ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

SUGLI OPERATORI COMPATTI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ERMANNO LANCONELLI

Presentata da:
MARCO DORELLI

II Sessione
Anno Accademico 2009-2010

A Mamma Babbo e Stefano;

il mio sorriso, la mia Casa, il mio orgoglio.

Introduzione

Con questa tesi intendo sviluppare, in maniera esaustiva e completa, tutti i risultati fondamentali della teoria degli operatori compatti (anche detti operatori completamente continui) in spazi normati, di Banach e di Hilbert. Prima della lettura dei tre capitoli distinti in cui la trattazione é suddivisa, si rimanda il lettore all'Appendice A (situata in fondo) che costituisce una raccolta di tutte le nozioni preliminari di analisi e analisi funzionale necessarie alla comprensione dell'elaborato.

Nel primo capitolo viene effettuata la presentazione di tali operatori negli spazi vettoriali normati; dalla definizione con i relativi esempi si enunciano e dimostrano tutti i risultati generali della teoria, con l'intento di ottenere una trattazione indipendente e finalizzata alla dimostrazione del teorema dell'alternativa di Fredholm-Riesz.

Il secondo e terzo capitolo contengono le applicazioni di quanto visto in precedenza. Nel secondo capitolo viene preso dapprima in esame il caso particolare di operatori compatti e autoaggiunti T in uno spazio di Hilbert per lo studio dell'equazione $T(x) - \lambda x = y$; si esamina poi brevemente la teoria degli operatori integrali con nucleo di Hilbert-Schmidt col fine di ottenere uno sviluppo in serie di funzioni attraverso le autofunzioni ortonormalizzate di tali operatori.

Il terzo capitolo infine tratta brevemente l'esistenza e l'unicitá di soluzioni al problema di Dirichlet in forma classica; si vedrá poi come la soluzione del problema fornisca un ulteriore esempio di operatore compatto.

Indice

Capitolo 1

Operatori compatti.

Questo capitolo costituisce una introduzione a sé stante alla teoria generale degli operatori compatti.
Nel primo paragrafo vengono definiti tali operatori e vengono forniti vari significativi esempi. Il secondo paragrafo contiene una serie di risultati di carattere strutturale inerenti lo spazio degli operatori compatti. Nel terzo paragrafo vengono infine realizzate le premesse necessarie alla dimostrazione di uno dei risultati fondamentali (e dalle molteplici applicazioni) dell'analisi funzionale: il Teorema dell'alternativa di Fredholm-Riesz.

1.1 Definizione ed esempi.

Definizione 1.1. Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{C}$ e sia $T: X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Si dice che T é compatto (o completamente continuo) se per ogni $A\,(\emptyset \neq A \subset X)$ limitato in X risulta $T(A)$ relativamente compatto in Y, cioé $\overline{T(A)}$ compatto in Y.
Equivalentemente: T é compatto se da ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, limitata, si puó estrarre una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $(T(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge in Y.

Lo studio di questo tipo di operatori diventa rilevante se condotto su spazi di Banach (soprattutto spazi di funzioni) non aventi dimensione finita. Un'idea del fatto che lo studio della compattezza di spazi di questo tipo debba necessariamente avvalersi di nuovi strumenti rispetto a quelli utilizzati nello studio della compattezza in spazi finito-dimensionali é data dal seguente teorema dovuto a Riesz.

Teorema 1.1.1.

Se uno spazio di Banach X é tale che la palla chiusa $B = \{x \in X \text{ tale che } \|x\| \leq 1\}$ é compatta allora X ha dimensione finita.

Negli spazi di Banach non possiamo perció sperare di caratterizzare in generale i sottoinsiemi compatti attraverso chiusura e limitatezza.
Enunciamo ora, senza dimostrazione, due risultati fondamentali molto utili a tal proposito. Premettiamo la seguente osservazione.

Osservazione 1. Sia I un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e sia
$C(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathbb{C}),\ \text{continua}\ \}$. $C(I)$ é uno spazio vettoriale e, ponendo $\|f\| = \max_{x\in I} |f(x)|\,\forall f \in C(I)$, risulta essere di Banach.

Teorema 1.1.2 (di Ascoli-Arzelá)**.**

Un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $C(I)$ é relativamente compatto se e solo se é un insieme di funzioni equilimitate ed equicontinue cioé se e solo se:

i) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\| < +\infty$ *(equilimitatezza);*

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ *t.c.* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in I$ *con* $|x - y| < \delta_\varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$ *(equicontinuitá).*

Teorema 1.1.3 (di Riesz-Kolmogorov)**.**

Sia $1 \leq p < +\infty$. Un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $L^p(\mathbb{R})$ é relativamente compatto se e solo se:

i) $\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f\|_p < +\infty$*;*

ii) $\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+y)-f(x)|^p\,dx = 0$ *uniformemente rispetto a* $f\in\mathcal{F}$*;*

iii) $\lim_{M\to+\infty}\int_{|x|>M} |f(x)|^p\,dx = 0$ *uniformemente rispetto a* $f\in\mathcal{F}$*.*

Vediamo adesso, utilizzando i risultati appena enunciati, qualche esempio di operatore compatto.

Esempio 1.1. Sia $I=[0,1]$ (o piú in generale un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$). Se $K\in C(I\times I)$ $K\neq 0$, poniamo, per $x\in I$:

$$T(\varphi)(x) = \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy \qquad \forall\varphi\in C(I).$$

Allora T é compatto.
Sia infatti $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $C(I)$, limitata; esiste allora $M>0$ tale che:

$$\|\varphi_n\| = \max_{x\in I}|\varphi_n(x)| \leq M \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

e si ha:

$$|T(\varphi_n)(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)\varphi_n(y)|\,dy \leq \max_{I\times I}|K(x,y)|\|\varphi_n\| \leq M\max_{I\times I}|K(x,y)| = M';$$

perció $\{T(\varphi_n)\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ é un insieme di funzioni equilimitate.
Siano ora $x,x'\in I$ si ha:

$$|T(\varphi_n)(x) - T(\varphi_n)(x')| \leq \int_0^1 |K(x,y)-K(x',y)||\varphi_n(y)|\,dy;$$

Poiché $I\times I$ é compatto e $K\in C(I\times I)$, per il Teorema di Heine-Cantor K é anche uniformemente continua quindi: $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0$ tale che $\forall x,x'\in I$ con $|x-x'|<\delta_\varepsilon$ e $\forall y\in I$ risulta

$$|K(x,y)-K(x',y)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Dunque:

$$|T(\varphi_n)(x) - T(\varphi_n)(x')| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x, x' \in I \text{ con } |x - x'| < \delta_\varepsilon.$$

Perció $\{T(\varphi_n)\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é un insieme di funzioni equicontinue. Allora per il Teorema di Ascoli-Arzelá, T é compatto.

Esempio 1.2. Sia $K \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ poniamo:

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y) f(y)\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

T é lineare, inoltre:

$$\|T(f)\| = (\int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} K(x,y) f(y)\, dy|^2\, dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|^2\, dy \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2\, dy)\, dx)^{\frac{1}{2}} = \|K\| \|f\|.$$

Dunque $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$. Ora se $\mathcal{F}$ é un sottoinsieme limitato di $L^2(\mathbb{R})$ e sia $\|f\| \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F}$, Per la continuitá di K in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ risulta:

$$\int_{\mathbb{R}} |T(f)(x+y) - T(f)(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} (K(x+y,t) - K(x,t)) f(t)\, dt|^2\, dx \leq$$

$$\leq \|f\|^2 \int_{\mathbb{R}^2} |K(x+y,t) - K(x,t)|^2\, dt\, dx \leq M^2 \int_{\mathbb{R}^2} |K(x+y,t) - K(x,t)|^2 dt\, dx \xrightarrow{|y| \to 0} 0.$$

Inoltre risulta:

$$\int_{|x|>\delta} |T(f)(x)|^2\, dx = \int_{|x|>\delta} |\int_{\mathbb{R}} K(x,y) f(y)\, dy|^2\, dx \leq \|f\|^2 \int_{|x|>\delta} (\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|^2\, dy)\, dx \leq$$

$$\leq M^2 \int_{|x|>\delta} (\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|^2\, dy)\, dx \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$$

Dunque per il teorema di Riesz-Kolmogorov T é compatto.

Osservazione 2. Se T é compatto, allora é limitato.
Sia infatti A un sottoinsieme limitato di X; allora $\overline{T(A)}$ é compatto e dunque limitato. Se $A = \{x \in X,\ \|x\| \leq c\} \quad c > 0$; allora esiste $C > 0$ tale che $\|T(x)\| \leq C$. Poiché $\|\frac{cx}{\|x\|}\| = c$ allora $\forall x \in X$, $x \neq 0$ risulta $\|T(\frac{cx}{\|x\|})\| \leq C$; da cui $\|T(x)\| \leq \frac{C}{c}\|x\|$ (si osservi che questa relazione é banalmente vera anche per $x = 0$).
Dunque T é limitato.

Osservazione 3. Un operatore T puó essere lineare continuo e non compatto. Forniamo qualche esempio.

Esempio 1.3. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita.
L'operatore identico $I : X \longrightarrow X, \quad I(x) = x \quad \forall x \in X$ é continuo ma non compatto. Sia infatti $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ un insieme numerabile di elementi linearmente indipendenti di X e sia X_m il sottospazio generato dai primi m elementi; ora poiché $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ sono linearmente indipendenti X_m risulta essere un sottospazio proprio di $X_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Poiché X_m ha dimensione m, esso é completo e quindi é un sottospazio proprio e chiuso di X_{m+1}, allora esiste $y_2 \in X_2$ tale che:

$$\|y_2\| = 1, \quad \|x - y_2\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in X_1;$$

analogamente esiste $y_3 \in X_3$ tale che:

$$\|y_3\| = 1, \quad \|x - y_3\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in X_2;$$

Iterando questo procedimento si ottiene una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\|y_n - y_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}\ m, n \geq 2,\ m \neq n.$
Posto $A = \{y_2, y_3, \dots\}$ si ha che $I(A) = A$, A limitato ma non relativamente compatto perché se cosí fosse da $(y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ si potrebbe estrarre una sottosuccessione convergente, ma per come abbiamo costruito $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ció é impossibile.
Cosí I non é compatto.

Esempio 1.4. Sia $k \in L^1(\mathbb{R}),\ k \neq 0$ e sia T l'operatore di convoluzione cosí definito:

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y) f(y)\, dy.$$

Per il teorema di Young sulle convoluzioni risulta $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))$,
$1 \leq p \leq +\infty$ e

$$\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|k\|_{L^1(\mathbb{R})}\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Mostriamo che T non é compatto. Sia $[a,b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e indichiamo con $\chi_{[a,b]}$ la relativa funzione caratteristica:

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a,b]; \\ 0 & \text{se } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Vale:

$$T(\chi_{[a,b]})(x) = \int_{[a,b]} k(x-y)\,dy = \int_{[x-b,x-a]} k(t)\,dt.$$

$T(\chi_{[a,b]})$ é una funzione continua su $\mathbb{R}$, se infatti $x' > x$ si ottiene:

$$|T(\chi_{[a,b]})(x) - T(\chi_{[a,b]})(x')| \leq \int_{[x-b,x'-b]} |k(t)|\,dt + \int_{[x-a,x'-a]} |k(t)|\,dt \stackrel{x'\to x}{\longrightarrow} 0.$$

e di piú $T(\chi_{[a,b]})$ é convergente a 0 all'infinito per la sommabilitá di k su tutto $\mathbb{R}$.

Poniamo ora $f = \chi_{[a,b]}$ ed $f_n(x) = f(x+n)$, risulta che $\|f_n\| = \|f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é una successione in $L^p(\mathbb{R})$ limitata dalla norma di f e, d'altra parte $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$T(f_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y+n)\,dy = \int_{\mathbb{R}} k(x+n-t)f(t)\,dt = T(f)(x+n) =$$

$$= \int_{[x+n-b,x+n-a]} k(t)\,dt \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ora se T fosse un operatore compatto dalla successione $(T(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ si dovrebbe poter estrarre una sottosuccessione convergente ad una funzione $g \in L^p(\mathbb{R})$. Essendo $T(f_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ dovrebbe essere $g = 0$ quasi dappertutto, quindi si dovrebbe poter estrarre una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\|T(f_{k_n})\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ma ció é impossibile perché $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\|T(f_n)\| = (\int_{\mathbb{R}} | \int_{[x+n-b,x+n-a]} k(t)\,dt\,|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbb{R}} | \int_{[y-b,y-a]} k(t)\,dt\,|^p\,dy)^{\frac{1}{p}} = cost > 0$$

Dunque T non é compatto.

1.2 Proprietá degli Operatori Compatti.

Teorema 1.2.1.

Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{C}$ e X abbia dimensione finita. Se T é un operatore lineare da X a Y allora T é compatto.

