

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

# TEORIA DEL GRADO

Tesi di Laurea in Topologia Differenziale

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
LUCA MIGLIORINI

Presentata da:  
ELIA BARILLI

III Sessione  
Anno Accademico 2015-2016



# Introduzione

In matematica, la teoria del grado si pone l'obiettivo di studiare le proprietà di funzioni continue tra spazi topologici attraverso la definizione di un importante invariante omotopico, chiamato appunto *grado* della funzione; questa quantità è stata introdotta da Luitzen Brouwer agli inizi del '900. La topologia differenziale unisce questi concetti all'analisi e pone l'attenzione sulla sottocategoria delle *varietà differenziabili* con i propri morfismi, ossia le cosiddette *funzioni lisce* o  $C^\infty$ . In questo ambito, esistono principalmente due definizioni diverse del grado che ne permettono il calcolo esplicito, ma non è per nulla ovvio che forniscano lo stesso risultato: lo scopo della tesi è dunque mostrare questa equivalenza e presentare qualche esempio di applicazione.

Dopo aver introdotto alcuni concetti indispensabili come l'omotopia, sarà necessario uno studio delle forme differenziali su varietà: pertanto, si parlerà del complesso di De Rham e saranno presenti cenni alla coomologia. Una volta forniti tutti gli strumenti necessari, si formuleranno le definizioni del grado.

Siccome sarebbe impossibile approfondire appieno tutti gli argomenti che saranno affrontati, si forniscono i necessari riferimenti bibliografici per ogni risultato non trattato in dettaglio.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Forme Differenziali</b>	<b>1</b>
1.1 Valori Regolari . . . . .	2
1.1.1 Omotopia e Isotopia . . . . .	3
1.2 Complesso di De Rham . . . . .	5
1.2.1 Forme Differenziali su Varietà . . . . .	7
1.2.2 Integrazione . . . . .	9
1.3 Coomologia di De Rham . . . . .	16
<b>2 Teoria del Grado</b>	<b>19</b>
2.1 Grado di Brouwer . . . . .	19
2.1.1 Invarianza per Omotopia . . . . .	22
2.2 Grado e Forme Differenziali . . . . .	24
2.2.1 Equivalenza . . . . .	25
<b>3 Applicazioni</b>	<b>27</b>
3.1 Teorema Fondamentale dell'Algebra . . . . .	27
3.2 Campi Vettoriali su $S^n$ . . . . .	29
3.3 Teorema di Gauss-Bonnet . . . . .	31
<b>Conclusioni e ringraziamenti</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Elenco delle figure

1.1	Omotopia tra due funzioni lisce da $S^1$ al disco bidimensionale.	4
3.1	Le radici 12-esime dell'unità su $\mathbb{C}$ .	28
3.2	Un campo non nullo di vettori tangenti su $S^1$ .	31
3.3	Un campo di vettori tangenti su $S^2$ che si annulla ai poli.	31
3.4	La mappa di Gauss sul toro e la sua curvatura gaussiana.	32
3.5	La classificazione delle superfici senza bordo, compatte e orientabili.	35
3.6	Due esempi di superfici a curvatura totale nulla.	40





# Capitolo 1

## Forme Differenziali

Si considerano note le nozioni di:

- *varietà differenziabile* con e senza *bordo*, sia astratta sia immersa in uno spazio euclideo;
- *funzione* (o *applicazione*) *liscia*, *differenziale* in un punto e *diffeomorfismo* tra varietà;
- *spazio tangente* di una varietà in un punto e *orientazione*;
- *k-forma differenziale* su uno spazio euclideo.

Si presume inoltre che siano chiari gli argomenti basilari di topologia elementare, algebra lineare e analisi reale multidimensionale.

Grazie al teorema di immersione dimostrato da Hassler Whitney nel 1936, in questa tesi non si farà distinzione tra varietà astratte ed immerse in uno spazio euclideo, utilizzando la definizione più utile all'occorrenza. Di seguito se ne riporta l'enunciato.

**Teorema 1.0.1** (di immersione di Whitney). *Ogni varietà differenziabile  $n$ -dimensionale può essere immersa in  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

## 1.1 Valori Regolari

Innanzitutto, è necessario ricordare ed introdurre alcuni concetti chiave.

**Definizione 1.1** (Punti e valori regolari e critici). Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione liscia tra varietà differenziabili, di dimensione  $m$  e  $n$  rispettivamente. Se il differenziale  $D_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  non è suriettivo,  $x$  si dice *punto critico* di  $f$  e la sua immagine  $f(x)$  è detta *valore critico*.

Se  $y \in N$  non è un valore critico, allora si parla di *valore regolare* di  $f$  e gli eventuali elementi della sua controimmagine  $f^{-1}(y)$  sono chiamati *punti regolari*.

**Teorema 1.1.1** (della Funzione Inversa). Sia  $U \subset \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione liscia. Se  $D_x f$  è non singolare per un certo  $x \in U$  (cioè  $x$  è punto regolare di  $f$ ), allora esiste  $V$  intorno aperto di  $x$  tale che  $f|_V$  è un diffeomorfismo.

Il risultato precedente, che diamo per noto, sarà uno strumento fondamentale più avanti nella tesi.

Si riportano ora due teoremi di esistenza:<sup>1</sup> grazie ad essi, la scelta di un valore regolare di una funzione liscia sarà sempre garantita.

**Teorema 1.1.2** (Sard). Se  $U \subset \mathbb{R}^m$  è aperto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione liscia, allora  $f(\{x \in U \mid \text{rank } D_x f < n\})$  ha misura di Lebesgue nulla in  $\mathbb{R}^n$ .

**Corollario 1.1.3** (Brown). L'insieme dei valori regolari di una qualunque mappa liscia  $f : M \rightarrow N$  tra varietà differenziabili è denso in  $N$ .

Un altro risultato da considerare riguarda le varietà con bordo ed è il seguente Lemma.<sup>2</sup>

**Lemma 1.1.4.** Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia,  $M$  una  $m$ -varietà e  $N$  una  $n$ -varietà con  $m > n$ ; si presuma inoltre  $\partial M \neq \emptyset$ . Se  $y \in N$  è valore

<sup>1</sup>Si veda [4] e [2] rispettivamente per una dimostrazione.

<sup>2</sup>Come sopra, si consulti [4] per una prova di questo fatto.

regolare per  $f$  e per  $f|_{\partial M}$ , allora  $f^{-1}(y)$  è una  $(m-n)$ -varietà differenziabile, con bordo:

$$\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial M .$$

**Definizione 1.2** (Segno del differenziale in un punto). Sia  $h : M \rightarrow N$  una funzione liscia tra varietà della stessa dimensione. Si dice *segno* del differenziale di  $h$  in  $x$  il valore:

$$\text{sgn}(D_x h) := \text{sgn}(\det(D_x h))$$

dove  $\text{sgn}(0) = 0$ . Nel caso in cui  $x$  sia un punto regolare, il segno indica se  $h$  preserva o meno l'orientazione di  $T_x M$  e  $T_y N$ .

*Osservazione 1.* Se  $h$  è un diffeomorfismo,  $\text{sgn}(D_x h)$  è ovviamente sempre non nullo; poiché  $\det(D_x h)$  è una funzione liscia,  $\text{sgn}(D_x h)$  non dipende da  $x$  e si scrive quindi  $\text{sgn}(Dh)$ .

### 1.1.1 Omotopia e Isotopia

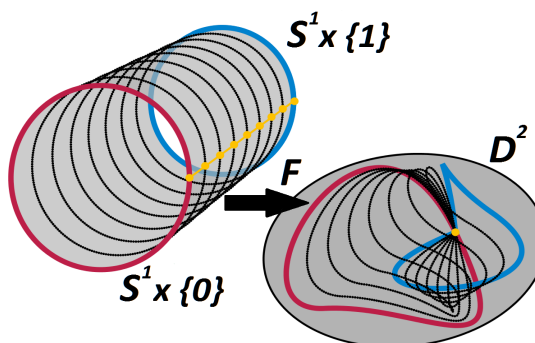
Topologicamente parlando, la possibilità di muoversi con continuità tra due oggetti è indispensabile per poterne trasferire le più importanti proprietà. Questo è ovviamente vero anche per quanto riguarda le funzioni lisce, il che porta alla definizione delle due seguenti relazioni di equivalenza.

**Definizione 1.3** (Omotopia). Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili. Due applicazioni lisce  $f, g : M \rightarrow N$  si dicono  $C^\infty$ -omotope se esiste una funzione liscia  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  tale che

$$F(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad F(1, x) = g(x)$$

per ogni  $x \in M$ .  $F$  si dice *omotopia liscia* tra  $f$  e  $g$ .

Figura 1.1: Omotopia tra due funzioni lisce da  $S^1$  al disco bidimensionale.



**Definizione 1.4** (Isotopia). Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili. Due diffeomorfismi  $f, g : M \rightarrow N$  si dicono  $C^\infty$ -isotopi se esiste un'omotopia liscia  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  tale che la funzione

$$x \mapsto F(t, x) \quad \forall x \in M$$

sia un diffeomorfismo tra  $M$  e  $N$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .  $F$  si dice *isotopia liscia* tra  $f$  e  $g$ .

*Osservazione 2.* Se  $f, g : M \rightarrow N$  sono diffeomorfismi isotopi tra varietà,  $\text{sgn}(Df) = \text{sgn}(Dg)$ .

Ciò deriva dal seguente fatto: se  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  è un isotopia liscia tra  $f$  e  $g$ , si chiamino

$$F_t : x \mapsto F(t, x)$$

i diffeomorfismi intermedi. Poiché  $F$  è liscia,  $\det(D_x F_t)$  è una funzione liscia nelle variabili  $x$  e  $t$  e non si annulla mai. Dunque, per il teorema dei valori intermedi,  $\text{sgn}(DF_0) = \text{sgn}(DF_1)$ .

Isotopia e varietà connesse sono collegate da un importante Lemma.<sup>3</sup>

**Lemma 1.1.5** (di Omogeneità). *Se  $M$  è una varietà differenziabile connessa, per ogni coppia di punti  $x, y \in M$  esiste un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  isotopo alla funzione identità e tale che  $f(x) = y$ .*

<sup>3</sup>Questo risultato è centrale nella teoria del grado, ma la sua dimostrazione è laboriosa e pertanto non si riporta; in [4] ne è presente una che si basa sull'esistenza di una funzione liscia  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  isotopa all'identità, che fissa tutti i punti esterni al disco aperto unitario e manda l'origine in un punto qualsiasi del disco.

