risoluzione di problemi sul calcolo delle probabilità li rende membri attivi nel loro apprendimento e, sentendosi messi alla prova, possono dare il meglio di loro.

Una prova di questo è il vedere come ci siano state risposte esaurienti e corrette sul quesito di Monty Hall da parte di studenti che non avevano ancora affrontato la probabilità. Questo suggerisce che per la risoluzione di certi problemi non sia necessaria una preparazione sul calcolo delle probabilità in quanto è sufficiente essere abituati a fare ragionamenti di tipo probabilistico.

L'intervento successivo del docente è indispensabile per fermare subito il sedimentarsi di metodi di ragionamento errati. Inoltre l'istruzione è fondamentale in quanto a certi problemi è quasi impossibile dare risposta senza un'adeguata preparazione. Basti pensare al quesito 4 in cui nessuno studente senza conoscenze in campo probabilistico è riuscito a dare una spiegazione esauriente.

Anche il concetto stesso di probabilità condizionata sembra necessiti di un'accurata istruzione come si è visto dai risultati del quesito 5.

L'idea di probabilità condizionata non è per nulla intuitiva e, si è visto soprattutto nel quesito 5, gli studenti che non hanno avuto una preparazione sull'argomento affrontano tali quesiti facendo una loro personale selezione delle informazioni che ritengono importanti con il rischio di sbagliarsi.

Bibliografia

[1] Agnoli P., Piccolo F., *Probabilità e scelte razionali. Un'introduzione alla scienza delle decisioni*, Armando Editore, 2014

[2] Arrigo G. (2014), *Le misconcezioni degli allievi di scuola primaria relative al concetto di probabilità matematica: Rapporto di ricerca*, Bollettino dei docenti di Matematica, Bellinzona (Svizzera), $60, 59 - 82$.

[3] Arrigo G., Piatti A., *Il senso della probabilità è impreciso*, Estratto da Bollettino dei Docenti di Matematica, numero 50, maggio 2005, Bellinzona (Svizzera), UIM-CDC, pagg. $55 - 68$

[4] Bagni G.T., Perelli D'Argenzio M.P. e Rigatti Luchini S. (1999) *A paradox of Probability: an experimental educational research in Italian High School. Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st century*, Cairo (Egitto): A. Rogerson Ed. III, $57 - 61$.

[5] Betrò B., *La probabilità nella vita quotidiana (Introduzione elementare ai modelli probabilistici)* (2010)

[6] Bill A., Gayton P., *Coin-sequences and coin combinations taught as companion tasks*, Faculty of Education, University of Tasmania, Australia Department of Education, Tasmania, Australia

[7] Cerasoli M. (1995) *Breve storia ragionata della probabilità.*

[8] D'Amore B., *Elementi di didattica della matematica*, premessa di Colette Laborde, Volume 6, Pitagora Editrice Bologna, 1999

[9] De Ferra C., *De Finetti, la rivoluzione della probabilità*

[10] De Finetti B., *Sul significato soggettivo della probabilità* in Fundamenta Mathematicae, Warszawa, T. XVII, pp. $298 - 329$, 1931

[11] Fischbein E. (1975) *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Dordrecht (Olanda): D. Reidel Publishing Company.

[12] Greer B. *Understanding probabilistic thinking: the legacy of Efraim Fischbein.*

[13] Jones G. A. (2005), *Exploring Probability in School*, New York: Springer (pp 327 – 330)

[14] Kahneman D., Tversky A., *Availability: A heuristic for judging frequency and probability*

[15] Kahneman D., Tversky A. (1974) *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases.* Science, New Series, Vol. 185, No. 4157, 1124 – 1131.

[16] Kendall M. G. *Le origini del calcolo delle probabilità*, traduzione di Enzo Lombardo.

[17] Khazanov L., *An Investigation of Approaches and Strategies for Resolving Students Misconceptions about Probability in Introductory College Statistics*, Borough of Manhattan Community College, Mathematics Department 199 Chambers Street, NY, NY 10007

[18] Mousoulides, Nicholas G. English, Lyn D. (2009), *Kindergarten students' understanding of probability concepts.* In: Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, July 19 – 24, 2009, Thessaloniki, Greece.

[19] Nahil P.J., *Sarai ancora vivo tra* 10 *anni? E molte altre curiose domande di probabilità*, traduzione di Davide Calonico, Editore Ulrico Hoepli Milano, 2015

[20] Nappo G. (Università di Roma La Sapienza), *de Finetti: La Probabilità non esiste*, Conferenza tenuta alla Mathesis sezione romana, 9 aprile 2008

[21] Ottaviani M. G. (2011) *Insegnare ed apprendere statistica e probabilità a scuola: il problema dell'aggiornamento degli insegnanti.*

[22] Vinaty B.T., *Probabilità: origini e sviluppi di un'idea*, testo conferenza tenuta presso l'Università di Lecce, giovedì 11 marzo 1993

[23] Zanardi G, *Il caso e la probabilità*, Anno 6, n.6 dicembre 2003

[24] Indicazioni Nazionali per i Licei, www.nuovilicei.indire.it

-

Ringraziamenti

Ringrazio prima di tutto il mio relatore, il professor Paolo Negrini, per il suo aiuto prezioso, la sua cordialità e la disponibilità che mi ha sempre dimostrato in questi mesi di lavoro.

Ringrazio per la loro straordinaria disponibilità tutti i professori delle scuole superiori E.Mattei e E.Fermi per avermi permesso di somministrare il questionario nelle loro classi, rendendo così possibile questo mio lavoro di tesi.

Ringrazio tutti i miei amici e amiche che mi hanno sostenuto moralmente in tutti questi anni di studio. In particolare ringrazio tutti coloro che mi hanno incoraggiato con le loro preghiere.

Ringrazio poi i miei genitori che mi sono sempre stati vicini e mi hanno insegnato l'importanza del sacrificio e dell'impegno nell'inseguire i miei obiettivi.

Ringrazio infine tutte quelle persone che mi vogliono veramente bene e me lo dimostrano ogni giorno e anche tutti i miei cari che mi guardano dall'alto per tutto quello che hanno fatto per me.