Dimostrazione. Supponiamo che la dimensione di X sia n ed $\{e_1, \dots, e_n\}$ sia una sua base, allora $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ da cui segue $T(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j T(e_j)$, perció $T(X)$ é il sottospazio di Y generato da $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ che possono essere linearmente indipendenti o meno. Dunque $T(X)$ é un sottospazio di Y avente dimensione $\leq n$.
Ricordando che, poiché due spazi normati sullo stesso campo aventi stessa dimensione sono isomorfi, tutte le norme di uno stesso spazio di dimensione finita sono equivalenti; esistono cioé $c_1, c_2 > 0$ tali che:

$$c_1 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \|x\| \leq c_2 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|;$$

perció:

$$\|T(x)\| = \|\sum_{j=1}^{n} \xi_j T(e_j)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|T(e_j)\| \leq \frac{1}{c_1} \max_j \|T(e_j)\| \|x\|$$

da cui si ha che T é continuo. Si ha quindi che se A é un sottoinsieme limitato di X allora $T(A)$ é limitato (se infatti $\|x\| \leq M \quad \forall x \in A$ allora $\|T(x)\| \leq \quad M\|T\| \quad \forall x \in A$); perció anche $\overline{T(A)}$ é limitato e poiché $T(X)$ ha dimensione finita é anche completo quindi $\overline{T(A)} \subseteq T(X)$. Abbiamo quindi ottenuto che $\overline{T(A)}$ é limitato e chiuso, dunque compatto. Allora T é compatto. □

Definizione 1.2. Siano X e Y spazi normati su $\mathbb{C}$ e sia $T : X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Si dice che T é un operatore di dimensione finita se $T(X)$ ha dimensione finita.

Teorema 1.2.2.

Siano X e Y spazi normati su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ di dimensione finita; allora T é compatto.

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme limitato di X, dato che T é continuo $T(A)$ é limitato; $T(A) \subseteq T(X)$ e $T(X)$ ha dimensione finita per ipotesi. Dunque $\overline{T(A)}$ é compatto perché limitato e chiuso abbiamo allora che T é compatto. □

Teorema 1.2.3.

Siano X e Y spazi normati su $\mathbb{C}$. Siano $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$, compatti e $c \in \mathbb{C}$, allora cT e $T_1 + T_2$ sono compatti.

Dimostrazione. Considero $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in X. Poiché T é compatto essa ammette una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che la successione delle immagini attraverso T, $(T(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in Y ma allora anche $((cT)(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge in Y, da cui cT é compatto.
Sempre da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si puó estrarre una sottosuccessione $(x_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $(T_1(x_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}})$ converga in Y; analogamente da $(x_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ si puó estrarre a sua volta una sottosuccessione $(x_{{\mu'}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $(T_2(x_{{\mu'}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converga in Y; allora $((T_1 + T_2)(x_{{\mu'}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge in Y e quindi $T_1 + T_2$ é compatto. □

Teorema 1.2.4.

Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{C}$ e Y sia di Banach.
Se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$ di operatori compatti e se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é tale che $\|T_n - T\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, allora anche T é compatto.
In altri termini lo spazio $\{T \in \mathcal{L}(X,Y),\ T$ compatto $\}$ é sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X,Y)$.

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme limitato di X. Poiché Y é completo allora $T(A)$ é precompatto se e solo se é totalmente limitato. Analogamente poiché $T_n(A)$ é precompatto esso é totalmente limitato; allora $\forall\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito di $T_n(A)$ $\frac{\varepsilon}{3}$-denso in $T_n(A)$, sia esso $\{T_n(x_{n,1}), \ldots, T_n(x_{n,k_n})\}$. Ora esiste $M > 0$ tale che $\|x\| \leq M\,\forall x \in A$ e scegliamo n tale per cui valga $\|T - T_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$. Sia $y \in T(A)$ e $x_y \in A$ tale che $y = T(x_y)$ e sia

$j \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$ in modo tale che valga $\|T_n(x_{n,j}) - T_n(x_y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. (Posso fare tutto ció per: la limitatezza di A, la convergenza di T_n a T in norma e la $\frac{\varepsilon}{3}$-densitá di $\{T_n(x_{n,1}), \ldots, T_n(x_{n,k_n})\}$ in $T_n(A)$).
Allora:

$$\|y - T(x_{n,j})\| = \|T(x_y) - T(x_{n,j})\| \leq \|T(x_y) - T_n(x_y)\| + \|T_n(x_y) - T_n(x_{n,j})\| +$$

$$+ \|T_n(x_{n,j}) - T(x_{n,j})\| \leq \|T - T_n\|\|x_y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_n\|\|x_{n,j}\| < \frac{\varepsilon}{3M}M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M}M =$$

$= \varepsilon$. Dunque $\{T(x_{n,1}), \ldots, T(x_{n,k_n})\}$ é ε-denso in $T(A)$ cioé $T(A)$ é totalmente limitato e quindi precompatto. □

Teorema 1.2.5.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$; se $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, X)$ e T_1 é compatto, allora T_1T_2 e T_2T_1 sono compatti.

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme limitato di X.
$(T_1T_2)(A) = T_1(T_2(A))$ e $T_2(A)$ é limitato perché T_2 é continuo e quindi $T_1(T_2(A))$ é precompatto (perché T_1 é compatto), dunque T_1T_2 é compatto.
D'altra parte $T_2T_1(A) = T_2(T_1(A))$; si ha che $T_1(A)$ é precompatto perché T é compatto e, poiché T_2 é continuo, anche $T_2(T_1(A))$ é precompatto dunque T_2T_1 é compatto. □

Teorema 1.2.6.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ di dimensione infinita. Se $T \in \mathcal{L}(X, X)$ é compatto ed invertibile, allora $T^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$.

Dimostrazione. Se $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ allora $I = TT^{-1}$ é compatto ma ció é contraddittorio con quanto provato nell'osservazione 3. □

Teorema 1.2.7.

Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, compatto. Allora $T(X)$ é separabile.

Dimostrazione. Poniamo $S(0, n) = \{x \in X, \ \|x\| < n\}$, si ha che:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(0, n)$$

e quindi

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(S(0,n)).$$

Ora $S(0,n)$ é limitato e, poiché T é compatto, $T(S(0,n))$ é precompatto e quindi totalmente limitato dunque separabile. Ne segue che $T(X)$, in quanto unione numerabile di insiemi separabili, é separabile. $\square$

Enunciamo ora (senza dimostrazione) il seguente risultato:

Teorema 1.2.8.

Siano X uno spazio normato separabile, e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X^* limitata cioé esista $M > 0$ t.c. $\|f_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora esiste una sottosuccessione di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente fortemente.

Diamo ora una nozione di operatore coniugato negli spazi normati, che negli spazi di Hilbert, risulta essere pressoché equivalente a quella usuale.

Definizione 1.3. Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si chiama coniugato di T l'operatore $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ tale che

$$T^*(y^*)(x) =< T(x)|y^* >= y^*(T(x)) \qquad \forall x \in X \quad \forall y^* \in Y^*.$$

dove con $< x|f >$ indichiamo $f(x)$, con $f \in X^*$.

Teorema 1.2.9.

Siano X e Y spazi normati su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ compatto. Allora anche l'operatore coniugato T^* é compatto.

Dimostrazione. Per definizione di operatore coniugato $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in Y^*, limitata e sia $M > 0$ t.c. $\|f_n\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Essendo T compatto sia $T(X)$ che $\overline{T(X)}$ sono separabili; allora, per l'enunciato precedente, dalla successione $(f_{n|\overline{T(X)}})_{n\in\mathbb{N}}$ si puó estrarre una sottosuccessione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente fortemente, e dato che, sempre per definizione,

$$T^*(\varphi_n)(x) = \varphi_n(T(x)) \qquad \forall x \in X$$

$(T^*(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente.
Sia dunque $\omega(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(T(x)) \quad \forall x \in X$. Risulta $\omega \in X^*$. Per provare che T^* é compatto basterá provare che $T^*(\varphi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega$ in norma.
Supponiamo per assurdo che

$$T^*(\varphi_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \omega$$

allora esistono $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che:

$$\|T^*(\psi_n) - \omega\| > \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché

$$\|T^*(\psi_n) - \omega\| = \sup_{\|x\|=1} |T^*(\psi_n)(x) - \omega(x)| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

esiste x_n tale che:

$$\|x_n\| = 1 \text{ e } |T^*(\psi_n)(x_n) - \omega(x_n)| > \frac{1}{2}\|T^*(\psi_n) - \omega\| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché T é compatto da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si puó estrarre una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $(T(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge in Y, sia dunque $y = \lim_{n\to\infty} T(x_{k_n})$.
Poiché $y \in \overline{T(X)}$ esiste $a := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(y)$, e vale anche $a = \lim_{n\to\infty} \psi_n(y)$.
Risulta:

$$|\psi_n(y) - \psi_n(T(x_{k_m}))| \leq \|\psi_n\|\|y - T(x_{k_m})\| \leq M\|y - T(x_{k_m})\|$$

e quindi passando al limite:

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n(y) - \psi_n(T(x_{k_m}))| \leq M\|y - T(x_{k_m})\|$$

cioé:

$$|a - \omega(x_{k_m})| \leq M\|y - T(x_{k_m})\|.$$

Ne segue che:

$$|T^*(\psi_{k_m})(x_{k_m}) - \omega(x_{k_m})| = |\psi_{k_m}(T(x_{k_m})) - \omega(x_{k_m})| \leq$$

$$\leq |\psi_{k_m}(T(x_{k_m})) - \psi_{k_m}(y)| + |\psi_{k_m}(y) - a| + |a - \omega(x_{k_m})| \leq$$

$$\leq M\|T(x_{k_m}) - y\| + |\psi_{k_m}(y) - a| + M\|y - T(x_{k_m})\| \leq$$
$$\leq 2M\|y - T(x_{k_m})\| + |a - \psi_{k_m}(y)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ma ció é in contraddizione con l'assunto $\|T^*(\psi_{k_m}) - \omega\| > \varepsilon$ e $\|x_{k_m}\| = 1$ $\forall m \in \mathbb{N}$.
Dunque $T^*(\varphi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega$ e ció prova il teorema. □

1.3 Nucleo e Immagine di un Operatore Compatto: il Teorema dell'alternativa.

Teorema 1.3.1.
Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X,X)$ compatto. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ e $\lambda - T : X \overset{su}{\longrightarrow} X$, allora $\lambda - T : X \underset{1-1}{\overset{su}{\longrightarrow}} X$.

Dimostrazione. Sia I l'operatore identico su X, poniamo $\lambda - T = \lambda I - T$.
Supponiamo che esista $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$, tale che:

$$\lambda x_1 - T(x_1) = 0$$

e poniamo

$$T_\lambda = \lambda - T.$$

Se $U \in \mathcal{L}(X,X)$, consideriamo il nucleo di U, $Ker(U) = \{x \in X, U(x) = 0\}$; $Ker(U)$ é chiuso, infatti se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $Ker(U)$ tale che $x_n \longrightarrow x_0$ allora per la continuitá di U, $U(x_0) = 0$, quindi $x_0 \in Ker(U)$.
Risulta inoltre:

$$Ker(T_\lambda) \subset Ker({T_\lambda}^2) \subset \ldots \subset Ker({T_\lambda}^a) \subset \ldots$$

l'inclusione larga $Ker({T_\lambda}^k) \subseteq Ker({T_\lambda}^{k+1})$ é evidente infatti se $x \in Ker({T_\lambda}^k)$ allora ${T_\lambda}^k(x) = 0$ e quindi anche $T({T_\lambda}^k(x)) = 0$ cioé $x \in Ker({T_\lambda}^{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$; proviamo l'inclusione stretta.
Per ipotesi T_λ é suriettiva, allora esiste $x_2 \in X$ tale che $x_1 = T_\lambda(x_2)$ e analogamente esiste $x_3 \in X$ t.c $x_2 = T_\lambda(x_3)$ ecc. Essendo $x_1 \neq 0$ sicuramente anche

$x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \ldots$.
Osservando che:

$$T_\lambda{}^n(x_n) = T_\lambda{}^{n-1}(T_\lambda(x_n)) = T_\lambda{}^{n-1}(x_{n-1}) = \ldots = T_\lambda(x_1) = 0$$

risulta $x_n \in Ker(T_\lambda{}^n)$; ma

$$T_\lambda{}^{n-1}(x_n) = T_\lambda{}^{n-2}(T_\lambda(x_n)) = T_\lambda{}^{n-2}(x_{n-1}) = \ldots = T_\lambda(x_2) = x_1 \neq 0$$

e quindi $x_n \notin Ker(T_\lambda{}^{n-1})$, dunque $Ker(T_\lambda{}^{n-1}) \subset Ker(T_\lambda{}^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Ora abbiamo visto che $Ker(T_\lambda{}^{n-1})$ é un sottospazio proprio e chiuso di $Ker(T_\lambda{}^n)$, allora esiste $y_n \in Ker(T_\lambda{}^n)$ tale che:

$$\|y_n\| = 1 \text{ e } \|x - y_n\| \geq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in Ker(T_\lambda{}^{n-1}),\ n \geq 2$$

Se consideriamo la successione $(T(y_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ per $n > m > 1$ si ha:

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = \|\lambda y_n - (\lambda y_m + T_\lambda(y_n) - T_\lambda(y_m))\|$$

e inoltre:

$$T_\lambda{}^{n-1}(\lambda y_m + T_\lambda(y_n) - T_\lambda(y_m)) = \lambda T_\lambda{}^{n-1}(y_m) + T_\lambda{}^n(y_n) - T_\lambda{}^n(y_m) = 0$$

infatti essendo $n - 1 \geq m,\ y_m \in Ker(T_\lambda{}^{n-1})$, $y_m \in Ker(T_\lambda{}^n)$ e
$y_n \in Ker(T_\lambda{}^n)$.
Dunque

$$\lambda y_m + T_\lambda(y_n) - T_\lambda(y_m) \in Ker(T_\lambda{}^{n-1})$$

e, dividendo per λ anche:

$$y_m + \frac{1}{\lambda}T_\lambda(y_n) - \frac{1}{\lambda}T_\lambda(y_m) \in Ker(T_\lambda{}^{n-1})$$

da cui:

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = |\lambda| \|y_n - (y_m + \frac{1}{\lambda}T_\lambda(y_n) - \frac{1}{\lambda}T_\lambda(y_m))\| \geq \frac{|\lambda|}{2}$$

ció implica che dalla successione $(T(y_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ non é possibile estrarre nessuna sottosuccessione di Cauchy, contro l'ipotesi che T sia compatto.
Quindi $(\lambda - T)(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, cioé $\lambda - T$ é iniettivo. $\square$

Osservazione 4. É giá stato dimostrato che se T é compatto allora anche T^* é compatto, per quanto appena visto abbiamo che se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ allora $(\lambda - T)^*(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = 0$ (in X^*).
Osservando che:

$$< x|(\lambda - T)^*(y^*) >=< (\lambda - T)(x)|y^* >=< \lambda x|y^* > - < x|T^*(y^*) >=$$

$$=< x|\lambda y^* > - < x|T^*(y^*) >=< x|(\lambda - T^*)(y^*) > \qquad \forall x \in X$$

otteniamo che:

$$(\lambda - T)^* = \lambda - T^*.$$

Teorema 1.3.2.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$. Se $T \in \mathcal{L}(X, X)$ é compatto allora $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ l'insieme $Im(\lambda - T) = (\lambda - T)(X)$ é un sottospazio chiuso di X.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $Im(\lambda - T)$ non sia chiuso; esisterá allora una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tale che $(\lambda - T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente a y ma $y \notin Im(\lambda - T)$. Sicuramente $y \neq 0$ se quindi n é abbastanza grande $x_n \notin Ker(\lambda - T)$, e quindi limitandoci a considerare solo questi n, $x_n \notin Ker(\lambda - T)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ora $Ker(\lambda - T)$ é un sottospazio chiuso di X, allora risulta:

$$d_n = d(x_n, Ker(\lambda - T)) > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia $y_n \in Ker(\lambda - T)$ tale che $\|y_n - x_n\| < 2d_n$; risulta $\|x_n - y_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Se cosí non fosse infatti da $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si potrebbe estrarre una sottosuccessione limitata e, essando T compatto, da $(T(x_n - y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ si potrebbe estrarre una sottosuccessione convergente, si essa indicata con $(T(x_{k_n} - y_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Ma abbiamo che:

$$x_n - y_n = \frac{1}{\lambda}[(\lambda - T)(x_n - y_n) + T(x_n - y_n)]$$

e, poiché $y_n \in Ker(\lambda - T)$:

$$(\lambda - T)(x_n - y_n) = (\lambda - T)(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y;$$

quindi $(x_{k_n} - y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e se z é il suo limite si ha che $(\lambda - T(x_{k_n} - y_{k_n})) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ ma anche $(\lambda - T(x_{k_n} - y_{k_n})) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda - T)(z)$ e quindi $y = (\lambda - T)(z)$; ma ció é contrario all'ipotesi $y \notin Im(\lambda - T)$ e dunque $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = +\infty$.
Poniamo ora:

$$u_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$$

si ha $\|u_n\| = 1$ e, alla luce di quanto mostrato finora,

$$(\lambda - T)(u_n) = \frac{1}{\|x_n - y_n\|}(\lambda - T)(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'altra parte possiamo scrivere:

$$u_n = \frac{1}{\lambda}[(\lambda - T)(u_n) + T(u_n)]$$

ma $(\lambda - T)(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata e T compatto, allora da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si puó estrarre una sottosuccessione convergente, sia $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e sia u il suo limite; poiché $(\lambda - T)(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ deve valere $(\lambda - T)(u) = 0$.
Poniamo ora:

$$w_n = y_n + \|x_n - y_n\|u;$$

dato che $y_n, u \in Ker(\lambda - T)$ (che é sottospazio vettoriale di X), anche $w_n \in Ker(\lambda - T)$ e quindi $d_n \leq \|x_n - w_n\|$; ma d'altra parte:

$$x_n - w_n = x_n - y_n - \|x_n - y_n\|u = \|x_n - y_n\|(u_n - u)$$

e quindi

$$d_n \leq \|x_n - w_n\| < 2d_n\|u_n - u\|$$

da cui otterremmo che $\|u_n - u\| > \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, il che é assurdo perché $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u.
Dunque $Im(\lambda - T)$ é chiuso. □

Proposizione 1.3.3. *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$. X ha dimensione finita se e solo se i suoi sottoinsiemi compatti sono tutti e soli quelli limitati e chiusi.*

Teorema 1.3.4.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$. Se $T \in \mathcal{L}(X, X)$ é compatto allora $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $Ker(\lambda - T)$ ha dimensione finita.

Dimostrazione. Sfruttiamo la proposizione precedente e mostriamo che ogni sottoinsieme di $Ker(\lambda - T)$ limitato e chiuso é compatto.
Sia $E \subset Ker(\lambda - T)$, E limitato e chiuso. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in E; essendo E un insieme limitato esiste $M > 0$ t.c. $\|x_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ora $x_n \in Ker(\lambda - T)$ allora

$$(\lambda - T)(x_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda x_n = T(x_n) \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{\lambda}T(x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

poiché T é compatto da $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ si puó estrarre una sottosuccessione convergente ma per quanto scritto sopra allora anche da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si puó estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di E (perché é chiuso per ipotesi). Allora E é compatto. □

Teorema 1.3.5.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X, X)$ compatto.
Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, allora fissato $y \in X$ esiste $x \in X$ tale che

$$y = \lambda x - T(x)$$

se e solo se

$$< y|z^* >= 0 \quad \forall z^* \in X^* \textit{ per cui } \lambda z^* - T^*(z^*) = 0$$

Dimostrazione. Un $x \in X$ tale che $y = \lambda x - T(X)$ esiste se e solo se $y \in Im(\lambda - T)$. Ora $Im(\lambda - T)$ é un sottospazio chiuso di X e, ricordando che $(\lambda - T)^* = \lambda - T^*$, vale $\overline{Im(\lambda - T)} = Ker(\lambda - T^*)^{\perp}$.
Quindi

$$y \in Im(\lambda - T) \Leftrightarrow y \in Ker(\lambda - T^*)^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow < y|z^* >= z^*(y) = 0 \quad \forall z^* \in X^* \text{ per cui } \lambda z^* - T^*(z^*) = 0.$$

□

Osservazione 5. Se $Ker(\lambda - T^*) = \{0\}$ allora $Ker(\lambda - T^*)^\perp = X$ e quindi $\forall y \in X$ esiste $x \in X$ tale che $y = \lambda x - T(x)$

Teorema 1.3.6.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X, X)$ compatto. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$,; allora esiste $M > 0$ tale che

$$\delta(x) = d(x, Ker(\lambda - T)) \leq M\|(\lambda - T)(x)\| \qquad \forall x \in X.$$

Se inoltre $y \in Im(\lambda - T)$ e $y = (\lambda - T)(x)$, allora

$$\|x\| \leq M\|y\|.$$

Dimostrazione. Supponiamo che un tale M non esista. Allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$(\lambda - T)(x_n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \frac{\delta(x_n)}{\|(\lambda - T)(x_n)\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ora $Ker(\lambda - T)$ é un sottospazio chiuso di X di dimensione finita e quindi esiste $y_n \in Ker(\lambda - T)$ tale che $\|x_n - y_n\| = \delta(x_n)$. Poniamo:

$$z_n = \frac{x_n - y_n}{\delta(x_n)};$$

vale:

$$\|z_n\| = 1 \qquad \text{e} \qquad (\lambda - T)(z_n) = \frac{(\lambda - T)(x_n)}{\delta(x_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Da z_n si puó estrarre una sottosuccessione, sia essa $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tale che $(T(z_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente; ma essendo

$$z_n = \frac{1}{\lambda}[(\lambda - T)(z_n) + T(z_n)]$$

e $(\lambda - T)(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ perció $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente; detto z il suo limite deve essere $(\lambda - T)(z) = 0$. Ne segue che $y_n + \delta(x_n)z \in Ker(\lambda - T)$ e quindi:

$$\|z_n - z\| = \frac{\|x_n - (y_n + \delta(x_n)z\|}{\delta(x_n)} \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

ma allora da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non é possibile estrarre una sottosuccessione convergente a z, e questo é assurdo.

Quindi un tale M esiste.
Sia ora $y \in Im(\lambda - T)$. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $y = (\lambda - T)(x_0)$.
Essendo $Ker(\lambda - T)$ un sottospazio chiuso di X di dimensione finita esiste $z \in Ker(\lambda - T)$ tale che

$$\delta(x_0) = d(x_0, Ker(\lambda - T)) = \|x_0 - z\|.$$

Poniamo $x = x_0 - z$ allora $(\lambda - T)(x) = (\lambda - T)(x_0) - (\lambda - T)(z) =$
$= (\lambda - T)(x_0) = y$ e quindi:

$$\|x\| = \|x_0 - z\| = \delta(x_0) \leq M\|(\lambda - T)(x)\| \leq M\|y\|.$$

□

Teorema 1.3.7.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X, X)$ compatto.
Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, allora $Im(\lambda - T^*) = Ker(\lambda - T)^\perp$

Dimostrazione. L'inclusione $Im(\lambda - T^*) \subseteq Ker(\lambda - T)^\perp$ é nota.
Proviamo l'inclusione inversa. Sia $g \in Ker(\lambda - T)^\perp$ $\forall y \in Im(\lambda - T)$ poniamo:

$$f(y) = g(x) \text{ con } (\lambda - T)(x) = y.$$

Mostriamo anzitutto che f é ben definita; infatti se $(\lambda - T)(x) = (\lambda - T)(x') = y$, allora $x - x' \in Ker(\lambda - T)$ e quindi $g(x - x') = 0$ da cui $g(x) = g(x')$.
Ora f é un funzionale lineare su $Im(\lambda - T)$; infatti se $y_1 = (\lambda - T)(x_1)$, $y_2 = (\lambda - T)(x_2)$, allora $f(y_1 + y_2) = g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2) = f(y_1) + f(y_2)$ e se $c \in \mathbb{C}$ e $(\lambda - T)(x) = y$, allora $f(cy) = g(cx) = cg(x) = cf(y)$.
D'altra parte per il teorema precedente esiste $x \in X$ tale che $(\lambda - T)(x) = y$ e $\|x\| \leq M\|y\|$ e dunque

$$|f(y)| = |g(x)| \leq \|g\|\|x\| \leq M\|g\|\|y\|.$$

Dunque f é limitato su $Im(\lambda - T) \subset X$ e quindi per il teorema di Hahn-Banach é possibile prolungarlo con un funzionale lineare continuo F su tutto X. Allora

$$F((\lambda - T)(x)) = g(x) \qquad \forall x \in X$$

cioé

$$< x|g >=< (\lambda - T)(x)|F >=< x|(\lambda - T^*)(F) > \qquad \forall x \in X$$

e quindi $g = (\lambda - T^*)(F)$, ossia $g \in Im(\lambda - T^*)$ e dunque
$Ker(\lambda - T)^\perp \subseteq Im(\lambda - T^*)$ il che prova il teorema. $\square$

Teorema 1.3.8.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X, X)$ compatto.
Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, allora dato $y^* \in X^*$ esiste $x^* \in X^*$ tale che $y^* = \lambda x^* - T^*(x^*)$ se e solo se $y^* \in Ker(\lambda - T)^\perp$ in altre parole se e solo se $y^*(x) = 0 \quad \forall x \in X$ per cui $(\lambda - T)(x) = 0$.

Dimostrazione. Esiste $x^* \in X^*$ tale che $y^* = (\lambda - T^*)(x^*)$ se e solo se $y^* \in Im(\lambda - T^*)$ e quindi se e solo se $y^* \in Ker(\lambda - T^*)^\perp$ ossia se e solo se $y^*(x) = 0 \quad \forall x \in Ker(\lambda - T)$ $\square$

Osservazione 6. Se $Ker(\lambda - T) = \{0\}$ allora $Ker(\lambda - T)^\perp = X^*$ e quindi $\forall y^* \in X^*$ esiste x^* per cui $y^* = (\lambda - T)(x^*)$.

Teorema 1.3.9.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X, X)$ compatto.
Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, e $(\lambda - T)(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, allora $Im(\lambda - T) = X$ e quindi $\forall y \in X$ esiste $x \in X$ tale che $(\lambda - T)(x) = y$.