## 1.2 Complesso di De Rham

Si dà per noto il concetto di  $k$ -forma differenziale su  $\mathbb{R}^n$ , e si indica con  $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$  lo spazio vettoriale delle  $k$ -forme. Si ricorda inoltre che  $\Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  e  $\Omega^k(\mathbb{R}^n) = \{0\} \quad \forall k > n$ .

**Definizione 1.5** (Differenziale). Il *differenziale* è un operatore lineare

$$d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$$

definito nel seguente modo:

1. Se  $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $df := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ ;

2. Se  $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$ ,  $d\omega := \sum_{i_1, \dots, i_k} df_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$ .

Per brevità, verrà scritto  $\omega = \sum f_I dx_I$  e  $d\omega = \sum df_I dx_I$ , dove  $I$  è un multi-indice:  $I \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $|I| = k$  e si pone  $\deg \omega := k$ .

**Definizione 1.6** (Complesso di De Rham). Sia  $\Omega^*(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(\mathbb{R}^n)$  un'algebra su  $\mathbb{R}$  con prodotto  $\wedge$  definito sulle forme omogenee come segue:

$$\omega = \sum f_I dx_I \quad \tau = \sum g_J dx_J \quad \omega \wedge \tau := \sum f_I g_J dx_I dx_J .$$

$(\Omega^*(\mathbb{R}^n), d)$  si dice *complesso di De Rham* su  $\mathbb{R}^n$ .

*Osservazione 3.*  $d$  è un'antiderivazione, ossia:

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau .$$

Questo risultato è facilmente dimostrabile<sup>4</sup> osservando che vale la seguente proprietà:

$$\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg \omega \deg \tau} \tau \wedge \omega$$

<sup>4</sup>Si consulti al limite [1] in caso di difficoltà.

derivante dalla struttura delle forme differenziali.

D'ora in avanti, il simbolo  $\wedge$  sarà generalmente omesso.

*Osservazione 4.*  $d^2\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ .

Questa proprietà discende direttamente dalla precedente e dal teorema di Schwartz.<sup>5</sup>

In maniera del tutto analoga, si può definire  $\Omega^*(U)$  per un qualunque sottoinsieme aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ; se le funzioni  $f_I$  sono a supporto compatto, si parla invece di *complesso di De Rham a supporto compatto* su  $\mathbb{R}^n$  e si scrive  $\Omega_c^*(\mathbb{R}^n)$

Si vuole adesso introdurre un'importante proprietà di funtorialità tra la categoria degli spazi euclidei con le funzioni lisce e i complessi di De Rham con i loro morfismi di algebre.

**Definizione 1.7** (Pullback). Siano  $x_1, \dots, x_m$  e  $y_1, \dots, y_n$  le coordinate standard su  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  rispettivamente. Se  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione liscia, si definisce *pullback* di  $f$  la funzione  $f^* : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^m)$  definita come segue:

$$\omega = \sum g_I dy_I \quad f^*\omega := \sum (g_I \circ f) df_I \quad (1.1)$$

dove  $f = (f_1, \dots, f_n)$ .

*Osservazione 5.* Il pullback tramite  $f$  di una  $k$ -forma è ancora una  $k$ -forma. Inoltre, applicando la definizione per un prodotto di forme  $\tau\omega$ , si osserva che  $f^*$  è un morfismo di algebre.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $f^*$  il pullback di una mappa  $f$ , definito come in 1.7. Per ogni  $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ , vale:*

$$f^*(d\omega) = df^*(\omega) .$$

---

<sup>5</sup>In [1] ne è presente un'immediata verifica.

*Dimostrazione.* Pullback e differenziale sono applicazioni lineari, quindi basta mostrare l'uguaglianza per  $\omega = g_I dy_I$ . Poiché  $d$  è antiderivazione e  $d^2 = 0$ , si ha

$$df^*(g_I dy_I) = d((g_I \circ f) df_I) = d(g_I \circ f) df_I \quad (1.2)$$

mentre dalla regola della catena:

$$\begin{aligned} f^*(d(g_I dy_I)) &= f^*\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_I}{\partial y_j} dy_j dy_I\right) = \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_I}{\partial y_j} \circ f\right) df_j\right) df_I = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_I}{\partial y_j} \circ f\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_i} dy_i\right)\right) df_I = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(g_I \circ f)}{\partial y_i} dy_i\right) df_I = d(g_I \circ f) df_I . \end{aligned} \quad (1.3)$$

(1.3) e (1.2) sono uguali, dunque la proposizione è dimostrata.  $\square$

### 1.2.1 Forme Differenziali su Varietà

I concetti appena definiti possono essere estesi alla categoria delle varietà differenziabili.

**Definizione 1.8.** Sia  $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  un atlante per la  $n$ -varietà differenziabile  $M$ . Una  $k$ -forma differenziale su  $U_\alpha$  è una scrittura formale

$$\omega_\alpha := \Phi_\alpha^* \omega$$

con  $\omega$   $k$ -forma differenziale su  $\mathbb{R}^n$ .  $\Phi_\alpha^*$  è il pullback di  $\Phi_\alpha$ .

Se  $u_1, \dots, u_n$  sono le coordinate standard di  $\mathbb{R}^n$  e  $\omega = \sum g_I du_I$ , si consideri  $\Phi_\alpha = (x_1, \dots, x_n)$  sistema di coordinate per  $U_\alpha$ . Si può scrivere anche:

$$\omega_\alpha = \sum (g_I \circ \Phi_\alpha) dx_I .$$

In questa maniera, il pullback di  $\Phi_\alpha$  è definito in maniera concorde a (1.1); analogamente, se  $W \subset U_\alpha$ , il pullback di una funzione di inclusione  $i : W \hookrightarrow U_\alpha$  è naturalmente:

$$i^*\omega_\alpha := (\Phi_\alpha \circ i)^*\omega = \Phi_\alpha^* \left( \sum g_{i|_{\Phi_\alpha(W)}} du_I \right).$$

**Definizione 1.9.** Sia  $M$  definita come in 1.8. Una  $k$ -forma differenziale su  $M$  è il dato di una collezione  $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$  con  $\omega_\alpha$   $k$ -forme differenziali sugli aperti  $U_\alpha$ , tali che sia soddisfatta la seguente condizione: se

$$\begin{aligned} i : U_\alpha \cap U_\beta &\hookrightarrow U_\alpha \\ j : U_\alpha \cap U_\beta &\hookrightarrow U_\beta \end{aligned}$$

sono le funzioni di inclusione, allora  $i^*\omega_\alpha = j^*\omega_\beta$ . Si chiamerà  $\Omega^k(M)$  l'insieme delle  $k$ -forme su  $M$ .

Definendo  $\wedge$  e  $d$  sulle singole  $\omega_\alpha$  in maniera analoga a 1.5 e 1.6, si parla dunque di complesso di De Rham su  $M$  riferendosi alla somma diretta esterna degli  $\Omega^k(M)$ , che preserva la struttura di algebra su  $\mathbb{R}$ ; si scrive quindi  $\Omega^*(M)$ .

Come ci si aspetta, la definizione di pullback di un'applicazione lascia  $f : M \rightarrow N$  è identica a quella per gli spazi euclidei, ma applicata alle singole forme  $\tau_\beta$  rispetto ad un atlante  $\{(V_\beta, \Psi_\beta)\}_{\beta \in B}$  di  $N$ .

La funtorialità esposta in 1.7 è dunque valida anche per le varietà e la commutatività di  $f^*$  con  $d$  è preservata.

Per poter parlare di forma a supporto compatto su  $M$ , si chiede invece che la chiusura di  $\bigcup_{\alpha \in A} \text{Supp } \omega_\alpha$  sia un compatto di  $M$ ; prevedibilmente, l'insieme di queste forme si indica con  $\Omega_c^*(M)$  ed è una sottoalgebra di  $\Omega^*(M)$ .

Tuttavia, se  $\tau \in \Omega_c^*(N)$  non si può concludere che il suo pullback  $f^*\tau$  sia a supporto compatto in  $M$ ; questo a meno che non si consideri una certa tipologia di funzioni lisce dette *proprie*.



**Definizione 1.10** (Funzione propria). Siano  $X, Y$  spazi topologici di Hausdorff.  $f : X \rightarrow Y$  si dice *propria* se  $f^{-1}(K)$  è compatto  $\forall K \subset Y$  compatto.

*Osservazione 6.* Siccome  $\text{Supp } f^*\omega \subset f^{-1}(\text{Supp } \omega)$ , se  $f$  è propria e  $\omega \in \Omega_c^*(N)$  segue immediatamente che  $f^*\omega$  è a supporto compatto in  $M$ . Dunque

$$f^* : \Omega_c^*(N) \rightarrow \Omega_c^*(M)$$

è un morfismo di algebre ben definito.

*Osservazione 7.* Un omeomorfismo (e quindi in particolare un diffeomorfismo) è sempre una funzione propria, in quanto le funzioni continue mandano compatti in compatti.

*Osservazione 8.* Una funzione continua  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$$

è propria.

Infatti, si consideri  $K \subset \mathbb{R}^n$  compatto (ossia chiuso e limitato) e sia  $D$  il disco di  $\mathbb{R}^n$  di centro 0 e raggio  $r$  che lo contiene; la condizione su  $f$  implica che  $f^{-1}(D)$  è un insieme limitato, cioè esiste  $D'$  disco di  $\mathbb{R}^m$  di centro 0 e raggio  $R$  tale che  $f^{-1}(D) \subset D'$ . Ma  $f$  è continua, quindi  $f^{-1}(K)$  è chiuso e contenuto in  $D'$ : dunque  $f^{-1}(K)$  è compatto in  $\mathbb{R}^m$ .

