Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI VISCOSE DI OPERATORI UNIFORMEMENTE ELLITTICI

Tesi di Laurea Magistrale in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Fausto Ferrari

Presentata da:
Giacomo Sachs

III Sessione
Anno Accademico 2015/2016

Introduzione

La teoria sulla regolarità delle cosiddette soluzioni viscose trova applicazione nello studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali completamente non lineari. La nozione di soluzione viscosa è, per le equazioni a derivate parziali non in forma di divergenza, l'analogo della nozione di soluzione variazionale per le equazioni in forma di divergenza. Scopo della tesi è di rivedere alcuni teoremi di regolarità per equazioni del tipo

$$F(D^2u) = f(x).$$

D^2u indica la matrice Hessiana di u e F è un operatore completamente non lineare. Tali risultati sono stati ottenuti tramite tecniche legate alla disuguaglianza di Harnack (vedi [5] per una dettagliata bibliografia), e da M.G. Crandall, H.Ishii, P.-L. Lions in [3], [4] e [6]. In questo lavoro approfondiremo un approccio leggermente diverso legato ad un principio del massimo, detto teorema delle somme, alla base dei lavori di M.G. Crandall, H. Ishii e P.-L. Lions.

Per familiarizzare col concetto di soluzione viscosa consideriamo il caso più semplice possibile $\Delta u = 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Una soluzione classica di tale equazione richiede almeno $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$; d'altra parte, grazie al teorema di Koebe, sappiamo che è sufficiente sapere che una funzione u sia continua e abbia particolari proprietà geometriche, come ad esempio la proprietà di media, affinché sia armonica. Questo approccio trova nel teorema di Weyl il suo naturale compimento, per operatori in forma di divergenza, con la nozione di operatore ipoellittico.

L'idea che sottende alla teoria delle soluzioni viscose per certi versi è analoga. Una funzione u è detta soluzione viscosa dell'equazione $F(D^2u, x) = f(x)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto se è continua e soddisfa le seguenti:

- Per ogni punto $x_0 \in \Omega$, e per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{C}^2$, se φ tocca dall'alto u in x_0, allora $F(D^2\varphi(x_0), x_0) \geq f(x_0)$
- Per ogni punto $x_0 \in \Omega$, e per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{C}^2$, se φ tocca dal basso u in x_0, allora $F(D^2\varphi(x_0), x_0) \leq f(x_0)$

Nel caso dell'equazione di Laplace ciò si traduce nel fatto che in ogni punto, se $u - \varphi$ ha un massimo locale in x_0, allora $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$. Se invece $u - \varphi$ ha un minimo locale in x_0, allora $\Delta\varphi(x_0) \leq 0$.

L'esistenza di soluzioni di questo tipo è ottenuta con un metodo di tipo Perron, e in generale sapremo che tali soluzioni sono continue. D'altra parte, dal fatto che una funzione sia soluzione viscosa di una equazione alle derivate parziali, vorremmo poterne dedurre una maggior regolarità. Il primo passo consiste nel provare che sono in realtà funzioni Hölderiane.

Per fornire al lettore l'idea che sottende a questo approccio, basato appunto sul teorema delle somme, supponiamo di raddoppiare le variabili e costruire una nuova funzione $\Phi(x, y) = u(x) - u(y) - \varphi(x, y)$, dove φ è una opportuna funzione di classe $\mathcal{C}^2$ per $x \neq y$ che rappresenta un modulo di continuità. Mostrando che $\sup \Phi(x, y) \leq 0$, si otterrà la regolarità desiderata per u. Per semplicità espositiva supponiamo che u sia sufficientemente regolare, diciamo $\mathcal{C}^2$. Allora, nel caso in cui $\Phi(x, y) = u(x) - u(y) - \varphi(x, y)$ ammetta massimo locale nell'interno di Ω, varrà che, detto $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega, \hat{x} \neq \hat{y}$ tale massimo, $D^2\Phi(\hat{x}, \hat{y}) \leq 0$. Ma questo significa che

$$\begin{pmatrix} D^2u(\hat{x}) & 0 \\ 0 & -D^2u(\hat{y}) \end{pmatrix} \leq D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}).$$

Dalla precedente disuguaglianza tra matrici possiamo dedurre alcune proprietà di φ, in relazione al fatto che per mezzo delle matrici Hessiane possiamo scrivere l'equazione di cui u è soluzione. Il teorema delle somme estende questa idea, prendendo u meno regolare e sostituendo nella diagonale della prima matrice due opportune matrici simmetriche che sostituiscono le matrici Hessiane, e aggiungendo un termine correttivo nel secondo membro.