Dimostrazione. Per ipotesi $Ker(\lambda - T) = \{0\}$. Allora per l'osservazione 6 immediatamente precedente $\forall y^* \in X^*$ esiste $x^* \in X^*$ tale che
$y^* = (\lambda - T^*)(x^*)$, cioé $Im(\lambda - T^*) = X^*$ e quindi per l'osservazione 4 $(\lambda - T^*)$ é $1 - 1$ e *su* in X da cui $Ker(\lambda - T^*) = \{0\}$ e quindi per l'osservazione 5 $\forall y \in X$ esiste $x \in X$ tale che $y = (\lambda - T)(x)$. $\square$

Diamo il seguente risultato senza dimostrazione.

Teorema 1.3.10.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$. Se $x_1, \dots, x_m \in X$ sono linearmente indipendenti, allora esistono $g_1, \dots, g_m \in X^*$ tali che

$$g_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & per\ i = j \\ 0 & per\ i \neq j \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Se $f_1, \dots, f_m \in X^*$ sono linearmente indipendenti, $g \in X^*$ e, indicati con $[f_1, \dots, f_m]$ e $[g]$ i sottospazi di X^* generati da $f_1, \dots, f_m$ e da g, risulta $[f_1, \dots, f_m]^\perp \subseteq [g]^\perp$, allora g é una combinazione lineare di $f_1, \dots, f_m$.
Se $f_1, \dots, f_m \in X^*$ sono linearmente indipendenti, allora esistono $y_1, \dots, y_m \in X$ tali che

$$f_i(y_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Teorema 1.3.11.

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X, X)$ sia compatto. Se $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, allora

$$dim\ Ker(\lambda - T) = dim\ Ker(\lambda - T^*).$$

Dimostrazione. Siano $m = dim\ Ker(\lambda - T)$ e $n = dim\ Ker(\lambda - T^*)$.
Se $m = 0$ allora $Ker(\lambda - T) = \{0\}$ e quindi $Im(\lambda - T) = X$ da cui $Ker(\lambda - T^*) = \overline{Im(\lambda - T)^\perp} = X^\perp = \{0\}$ e quindi $n = m = 0$, (analogamente se $n = 0$ allora $m = 0$).
Supponiamo ora $n > 0,\ m > 0$.
Sia $\{x_1, \dots, x_m\}$ una base di $Ker(\lambda - T)$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$ una base di $Ker(\lambda - T^*)$.
Allora per il teorema precedente esistono $y_1, \dots, y_n \in X$ e $g_1, \dots, g_m \in X^*$ tali che

$$f_i(y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \dots, n\ ; \qquad g_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Supponendo $m < n$ se $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, si ha

$$Im(\lambda - T)^\perp = \overline{Im(\lambda - T)^\perp} = Ker(\lambda - T^*)$$

e quindi, essendo $(\lambda - T)(x) \in Im(\lambda - T)$ e $f_j \in Ker(\lambda - T^*) = Im(\lambda - T)^\perp$,

$$f_j((\lambda - T)(x)) = 0 \qquad \forall x \in X, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Poniamo

$$S = T + \sum_{i=1}^{m} g_i \times y_i \qquad \text{dove } (g_i \times y_i)(x) = g_i(x)y_i;$$

si puó verificare che $\sum_{i=1}^{m} g_i \times y_i$ é un operatore lineare continuo di dimensione finita e quindi compatto; allora anche S é compatto.
Proviamo che $(\lambda - S)$ é iniettivo. Infatti se $(\lambda - S)(x) = 0$ allora $(\lambda - T)(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)y_i$ da cui

$$0 = f_j((\lambda - T)(x)) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)f_j(y_i) = g_j(x) \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(infatti $f_j(y_i) \neq 0$ solo per $i = j$ e in tal caso vale 1) ; e quindi $(\lambda - T)(x) = 0$ cioé $x \in Ker(\lambda - T)$ e quindi $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$.
Ne segue che:

$$0 = g_j(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_j(x_i) = \alpha_j \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

e quindi $x = 0$, dunque $(\lambda - S)$ é $1 - 1$, ma essendo S compatto e quindi $Im(\lambda - S) = X$, esiste $z \in X$ tale che

$$(\lambda - S)(z) = y_{m+1} \ , \qquad \text{(avendo supposto } n > m);$$

perció essendo $f_{m+1}((\lambda - T)(x)) = 0 \ \forall x \in X$ e $f_{m+1}(y_i) = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, m$

$$1 = f_{m+1}(y_{m+1}) = f_{m+1}((\lambda - S)(z)) = f_{m+1}((\lambda - T)(z)) - \sum_{i=1}^{m} g_i(z)f_{m+1}(y_i) = 0$$

da questo assurdo segue che $m \nless n$.
Supponiamo ora $m > n$.
Sia

$$V(f) = T^*(f) + \sum_{i=1}^{n} f(y_i)g_i \ , \qquad f \in X^*.$$

Poiché T^* é compatto e $V - T^*$ é lineare continuo di dimensione finita allora anche V é compatto.
Essendo $\lambda \neq 0$ si ha:

$$Im(\lambda - T^*)^\perp = \overline{(\lambda - T^*)^\perp} = Ker(\lambda - T)$$

perció $x_{n+1} \in Im(\lambda - T^*)^\perp$ dal momento che $x_{n+1} \in Ker(\lambda - T)$.
Mostriamo ore che $(\lambda - V)$ é $1 - 1$. Infatti sia $(\lambda - V)(f) = 0$, allora

$$(\lambda - T^*)(f) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)g_i,$$

da cui

$$(\lambda - T^*)(f)(x_j) =< (\lambda - T)(x_j)|f >= 0$$

e perció

$$0 = (\lambda - T^*)(f)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)g_i(x_j) = f(y_j) \ , \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n \ ;$$

ne segue che $(\lambda - T^*)(f) = 0$ da cui $f \in Ker(\lambda - T^*)$ e quindi possiamo scrivere $f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$.
Allora

$$0 = f(y_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(y_j) = \beta_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

e quindi $f = 0$.
Pertanto $(\lambda - V)$ é $1 - 1$ e quindi $Im(\lambda - V) = X^*$; esiste allora $h \in X^*$ tale che $(\lambda - V)(h) = g_{n+1}$.
Ora essendo $x_{n+1} \in Im(\lambda - T^*)^\perp$ e $g_i(x_{n+1}) = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$1 = g_{n+1}(x_{n+1}) = (\lambda - V)(h)(x_{n+1}) = (\lambda - T^*)(h)(x_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} h(y_i)g_i(x_{n+1}) = 0$$

e questo é assurdo; da ció segue che $m \not> n$.
Dunque $n = m$. $\square$

Teorema 1.3.12 (dell'alternativa di Fredholm-Riesz)**.**
Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X,X)$ sia compatto. Sia $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$.
Allora:

i) *l'equazione*

$$\lambda x - T(x) = 0$$

ha la sola soluzione nulla e allora

$$\lambda x - T(x) = y$$

$\forall y \in X$ ha una ed una sola soluzione;

ii) *l'equazione $\lambda x - T(x) = 0$ ha soluzioni non nulle e allora ne ha un numero finito $\nu = dim\ Ker(\lambda - T)$ di linearmente indipendenti; l'equazione $\lambda x^* - T^*(x^*) = 0$ ha lo stesso numero di soluzioni linearmente indipendenti e l'equazione $\lambda x - T(x) = y$ ha soluzioni se e solo se $y \in Ker(\lambda - T^*)^\perp$.*

Dimostrazione. La dimostrazione é diretta conseguenza dei teoremi 1.3.9, 1.3.11, 1.3.5. □

Capitolo 2

Caso particolare: spazi di Hilbert.

In questo capitolo vengono presi in esame due casi particolari di quanto visto finora: nella prima sezione l'attenzione é posta sulla esistenza e la ricerca esplicita delle soluzioni di equazioni del tipo $T(x)-\lambda x = y$ nell'ambito di operatori compatti e autoaggiunti in uno spazio di Hilbert; la seconda parte é invece una breve trattazione della teoria degli operatori integrali con nucleo di Hilbert-Schmidt, i quali, essendo una particolare tipo di operatori compatti, forniscono un esempio significativo di quanto analizzato fino ad ora.

2.1 Risultati preliminari.

Diamo preliminarmente alcuni risultati di carattere un pò tecnico che saranno poi finalizzati allo studio dell'equazione $T(x) - \lambda x = y$ in uno spazio di Hilbert H (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) con prodotto scalare indicato con $< \cdot, \cdot >$ dove $T \in \mathcal{L}(H, H)$ autoaggiunto e compatto.
Ricordiamo che un $\lambda \in \mathbb{C}$ e un $x \in H,\ x \neq 0$ tali che $T(x) = \lambda x$ si diranno un autovalore e un corrispondente autovettore di T (autofunzione nel caso lo spazio sia uno spazio di funzioni).

Proposizione 2.1.1. *Se T é autoaggiunto allora i suoi autovalori sono reali.*

Dimostrazione. Infatti siano λ e x un autovalore e un corrispondente autovettore, allora

$$\lambda < x, x >=< \lambda x, x >=< T(x), x >=< x, T(x) >=< x, \lambda x >= \overline{\lambda} < x, x >;$$

ed essendo $\|x\|^2 =< x, x >\neq 0$ si ha che $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Proposizione 2.1.2. *Se T é autoaggiunto e λ_1 e λ_2 sono due suoi autovalori distinti e $x_1,\ x_2$ due corrispondenti autovettori, allora $< x_1, x_2 >= 0$.*

Dimostrazione. Si ha:

$$\lambda_1 < x_1, x_2 >=< \lambda_1 x_1, x_2 >=< T(x_1), x_2 >=< x_1, T(x_2) >=< x_1, \lambda_2 x_2 >= \lambda_2 < x_1, x_2 >;$$

e cioé $(\lambda_1 - \lambda_2) < x_1, x_2 >= 0$, ma essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue $< x_1, x_2 >= 0$. □

Proposizione 2.1.3. *Vale*

$$H = \overline{Im(T)} \oplus Ker(T^*).$$

Dimostrazione. Se ció valesse, essendo $Ker(T^*)$ un sottospazio chiuso di H, dovrebbe essere

$$Ker(T^*) = \overline{Im(T)^\perp} = Im(T)^\perp$$

(ricordando che, per la contiunuitá del prodotto scalare, se Y é un sottospazio chiuso di H e $x \perp Y$ allora $x \perp \overline{Y}$).
Ora se $x \in Ker(T^*)$ allora $T^*(x) = 0$ e dunque $< T^*(x), y >=< x, T(y) >= 0$ $\forall y \in H$ e quindi $x \perp Im(T)$.
Viceversa se $x \in Im(T)^\perp$ allora $< x, T(y) >= 0 \quad \forall y \in H$ e quindi $< T^*(x), y >= 0 \quad \forall y \in H$ e quindi $T^*(x) = 0$ cioé $x \in Ker(T^*)$.
Dunque l'uguaglianza é provata. □

Definizione 2.1. Un sottospazio Y di H si dice invariante rispetto a T se $x \in Y \Longrightarrow T(x) \in Y$.

Proposizione 2.1.4. *Se Y é invariante rispetto a T allora $Y^{\perp}$ é invariante rispetto a T^*.*
In particolare se T é autoaggiunto e Y é invariante rispetto a T, allora anche $Y^{\perp}$ é invariante rispetto a T.

Dimostrazione. Infatti se $x \in Y^{\perp}$ e $y \in Y$, si ha $< T^*(x), y >=< x, T(y) >= 0$ e quindi $T^*(x) \in Y^{\perp}$. □

Proposizione 2.1.5. *Se T é autoaggiunto e compatto, $T \neq 0$ allora almeno uno dei valori $\|T\|, -\|T\|$ é un autovalore*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in H tale che $\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e tale che $\|T(x_n)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|T\|$.
Allora

$$0 \leq < T^2(x_n) - \|T(x_n)\|^2 x_n, T^2(x_n) - \|T(x_n)\|^2 x_n >= \|T^2(x_n)\|^2 -$$

$$-2\|T(x_n)\|^4 + \|T(x_n)\|^4 \leq \|T\|^2\|T(x_n)\|^2 - \|T(x_n)\|^4 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

quindi $T^2(x_n) - \|T(x_n)\|^2 x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi anche $T^2(x_n) - \|T\|^2 x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ora poiché T^2 é compatto esiste una sottosuccessione $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $(T(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e, poiché $T^2(x_n) - \|T\|^2 x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, si ha che anche $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente ad un $x \in H$, $\|x\| = 1$ (infatti H é completo e $\|x'_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$).
Ora

$$T^2(x) - \|T\|^2 x = \lim_{n\to\infty}(T^2(x'_n) - \|T\|^2 x'_n) = 0$$

e quindi

$$(T + \|T\|)(T - \|T\|)(x) = 0 = (T - \|T\|)(T + \|T\|)(x);$$

se $(T - \|T\|)(x) = 0$ allora x é un autovettore di autovalore $\|T\|$ in caso contrario x é un autovettore di autovalore $-\|T\|$. □

Diamo ora la definizione di spettro di un operatore lineare.