## 1.2.2 Integrazione

**Definizione 1.11.** Siano  $x_1, \dots, x_n$  le coordinate standard di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\omega = f dx_1 \dots dx_n$  una  $n$ -forma a supporto compatto su  $\mathbb{R}^n$  (si supponga di aver già ordinato  $dx_1 \dots dx_n$ ). L'integrale di  $\omega$  su  $\mathbb{R}^n$  è così definito:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n .$$

*Osservazione 9.* Aver ordinato  $dx_1 \dots dx_n$  in precedenza è fondamentale: per il teorema di Fubini, infatti, permutare le variabili all'interno dell'integrale non ha alcun effetto sul valore dello stesso, mentre può potenzialmente corrispondere ad un'inversione di segno nella forma differenziale.

**Proposizione 1.2.2.** *Sia  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un diffeomorfismo e sia  $\omega$  una  $n$ -forma a supporto compatto su  $\mathbb{R}^n$ . Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^* \omega = \operatorname{sgn}(DT) \int_{\mathbb{R}^n} \omega . \quad (1.4)$$

*Dimostrazione.*  $T^*$  è propria in quanto diffeomorfismo, dunque  $T^* \omega$  ha supporto compatto. Si consideri  $T = (T_1, \dots, T_n)$  corrispondente al cambio delle coordinate  $y_1, \dots, y_n$  in  $x_1, \dots, x_n$ . Per arrivare al risultato cercato, è necessario mostrare l'equivalenza:

$$dT_1 \dots dT_n = \det(DT) dy_1 \dots dy_n \quad (1.5)$$

dove  $\det(DT)$  è considerato come una funzione liscia a valori reali. Dalla definizione di differenziale, si ha:

$$dT_1 \dots dT_n = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial y_j} \right) \dots \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial T_n}{\partial y_j} \right) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\partial T_1}{\partial y_{j_1}} \dots \frac{\partial T_n}{\partial y_{j_n}} dy_{j_1} \dots dy_{j_n} \quad (1.6)$$

con  $j_i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Poiché  $dy_{j_k} dy_{j_l} = 0$  se  $j_k = j_l$ , nella formula (1.6) si suppone che  $(j_1, \dots, j_n)$  sia una permutazione  $\sigma \in S_n$  con  $\sigma(i) = j_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

La struttura di  $\Omega^n(\mathbb{R}^n)$  assicura che

$$dy_{j_1} \dots dy_{j_n} = \operatorname{sgn}(\sigma) dy_1 \dots dy_n$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} dT_1 \dots dT_n &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\partial T_1}{\partial y_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial T_n}{\partial y_{\sigma(n)}} dy_1 \dots dy_n = \quad (1.7) \\ &= \det(DT) dy_1 \dots dy_n . \end{aligned}$$

Grazie a questa identità, si può ora scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) dT_1 \dots dT_n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) \det(DT) dy_1 \dots dy_n \quad (1.8)$$

Ma dalla formula del cambio di variabili, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) |\det(DT)| dy_1 \dots dy_n \quad (1.9)$$

cioè il risultato richiesto in (1.4).  $\square$

*Osservazione 10.* È immediato vedere che il teorema funziona per  $T : U \rightarrow V$  diffeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  e  $\omega \in \Omega_c^n(V)$ .

Data questa invarianza dell'integrale per diffeomorfismo, non sorprende che le forme differenziali possano essere integrate anche su varietà, e che si ottenga un risultato analogo al precedente; per poter maneggiare questi oggetti, è tuttavia necessaria l'introduzione di un utile strumento tecnico detto *partizione dell'unità*.

**Definizione 1.12** (Partizione dell'unità). Sia  $M$  una varietà differenziabile. Si dice *partizione dell'unità* su  $M$  un insieme  $\{\rho_i\}_{i \in I}$  di funzioni lisce  $\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfano le seguenti condizioni:

1. per ogni  $x \in M$ , esiste  $U \subset M$  intorno aperto di  $x$  tale che  $\{i \in I \mid \text{Supp } \rho_i \cap U \neq \emptyset\}$  è finito;

2.  $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$ .

*Osservazione 11.* Per l'ipotesi 1., la somma sopra riportata è finita.

**Teorema 1.2.3** (di esistenza di una partizione dell'unità). Sia  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  un atlante per la varietà differenziabile  $M$ . Esiste una partizione dell'unità subordinata ad  $\mathfrak{A}$ , ovvero una partizione  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  con  $\text{Supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$  per ogni  $\alpha \in A$ .

*Osservazione 12.* Non si può chiedere che il supporto delle  $\rho_\alpha$  sia anche compatto: in tal caso, si perde la subordinazione.<sup>6</sup>

**Definizione 1.13.** Sia  $M$  una  $n$ -varietà orientata e  $\omega$  una  $n$ -forma differenziale a supporto compatto su  $M$ . Se  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  è una partizione subordinata all'atlante  $\mathfrak{A}$  per  $M$  (definito come nel teorema 1.2.3), si definisce:

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega \quad (1.10)$$

dove  $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega := \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \omega)$ .

*Osservazione 13.* Siccome  $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1$ , si scriverà  $\omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \omega$  dove  $\rho_\alpha \omega$  sono adesso  $n$ -forme a supporto compatto su  $U_\alpha$  (il loro supporto è chiuso in un compatto). L'integrale è dunque definito per linearità; essendo  $\Phi_\alpha^{-1}$  ovviamente propria, la definizione 1.13 ha senso.

*Osservazione 14.* L'integrale definito dall'espressione (1.10) è indipendente dalla partizione e dall'atlante scelti.

Sia infatti  $\mathfrak{B} = \{(V_\beta, \Psi_\beta)\}_{\beta \in B}$  un altro atlante di  $M$  e  $\{\sigma_\beta\}$  una partizione dell'unità subordinata a  $\mathfrak{B}$ . Poiché  $\sum_{\beta \in B} \sigma_\beta = 1$ , si può scrivere:

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sigma_\beta \omega \quad (1.11)$$

dove  $\rho_\alpha \sigma_\beta \omega$  sono ora forme differenziali su  $M$  a supporto compatto contenuto in  $U_\alpha \cap V_\beta$ .

Dunque integrare su  $U_\alpha$  o  $V_\beta$  è equivalente, il che implica:

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sigma_\beta \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{V_\beta} \rho_\alpha \sigma_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int_{V_\beta} \sigma_\beta \omega \quad (1.12)$$

ricordando che anche  $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1$ . Ciò completa la verifica.

---

<sup>6</sup>L'esistenza di una partizione subordinata è la chiave che permette di definire l'integrale di una forma differenziale su una varietà: una dimostrazione del teorema è presente in [6], insieme alla verifica di questa osservazione (e a molti altri risultati importanti sulla teoria delle varietà astratte).

**Proposizione 1.2.4.** *Sia  $f : M \rightarrow N$  un diffeomorfismo tra varietà differenziabili orientate  $n$ -dimensionali. Se  $\omega$  è una  $n$ -forma a supporto compatto su  $N$ , allora*

$$\int_M f^* \omega = \operatorname{sgn}(Df) \int_N \omega .$$

*Dimostrazione.* Sia  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  un atlante per  $M$  e  $\mathfrak{B} = \{(V_\beta, \Psi_\beta)\}_{\beta \in B}$  un atlante per  $N$ . Siano  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e  $\{\sigma_\beta\}_{\beta \in B}$  partizioni dell'unità su  $M$  ed  $N$ , subordinate a  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  rispettivamente.

Come visto nell'osservazione 13, si scriva  $\omega = \sum_{\beta \in B} \sigma_\beta \omega$ ; poiché  $f$  è un diffeomorfismo,  $f^* \omega$  ha supporto compatto e dunque si potrà scrivere anche  $f^* \omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha f^* \omega$  con  $\rho_\alpha f^* \omega \in \Omega_c^n(U_\alpha)$ .

$f^*$  è morfismo di algebre, per cui si ha:

$$f^* \omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha f^* \left( \sum_{\beta \in B} \sigma_\beta \omega \right) = \sum_{\alpha, \beta} \rho_\alpha \sigma_\beta f^* \omega . \quad (1.13)$$

Inoltre, siccome  $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1$ , si può anche dire che

$$\omega = \left( \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \right) \sum_{\beta \in B} \sigma_\beta \omega = \sum_{\alpha, \beta} \rho_\alpha \sigma_\beta \omega . \quad (1.14)$$

Si ragioni ora sui supporti di queste forme:  $\rho_\alpha \sigma_\beta f^* \omega$  ha supporto compatto in  $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ , mentre  $\rho_\alpha \sigma_\beta \omega$  ha supporto compatto su  $f(U_\alpha) \cap V_\beta$ .

Siccome  $f$  è un diffeomorfismo:

$$f(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) = f(U_\alpha) \cap V_\beta$$

e quindi, per definizione:

$$\Psi_\beta \circ f \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \Psi_\beta(f(U_\alpha) \cap V_\beta)$$

è diffeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Con un'attenta considerazione sulle composizioni, si vede che

$$(\Phi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \sigma_\beta f^* \omega) = \left( \Psi_\beta \circ f \circ \Phi_\alpha^{-1} \right)^* \left( (\Psi_\beta^{-1})^* (\rho_\alpha \sigma_\beta \omega) \right) .$$

Ricordando che  $\text{sgn}(Df) = \text{sgn}(D(\Psi_\beta \circ f \circ \Phi_\alpha^{-1}))$ , per la proposizione 1.2.2 si conclude nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\int_M f^* \omega &= \sum_{\alpha, \beta} \int_{U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)} \rho_\alpha \sigma_\beta f^* \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \sigma_\beta f^* \omega) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} (\Psi_\beta \circ f \circ \Phi_\alpha^{-1})^* ((\Psi_\beta^{-1})^* (\rho_\alpha \sigma_\beta \omega)) = \\
&= \text{sgn}(Df) \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} (\Psi_\beta^{-1})^* (\rho_\alpha \sigma_\beta \omega) = \\
&= \text{sgn}(Df) \sum_{\alpha, \beta} \int_{f(U_\alpha) \cap V_\beta} \rho_\alpha \sigma_\beta \omega = \\
&= \text{sgn}(Df) \int_N \omega .
\end{aligned} \tag{1.15}$$

□

Il primo risultato fondamentale della teoria analizzata fino ad ora è il famoso teorema che segue.

**Teorema 1.2.5** (Stokes). *Sia  $M$  una  $n$ -varietà differenziabile e  $\omega$  una  $(n-1)$ -forma differenziale a supporto compatto su  $M$ ; vale allora l'uguaglianza*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{1.16}$$

dove  $\partial M$  è il bordo di  $M$  (possibilmente vuoto).