Nel primo capitolo verranno introdotti alcuni concetti fondamentali, definita la classe degli operatori uniformemente ellittici e alcuni esempi importanti, fra cui gli operatori estremali di Pucci. Vengono poi enunciate le definizioni di soprasoluzione e sottosoluzione viscosa, unitamente alla definizione dei jet del secondo ordine. Verrà poi enunciato il teorema delle somme, il principale strumento usato per lo studio della regolarità delle soluzioni di equazioni completamente non lineari.

Nel secondo capitolo vengono portati alcuni esempi di equazioni lineari uniformemente ellittiche, e viene dimostrata la regolarità $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ delle soluzioni in una palla centrata nell'origine.

Nel terzo capitolo viene dimostrata la regolarità $\mathcal{C}^{0,1}$ per soluzioni limitate superiormente semicontinue su $\mathbb{R}^n$, e nel caso di ulteriori ipotesi di concavità dell'operatore la semiconcavità della soluzione. Si è poi localizzato il risultato di regolarità $\mathcal{C}^{0,1}$ in una palla centrata nell'origine. Ciò è coerente con quanto noto in letteratura per cui, per gli operatori completamente non lineari, in assenza di ulteriori condizioni quali la convessità (o la concavità), la regolarità delle soluzioni viscose non è in generale meglio di $\mathcal{C}^{1,\alpha}$: è il caso del controesemio di N.Ndirashvili, S. Vladuts ([8]).

Nell'ultimo capitolo si è preso in esame un operatore degenere, per il quale è nota la regolarità classica delle soluzioni deboli, e si è cercato di estendere i metodi utilizzati precedentemente a tale situazione: il metodo per soluzioni superiormente semicontinue in $\mathbb{R}^n$ di H. Ishii [3] risulta applicabile, anche se si osserva comunque che occorre introdurre una limitazione sul comportamento dell'operatore all'infinito. Più precisamente, per un operatore lineare occorre richiedere che la matrice A dei coefficienti sia $o(|x|^2)$ per $|x| \to \infty$. Inoltre, se eliminiamo il termine di ordine zero e cerchiamo un risultato di regolarità locale, ci accorgiamo che il metodo di Ishii-Lions, anche adattato da Imbert e Silvestre, non sembra di immediata applicazione, a causa della degenerazione della matrice.

Indice

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

1.1 Notazione

Indicheremo, nel corso dell'elaborato, con Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, mentre $\nabla u, D^2 u$ saranno rispettivamente il gradiente e la matrice Hessiana di una funzione u.

Indicheremo poi con $USC(\Omega), LSC(\Omega)$ l'insieme delle funzioni rispettivamente superiormente semicontinue e inferiormente semicontinue in Ω, e con $BUC(\Omega)$ l'insieme delle funzioni superiormente semicontinue limitate:

$$
\begin{aligned}
&USC(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x_0 \in \Omega\} \\
&LSC(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x_0 \in \Omega\} \\
&BUC(\Omega) = USC(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)
\end{aligned}
$$

Indicheremo poi con $\mathrm{tr}(A)$ la traccia della matrice A.

Infine, detto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici a coefficienti reali, scriveremo

$$\mathcal{S}^n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M = M^T\}$$

per indicare l'insieme delle matrici simmetriche a coefficienti reali.

1.2 Soluzioni Viscose

Definizione 1.1 (Operatore uniformemente ellittico, [5]). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Un operatore continuo $F : \mathcal{S}^n \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ si dice uniformemente ellittico con costanti di ellitticità $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, se per ogni $(M, x) \in \mathcal{S}^n \times \Omega$ e per ogni $N \geq 0$ vale che*

$$\lambda \|N\| \leq F(M + N, x) - F(M, x) \leq \Lambda \|N\|$$

dove $\|N\| = \sup_{|\xi|=1} \|N\xi\|$.