Definizione 2.2. Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$, sia T un operatore lineare da un sottospazio di X a X; indichiamo con 1 l'operatore identico e, per convenzione, scriviamo $\lambda - T$ invece di $\lambda 1 - T$ dove $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si chiama insieme risolvente di T l'insieme

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ Im(\lambda - T) \text{ é denso in } X \text{ ed esiste } (\lambda - T)^{-1} \text{ limitato } \}.$$

Si chiama spettro continuo di T l'insieme

$$C\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ Im(\lambda - T) \text{ é denso in } X \text{ ed esiste } (\lambda - T)^{-1} \text{ non limitato } \}.$$

Si chiama spettro residuo di T l'insieme

$$R\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ Im(\lambda - T) \text{ non é denso in } X \text{ ed esiste } (\lambda - T)^{-1} \text{ (limitato o no) } \}.$$

Si chiama spettro puntuale di T l'insieme

$$P\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (\lambda - T)^{-1} \text{ non esiste } \}.$$

Si chiama spettro di T l'insieme

$$\sigma(T) = C\sigma(T) \cup R\sigma(T) \cup P\sigma(T).$$

Diamo ora il seguente utile risultato (senza dimostrazione).

Proposizione 2.1.6. *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X, X)$ compatto. Allora:*

i) *$P\sigma(T)$ é al piú numerabile e il solo eventuale punto di accumulazione di $P\sigma(T)$ é lo zero;*

ii) *se $\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$, allora $\lambda \in P\sigma(T)$ oppure $\lambda \in \rho(T)$;*

iii) *se X ha dimensione finita allora $0 \in \sigma(T)$.*

Proposizione 2.1.7. *Se T é autoaggiunto e compatto allora H ha una base ortonormale di autovettori di T*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.1.6 precedente se $\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$, allora $\lambda \in \rho(T)$ oppure $\lambda \in P\sigma(T);\ 0 \in \sigma(T);\ P\sigma(T)$ é al piú numerabile e il solo eventuale suo punto di accumulazione é lo zero.
Siano dunque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ gli autovalori distinti non nulli di T e sia

$$H_j = \{x \in H;\ T(x) = \lambda_j x\}.$$

Questo é un sottospazio di H, é invariante rispetto a T (infatti se $x \in H_j$ allora $T(T(x)) = T(\lambda_j x) = \lambda_j T(x)$ e quindi anche $T(x) \in H_j$) e, per il teorema 1.3.4, é di dimensione finita, sia $\{x_1^j, \ldots, x_{n(j)}^j\}$ una sua base ortonormale. Per il risultato 2.1.2 vale che $H_i \perp H_j$ se $i \neq j$. Dunque $\{x_1^1, \ldots, x_{n(1)}^1, x_1^2, \ldots, x_{n(2)}^2, \ldots\}$ é un sistema ortonormale per H.
Sia X il sottospazio di H generato dai vettori $\{x_1^1, \ldots, x_{n(1)}^1, x_1^2, \ldots, x_{n(2)}^2, \ldots\}$, proviamo che $\overline{X} = \overline{Im(T)}$.
Si ha che X, e quindi anche $\overline{X}$, é invariante rispetto a T; allora anche $X^\perp$ é invariante rispetto a T; ora $X^\perp$ é di Hilbert (é chiuso in uno spazio di Hilbert); $T_{|X^\perp}$ é lineare continuo autoaggiunto e compatto da $X^\perp$ a $X^\perp$. Se fosse $T_{|X^\perp} \neq 0$ per il risultato 2.1.5 esisterebbe un autovalore non nullo, ció é tuttavia impossibile perché se μ é un autovalore non nullo e x un corrispondente autovettore di $T_{|X^\perp}$, allora poiché tutti gli autovalori non nulli di T sono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ μ deve per forza coincidere con uno si questi e quindi x deve essere un elemento di X, allora avremmo $x \in X \cap X^\perp$ e cioé $x = 0$, contro l'ipotesi.
Dunque é $T_{|X^\perp} = 0$ e quindi $X^\perp \subset Ker(T)$ e quindi per la proposizione 2.1.3 $\overline{Im(T)} = Ker(T)^\perp \subseteq \overline{X}$. Ma $H_j \subseteq Im(T) \quad \forall j$ e quindi $\overline{X} = \overline{Im(T)}$.
Dunque $H = \overline{X} \oplus Ker(T)$, e pertanto se $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ é una base ortonormale per $Ker(T)$ allora $\{x_1^1, \ldots, x_{n(1)}^1, x_1^2, \ldots, x_{n(2)}^2, \ldots\} \cup \{x_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ é una base ortonormale per H costituita di autovettori di T.
Quindi:

$$\begin{array}{cccc} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ \{x_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\} & \{x_1^1, \ldots, x_{n(1)}^1\} & \{x_1^2, \ldots, x_{n(2)}^2\} & \ldots \\ Ker(T) & H_1 & H_2 & \ldots \end{array}$$

Cioé
$$H = Ker(T) \oplus \overline{(\bigoplus_j H_j)}.$$

□

Osservazione 7. Sia T operatore lineare autoaggiunto e compatto e sia $\{x_\beta;\ \beta \in \mathcal{B}\}$ una base ortonormale per H costituita di autovettori di T. Allora $\forall x \in H$ l'insieme $\{< x, x_\beta >;\ < x, x_\beta >\neq 0\}$ é finito o numerabile e

$$x = \sum_\beta < x, x_\beta > x_\beta \quad , \qquad \|x\|^2 = \sum_\beta | < x, x_\beta > |^2.$$

Convenzione: D'ora in avanti una base ortonormale di H, costituita da autovettori di T (autoaggiunto e compatto) verrá indicata con

$$\{e_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{e_1, e_2, \ldots\}$$

intendendo che $\{e_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ sia una base di $Ker(T)$ ed $\{e_1, e_2 \ldots\}$ una base di $\overline{Im(T)}$; l'autovalore (non nullo) corrispondente a e_j si indicherá con λ_j; quindi i λ_j che ora consideriamo sono gli stessi considerati finora ma ognuno ripetuto tante volte quant'é la sua molteplicitá; precisamente se $e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n(j)}}$ é una base di H_j, allora $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2} = \ldots = \lambda_{j_{n(j)}}$.

Proposizione 2.1.8. *Se T é autoaggiunto e compatto allora esso é semidefinito positivo se e solo se $\lambda_j > 0 \quad \forall j$.*

Dimostrazione. Infatti:

$$< T(x), x >=< \sum_j \lambda_j < x, e_j >, \sum_\alpha < x, e_\alpha > + \sum_j < x, e_j > e_j >= \sum_j \lambda_j | < x, e_j > |^2.$$

Quindi T é semidefinito positivo se e solo se $\lambda_j > 0 \quad \forall j$; inoltre T é definito positivo se e solo se $\lambda_j > 0$ e l'equazione $T(x) = 0$ ha la sola soluzione nulla, cioé se e solo se $\lambda_j > 0$ e T é invertibile. □

Proposizione 2.1.9. *Sia T autoaggiunto e compatto. Allora:*

i) *L'equazione $T(x) = \lambda x + y$, se $\lambda \neq 0$ non é autovalore di T, ha una ed una sola soluzione $\forall y \in H$ e questa é:*

$$\sum_j \frac{<y, e_j>}{\lambda_j - \lambda} e_j - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{<y, e_\alpha>}{\lambda} e_\alpha.$$

ii) *Se $\lambda \neq 0$ é un autovalore di T allora l'equazione $T(x) = \lambda x + y$ ha soluzione se e solo se y é ortogonale a tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ e in questo caso ogni soluzione é fornita da:*

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda_j \neq \lambda}} \frac{<y, e_j>}{\lambda_j - \lambda} e_j + \sum_{\substack{j \\ \lambda_j \neq \lambda}} c_j e_j - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{<y, e_\alpha>}{\lambda} e_\alpha$$

dove le c_j sono un numero finito di costanti arbitrarie.

iii) *Se $\lambda = 0$ allora l'equazione $T(x) = y$ ha soluzione se e solo se $<y, e_\alpha> = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$ e $\displaystyle\sum_j \frac{|<y, e_j>|^2}{\lambda_j^2} < +\infty$; in tal caso le soluzioni sono della forma:*

$$\sum_j \frac{<y, e_j>}{\lambda_j} e_j + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha e_\alpha$$

dove le c_α sono costanti delle quali al piú un'infinitá numerabile é diversa da zero e $\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |c_\alpha|^2 < +\infty$.

Dimostrazione. Ogni elemento di H lo si puó scrivere:

$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha e_\alpha + \sum_j c_j e_j$$

dove i c_α diversi da zero sono al piú un'infinitá numerabile e sia $\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |c_\alpha|^2 + \sum_j |c_j|^2 < +\infty$.
Vale $T(x) = \displaystyle\sum_j c_j \lambda_j e_j$ (essendo $\{e_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ una base di $Ker(T)$ e λ_j autovalori per T con la convenzione descritta in precedenza).
Sia allora $0 \neq \lambda \neq \lambda_j \quad \forall j$; vale:

$$\sum_j c_j \lambda_j e_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda c_\alpha e_\alpha + \sum_j \lambda c_j e_j + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} <y, e_\alpha> e_\alpha + \sum_j <y, e_j> e_j \qquad (*)$$

da ció, uguagliando i coefficienti, si ricava

$$c_j = \frac{< y, e_j >}{\lambda_j - \lambda}\ ; \qquad c_\alpha = -\frac{< y, e_\alpha >}{\lambda}$$

e quindi

$$x = \sum_j \frac{< y, e_j >}{\lambda_j - \lambda} e_j - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \frac{< y, e_\alpha >}{\lambda} e_\alpha .$$

Poiché per la proposizione 2.1.6 il solo eventuale punto di accumulazione di $\{\lambda_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ é 0, esiste $c > 0$ tale che $|\lambda_j - \lambda| \geq c$ essendo $\sum_j | < y, e_j, > |^2 + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} | < y, e_\alpha > |^2 < +\infty$ si ha che $x \in H$ (questo perché anche $\sum_j |\frac{< y, e_j, >}{\lambda_j \lambda}|^2 + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\frac{< y, e_\alpha >}{\lambda}|^2 < +\infty$).
Sia $\lambda \neq 0$ un autovalore di T; allora $(*)$ diventa:

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda_j\neq\lambda}} c_j \lambda_j e_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda c_\alpha e_\alpha + \sum_{\substack{j \\ \lambda_j\neq\lambda}} \lambda c_j e_j + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} < y, e_\alpha > e_\alpha + \sum_j < y, e_j > e_j;$$

occorre quindi che sia $< y, e_j >= 0$ per tutti i j per cui $\lambda = \lambda_j$; se tale condizione é soddisfatta allora é

$$x = \sum_j \frac{< y, e_j >}{\lambda_j - \lambda} e_j - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \frac{< y, e_\alpha >}{\lambda} e_\alpha + \sum_{\substack{j \\ \lambda_j\neq\lambda}} c_j e_j$$

dove gli c_j sono costanti in numero finito e arbitrarie.
Sia infine $\lambda = 0$, allora la $(*)$ diventa

$$\sum_j c_j \lambda_j e_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} < y, e_\alpha > e_\alpha + \sum_j < y, e_j > e_j;$$

e pertanto deve essere $< y, e_\alpha >= 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$, cioé $y \perp Ker(T)$ e $c_j = \frac{<y,e_j>}{\lambda_j}$ e c_α arbitrario, tuttavia perché x possa essere un elemento di H deve essere $\sum_j \frac{| < y, e_j > |^2}{\lambda_j^2} < +\infty$ e le c_α possono essere prese ad arbitrio purché diversi da zero in al piú in un'infinitá numerabile e tali che valga $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |c_\alpha|^2 < +\infty$. $\square$

2.2 Nuclei di Hilbert-Schmidt

Definizione 2.3. Sia A un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$. Una funzione $K \in L^2(A \times A)$ si dice che é un nucleo di Hilbert-Schmidt se

$$K(x,y) = \overline{K(x,y)} \qquad \forall (x,y) \in A \times A.$$

Sia ora T l'operatore definito ponendo

$$T(f)(x) = \int_A K(x,y) f(y)\, dy\ , \qquad \forall f \in L^2(A).$$

Allora T é lineare da $L^2(A)$ a $L^2(A)$, compatto (vedere nel capitolo sugli operatori compatti l'esempio 1.2) e autoaggiunto.
Siano $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ le autofunzioni ortonormalizzate di T (cioé $< \varphi_i, \varphi_j >= 0$ per $i \neq j$ e $< \varphi_i, \varphi_i >= 1 \quad \forall i$) corrispondenti agli autovalori non nulli $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (con la convenzione giá usata in precedenza).

Teorema 2.2.1.
Nelle notazioni precedenti, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} \qquad (1)$$

converge a $K(x,y)$ per quasi-ogni $x \in A$ in $L^2_y(A)$ e per quasi-ogni $y \in A$ in $L^2_x(A)$.