*Dimostrazione.* Si consideri inizialmente il caso  $M = \mathbb{H}^n$ , dove

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

è il semispazio superiore  $n$ -dimensionale. Sia quindi  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i d\hat{x}_i$ , con

$$d\hat{x}_i := dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n ;$$

per definizione, si ha

$$d\omega = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \dots dx_n .$$

Dal teorema di Fubini, si osserva innanzitutto che per ogni  $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n &= \int \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) d\hat{x}_i = \\ &= \int \left( \lim_{x_i \rightarrow \infty} f_i(\hat{x}_i, x_i) - \lim_{x_i \rightarrow -\infty} f_i(\hat{x}_i, x_i) \right) d\hat{x}_i = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

siccome  $f_i$  ha supporto compatto su  $\mathbb{H}^n$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_0^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right) d\hat{x}_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \lim_{x_n \rightarrow \infty} f_n(\hat{x}_n, x_n) - f_n(\hat{x}_n, 0) \right) d\hat{x}_n = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(\hat{x}_n, 0) d\hat{x}_n . \end{aligned} \quad (1.18)$$

Tuttavia, è opportuno ricordare che  $\mathbb{R}^{n-1}$  ha la stessa orientazione di  $\partial\mathbb{H}^n$  se e solo se  $n$  è pari. Dunque vale

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(\hat{x}_n, 0) d\hat{x}_n = (-1)^n \int_{\partial\mathbb{H}^n} f_n(\hat{x}_n, 0) d\hat{x}_n$$

da cui si conclude:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_1 \dots dx_n = \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(\hat{x}_n, 0) d\hat{x}_n = (-1)^{2n} \int_{\partial\mathbb{H}^n} f_n(\hat{x}_n, 0) d\hat{x}_n = \\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le uguaglianze della formula (1.17) garantiscono inoltre che

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0 \quad (1.20)$$

per ogni  $\omega$   $(n-1)$ -forma a supporto compatto su  $\mathbb{R}^n$ : ciò verifica ancora il teorema, poiché  $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$ .

Si può ora analizzare il caso in cui  $M$  sia una varietà differenziabile qualunque.

Sia  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  un atlante per  $M$  e  $\{\rho_\alpha\}$  una partizione dell'unità subordinata a  $\mathfrak{A}$ ; si scriva  $\omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \omega$  con  $\rho_\alpha \omega$  a supporto compatto su  $U_\alpha$ . Siccome  $U_\alpha$  è diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{H}^n$ , le uguaglianze (1.19) e (1.20) restano vere anche per  $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ . Per la linearità del differenziale, si arriva dunque al risultato cercato:

$$\int_M d\omega = \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = \sum_{\alpha \in A} \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{\partial M} \omega . \quad (1.21)$$

□

### 1.3 Coomologia di De Rham

Si introdurranno ora alcuni concetti utili in seguito; poiché essi non rappresentano lo scopo principale di questa tesi, si tratteranno brevemente e solo per poterne sfruttare i risultati.

No cohomology groups were harmed writing this essay.

**Definizione 1.14** (Coomologia di De Rham). Sia  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$  l'operatore differenziale; si chiami  $Ker d$  l'insieme delle *forme chiuse* di  $\Omega^*(M)$  e  $Im d$  l'insieme delle *forme esatte*. Poiché  $d^2 = 0$ ,  $Im d \subseteq Ker d$  e si definisce *coomologia di De Rham* su  $M$  il quoziente

$$H^*(M) := \frac{Ker d}{Im d}$$

e *k-esima coomologia di De Rham*

$$H^k(M) := \frac{Ker d \cap \Omega^k(M)}{Im d \cap \Omega^k(M)} .$$

Considerando solo le forme a supporto compatto, la *k-esima coomologia di De Rham a supporto compatto* è definita come segue:

$$H_c^k(M) := \frac{Ker(d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M))}{Im(d : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M))} .$$



*Osservazione 15.* Si noti che tutte le  $n$ -forme su una  $n$ -varietà sono chiuse.

La seguente proposizione deriva dalla dualità di Poincaré,<sup>7</sup> che qui non sarà esposta.<sup>8</sup>

**Proposizione 1.3.1.** *Se  $M$  è una  $n$ -varietà differenziabile connessa e senza bordo, la funzione*

$$\begin{aligned} H_c^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \int_M \omega \end{aligned} \quad (1.22)$$

*è un isomorfismo di  $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali.*

*Osservazione 16.* Siccome ogni  $n$ -forma su  $M$  è chiusa, la proposizione è equivalente a chiedere che tutte e sole le immagini tramite  $d$  delle  $(n-1)$ -forme a supporto compatto abbiano integrale nullo su  $M$ ; grazie al teorema di Stokes, si può intanto notare che è vera una delle due implicazioni.

Se  $\omega \in \text{Im}(d : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M))$  e  $\tau$  è una  $(n-1)$ -forma tale che  $\omega = d\tau$ , è infatti lecito dedurre:

$$\int_M \omega = \int_M d\tau = \int_{\partial M} \tau = 0 \quad (1.23)$$

poichè  $\partial M = \emptyset$ .

<sup>7</sup>In [5] è presente una dimostrazione che non sfrutta direttamente la dualità.

<sup>8</sup>Si consiglia di consultare [1] per un approfondimento dal punto di vista della topologia algebrica.



# Capitolo 2

## Teoria del Grado

Come si è anticipato, esistono fondamentalmente due definizioni per il grado di una funzione liscia tra varietà differenziabili.

La prima che verrà introdotta è generalmente la più diffusa e sfrutta esclusivamente le proprietà analitiche delle funzioni lisce; la seconda è invece simile a quella riportata in [1] ed utilizza la coomologia.

Si possono incontrare altre varianti pressoché equivalenti, ma la maggioranza dei testi (come ad esempio [4] e [5]) abbracciano la definizione iniziale ed eventualmente formulano la seconda sotto forma di teorema.

### 2.1 Grado di Brouwer

**Definizione 2.1** (Grado di Brouwer). Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione liscia tra varietà differenziabili orientate, senza bordo e della stessa dimensione  $n$ ; si supponga  $M$  compatta e  $N$  connessa. Se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$ , si definisce il *grado (di Brouwer)* di  $f$  nella seguente maniera:

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(D_x f) . \quad (2.1)$$

*Osservazione 17.* La scelta di  $y$  è garantita dal teorema di Sard, mentre il teorema della Funzione Inversa assicura che la (2.1) è una somma finita:  $f^{-1}(y)$  è infatti un sottoinsieme discreto del compatto  $M$ , dunque è necessariamente

finito.

Affinché il grado possa essere considerato un invariante topologico, è necessario dimostrare che  $\deg(f, y)$  non dipende dall'arbitraria scelta del valore regolare  $y$ . I due lemmi seguenti rappresentano il fulcro di questo fatto.

**Lemma 2.1.1.** *Siano verificate le ipotesi della definizione 2.1 per un'applicazione  $f$  e si supponga che  $M$  sia il bordo di una varietà compatta e orientabile  $X$ , in modo tale che l'orientazione di  $M$  sia quella di  $\partial X$ .*

*Se è possibile estendere  $f$  ad un'applicazione liscia  $F : X \rightarrow N$ , allora:*

$$\deg(f, y) = 0$$

$\forall y$  valore regolare di  $f$ .

*Dimostrazione.* Per dimostrare il Lemma, si considerano i due seguenti casi:

1.  $y$  è valore regolare per  $f$  e per  $F$ ;
2.  $y$  è valore regolare per  $f$  ma non per  $F$ .

Supponiamo sia vera l'ipotesi 1.: dal Lemma 1.1.4,  $F^{-1}(y)$  deve essere una 1-varietà compatta, in quanto la dimensione di  $X$  è  $n+1$ . La classificazione delle varietà compatte unidimensionali assicura che le componenti connesse di  $F^{-1}(y)$  sono omeomorfe a circonferenze o segmenti;<sup>1</sup> grazie sempre a 1.1.4, vale

$$f^{-1}(y) = \partial X \cap F^{-1}(y) = \partial(F^{-1}(y)) .$$

Si ignorino dunque le componenti senza bordo e si consideri un segmento curvilineo  $\gamma$ , il cui bordo non è altro che l'unione degli estremi  $a$  e  $b$ .  $\gamma$  è orientabile, e la sua orientazione si determina attraverso quelle di  $X$  e  $M$ : se  $z \in \gamma$  e  $(v_1, \dots, v_{n+1})$  è base positivamente orientata per  $T_z X$  con  $v_1 \in T_z A$ , allora  $v_1$  determina l'orientazione di  $T_z A$  se  $(D_z F(v_2), \dots, D_z F(v_{n+1}))$  è base

<sup>1</sup>Una dimostrazione è presente nell'appendice di [4].

positivamente orientata per  $T_y N$ .

Si consideri la funzione  $v(z)$  che associa ad ogni elemento di  $\gamma$  il vettore di  $T_z A \subset T_z X$  positivamente orientato di norma 1.

$v(z)$  è funzione liscia, in quanto composizione di un sistema di coordinate per un intorno aperto di  $z$  e della derivata di una parametrizzazione a velocità unitaria di tale intorno: agli estremi di  $\gamma$ , questo implica che se  $v(a)$  è vettore interno di  $T_a X$  rispetto a  $M$ , allora  $v(b)$  sarà necessariamente esterno in  $T_b X$  e viceversa (per chiarezza, con vettori "esterni" ed "interni" ci si riferisce ai due semispazi di  $T_z X$  separati da  $T_z M$  per  $z \in M$ ).

Siccome  $M = \partial X$ , una base  $(w_1, \dots, w_n)$  di  $T_a M$  è positivamente orientata se  $(v(a), w_1, \dots, w_n)$  è base positivamente orientata per  $T_a X$  e  $v(a)$  è vettore esterno. In tal caso, senza perdere di generalità, è chiaro che  $D_a f$  preserva l'orientazione, siccome porta  $(w_1, \dots, w_n)$  in una base positivamente orientata di  $T_y N$  (poiché lo fa  $D_a F$ ). Analogamente, essendo  $v(b)$  interno,  $D_b f$  non preserva l'orientazione. Da questo si deduce:

$$\operatorname{sgn}(D_a f) + \operatorname{sgn}(D_b f) = 0$$

per ogni segmento curvilineo  $\gamma$  di  $F^{-1}(y)$  con estremi  $a$  e  $b$ ; sommando su tutti i segmenti, risulta che  $\deg(f, y) = 0$ .