Definizione 1.2 (Operatore Convesso). *Un operatore $F : \mathcal{S}^n \mapsto \mathbb{R}$ si dice convesso se per $X, Y \in \mathcal{S}^n$ e per ogni $t \in [0, 1]$ vale*

$$F(tX + (1 - t)Y) \leq tF(X) + (1 - t)F(Y)$$

Teorema 1.1. *Sia $M \in \mathcal{S}^n$. Allora esistono $M^+, M^- \in \mathcal{S}^n$, $M^\pm \geq 0$ tali che $M = M^+ - M^-$ e $M^+M^- = 0$.*

Lemma 1.1 ([5]). *Se F è uniformemente ellittico, allora per ogni $M, N \in \mathcal{S}^n$ e per ogni $x \in \Omega$ si ha*

$$F(M + N, x) \leq F(M, x) + \Lambda \|N^+\| - \lambda \|N^-\|$$

Dimostrazione. Se $M \in \mathcal{S}^n$ e $N \geq 0$, e per $x \in \Omega$ si ha

$$\lambda \|N\| \leq F(M + N, x) - F(M, x) \leq \Lambda \|N\|$$

D'altra parte, vale che per ogni $M, N \in \mathcal{S}^n$

$$F(M + N, x) = F(M + N^+ - N^-, x) = F(M - N^- + N^+, x)$$

da cui

$$\lambda \|N^+\| \leq F(M + N, x) - F(M - N^-, x) \leq \Lambda \|N^+\|$$

Analogamente si ha

$$\lambda \|N^-\| \leq F(M - N^- - N^-, x) - F(M - N^-, x) \leq \Lambda \|N^-\|$$

da cui

$$\lambda\|N^-\| + F(M - N^-, x) \le F(M, x)$$

Allora

$$F(M + N, x) \le \Lambda\|N^+\| + F(M - N^-, x)$$

e dunque

$$F(M + N, x) \le F(M, x) + \Lambda\|N^+\| - \lambda\|N^-\|$$

□

Lemma 1.2 ([7])**.** *F è uniformemente ellittico se e solo se esistono $0 < \lambda' \le \Lambda'$*

$$\lambda' \operatorname{tr}(N) \le F(M + N, x) - F(M, x) \le \Lambda' \operatorname{tr}(N)$$

per $N \ge 0$.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\|N\| \le \operatorname{tr}(N) \le n\|N\|$$

□

Corollario 1.1. *Se $Y - X \ge 0$ e F è uniformemente ellittico, allora*

$$\frac{\lambda}{n} \operatorname{tr}(Y - X) \le F(Y) - F(X) \le \Lambda \operatorname{tr}(Y - X)$$

Dimostrazione. Si applica il lemma 1.2, ponendo $M = X, N = Y - X$. □

Definizione 1.3 (Soluzione Viscosa, [5])**.** *Una funzione u continua in Ω è detta una sottosoluzione viscosa di $F(D^2u(x), \nabla u(x), u(x), x) = f(x)$ se vale la seguente condizione: per ogni $x_0 \in \Omega$, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e $u - \varphi$ ha un massimo locale in x_0, allora*

$$F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \ge f(x_0)$$

Analogamente, diremo che u è una soprasoluzione viscosa di $F(D^2u(x), x) = f(x)$ se vale che per ogni $x_0 \in \Omega$, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e $u - \varphi$ ha un minimo locale in x_0, allora

$$F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \le f(x_0)$$

u si dice soluzione viscosa di $F(D^2u(x), \nabla u(x), u(x), x) = f(x)$ se è sia soprasoluzione che sottosoluzione.

Esiste un modo diverso, ma particolarmente utile, per definire le soluzioni viscose di un'equazione.

Definizione 1.4 (Semijet, [7]). *Siano* $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$ *tali che*

$$u(y) \leq u(x) + \langle p, y-x \rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x \rangle + o(|y-x|^2)$$

Diremo allora che (p, X) *saranno nel superjet del secondo ordine di* u *in* Ω *nel punto* $x \in \Omega$. *Indicheremo tale insieme come* $J_\Omega^{2,+}u(x)$.