Dimostrazione. Per quasi-ogni $x \in A$ abbiamo

$$\int_A |K(x,y)|^2\, dy < +\infty \qquad (2).$$

Sia $\{\psi_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ una base ortonormale di $Ker(T)$; allora $B = \{\overline{\varphi_j},\ \overline{\psi_\alpha};\ \alpha \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \dots \}$ é una base ortonormale di $L^2(A)$.
Sia ora x un punto di A per cui valga la (2); allora $K(x, \cdot) \in L^2(A)$ e quindi

$$K(x,y) \overset{L^2_y}{=} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} < K(x,\cdot), \overline{\psi_\alpha} > \overline{\psi_\alpha}(y) + \sum_j < K(x,\cdot), \overline{\varphi_j} > \overline{\varphi_j}(y).$$

Ma essendo $\overline{\psi_\alpha} \in Ker(T)$ vale

$$< K(x,\cdot), \overline{\psi_\alpha} >= \int_A K(x,y)\psi_\alpha(y)\ dy = 0,$$

mentre

$$< K(x,\cdot), \overline{\varphi_j} >= \int_A K(x,y)\varphi_j(y)\ dy = \lambda_j \varphi_j(x).$$

Sostituendo si ha la prima affermazione, la seconda segue in modo analogo.

□

Osservazione 8. Si ha anche

$$K(x,y) \overset{L^2(A\times A)}{=} \sum_j \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi(y)}.$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\{\varphi_j(x), \psi_\alpha(x),\ j = 1,2,\dots,\ \alpha \in \mathcal{A}\} \times$ $\times\ \{\overline{\varphi_j}(y), \overline{\psi_\alpha},\ j = 1,2,\dots,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ é una base ortonormale per $L^2(A \times A)$ e, indicando con $<<,>>$ il prodotto scalare in $L^2(A \times A)$, risulta

$$<< K(x,y), \varphi_i(x)\overline{\varphi_j}(y) >>= \begin{cases} \lambda_j & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases},$$

e

$$0 =<< K(x,y), \varphi_i(x)\overline{\psi_\alpha}(y) >>=<< K(x,y), \psi_\alpha \overline{\varphi_i}(y) >>=<< K(x,y), \psi_\alpha(x)\overline{\psi_\beta}(y) >> .$$

Scrivendo lo sviluppo di $K(x,y)$ rispetto alla base ortonormale scritta sopra e sostituendo quanto appena trovato si ha l'uguaglianza voluta. □

Osservazione 9. Nelle notazioni precedenti poniamo

$$\begin{cases} K_1(x,y) = K(x,y) \\ K_k(x,y) = \int_A K(x,t)K_{k-1}(t,y)\ dt, \qquad k = 2,3,\dots \end{cases}$$

ogni K_n risulta essere in $L^2(A \times A)$ un nucleo di Hilbert-Schmidt infatti, ragionando per induzione:

$$\int_{A\times A} |K_k(x,y)|^2\ dxdy \leq \int_{A\times A} |K(x,t)|^2\ dtdx\ \int_{A\times A} |K_{k-1}(t,y)|^2\ dtdy;$$

é anche

$$K_k(x,y) = \int_A K_{k-1}(x,t)K(t,y)\ dt;$$

quindi:

$$\overline{K_k(x,y)} = \int_A \overline{K(y,t)}\ \overline{K_{k-1}(t,x)}\ dt = \int_A K_{k-1}(x,t)K(t,y)\ dt = K_k(x,y).$$

Risulta

$$T^k(f)(x) = \int_A K_k(x,y)f(y)\ dy \qquad f \in L^2(A)$$

T^k é quindi un operatore lineare compatto autoaggiunto da $L^2(A)$ a $L^2(A)$.
Si ha che

$$T^k(\varphi_j) = T^{k-1}(T(\varphi_j)) = \lambda_j T^{k-1}(\varphi_j) = \ldots = \lambda_j^k \varphi_j.$$

D'altra parte $T^k(\psi_\alpha) = T^{k-1}(T(\psi_\alpha)) = T^{k-1}(0) = 0$. Se $f \in L^2(A)$ allora $f = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} < f, \psi_\alpha > \psi_\alpha + \sum_j < f, \varphi_j > \varphi_j$ e quindi, essendo T^k continuo,

$$T^k(f) = \sum_j \lambda_j^k < f, \varphi_j > \varphi_j.$$

Questo assicura che le autofunzioni di T^k sono le stesse di T e gli autovalori non nulli sono $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots$.
Per il teorema 2.2.1 quindi si ha:

$$K_m(x,y) \overset{L^2_y}{=} \sum_j \lambda_j^m \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}\ , \qquad m \geq 1,$$

per quasi-ogni $x \in A$.
Da qui segue che

$$K_k(x,x) = \int_A K(x,y)K_{k-1}(y,x)\ dy = \int_A K(x,y) \sum_j \lambda_j^{k-1}\varphi_j(y)\overline{\varphi_j(x)}\ dy =$$

$$= \sum_j \lambda_j^{k-1}\overline{\varphi_j(x)} \int_A K(x,y)\varphi_j(y)\ dy = \sum_j \lambda_j^{k-1}\overline{\varphi_j(x)}\lambda_j\varphi_j(x) = \sum_j \lambda_j^k |\varphi_j(x)|^2 \qquad \text{q.d.} \qquad (3).$$

La funzione $x \longmapsto K_2(x,x)$ é sommabile su A perché

$$\int_A K_2(x,x)\ dx = \int_A (\int_A K(x,y)\ K(y,x)\ dy)\ dx = \int_{A\times A} |K(x,y)|^2\ dxdy;$$

allora $(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^2|\varphi_j(x)|^2)_{k\in\mathbb{N}}$ risulta essere una successione di crescente di funzioni sommabili che converge a K_2 che é una funzione sommabile e quindi, applicando il Teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona risulta

$$\int_A K_2(x,x)\ dx = \sum_j \lambda_j^2 \int_A |\varphi_j(x)|^2\ dx = \sum_j \lambda_j^2.$$

Ora esiste un n_0 tale che $|\lambda_j| < 1$ per $j \geq n_0$, allora dalla (3) per il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue si ha, per $k > 2$,

$$\int_A K_k(x,x)\ dx = \sum_j \lambda_j^k \int_A |\varphi_j(x)|^2\ dx = \sum_j \lambda_j^k.$$

Teorema 2.2.2 (di Mercer)**.**

Sia K un nucleo di Hilbert-Schmidt continuo e tale che l'operatore T sia semidefinito positivo. Allora la serie

$$\sum_j \lambda_j\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)} \qquad \forall (x,y) \in A \times A,$$

converge a $K(x,y)$ assolutamente ed uniformemente su $A \times A$.

Dimostrazione. In questo contesto φ_j é una funzione continua per cui

$$\int_A K(x,y)\varphi_j(y)\ dy = \lambda_j\varphi_j(x)\ , \qquad \|\varphi_j\|_2 = 1.$$

Proviamo che $K(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in A$. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in A$ tale che $K(x_0,x_0) = -\delta < 0$ essendo K continuo esisterá una palla S_0 di centro x_0 tale che $\Re e\ K(x,y) < -\frac{\delta}{2} \quad \forall x,y \in S_0 \cap A$; sia χ_0 la funzione caratteristica di $S_0 \cap A$; piché T é per ipotesi semidefinito positivo si ha

$$0 \leq < T(\chi_0),\chi_0 >= \int_A (\int_A K(x,y)\chi_0(y)\ dy)\overline{\chi_0(x)}\ dx = \int_{(A\cap S_0)^2} K(x,y)\ dxdy.$$

da cui

$$0 \leq \int_{(A\cap S_0)^2} \Re e\ K(x,y)\ dxdy < -\frac{\delta}{2}(\mu(A\cap S_0))^2,$$

il che é assurdo.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$T_k(f)(x) = \int_A (K(x,y) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}) f(y)\ dy\ , \qquad f \in L^2(A).$$

Alla luce di tutto quanto dimostrato finora il nucleo di T_k é continuo e di Hilbert-Schmidt; T_k é autoaggiunto; risulta: $T_k(\psi_\alpha) = 0$, $T_k(\varphi_j) = 0$ per $j = 1, 2, \ldots, k$ e $T_k(f) = \sum_{j>k} < f, \varphi_j > \varphi_j$; pertanto gli autovalori non nulli di T_k sono $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots$. Ora poiché T é semidefinito positivo i suoi autovalori sono tutti non negativi, ma allora in particolare anche T_k é semidefinito positivo e, per quanto si é giá visto, risulta

$$K(x,x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2 \geq 0$$

e quindi

$$\sum_j \lambda_j |\varphi_j(x)|^2 \leq K(x,x). \qquad (4)$$

Dalla convergenza di $\sum_j \lambda_j |\varphi_j(z)|^2 \quad \forall z \in A$ e da

$$\sum_{j=k+1}^{k+p} \lambda_j |\varphi_j(x)|\ |\varphi_j(y)| = \sum_{j=k+1}^{k+p} \sqrt{\lambda_j} |\varphi_j(x)|\ \sqrt{\lambda_j} |\varphi_j(y)| \leq$$

$$\leq (\sum_{j=k+1}^{k+p} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=k+1}^{k+p} \lambda_j |\varphi_j(y)|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

segue che $\sum_j \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$ converge assolutamente in ogni punto $(x,y) \in A \times A$.

Sempre per le (4) e (5) si ha

$$|\sum_{j=k+1}^{k+p} \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}| \leq (\sum_{j=k+1}^{k+p} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2)^{\frac{1}{2}} (\max_{y \in A} K(y,y))^{\frac{1}{2}}$$

e quindi $\sum_j \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$ converge uniformemente rispetto ad $y \in A$ per ogni $x \in A$ fissato. Indicata con $L(x,y)$ la somma della serie $\sum_j \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$; risulta, per ogni f misurabile e limitata

$$\int_A L(x,y)f(y)\ dy = \sum_j \lambda_j \varphi_j(x) < f, \varphi_j > .$$

Ma $\forall x \in A$ risulta $K(x,y) \stackrel{L^2_y}{=} \sum_j \lambda_j \varphi_j \overline{\varphi_j}$ e quindi

$$\int_A K(x,y)f(y)\ dy = \sum_j \lambda_j \varphi_j(x) < f, \varphi_j >$$

e cosí otteniamo

$$\int_A (K(x,y) - L(x,y))f(y)\ dy = 0 \qquad \forall f \text{ misurabile e limitata,}$$

in particolare scegliendo $f(y) = \overline{K(x,y)} - \overline{L(x,y)}$ si ha

$$\int_A |K(x,y) - L(x,y)|^2\ dy = 0$$

ma K é continua per ipotesi ed $L(x,\cdot)$ é continua in quanto somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue; allora deve essere $K(x,y) = L(x,y) \quad \forall x, y \in A$ e in particolare

$$K(x,x) = \sum_j \lambda_j |\varphi_j(x)|^2. \qquad (6)$$

Poiché $(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j |\varphi_j|^2)_{k\in\mathbb{N}}$ é una successione crescente di funzioni continue convergente ad una funzione continua, per il Lemma di Dini essa converge uniformemente; perció fissato $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che

$$\sum_{j>n_\varepsilon} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2 < \varepsilon \qquad \forall x \in A$$

e quindi dalla (5) segue che la serie $\sum_j \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$ converge a $K(x,y)$ assolutamente ed uniformemente su $A \times A$. $\square$

Osservazione 10. Dalla (6) nella dimostrazione del teorema di Mercer segue

$$\int_A K(x,x)\,dx = \sum_j \lambda_j.$$

Osservazione 11. Il teorema di Mercer sussiste anche se T non fosse semidefinita positiva (risp. negativa); é sufficiente che T abbia solo un numero finito di autovalori negativi (positivi).

Teorema 2.2.3 (di Hilbert-Schmidt)**.**

Sia K un nucleo di Hilbert-Schmidt e siano $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ le autofunzioni ortonormalizzate dell'operatore di nucleo K corrispondenti agli autovalori non nulli $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Sia $f \in L^2(A)$ e

$$g(x) = \int_A K(x,y)f(y)\,dy.$$

Allora

$$g \overset{L^2}{=} \sum_j < g, \varphi_j > \varphi_j. \qquad (7)$$

Se inoltre esiste $M > 0$ tale che

$$\int_A |K(x,y)|^2\,dy \leq M \qquad \forall x \in A \qquad (8)$$

allora la serie $\sum_j < g, \varphi_j > \varphi_j$ converge assolutamente e uniformemente.

Dimostrazione. Indichiamo come al solito con T l'operatore di nucleo K, poiché $L^2(A) = \overline{Im(T)} \oplus Ker(T)$ dal momento che $g \in Im(T)$, la (7) é giá verificata.
Per verificare la (8) abbiamo che, $\forall x \in A$,

$$K(x,y) \overset{L^2_y}{=} \sum_j \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)};$$

e perció

$$g(x) = \int_A \sum_j \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}f(y)\,dy = \sum_j < f, \lambda_j \varphi_j > \varphi_j(x) =$$

$$= \sum_j < f, T(\varphi_j) > \varphi_j(x) = \sum_j < T(f), \varphi_j > \varphi_j(x) = \sum_j < g, \varphi_j > \varphi_j(x).$$

Da qui segue che la serie $\sum_j < g, \varphi_j > \varphi_j(x)$ converge puntualmente.