Supponiamo ora che sia vera l'ipotesi 2.: sia dunque  $y$  un valore regolare per  $f$  ma non per  $F$ . Grazie al teorema della Funzione Inversa, esiste un intorno  $V$  di  $y$  che soddisfa:

$$\deg(f, y) = \deg(f, y_0) \quad \forall y_0 \in V.$$

Infatti, per ogni  $x \in F^{-1}(y)$  esiste un intorno aperto  $U_x$  diffeomorfo tramite  $F$  ad un aperto  $V_x$  contenente  $y$ ; gli  $U_x$  sono in numero finito e possono essere scelti disgiunti. Sia ad esempio

$$V := \left( \bigcap_{x \in F^{-1}(y)} V_x \right) \setminus F \left( X \setminus \bigcup_{x \in F^{-1}(y)} U_x \right). \quad (2.2)$$

Siccome il numero degli elementi di  $F^{-1}(y)$  è costante su  $V$  così come il segno di  $D_x F$ ,  $\deg(f, y)$  è costante su  $V$  come funzione nella variabile  $y$ ; per

il corollario di Brown, esiste  $y_0 \in V$  valore regolare per  $F$  e grazie a quanto detto prima  $\deg(f, y_0) = 0$ .  $\square$

### 2.1.1 Invarianza per Omotopia

**Lemma 2.1.2.** *Siano  $f$  e  $g$  due applicazioni che soddisfano la definizione 2.1. Se  $f$  e  $g$  sono  $C^\infty$ -omotope, allora vale:*

$$\deg(f, y) = \deg(g, y)$$

$\forall y$  valore regolare di  $f$  e di  $g$ .

*Dimostrazione.* Si consideri l'omotopia liscia  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$ , con

$$F(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad F(1, x) = g(x) \quad \forall x \in M.$$

$[0, 1] \times M$  è una varietà differenziabile e orientabile, il cui bordo è l'unione tra  $\{0\} \times M$  e  $\{1\} \times M$ . Considerando l'orientazione indotta, si può affermare senza perdere di generalità che  $\{1\} \times M$  ha la stessa orientazione di  $M$ , mentre  $\{0\} \times M$  ha quella opposta.

Sia ora  $G : \partial([0, 1] \times M) \rightarrow N$  così definita:

$$G(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \{0\} \times M \\ g(x) & \text{se } x \in \{1\} \times M \end{cases}$$

È chiaro che  $G$  soddisfa le ipotesi della definizione 2.1 e che  $F$  è estensione di  $G$ ; dunque  $\deg(G, y) \equiv 0$  per il lemma 2.1.1.

Dall'orientazione scelta per  $\partial([0, 1] \times M)$ , si nota subito che:

$$\text{sgn}(D_x G) = \begin{cases} -\text{sgn}(D_x f) & \text{se } x \in \{0\} \times M \\ \text{sgn}(D_x g) & \text{se } x \in \{1\} \times M \end{cases}$$

e pertanto:

$$\begin{aligned} \deg(G, y) &= \sum_{x \in G^{-1}(y)} \text{sgn}(D_x G) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \text{sgn}(D_x g) - \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(D_x f) = \\ &= \deg(g, y) - \deg(f, y) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\forall y$  valore regolare comune a  $f$  e  $g$ . Questo completa la dimostrazione.  $\square$

Grazie ai due lemmi precedenti, si può ora dimostrare un importante risultato riguardante il grado.

**Teorema 2.1.3.**  *$\deg(f, y)$  non dipende dalla particolare scelta del valore regolare  $y$  di  $f$  ed è invariante per omotopia.*

Si scriverà dunque:

$$\deg(f) := \deg(f, y) \tag{2.4}$$

e, per ogni funzione  $g$  omotopa ad  $f$ , risulterà  $\deg(g) = \deg(f)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f : M \rightarrow N$  e  $y$  valore regolare di  $f$ . Per le ipotesi richieste in 2.1,  $N$  è connessa: grazie al Lemma di Omogeneità 1.1.5, per ogni punto  $z \in N$  è possibile scegliere un diffeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  isotopo all'identità e tale che  $h(y) = z$ .

Siccome  $h$  preserva l'orientazione di  $N$  ed è ovviamente iniettiva, si deduce che

$$\deg(f, y) = \deg(h \circ f, h(y))$$

per qualunque altro valore regolare  $h(y) = z$ . È altresì vero che  $f$  e  $h \circ f$  sono  $C^\infty$ -omotope; per il Lemma 2.1.2 appena mostrato, sarà possibile scrivere

$$\deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$$

da cui  $\deg(f, y) = \deg(f, z)$  per qualunque coppia di valori regolari  $y$  e  $z$ .

L'invarianza per omotopia di  $\deg(f)$  è automatica applicando nuovamente il Lemma 2.1.2. □

## 2.2 Grado e Forme Differenziali

I risultati del capitolo precedente su complesso e coomologia di De Rham permettono di dare la seconda definizione del grado, leggermente più generale rispetto a quella di Brouwer; successivamente, si mostrerà anche l'equivalenza tra le due.

**Definizione 2.2** (Grado). Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione liscia e propria, con  $M$  e  $N$  varietà differenziabili  $n$ -dimensionali, senza bordo e orientate; si supponga inoltre  $N$  connessa. Se  $\omega$  è una  $n$ -forma differenziale a supporto compatto su  $N$  tale che  $\int_N \omega \neq 0$ , si definisce il *grado* di  $f$  come segue:

$$\deg(f) := \frac{\int_M f^* \omega}{\int_N \omega} \quad (2.5)$$

dove  $f^*$  è il pullback di  $f$ .

*Osservazione 18.* Siccome  $f$  è propria, dall'osservazione 6 si è visto che  $f^* \omega$  è a supporto compatto in  $M$  e la formula (2.5) ha senso.

*Osservazione 19.*  $\deg(f)$  non dipende dalla scelta del rappresentante della classe di coomologia di  $\omega$ ; questa è una diretta conseguenza della proposizione 1.3.1 sull' $n$ -esima coomologia di De Rham e del teorema di Stokes.

Si consideri infatti una seconda  $n$ -forma  $\omega'$  che soddisfi la condizione

$$\int_N \omega' = \int_N \omega .$$

Poiché  $\omega' - \omega$  ha integrale nullo, ciò significa che la sua classe di coomologia è  $[0]$  e dunque  $\omega' - \omega = d\tau$  per una certa  $(n-1)$ -forma  $\tau$  su  $N$ . Sfruttando la commutatività vista in 1.2.1 e la proprietà di morfismo di  $f^*$ , si conclude nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_M f^* \omega' &= \int_M f^*(\omega + d\tau) = \int_M f^* \omega + \int_M d(f^* \tau) = \\ &= \int_M f^* \omega + \int_{\partial M} f^* \tau = \int_M f^* \omega \end{aligned} \quad (2.6)$$



osservando che  $\partial M = \emptyset$  come nell'espressione (1.23).

A parità del valore dell'integrale, è pertanto lecito scegliere il supporto di  $\omega$  come si preferisce.

*Osservazione 20.* La coomologia è invariante per omotopia propria (due funzioni lisce  $f, g : M \rightarrow N$  si dicono *propriamente*  $C^\infty$ -omotope se esiste un'omotopia liscia  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  tale che

$$x \mapsto F(t, x)$$

è propria per ogni  $t \in [0, 1]$ ).

Pertanto, allo stesso modo si ha che  $\deg(f) = \deg(g)$  se  $f$  e  $g$  sono propriamente  $C^\infty$ -omotope.

### 2.2.1 Equivalenza

Si vuole ora mostrare che  $\deg(f)$ , con la nuova definizione, non dipende nemmeno dalla classe di coomologia di  $\omega$  (a patto ovviamente che essa non sia  $[0]$ , come richiesto nell'ipotesi). Consideriamo prima il caso in cui  $f$  non sia suriettiva.

**Proposizione 2.2.1.** *Siano soddisfatte le ipotesi della definizione 2.2. Se  $f$  non è suriettiva,  $\deg(f) = 0$*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa sul risultato che  $Im(f)$  è sottoinsieme chiuso di  $N$ . Questo implica infatti che se  $y \in N \setminus Im(f)$ , allora esiste  $U \subset N \setminus Im(f)$  intorno aperto di  $y$ ; scegliendo un rappresentante di  $[\omega]$  con supporto contenuto in  $U$ , si ha che  $f^*\omega = 0$  e quindi  $\deg(f) = 0$ .

Sia dunque  $y \in N \setminus Im(f)$ . Siccome  $N$  è una varietà, è localmente compatto: ciò significa che esiste  $V$  intorno di  $y$  la cui chiusura  $\bar{V}$  è un compatto.  $f$  è funzione propria e continua, dunque  $f^{-1}(\bar{V})$  è anch'esso compatto, così come lo è  $f(f^{-1}(\bar{V})) =: W$ ; essendo  $W$  anche chiuso (perché  $N$  è Hausdorff),  $V \setminus W$  è intorno aperto di  $y$  disgiunto con  $Im(f)$ . Ciò basta per dimostrare che  $Im(f)$  è chiuso.  $\square$

Si supponga ora che  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$  per un qualunque valore regolare  $y \in N$ . Dal teorema della Funzione Inversa, si definiscano  $U_x$  e  $V_x$  come nel lemma 2.1.1, cosicché  $f$  sia diffeomorfismo locale tra  $U_x$  e  $V_x \ \forall x \in f^{-1}(y)$ . Se  $\omega$  è una forma a supporto compatto e integrale non nullo su  $N$ , dall'osservazione 19 si può assumere che il suo supporto sia contenuto in un intorno di  $y$  piccolo a piacere (per esempio  $\text{Supp } \omega \subset V$ , con  $V$  definito dall'espressione (2.2)): ragionando come nell'osservazione 6, se ne deduce che  $\text{Supp } f^*\omega$  è contenuto nell'unione disgiunta degli  $U_x$ . Da ciò che si è visto in precedenza,

$$\int_{U_x} f^*\omega = \pm \int_{V_x} \omega$$

a seconda che  $f|_{U_x}$  preservi o meno l'orientazione di  $M$  e  $N$ . Pertanto:

$$\int_M f^*\omega = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \int_{U_x} f^*\omega = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(D_x f) \int_N \omega \quad (2.7)$$

da cui si scriverà

$$\text{deg}(f) = \frac{\int_M f^*\omega}{\int_N \omega} = \frac{\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(D_x f) \int_N \omega}{\int_N \omega} = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(D_x f) \quad (2.8)$$

per un qualunque valore regolare  $y$ . Questo implica che il grado non dipende da  $\omega$ .