Analogamente, se $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$ *sono tali che*

$$u(y) \geq u(x) + \langle p, y-x \rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x \rangle + o(|y-x|^2)$$

Diremo allora che (p, X) *saranno nel sottojet del secondo ordine di* u *in* Ω *nel punto* $x \in \Omega$, *che indicheremo con* $J_\Omega^{2,-}u(x)$.

La precedente definizione risulta fondamentale grazie ai seguenti teoremi.

Teorema 1.2. *[7] Sia* $u \in USC(\Omega)$. *Sono equivalenti le seguenti:*

1. u *è una sottosoluzione viscosa di* $F(D^2u(x), \nabla u(x), u(x), x) = f(x)$;

2. *Per ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $(p, X) \in J_\Omega^{2,+}u(x)$ *si ha*

$$F(X, p, u(x), x) \geq f(x).$$

In tal caso diciamo che u *è sottosoluzione viscosa nel senso dei jet.*

Dimostrazione. Sia u un sottosoluzione nel senso dei jet. Se $u - \varphi$ ha un minimo locale intorno a x_0, e cioè $u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0)$, osserviamo che possiamo ridurci al caso $u(x_0) = \varphi(x_0)$. Allora, utilizzando lo sviluppo di Taylor, otteniamo

$$\begin{aligned} u(x) \leq \varphi(x) &= \varphi(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x-x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle + o(|x-x_0|^2) \\ &= u(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x-x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle + o(|x-x_0|^2) \end{aligned}$$

Allora $(\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \in J_\Omega^{2,+}u(x_0)$, da cui

$$F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq f(x_0)$$

e cioè u è sottosoluzione viscosa.

Sia ora u sottosoluzione viscosa di $F(D^2u(x), \nabla u(x), u(x), x) = f(x)$, e siano $(p, X) \in J_\Omega^{2,+}u(x)$. Vorremmo usare il fatto che u sia sottosoluzione viscosa ponendo:

$$u(y) \leq u(x) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + o(|y-x|^2) =: \varphi(y)$$

Dobbiamo allora trovare un $o(|y-x|^2)$ adatto; in particolare, vogliamo $\varphi \in C^2(\Omega)$ tale che $u(y) - \varphi(y) \leq u(x) - \varphi(x) = 0$. Ora, $o(|y-x|^2)$ è fissato, e dunque possiamo trovare una $\omega : [0, \infty) \mapsto [0, \infty), \omega(0) = 0$, tale che

$$o(|y-x|^2) \leq |y-x|^2\omega(|y-x|)$$

Allora, posta

$$\psi(y) = u(x) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + |y-x|^2\omega(|y-x|)$$

si ha che $u(y) - \psi(y) \leq 0$, almeno intorno a x. Se poniamo allora

$$\omega_1(s) = \int_t^{\sqrt{3}t}\int_s^{2s}\omega(r)drds \geq \int_t^{\sqrt{3}t}\omega(r)\int_s^{2s}\omega(r)drds \geq \omega(t)\frac{1}{2}((\sqrt{3}t)^2 - t^2) = t^2\omega(t)$$

otteniamo che

$$\varphi(y) = u(x) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + \omega_1(|y-x|)$$

da cui $\varphi \in C^2(\Omega)$. Inoltre $u(x) - \varphi(x) \leq u(y) - \varphi(y)$, e infine che

$$\nabla\varphi(x) = p, \quad D^2\varphi(x) = X$$

da cui la tesi. □

Teorema 1.3. *[7] Sia $u \in LSC(\Omega)$. Sono equivalenti le seguenti:*

1. *u è una soprasoluzione viscosa di $F(D^2u(x), \nabla u(x), u(x), x) = f(x)$;*
2. *Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $(p, X) \in J_\Omega^{2,-}u(x)$ si ha*

$$F(X, p, u(x), x) \leq f(x)$$

In tal caso diciamo che u è soprasoluzione viscosa nel senso dei jet.

Data dunque l'equivalenza fra le due definizioni (soluzione viscosa e soluzione viscosa nel senso dei jet), diremo soluzione viscosa per indicare entrambe.