Ora da $g = T(f) = \sum_j \lambda_j < f, \varphi_j > \varphi_j$ segue che $< g, \varphi_j >= \lambda_j < f, \varphi_j >$ e, poiché $\sum_j | < f, \varphi_j > |^2 < +\infty$ allora anche $\sum_j \frac{| < g, \varphi_j > |^2}{\lambda_j^2} < +\infty$.

Ne segue che

$$\sum_{j=k+1}^{k+p} | < g, \varphi_j > | \, |\varphi_j(x)| = \sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{| < g, \varphi_j > |}{\lambda_j} \lambda_j |\varphi_j(x)| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{| < g, \varphi_j > |^2}{\lambda_j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=k+1}^{k+p} \lambda_j^2 |\varphi_j(x)| \right)^{2} \frac{1}{2} \leq M \left(\sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{| < g, \varphi_j > |^2}{\lambda_j^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

essendo $\sum_j \lambda_j^2 |\varphi_j(x)|^2 = K_2(x, x) = \int_A |K(x, y)|^2 \, dy \leq M^2$.

Dunque, sotto l'ipotesi (8) la serie $\sum_j < g, \varphi_j > \varphi_j(x)$ converge assolutamente e uniformemente con somma $g(x)$. $\square$

Capitolo 3

Il problema di Dirichlet

In questo capitolo vederemo, molto brevemente, la risoluzione in forma classica (attraverso una formulazione debole) del problema di Dirichlet, problema affrontato in passato dai piú importanti matematici in tutte le sue molteplici varianti e ancora maggiori applicazioni, soprattutto nell'ambito dell'elettromagnetismo e della fluidodimanica.
La primissima parte é formata da alcuni risultati cardine dell'analisi funzionale negli spazi di Hilbert quali il Teorema di Riesz e il Teorema di Lax-Milgram; in seguito, dopo aver formulato il problema ed averne determinato le condizioni di esistenza ed unicitá delle soluzioni, si vedrá la sua formulazione inversa come particolare esempio di operatore compatto.

Teorema 3.0.4 (di Riesz)**.**

Sia X uno spazio di Hilbert, $f \in X^*$. Allora esiste uno ed uno solo $x_f \in X$ t.c. $f(x) = <x, x_f> \ \forall x \in X$. Inoltre $\|f\|_{X^*} = \|x_f\|_X$.

Dimostrazione. Se $f = 0$ basta che sia $x_f = 0$.
Suppongo quindi $f \neq 0$.
Dimostriamo innanzitutto l'unicitá. Se vale $f(x) =< x, x_f >=< x, x'_f >$ allora per linearitá si ha che $< x, x_f - x'_f >= 0 \quad \forall x \in X$ se considero in particolare $x = x_f - x'_f$ allora si ha $\|x_f - x'_f\| = 0$ e quindi $x_f = x'_f$.
Mostriamo ora che un tale x_f esiste.
Sia $f \in X^*, \quad f \neq 0$, abbiamo giá visto in precedenza che il nucleo di f,

$Ker(f)$ é un sottospazio chiuso di X perció esiste $y \in Ker(f)^{\perp}$, $\quad y \neq 0$, pongo

$$x_f = \alpha y \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ (da determinare)}.$$

Osserviamo ora che se $z \in Ker(f)^{\perp}$ allora z é della forma $z = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (cioé che $Ker(f)^{\perp}$ ha dimensione 1). Vale $f(y) \neq 0$ in quanto $y \neq 0$ e $y \notin Ker(f)$, poniamo quindi $\lambda = \frac{f(z)}{f(y)}$ e mostriamo che $z - \frac{f(z)}{f(y)}y = 0$. Infatti

$$z - \frac{f(z)}{f(y)}y \in Ker(f)^{\perp}$$

(é combinazione di elementi di $Ker(f)^{\perp}$ che é vettoriale); inoltre

$$f(z - \frac{f(z)}{f(y)}y) = f(z) - \frac{f(z)}{f(y)}f(y) = 0$$

cioé $z - \frac{f(z)}{f(y)}y \in Ker(f)$ ma essendo $Ker(f)$ chiuso in X allora $Ker(f) \cap Ker(f)^{\perp} = \{0\}$, allora $z = \frac{f(z)}{f(y)}y$.
Facciamo ora vedere che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che se $x_f = \alpha y$ allora $f(x) =< x, x_f >$.
Siano P e Q le proiezioni ortogonali rispettivamente su $Ker(f)$ e su $Ker(f)^{\perp}$, allora poiché $Qz \in Ker(f)^{\perp}$ allora $Qz = \lambda y$ e inoltre $Pz = z - Qz = z - \lambda y \in Ker(f)$ da cui $f(z - \lambda y) = 0$ cioé $\lambda = \frac{f(z)}{f(y)}$.
Ora posso scrivere

$$x = Px + Qx = (x - \frac{f(x)}{f(y)}y) + \frac{f(x)}{f(y)}y$$

e impongo che valga

$$f(x) =< x, x_f >=< x, \alpha y >=< x - \frac{f(x)}{f(y)}y + \frac{f(x)}{f(y)}y, \alpha y >=$$

$$=< x - \frac{f(x)}{f(y)}y, \alpha y > + \alpha\frac{f(x)}{f(y)} < y, y >= \alpha\frac{f(x)}{f(y)}\|y\|^2$$

questo perché $< x - \frac{f(x)}{f(y)}y, \alpha y >= 0$ essendo il primo membro in $Ker(f)$ e il secondo in $Ker(f)^{\perp}$; scegliendo quindi $\alpha = \frac{f(y)}{\|y\|^2}$, che é unico e non dipendente da x, il teorema é provato. □

Teorema 3.0.5 (di Lax-Milgram)**.**

Sia X uno spazio di Hilbert, $Q : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare, tale che:

i) *$|Q(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in X$ (condizione di limitatezza);*

ii) *$Q(x,x) \geq \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \in X, \quad \lambda > 0$ (condizione di coercivitá).*

Allora $\forall f \in X^*$ esiste uno ed uno solo $x_f \in X$ t.c $f(x) = Q(x, x_f)$ $\forall x \in X$.

Ai fini di questa trattazione é in realtá sufficiente una versione piú semplice del teorema in cui é richiesto che la forma bilineare Q sia anche simmetrica, in tal caso ponendo $\|x\|' = Q(x,x)^{1/2}$ otteniamo in X una nuova norma equivalente a quella precedente (dalle condizioni di limitatezza e coercivitá). Il teorema in questa forma é quindi sostanzialmente dato dal Teorema di Riesz prendendo come prodotto interno proprio Q.
Esaurite le premesse procediamo verso la formulazione del problema di Dirichlet.

Definizione 3.1. Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ t.c. $\partial\Omega = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{s} V_j$ con V_j (n-1)-varietá di classe C^k compatte e disgiunte e tali che esista una funzione $\upsilon : V_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$, continua con $\upsilon(x) \in N_{V_j}(x)$ (lo spazio normale di V_j) e con $\|\upsilon(x)\| = 1$ tale che $\forall x \in V_j$

- $x + \lambda\upsilon(x) \notin \Omega \qquad 0 < \lambda < \lambda_0;$
- $x - \lambda\upsilon(x) \in \Omega \qquad 0 < \lambda < \lambda_0.$

Un tale Ω si dice regolare.

Definizione 3.2. Siano Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ed $f \in L^2(\Omega)$ il problema:

$$(PD) : \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} ;$$

dove Δ indica l'operatore di Laplace

$$\Delta u = div \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$$

é detto problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace in Ω.

Definizione 3.3. Siano X uno spazio topologico, Y uno spazio vettoriale e $f : \Omega \subseteq X \longrightarrow Y$.
Si chiama supporto di f l'insieme $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}$.

Nota: D'ora in avanti indichiamo con $C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $supp(\varphi)$ é compatto $\}$.

Osservazione 12. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Moltiplichiamo per φ la prima condizione del (PD) e integriamo in Ω ottenendo:

$$\int_\Omega \varphi \Delta u \, dx = \int_\Omega f\varphi \; dx$$

ora osservando che:

$$\varphi\Delta u = \varphi div\nabla u = div(\varphi\nabla u) - < \nabla\varphi, \nabla u >$$

sostituendo e applicando il teorema della divergenza otteniamo:

$$\int_{\partial\Omega} < \varphi\nabla u, \upsilon > \; d\mathcal{H}^{n-1} - \int_\Omega < \nabla\varphi, \nabla u > \; dx = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

ora poiché φ é a supporto compatto su $\Omega \quad \varphi = 0$ su $\partial\Omega$ perció $\displaystyle\int_{\partial\Omega} < \varphi\nabla u, \upsilon >= 0$.
otteniamo quindi che se u soddisfa la prima condizione di (PD) u deve anche soddisfare:

$$\int_\Omega < \nabla\varphi, \nabla u > \; dx = -\int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (*)$$

Ci siamo quindi ricondotti alla ricerca di una soluzione in senso debole del problema tramite la ricerca delle soluzioni dell'equazione $(*)$; equazione che possiamo considerare (indebolendo la richiesta) per $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Cosí facendo peró perderebbe significato la seconda condizione del (PD) dal momento che il bordo di Ω (che é unione di sottovarietá $n-1$ dimensionali) risulta avere misura n-dimensionale nulla e non ha senso considerare la restrizione di una funzione di L^2 su un insieme di misura nulla.
A tal proposito cerchiamo di costruire un insieme di funzioni per cui abbia senso parlare di dato al bordo e con cui sia possibile lavorare anche attraverso scritture integrali. Iniziamo con la nozione di traccia di una funzione.

Definizione 3.4. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si dice traccia di u e si indica con $\gamma(u)$ la restrizione di u sul bordo di Ω, cioé $\gamma(u) = u_{|\partial\Omega}$.

La definizione sembrerebbe, per quanto giá detto, priva di senso. Mostriamo con i seguenti enunciati (non dimostrati) che la definizione é ben posta.

Teorema 3.0.6 (di traccia)**.**
Sia Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, allora esiste C, costante dipendente solo da Ω, tale che $\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega,\mathcal{H}^{n-1})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Osservazione 13. Se Ω é un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$ vale che $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso in $W^{1,p}(\Omega)$; perció se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $u = \lim_{k\to\infty} u_k$ con $u_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Osservazione 14. La successione $(\gamma(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ si puó verificare essere di Cauchy in $L^2(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$ che é completo allora esiste $v = \lim_{k\to\infty} \gamma(u_k)$.
Se inoltre si considera un'altra successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\overline{\Omega})$ t.c. $v_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ si puó verificare che $\gamma(v_k) \to v$.

Sfruttando il teorema di traccia e le precedenti osservazioni si ha che, ponendo $\gamma(u) = v$, la definizione di traccia é ben posta.
Alla luce di questo nuovo concetto, indicando con $W_0^{1,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$, cioé $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$ per $1 < p < +\infty$ e in particolare con $H_0^1(\Omega)$ lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$, diamo un risultato molto importante che risolve il problema della costruzione di uno spazio di funzioni adeguato in cui muoverci per la ricerca delle soluzioni al Problema di Dirichlet.

Teorema 3.0.7.
Se Ω é un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$ allora $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)$ *t.c.* $\gamma(u) = 0\}$.

Abbiamo quindi trovato uno spazio, denotato con $H_0^1(\Omega)$, in cui é possibile lavorare per trovare soluzioni al problema di Dirichlet. Procediamo con l'enunciare il Teorema che assicura l'esistenza e l'unicitá delle soluzioni.

Teorema 3.0.8.
Se $f \in L^2(\Omega)$ allora esiste una ed una sola $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione di

$$\int_\Omega < \nabla\varphi, \nabla u > \ dx = -\int_\Omega f\varphi \ dx \qquad (*)$$

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Lax-Milgram con i seguenti oggetti.

- $X = H_0^1(\Omega)$;
- $Q : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad Q(u,v) = \int_\Omega < \nabla u, \nabla v > \ dx;$
- $F \in (H_0^1(\Omega))^* \qquad F(v) = -\int_\Omega vf \ dx.$

Mostriamo che valgono le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram.
Innanzitutto $H_0^1(\Omega)$ é di Hilbert in quanto per definizione chiuso in uno spazio di Hilbert.
La forma bilineare Q é ben definitia infatti, applicando le disuguaglianze di Hölder e Cauchy-Schwartz,

$$\int_\Omega | < \nabla u, \nabla v > | \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u| \, |\nabla v| \, dx \leq (\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla v|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

e da questo, per come abbiamo definito le norme, si ha $(\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}} =$
$= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ (e lo stesso per v) otteniamo che

$$|Q(u,v)| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

che é la condizione di limitatezza richiesta da Lax-Milgram.
Ora osserviamo che

$$F(v) = -\int_\Omega vf \ dx \leq \int_\Omega |v| \, |f| \, dx \leq (\int_\Omega |v|^2) \ dx)^{\frac{1}{2}} \ (\int_\Omega |vf|^2) \ dx)^{\frac{1}{2}} = M\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

questo in quanto $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ é una costante; dunque il funzionale F é limitato.
Vediamo ora la condizione di coercivitá che segue immediatamente dalla disuguaglianza di Poincaré in $H_0^1(\Omega)$

$$Q(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx \overset{(P)}{\geq} \lambda \int_\Omega |u|^2 \ dx \geq \lambda \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Possiamo quindi applicare il Teorema di Lax-Milgram, allora esiste $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ tale che

$$Q(u_0, v) = F(v) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

in particolare se $v = \varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ allora

$$\int_\Omega < \nabla u_0, \nabla\varphi > \ dx = -\int_\Omega f\varphi \ dx$$

cioé u_0 é soluzione del problema di Dirichlet, e inoltre, sempre per il teorema di Lax-Milgram, questa soluzione é unica. □

Siamo quindi riusciti, utilizzando degli appositi strumenti e costruendo uno spazio opportuno in cui poter lavorare, a trovare delle condizioni che garantiscono l'esistenza e l'unicitá della soluzione al Problema di Dirichlet nella forma in cui l'abbiamo enunciato.
Osserviamo ora il problema da un punto di vista diverso; consideriamo cioé l'operatore:

$$\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \qquad \Delta^{-1}(f) = u$$

dove u é l'unica soluzione del (PD) associato ad f in Ω.