Si nota però che le espressioni (2.1) e (2.8) sono esattamente uguali e, se  $M$  è compatta, le ipotesi delle definizioni 2.1 e 2.2 sono equivalenti ( $f$  è banalmente propria). Questo risultato permette, dunque, di calcolare il grado di funzioni definite anche su varietà non compatte con la formula (2.1); ciò risulterà utile in seguito.

# Capitolo 3

## Applicazioni

In questo capitolo si mostreranno solo alcune delle numerose applicazioni della teoria del grado; per ulteriori dettagli, si consultino i testi di riferimento in bibliografia.

In particolare, si consiglia [4] in quanto contiene un interessante approfondimento su campi vettoriali, caratteristica di Eulero e teorema di Poincaré-Hopf.

### 3.1 Teorema Fondamentale dell'Algebra

Come prima applicazione, si fornisce una dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra sfruttando i risultati appena ottenuti.

**Teorema 3.1.1** (Fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio non costante in  $\mathbb{C}[x]$  ha almeno una radice.*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathbb{C}[x]$  un polinomio di grado  $n \neq 0$ . Senza perdere di generalità, si consideri  $f$  monico e si scriva dunque  $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ .

Come funzione polinomiale,  $f$  è liscia e propria (infatti  $|f(z)| \rightarrow \infty$  se  $|z| \rightarrow$

$\infty$ , ipotesi che implica la proprietà come si è visto nell'osservazione 8); inoltre

$$F : [0, 1] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (3.1)$$

$$F(t, z) = z^n + (1 - t)(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$$

è un'omotopia liscia tra  $f$  e  $g(z) = z^n$ , dove tutte le funzioni intermedie sono proprie.

$g^{-1}(1)$  è l'insieme delle radici del polinomio  $z^n - 1$ , che ne ha al più  $n$  per il teorema di Lagrange; d'altronde, i numeri complessi della forma

$$e^{\frac{2\pi i}{n}k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

hanno la proprietà di restituire 1 se elevati all' $n$ -esima potenza. Poiché esistono esattamente  $n$  di questi numeri, essi sono necessariamente tutte e sole le radici di  $z^n - 1$  e si chiamano *radici  $n$ -esime dell'unità*.

L'unico punto critico di  $g$  è 0, quindi 1 è valore regolare; inoltre, a rotazioni in senso antiorario nel dominio corrispondono tramite  $f$  rotazioni in senso antiorario nel codominio, dunque  $\text{sgn}(D_z f) = 1$  per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Siccome  $g$  e  $f$  sono  $C^\infty$ -omotope, si conclude che

$$\deg(f) = \deg(g) = \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

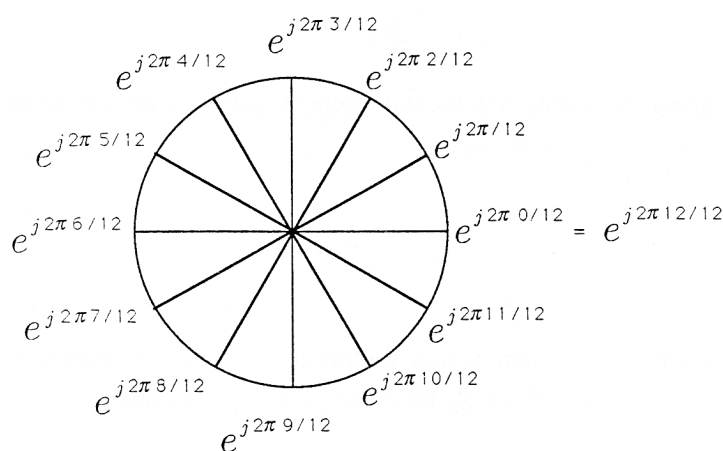


Figura 3.1: Le radici 12-esime dell'unità su  $\mathbb{C}$ .

ossia che il grado di  $f$  come applicazione coincide con il grado di  $f$  come polinomio.

Per la proposizione 2.2.1, se il grado non è nullo (cioè il polinomio non è costante) allora  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  deve essere suriettiva, ed esiste pertanto  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  per il quale  $f(\bar{z}) = 0$ .  $\square$

*Osservazione 21.* Poiché  $\mathbb{C}$  non è compatto, in questa dimostrazione si è usata la seconda definizione del grado e l'invarianza per omotopia propria esposta nell'osservazione 20; si è successivamente sfruttata l'equivalenza dimostrata nella sezione 2.2.1. Nel caso in cui si volesse usare la definizione 2.1, sarebbe necessario passare attraverso la funzione inversa della proiezione stereografica di  $S^2$  su  $\mathbb{C}$ .

## 3.2 Campi Vettoriali su $S^n$

Una conseguenza quasi immediata riguarda i campi vettoriali tangenti ad  $S^n$ .<sup>1</sup>

**Definizione 3.1** (Campo di vettori tangenti). Sia  $M \subset \mathbb{R}^k$  una varietà differenziabile (per comodità, la si consideri immersa nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^k$ ). Un *campo liscio di vettori tangenti* su  $M$  è una funzione liscia  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tale che  $v(x) \in T_x M \quad \forall x \in M$ .

**Teorema 3.2.1.**  $S^n$  ammette un campo liscio di vettori tangenti non nullo se e solo se  $n$  è dispari.

*Osservazione 22.* Per  $n = 2$ , si ha il famoso "Teorema della Palla Pelosa" di Brouwer.

*Dimostrazione.* Si ricorda che  $S^n$  può sempre essere immersa in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; si osserva inoltre che la definizione 3.1 è equivalente alla condizione

$$\langle v(x), x \rangle = 0 \quad \forall x \in S^n .$$

<sup>1</sup>Vedere [4] per una generalizzazione su altre varietà.

Poiché  $v(x)$  non deve essere mai nullo, si può assumere senza perdere di generalità che

$$\|v(x)\| = 1 \quad \forall x \in S^n ,$$

in quanto  $\bar{v}(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  è un altro campo che soddisfa questa condizione;  $v$  è quindi ora una funzione da  $S^n$  a  $S^n$ .

Si consideri la seguente applicazione liscia:

$$F : [0, 1] \times S^n \longrightarrow S^n \tag{3.2}$$

$$F(t, x) = x \cos(\pi t) + v(x) \sin(\pi t) .$$

$F$  è ben definita: infatti,

$$\|F(t, x)\|^2 = \|x\|^2 \cos^2(\pi t) + \|v(x)\|^2 \sin^2(\pi t) + 2 \langle x, v(x) \rangle \cos(\pi t) \sin(\pi t) = \tag{3.3}$$

$$= \cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = 1$$

grazie alle condizioni precedenti. Inoltre:

$$F(0, x) = x \quad \text{e} \quad F(1, x) = -x \quad \forall x \in S^n .$$

$F$  è quindi un'omotopia liscia tra l'identità di  $S^n$  e la mappa antipodale; tuttavia, si dimostra che ciò è impossibile se  $n$  è pari.

Sia infatti

$$r_i : S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow S^n \tag{3.4}$$

$$r_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$$

la riflessione rispetto all' $i$ -esima coordinata. È chiaro che la mappa antipodale è la composizione di tutte le  $n+1$  riflessioni, ovvero:

$$-x = (r_1 \circ \dots \circ r_{n+1})(x) .$$

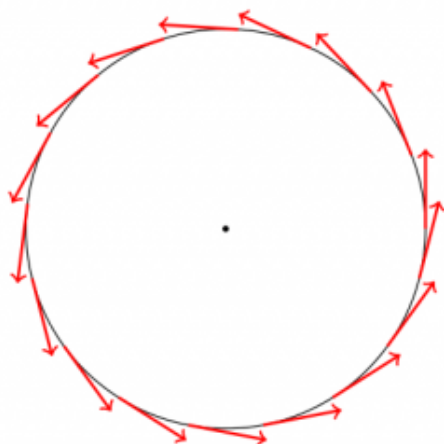


Figura 3.2: Un campo non nullo di vettori tangenti su  $S^1$ .

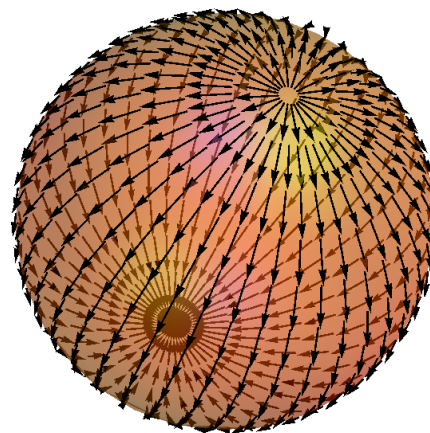


Figura 3.3: Un campo di vettori tangenti su  $S^2$  che si annulla ai poli.

Siccome si verifica immediatamente che  $\deg(r_i) = -1$  per ogni  $r_i$ , il grado della mappa antipodale è necessariamente  $(-1)^{n+1}$ ; se  $n$  è pari, questo implica che essa non può essere  $C^\infty$ -omotopa all'identità, la quale ha infatti grado 1. Dunque l'ipotesi che esista un campo liscio di vettori tangenti non nullo deve essere falsa.

D'altronde, se  $n = 2k - 1$  per qualche  $k$  naturale, la funzione

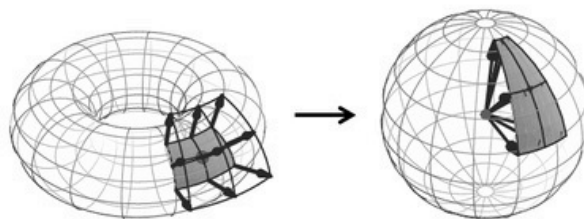
$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

definisce esplicitamente un campo di vettori con la proprietà cercata.  $\square$

### 3.3 Teorema di Gauss-Bonnet

Si pone ora l'attenzione sulle superfici, ossia le 2-varietà, immerse in  $\mathbb{R}^3$ ; è pertanto richiesta una conoscenza base di geometria differenziale nello spazio.