Definizione 3.5. Siano X e Y due spazi di Banach, Y si dice immerso compattamente in X se l'operatore di immersione $I : Y \hookrightarrow X$ é compatto.

Vale il seguente risultato fondamentale dovuto a Kondrachov.

Teorema 3.0.9. *Lo spazio $W^{1,p}_0(\Omega)$ é immerso compattamente:*

- *nello spazio $L^q(\Omega)$ per $q < \frac{np}{n-p}$ se $p < n$;*
- *nello spazio $C^\infty_0(\overline{\Omega})$ se $p > n$.*

Nel nostro caso quindi se $n > 2$ abbiamo l'immersione compatta di $H^1_0(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ quindi l'operatore

$$\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

definito come prima é compatto.

Appendice A

Spazi di Banach

In questa appendice vogliamo brevemente fornire le definizioni, le notazioni e i risultati più importanti riguardo la teoria degli spazi di Banach e di Hilbert che vengono richiamati o dati per assunti nel corso della trattazione.

Definizione A.1. Sia X uno spazio vettoriale normato su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con norma $\|\cdot\|$, X si dice di Banach se é completo rispetto alla distanza canonica indotta dalla norma $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definizione A.2. Sia X uno spazio di Banach, si dice duale di X e si indica con X^* l'insieme

$$X^* = \{f : \ X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineare e continua}\}$$

i suoi elementi sono anche detti funzionali lineari e continui.

Teorema A.0.10.
Lo spazio X^* con la norma definita come $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ é di Banach.

Spendiamo ora qualche parola per definire una classe di spazi fondamentali ed ampiamente usati in tutti gli ambiti.

Definizione A.3. Sia X uno spazio metrico con misura μ (si pensi ad $\mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue), chiamiamo per $1 < p < +\infty$

$$L^p(X, \mu) = \{[u]_{\mathcal{R}}, \ u : X \to \mathbb{R}; \ \int_X |u|^p \, d\mu < +\infty\}$$

dove $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ per μ-quasi ogni $x \in X$.

Teorema A.0.11 (disuguaglianza di Hölder)**.**

Sia X uno spazio metrico con misura μ, siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabili e non negative e siano $p, q \geq 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$. Allora

$$\int_X f(x)g(x)\ d\mu \leq (\int_X (f(x))^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_X (g(x))^q\ d\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema A.0.12 (disuguaglianza di Minkowski)**.**

Sia X uno spazio metrico con misura μ, siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabili e non negative e sia $1 \leq p < +\infty$.
Allora

$$(\int_X (f+g)^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_X (f(x))^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X (g(x))^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Gazie alle due precedenti disuguaglianze ponendo $\|u\| = (\int_X |u(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$ lo spazio $L^p(X)$ risulta essere uno spazio vettoriale normato. E inoltre vale

Teorema A.0.13 (di Riesz-Fischer)**.**

$L^p(X)$ é completo per $1 \leq p < +\infty$.

Definizione A.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $1 \leq p < \infty$, diciamo che $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $f \in L^p(K)$ per ogni $K \subset\subset \Omega$

Definizione A.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e siano $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diciamo che g é la j-esima derivata di f in senso debole, indicata sempre con $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ (per $j = 1, 2, \ldots, n$) se

$$\int_\Omega g\varphi\ dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\ dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definizione A.6. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $1 \leq p < \infty$ indichiamo con

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega),\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Teorema A.0.14.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto limitato,* $1 \leq p < \infty$ *allora* $W^{1,p}(\Omega)$ *con la norma definita come*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$$

é di Banach.

Teorema A.0.15 (di Meyers-Serrin)**.**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto limitato,* $1 \leq p < \infty$ *allora* $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *é denso in* $W^{1,p}(\Omega)$*.*

Enunciamo ora tre risultati cardine della teoria degli spazi di Banach.

Teorema A.0.16 (di Baire)**.**

Sia X *uno spazio di Banach e* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *successione di insiemi aperti e densi in* X *allora* $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ *é denso in* X*.*

Teorema A.0.17 (di Banach-Steinhaus)**.**

Siano X *e* Y *spazi di Banach e sia* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *una famiglia di operatori lineari da* X *a* Y *allora avviene una ed una sola delle seguenti condizioni:*

- $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|T_\alpha\| < +\infty$*;*
- *esiste* $D \subseteq X$ *denso in* X *tale che* $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|T_\alpha(x)\| = +\infty$*.*

Teorema A.0.18 (dell'applicazione aperta)**.**

Siano X *e* Y *spazi di Banach e sia* $T : X \longrightarrow Y$ *lineare e suriettiva. Allora* T *é aperta, cioé esiste* $\delta > 0$ *per cui la palla aperta* $B(0, \delta) \subseteq T(B(0, 1))$*.*

Teorema A.0.19 (di Hahn-Banach)**.**

Sia X *spazio di Banach,* Y *un suo sottospazio e* $T : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *lineare e continua. Se* $\|T\|_{Y^*} = \sup_{y\in Y\setminus\{0\}} \|T(y)\|$ *allora esiste* $T' : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *lineare e continua tale che* $T'_{|Y} = T$ *e* $\|T'\|_{X^*} = \|T\|_{Y^*}$*.*

Definizione A.7. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$, X si dice di Hilbert se é completo rispetto alla distanza canonica indotta dal prodotto scalare $d(x,y) = < x-y, x-y >^{\frac{1}{2}}$

Risulta evidente che se X é di Hilbert allora X é anche di Banach con la norma $\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$ ma non viceversa.
Osserviamo che lo spazio $L^2(\Omega)$ (a valori in $\mathbb{C}$) con il prodotto scalare definito come

$$< f, g >= \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

é di Hilbert.

Definizione A.8. Se X é uno spazio vettoriale con prodotto interno Y un suo sottospazio vettoriale, si definisce complemento ortogonale di Y

$$Y^{\perp} = \{x \in X;\ < x, y >= 0 \quad \forall y \in Y\}.$$

Teorema A.0.20.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia Y un suo sottospazio vettoriale chiuso. Allora

$$X = Y \oplus Y^{\perp}$$

inoltre esiste $P : X \longrightarrow Y$ lineare tale che

i) $\|Px\| \leq \|x\| \qquad \forall x \in X$*;*

ii) $\|Px\| = \inf\{\|y - x\|,\ y \in Y\}$*;*

iii) *se $Qx = x - Px$ allora $Qx \in Y^{\perp} \qquad \forall x \in X$.*

P e Q saranno le proiezioni di X rispettivamente su Y e su $Y^{\perp}$.

Teorema A.0.21.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $Y \neq X$ un suo sottospazio vettoriale chiuso. Allora esiste $z \in X,\ z \perp Y\ z \neq 0$.

Definizione A.9. Siano X e Y due spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $T: X \longrightarrow Y$ lineare e continuo.
Fissato $y \in Y$ poniamo

$$x_y^*(x) = < T(x), y >_Y \qquad \forall x \in X.$$

Risulta $x_y^* \in X^*$ e quindi per il teorema di Riesz esiste $x_y \in X$ tale che

$$x_y^*(x) = < x, x_y >_X \qquad \forall x \in X.$$

Posto

$$x_y = T(y)$$

si ha

$$< T(x), y >_Y = < x, T^*(y) >_X \qquad \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y.$$

T^* si dice aggiunto di T. Se $T \in \mathcal{L}(X, X)$ allora

- Se $T^* = T$ allora T si dice autoaggiunto;
- Se $T^*T = TT^*$ allora T si dice normale;
- Se $T^*T = TT^* = 1$ allora T si dice unitario.

Teorema A.0.22.
Sia X uno spazio di Hilbert, sia $T \in \mathcal{L}(X, X)$ e T^* il suo aggiunto. Allora

i) $\overline{Im(T)^{\perp}} = Ker(T^*)$

ii) $\overline{Im(T)} = Ker(T^*)^{\perp}$

iii) $\overline{Im(T^*)^{\perp}} = Ker(T)$

iv) $\overline{Im(T^*)} = Ker(T)^{\perp}$.

Enunciamo ora due risultati dalle rilevanti e numerose applicazioni.

Teorema A.0.23 (della divergenza)**.**
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\overline{\Omega})$. Allora

$$\int_\Omega V \; dx = \int_{\partial\Omega} < V, n > \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

dove n indica la normale unitaria esterna ad Ω.

Teorema A.0.24 (di Young sulle convoluzioni)**.**

Siano $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *tali che* $1+\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ *e siano* $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in\ L^q(\mathbb{R}^n)$. *Allora*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy$$

é ben definita e $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *vale inoltre*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq c_n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Bibliografia

[1] B. Pini, Terzo Corso di Analisi Matematica, cap 2, 1978, *Cooperativa Libraria Universitaria Editrice Bologna*, **503**.

[2] A. Kufner et al., Function Spaces, 1977, *Noordhoff International Publishing*, **454**.

[3] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 1977, *Springer-Verlag Berlin Heidelbreg New York*, **401**.

Ringraziamenti

I ringraziamenti da fare sono tanti, tante sono le persone che anche da lontano mi hanno sostenuto nel raggiungere questo primo piccolo traguardo: ringrazio mia madre, sperando che la felicitá che ho ereditato dal suo nome le renda sopportabile il non vedermi più così spesso in giro per casa e ringrazio mio padre, primo tra i miei insegnanti e cosí simile a me, da cui vorrei aver ereditato la fierezza nell'insegnare e quella gioia di imparare che non lo faranno mai vincere dalla stanchezza; é grazie a loro se sono diventato quello che sono ora, spero che la mia libertà e la mia maturità, frutto degli anni dei loro sacrifici, li aiuti a sorridere nel guardarmi e li possa rendere, un giorno, orgogliosi come meritano.

A Stefano va un grazie particolare, la sua spensieratezza e la sua totale incoscienza fraterna mi hanno accompagnato sempre e hanno fatto in modo che non crescessi da solo.

Ringrazio i miei nonni, che mi tengono la mano ogni giorno e pregano per me, chi dal loro letto la sera, chi da un pò più in alto...

Ancora grazie ai miei zii, a tutti i cugini e a Chiara, perché con una famiglia come questa ogni difficoltá sembra un pò meno insuperabile...e in particolare a Francesco: un cugino, un amico, un fratello.

Ringrazio il professor Ermanno Lanconelli, mio relatore in questo elaborato, per il tempo dedicatomi nonostante i suoi numerosi impegni e per avermi fatto sentire, nel mio piccolo, erede di un mondo affascinante e pieno di storie dal quale difficilmente mi discosteró nel proseguio dei miei studi e della mia crescita umana.

Ringrazio Letizia, Irene, Fabietto, Jacopo, Mattia e tutti gli altri amici di Marina Palmense, il mio posto unico al mondo, come me loro sanno che anche vivere in un minuscolo paesino di provincia puó essere un'esperienza fantastica se si hanno al proprio fianco persone straordinarie; i miei amici delle superiori, perchè quando si ha condiviso qualcosa di cosí unico anche se poi le strade prendono direzioni diverse si vuole sempre trovare il tempo per riavvicinarsi e ogni volta sembra davvero di rivivere quegli anni...e poi Lucia, un fiore raro che si é rivelato unico al mondo e a cui devo davvero molto.

Ringrazio Irene, una delle persone con cui non é possibile non divertirsi e di cui non é possibile non innamorarsi dal primo giorno, porteró nel cuore ogni singola risata, isteria o stupidaggine dei giorni di studio prima di ogni esame; grazie anche a tutti i miei colleghi in questo percorso, dei buoni amici e un grande e continuo stimolo a fare del mio meglio.

Ringrazio infine quelli che sono stati i miei veri compagni nelle avventure e nelle disavventure di questi anni, una seconda famiglia che cresce giorno dopo giorno e a cui non ti aspetteresti mai di affezionarti al punto di sentirne la mancanza (anche delle notti insonni tra l'insana afa bolognese e comagni di stanza che russano); Lucio, Matteo, Silvia, Ludovica, George e Jamil per voi davvero i ringraziamenti non saranno mai abbastanza.