Figura 3.4: La mappa di Gauss sul toro e la sua curvatura gaussiana.



Grazie al contributo di numerosi matematici, si è giunti alla seguente classificazione:<sup>2</sup> ogni 2-varietà connessa, compatta, orientabile e senza bordo è omeomorfa a  $T_g$ , ossia il toro con  $g \geq 0$  buchi (per convenzione,  $T_0 = S^2$ ;  $g$  si chiama *genere* della varietà).

*Osservazione 23.* Se la superficie soddisfa le ipotesi e può essere immersa in  $\mathbb{R}^3$ , l'orientabilità è assicurata.

Innanzitutto, è opportuno ricordare qualche nozione di geometria differenziale.

**Definizione 3.2** (Applicazione di Gauss e curvatura gaussiana). Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una superficie differenziabile orientata e si indichi con  $N_p$  il vettore normale a  $\Sigma$  nel punto  $p$ , di norma unitaria e coerente con l'orientazione di  $\Sigma$ . La funzione

$$\begin{aligned} \Gamma : \Sigma &\rightarrow S^2 \\ p &\mapsto N_p \end{aligned} \tag{3.5}$$

si chiama *applicazione di Gauss* su  $\Sigma$ .

Si definisce *curvatura gaussiana* di  $\Sigma$  nel punto  $p$  la funzione:

$$K(p) := \det(D_p\Gamma) .$$

*Osservazione 24.* Le ipotesi su  $\Sigma$  impongono che il vettore normale sia definito per ogni  $p \in \Sigma$  e che  $\Gamma$  sia un'applicazione liscia. Inoltre, per definizione di vettore normale,  $T_p\Sigma = T_pS^2$  e pertanto

$$D_p\Gamma : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma .$$

<sup>2</sup>Si consulti ad esempio [3] per una formulazione nel caso anche non orientabile.



**Definizione 3.3** (Elemento d'area). Se  $\Sigma$  è definita come in 3.2, esiste un'unica forma differenziale  $d\sigma \in \Omega^2(\Sigma)$  tale che:

$$d\sigma^p(e_1, e_2) = 1 \quad (3.6)$$

per ogni  $p \in \Sigma$  ed  $(e_1, e_2)$  base ortonormale positivamente orientata di  $T_p\Sigma$ .  $d\sigma$  si dice *elemento d'area* di  $\Sigma$ .

*Osservazione 25.* Non si mostra l'unicità di  $d\sigma$ ; tuttavia, affinché sia chiara l'espressione (3.6), si ricorda che una 2-forma calcolata nel punto  $p \in \Sigma$  (indicata in questo caso con  $d\sigma^p$ ) è un'applicazione bilineare  $T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposizione 3.3.1.** *Sia  $\Sigma$  definita come in 3.2; sia  $\Gamma$  l'applicazione di Gauss su  $\Sigma$  e  $N_p$  il vettore normale alla superficie in  $p$ . L'elemento d'area di  $\Sigma$  è dato dalla formula esplicita:*

$$d\sigma^p(v_1, v_2) = \det(\Gamma(p), v_1, v_2) \quad (3.7)$$

per ogni  $p \in \Sigma$  e  $v_1, v_2 \in T_p\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Sia  $(e_1, e_2)$  base ortonormale positivamente orientata di  $T_p\Sigma$  e sia  $\Gamma(p) = N_p$  per ogni  $p \in \Sigma$ .

Per definizione di vettore normale,  $(N_p, e_1, e_2)$  è base ortonormale positivamente orientata di  $\mathbb{R}^3$  e pertanto corrisponde ad una rotazione della base canonica, ovvero ad una moltiplicazione della matrice identità per un elemento di  $SO^3(\mathbb{R})$ . Siccome le matrici del gruppo ortogonale speciale hanno tutte determinante uguale a 1, segue necessariamente che  $d\sigma^p(e_1, e_2) = 1$ ; dunque  $d\sigma$  è l'elemento d'area di  $\Sigma$ .  $\square$

*Osservazione 26.* Dalla geometria differenziale, è noto che se  $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  è un atlante per  $\Sigma$  e  $d\sigma = \{d\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , si ha:

$$d\sigma_\alpha = \Phi_\alpha^* \left( \sqrt{\det({}^t D\Phi_\alpha^{-1} D\Phi_\alpha^{-1})} dudv \right) \quad \forall \alpha \in A,$$

dove  $u$  e  $v$  sono le coordinate standard di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\sqrt{\det({}^t D\Phi_\alpha^{-1} D\Phi_\alpha^{-1})} dudv \in$

$\Omega^2(\mathbb{R}^2)$  e  $\Phi_\alpha^{-1}$  è ovviamente una parametrizzazione di  $U_\alpha$ .

La forma bilineare associata alla matrice simmetrica  ${}^tD\Phi_\alpha^{-1}D\Phi_\alpha^{-1}$  è chiamata *metrica* o *I Forma Fondamentale*<sup>3</sup> su  $\Sigma$ .

Spesso si compie un consapevole abuso di notazione omettendo il pullback; inoltre, è sempre comodo considerare anche parametrizzazioni definite su sottoinsiemi aperti di  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 3.4** (Area). Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  superficie differenziabile orientata e compatta. Se  $d\sigma$  è il suo elemento d'area, si definisce *area* di  $\Sigma$  il seguente integrale:

$$\text{Area}(\Sigma) := \int_{\Sigma} d\sigma . \quad (3.8)$$

*Osservazione 27.*  $\Sigma$  è compatta, quindi  $d\sigma$  è a supporto compatto e (3.8) è definito come si è visto in 1.13.

**Esempio 3.1** (Area di  $S^2$ ). Si osserva che la funzione liscia  $r : ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  così definita:

$$r(\theta, \varphi) := \begin{cases} x = \cos \theta \sin \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

è la parametrizzazione di un aperto  $D$  denso in  $S^2$ , dove  $x, y, z$  sono le coordinate standard di  $\mathbb{R}^3$ .

Poiché  $\bar{D} = S^2$ , integrare l'elemento d'area  $d\sigma$  su  $S^2$  equivale ad integrare  $d\sigma_r$  su  $D$ ; applicando la definizione, si calcola  $d\sigma_r = \sin \varphi d\theta d\varphi$  e si conclude:

$$\begin{aligned} \text{Area}(S^2) &= \int_{S^2} d\sigma = \int_D d\sigma_r = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) d\theta = \\ &= 2\pi [-\cos \varphi]_0^\pi = 4\pi . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Attraverso la nozione di *tensore metrico*, le definizioni e i risultati precedenti si estendono a varietà differenziabili e orientate  $n$ -dimensionali (si parla

<sup>3</sup>Si scrive  $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ , dove  $E$  e  $G$  sono gli elementi della diagonale.

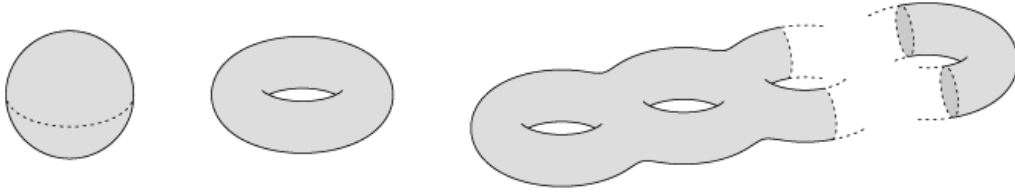


Figura 3.5: La classificazione delle superfici senza bordo, compatte e orientabili.

in questo caso di *forma volume* su una varietà). In questo modo, è possibile formulare un'enunciato generale del seguente teorema.<sup>4</sup>

**Teorema 3.3.2** (Gauss-Bonnet). *Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  superficie differenziabile connessa, compatta e senza bordo (come nell'osservazione 23, queste ipotesi implicano che  $\Sigma$  è orientabile).*

*Se  $d\sigma$  è l'elemento d'area di  $\Sigma$  e  $K$  è la sua curvatura gaussiana, vale l'uguaglianza:*

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi \chi(\Sigma) \quad (3.10)$$

dove  $\chi(\Sigma)$  indica la caratteristica di Eulero-Poincaré di  $\Sigma$ .

*Osservazione 28.* Spesso ci si riferisce a  $\int_{\Sigma} K d\sigma$  con il nome di *curvatura totale* di  $\Sigma$ .

*Dimostrazione.* Grazie alla classificazione delle superfici introdotta ad inizio sezione,  $\Sigma$  è omeomorfa a  $T_g$  per qualche intero  $g \geq 0$ ; poiché è varietà differenziabile, si ha in realtà un diffeomorfismo (generalmente, tale morfismo è definito tra aperti di  $\mathbb{R}^4$  contenenti le superfici). Si ricorda dunque che, attraverso triangolazioni di  $\Sigma$  e procedendo per induzione sul genere, si può

<sup>4</sup>Si rimanda a [5] tutta la generalizzazione in dimensione  $n$  di questa sezione su Gauss-Bonnet.

mostrare la seguente formula:<sup>5</sup>

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g . \quad (3.11)$$

Sia  $\omega$  l'elemento d'area di  $S^2$ : dalla proposizione 3.3.1, si ha che

$$\omega^x(w_1, w_2) = (x, w_1, w_2) \quad \forall x \in S^2, \quad \forall w_1, w_2 \in T_p S^2$$

poiché ogni vettore della sfera è normale a sé stesso.

Si consideri l'applicazione di Gauss  $\Gamma : \Sigma \rightarrow S^2$ ; è stato visto che tale applicazione è liscia e, per la compattezza di  $\Sigma$ ,  $\Gamma^*\omega$  è una 2-forma su  $\Sigma$  a supporto compatto. Con qualche calcolo, si ricava:

$$\begin{aligned} (\Gamma^*\omega)^p(v_1, v_2) &= \omega^{N_p}(D_p\Gamma(v_1), D_p\Gamma(v_2)) = \det(N_p, D_p\Gamma(v_1), D_p\Gamma(v_2)) = \\ &= \det\left((D_p\Gamma)(N_p, v_1, v_2)\right) = K(p) \det(N_p, v_1, v_2) = \\ &= K(p) d\sigma^p(v_1, v_2) \end{aligned}$$

per ogni  $p \in \Sigma$  e ogni  $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$  (si può infatti estendere  $D_p\Gamma$  a  $\mathbb{R}^3$  in modo tale che  $D_p\Gamma(N_p) = N_p$ ). Come uguaglianza di forme differenziali, ciò è equivalente a scrivere:

$$\Gamma^*\omega = K d\sigma .$$

Siccome l'area di  $S^2$  è  $4\pi$ , il grado dell'applicazione di Gauss sarà:

$$\deg(\Gamma) = \frac{\int_{\Sigma} \Gamma^*\omega}{\int_{S^2} \omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} K d\sigma . \quad (3.12)$$

D'altro canto, la superficie  $\Sigma$  è diffeomorfa a  $T_g$ ; in particolare, si consideri un diffeomorfismo  $h : \Sigma \rightarrow T_g$  che preserva l'orientazione ed immerge  $T_g$  in  $\mathbb{R}^3$  come segue:

1. Se  $\pi_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$  e  $\pi_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ , la retta  $\pi_x \cap \pi_y$  è asse di simmetria per  $T_g$ ;

---

<sup>5</sup>Si dà per noto sia questo risultato, sia il concetto di triangolazione; [3] contiene una sezione in merito.

2.  $\pi_x \cap \pi_y$  interseca  $T_g$  in esattamente  $2+2g$  punti.

Queste condizioni formalizzano il concetto che  $T_g$  si sviluppi lungo una sola dimensione all'aumentare di  $g$  e che sia posizionato "in piedi": è intuitivamente ovvio che tale diffeomorfismo  $h$  esiste.

Sia ora  $\Gamma' : T_g \rightarrow S^2$  l'applicazione di Gauss su  $T_g$ ,  $K'$  la sua curvatura gaussiana e  $d\sigma'$  l'elemento d'area. La controimmagine tramite  $\Gamma'$  del Polo Nord  $\mathcal{N}=(0,0,1) \in S^2$  è costituita da tutti i punti  $p$  di  $T_g$  che hanno per vettore normale proprio  $\mathcal{N}$ . Le ipotesi riguardo  $h$  (e conseguentemente  $T_g$ ) impongono che

$$|(\Gamma')^{-1}(\mathcal{N})| = g + 1 ,$$

dove però soltanto un punto ha curvatura gaussiana positiva, mentre gli altri soddisfano  $K'(p) < 0$ : ciò è vero perchè solo una delle controimmagini giace sulla regione "esterna" del toro. Quindi si deduce che

$$\deg(\Gamma') = \sum_{p \in (\Gamma')^{-1}(\mathcal{N})} \operatorname{sgn}(K'(p)) = 1 + \sum_{i=1}^g -1 = 1 - g . \quad (3.13)$$

Per la formula (3.11) e l'invarianza topologica della caratteristica di Eulero, si ha dunque:

$$\deg(\Gamma') = \frac{\chi(\Sigma)}{2} \quad (3.14)$$

da cui, applicando a  $\Gamma'$  e  $T_1$  l'equivalenza (3.12), si arriva al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{T_g} K' d\sigma' &= \frac{\chi(\Sigma)}{2} \\ \Downarrow \\ \int_{T_g} K' d\sigma' &= 2\pi \chi(\Sigma) . \end{aligned}$$

Per completare la verifica del teorema, rimane quindi da dimostrare che

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = \int_{T_g} K' d\sigma' , \quad (3.15)$$

cioè che la curvatura totale è invariante per diffeomorfismo.

Un'idea di dimostrazione parte dal fatto che l'insieme delle metriche su una superficie è convesso (e dunque connesso): ciò si verifica osservando che una combinazione convessa di prodotti scalari è ancora una forma simmetrica e definita positiva, ossia un prodotto scalare. Questo risultato implica dunque che se  $g_1$  e  $g_2$  sono due metriche su  $\Sigma$ , allora

$$\lambda(t) = tg_2 + (1-t)g_1 \quad \forall t \in [0, 1] \quad (3.16)$$

è una famiglia di metriche su  $\Sigma$ , tale che  $\lambda(0) = g_1$  e  $\lambda(1) = g_2$ .

Per il Teorema Egregium di Gauss, è noto che si possa esprimere la curvatura gaussiana in termini della I Forma Fondamentale  $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ ; in particolare, esiste sempre una parametrizzazione locale detta *conforme* per la quale  $F = 0$  e  $E = G =: \lambda$ , che semplifica notevolmente la formula:

$$K = \frac{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 - \lambda(\lambda_{u^2} + \lambda_{v^2})}{2\lambda^3} \quad (3.17)$$

dove  $\lambda_u = \frac{\partial \lambda}{\partial u}$  e  $\lambda_v = \frac{\partial \lambda}{\partial v}$ ,  $u$  e  $v$  coordinate di  $\mathbb{R}^2$ .

Unendo le formule 3.16 e 3.17, si ottiene la curvatura della famiglia di metriche  $\lambda(t)$ ; ricordando che l'elemento d'area è adesso  $\lambda(t) dudv$ , si scriverà:

$$K(t)d\sigma_{\alpha}(t) = \frac{\lambda_u^2(t) + \lambda_v^2(t) - \lambda(t)(\lambda_{u^2}(t) + \lambda_{v^2}(t))}{2\lambda^2(t)} dudv . \quad (3.18)$$

Si osserva<sup>6</sup> che, derivando rispetto alla variabile  $t$ , si ottiene una forma differenziale esatta: siccome  $\partial\Sigma = \emptyset$ , il teorema di Stokes garantisce che

$$\int_{\Sigma} \frac{d}{dt} K(t) d\sigma(t) = 0 ,$$

da cui si deduce che l'integrale è costante rispetto alla variabile  $t$ . Dunque la curvatura totale non dipende dalla metrica scelta.

Si considerino allora le forme differenziali  $d\sigma$  e  $h^*(d\sigma')$  su  $\Sigma$ , definite come nell'espressione (3.18) rispetto alle relative metriche.<sup>7</sup> Poiché  $h$  è un diffeomorfismo che preserva l'orientazione, si può affermare che:

$$\int_{T_g} K' d\sigma' = \int_{\Sigma} h^*(K' d\sigma') = \int_{\Sigma} (K' \circ h) h^*(d\sigma')$$

dove chiaramente  $K' \circ h$  è la curvatura di  $\Sigma$  espressa in funzione della nuova metrica a cui  $h^*(d\sigma')$  è associata.<sup>8</sup>

Siccome la curvatura totale non dipende dalla metrica, l'uguaglianza

$$\int_{\Sigma} (K' \circ h) h^*(d\sigma') = \int_{\Sigma} K d\sigma$$

completa la dimostrazione. □

**Esempio 3.2** (Toro). Si consideri il toro semplice  $T_1 = S^1 \times S^1$ : si osserva che la curvatura gaussiana è variabile lungo la sua superficie.

Infatti, esso contiene due circonferenze formate da punti  $p$  a curvatura nulla

<sup>6</sup>Il lettore può "divertirsi" a verificarlo.

<sup>7</sup>Siccome  $h$  preserva l'orientazione,  $h^*(d\sigma')$  è multiplo positivo di  $d\sigma$  e quindi è anch'esso esprimibile rispetto ad una certa metrica associata.

<sup>8</sup>Si ragiona su una riparametrizzazione di  $\Sigma$  ottenuta componendo  $h$  e la parametrizzazione di  $T_g$  a cui la metrica è associata.

(in quanto  $N_p$  è ortogonale anche ai piani che le contengono) e queste ultime separano la superficie in due regioni: una "esterna" dove  $K$  è positiva e l'altra "interna" dove  $K$  è negativa.

Ma  $T_1$  ha caratteristica di Eulero-Poincaré nulla, poiché

$$\chi(T_1) = 2 - 2 = 0 ;$$

dal teorema di Gauss-Bonnet, si ha quindi

$$\int_{T_1} K d\sigma = 0$$

ossia la sua curvatura totale è nulla.

Ciò formalizza il concetto intuitivo che  $T_1$  sia curvo tanto negativamente quanto positivamente; per l'invarianza topologica di  $\chi$ , questo è vero per qualunque superficie liscia omeomorfa ad un toro, come ad esempio una tazza da tè.



Figura 3.6: Due esempi di superfici a curvatura totale nulla.



# Conclusioni e ringraziamenti

In questa tesi sono state introdotte le basi della teoria del grado da un punto di vista quasi esclusivamente analitico: l'argomento è in realtà decisamente più vasto ed intreccia splendidamente la topologia differenziale con quella algebrica.

La speranza più grande è che queste poche pagine siano riuscite a stimolare l'interesse di anche un solo lettore per la materia.

A costo di risultare banale, ecco alcuni dovuti ringraziamenti (in ordine casuale) alle persone che hanno supportato la realizzazione di questa tesi:

- al professor Luca Migliorini, per avermi proposto un argomento di tesi così interessante e per il supporto, la simpatia ed i preziosi chiarimenti;
- ai miei genitori e agli amici, per aver dimostrato pazienza e comprensione nei miei ultimi periodi di intenso studio (e conseguente trascuratezza di ogni altra cosa);
- ai compagni di corso che hanno reso speciali questi tre anni e mezzo e mi hanno convinto a non mollare nei momenti difficili;
- a tutti (o quasi!) i professori del Dipartimento di Matematica, per la loro straordinaria disponibilità;
- agli Arhadia, perché la musica è stata sempre una valida alternativa quando la matematica non bastava;
- alla parte di me che crede in se stessa.

Un grazie speciale anche a chi, per un motivo o per l'altro, ha dedicato il proprio tempo alla lettura di questa tesi.

# Bibliografia

- [1] Bott R., Tu L.W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, New York, Springer-Verlag, 1982
- [2] Brown A.B., *Functional Dependence*, New York, Columbia University, 1934
- [3] Gallier J., Xu D., *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*, Berlino Heidelberg, Springer-Verlag, 2013
- [4] Milnor J.W., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia, Virginia, 1965
- [5] Robbin J.W., Salamon D.A., *Introduction to Differential Topology*, 2014 reperibile al sito:  
<https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/difftop.pdf>
- [6] Warner F.W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1983