1.3 Operatori di Pucci

Definizione 1.5 (Operatori di Pucci, [5]). *Siano $0 < \lambda \leq \Lambda$, e consideriamo l'insieme*

$$\mathscr{A}_{\lambda,\Lambda} = \{A \in \mathcal{S}^n : \lambda|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

Definiamo, per $M \in \mathcal{S}^n$ gli operatori estremali di Pucci come:

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) = \sup_{A \in \mathscr{A}_{\lambda,\Lambda}} \operatorname{tr}(AM)$$

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) = \inf_{A \in \mathscr{A}_{\lambda,\Lambda}} \operatorname{tr}(AM)$$

Osservazione 1.1. Nelle condizioni precedenti, vale che

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) = \lambda \sum_{e_i<0} e_i + \Lambda \sum_{e_i>0} e_i$$

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) = \lambda \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i$$

dove $e_i = e_i(M)$ sono gli autovalori di M.

Valgono inoltre le seguenti:

1. $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M)$
2. $\mathcal{P}^\pm_{\lambda,\Lambda}(\alpha M) = \alpha \mathcal{P}^\pm_{\lambda,\Lambda}(M)$ se $\alpha \geq 0$
3. $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M+N) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(N)$
4. Se $N \geq 0$, allora $\lambda\|N\| \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(N) \leq n\Lambda\|N\|$
5. $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}, \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ sono uniformemente ellittici, con costanti di ellitticità $\lambda, n\Lambda$
6. $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}$ è concavo, mentre $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ è convesso.

Lemma 1.3 ([7]). *Sia $F(D^2u, x) = f(x)$ un'equazione uniformemente ellittica non lineare. Sia poi u una sottosoluzione a tale problema. Allora u è una sottosoluzione di*

$$\mathcal{P}^+_{\lambda/n,\Lambda}(D^2u) \geq f(x) - F(0, x).$$

Più in generale, se $\varphi \in C^2$, allora $\varphi - u$ è sottosoluzione a

$$\mathcal{P}^+_{\lambda/n,\Lambda}(D^2u) \geq f(x) - F(D^2\varphi, x).$$

1.4 Teorema delle Somme

Il teorema delle somme è uno strumento fondamentale per lo sviluppo di quanto mostreremo, e ci permetterà di studiare la regolarità delle soluzioni viscose di equazioni non lineari uniformemente ellittiche.

Teorema delle Somme ([7]). *Sia $v \in USC(\overline{\Omega}), w \in LSC(\overline{\Omega})$, Ω localmente compatto, $\varphi \in C^2$ in un intorno di $\Omega \times \Omega$. Posto $\Phi(x, y) = v(x) - w(y) - \varphi(x, y)$, sia $(\hat{x}, \hat{y})$ un massimo locale di Φ in $\Omega \times \Omega$.*

Allora $\forall \mu > 0$ esistono $X, Y \in S^n$ tali che

$$(\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), X) \in \overline{J}_{\Omega}^{2,+} v(x) \qquad , \qquad (-\nabla_y \varphi(\hat{x}, \hat{y}), Y) \in \overline{J}_{\Omega}^{2,-} w(y)$$

$$-\Big(\frac{1}{\mu} + \|D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y})\|\Big) I \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}) + \frac{1}{\mu}(D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}))^2$$

Osservazione 1.2. Se $v, w \in C^2(\Omega)$, ponendo $X = D^2v(\hat{x})$, $Y = D^2w(\hat{y})$, allora

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y})$$

Il teorema delle somme è una generalizzazione di questo fatto, con l'aggiunta di un termine di errore al secondo membro.

Osservazione 1.3. Sia $A \in \mathcal{S}^n$, $\|A\| < \infty$. Allora

$$\langle A\xi, \xi \rangle \leq \|A\||\xi|^2 = \|A\|\langle I\xi, \xi \rangle.$$

Dunque

$$A \leq \|A\|I.$$

Se $\|D\varphi(\hat{x}, \hat{y})\| < \infty$, posto $\varepsilon := \frac{\|D^2\varphi\|^2}{\mu}$, la seconda disuguaglianza del teorema delle somme può essere scritta come

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}) + \varepsilon I$$

Esiste una versione estesa del teorema delle somme, che riportiamo:

Teorema delle Somme, estensione ([6]). *Sia* $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ *localmente compatto, per* $i = 1, \dots, k$, *e sia*

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k,$$

$u_i \in USC(\Omega_i)$, *e* $\varphi \in \mathcal{C}^2$ *in un intorno di* Ω. *Poniamo*

$$\omega(x) = u_1(x_1) + \cdots + u_k(x_k), \quad (x_1, \dots, x_k) \in \Omega,$$

e supponiamo che $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k) \in \Omega$ *sia un massimo locale di* $\omega - \varphi$ *relativo ad* Ω. *Allora per ogni* $\mu > 0$ *esistono* $X_i \in \mathcal{S}^{n_i}$ *tali che*

$$\begin{gathered}
\nabla_{x_i}\varphi(\hat{x}_i), X_i) \in J^{2,+}_{\Omega} u_i(\hat{x}_i), \quad i = 1, \dots, k \\
-\Big(\frac{1}{\mu} + \|D^2\varphi(\hat{x})\|\Big) I \le \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_k \end{pmatrix} \le D^2\varphi(\hat{x}) + \mu(D^2\varphi(\hat{x}))^2.
\end{gathered}$$

Capitolo 2

Regolarità $\mathcal{C}^{0,\alpha}$

Esaminiamo alcuni esempi di operatori uniformemente ellittici: in questo capitolo mostreremo che la regolarità delle soluzioni è $\mathcal{C}^{0,\alpha}$, con $0 \leq \alpha < 1$.

Partiamo con un caso particolarmente semplice, ma che fungerà da linea guida per la dimostrazione dei successivi.

Teorema 2.1 ([7]). *Sia $u \in \mathcal{C}(B_4)$ una soluzione viscosa di $F(D^2u) = \Delta u = 0$. Allora per $\alpha \in [0,1)$ esiste $C > 0$:*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \forall x, y \in B_{1/4}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di F si ha che $F(A) = \mathrm{tr}(A)$.

Osserviamo poi che possiamo supporre $0 \leq u \leq 1$. Se infatti u è soluzione viscosa di $\Delta u = 0$, allora anche $v := \frac{u - \inf u}{\sup(u - \inf u)}$ lo è. Posto $\mu = \sup(u - \inf u)$, si ha

$$F(D^2v) = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{tr}(D^2(u - \inf u)) = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{tr}(D^2u)$$

da cui, poichè $D^2u = \mu D^2v$

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{tr}(\mu D^2v) = 0$$

Sia ora $z \in B_{1/4}$, e poniamo

$$f(x,y) = \varphi(x,y) + 2|x-z|^2 = C|x-y|^\alpha + 2|x-z|^2$$

Quello che vogliamo fare è mostrare

$$u(x) - u(y) \leq C|x-y|^\alpha + 2|x-z|^2, z \in B_{1/4}$$

allora, se $x = z$, avremo la tesi. Osserviamo che per la simmetria del problema x e y sono intercambiabili, da cui l'assenza del valore assoluto in $u(x) - u(y)$.

Sia allora, per $z \in B_{1/4}$,

$$f(x, y) = C|x - y|^\alpha + 2|x - z|^2$$

e supponiamo, per assurdo, che esistano un $\theta > 0$ e degli $\hat{x}, \hat{y} \in B_1$ tali che

$$u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - f(\hat{x}, \hat{y}) = \sup_{(x,y)\in\overline{B}_1\times\overline{B}_1} u(x) - u(y) - f(x, y) = \theta > 0$$

Osserviamo allora che $\hat{x} \neq \hat{y}$, altrimenti

$$0 < \theta = u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - f(\hat{x}, \hat{y}) \leq 0$$

che è assurdo.

Inoltre $(\hat{x}, \hat{y}) \notin \partial(\overline{B}_1 \times \overline{B}_1)$, in quanto si avrebbe

$$C|\hat{x} - \hat{y}|^\alpha + 2|\hat{x} - z|^2 \geq C|\hat{x} - \hat{y}|^\alpha + 2(1 - |z|)^2 \geq C|\hat{x} - \hat{y}|^\alpha + \frac{9}{8} > 1$$

Allora

$$0 < u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - f(\hat{x}, \hat{y}) \leq u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - 1 \leq 1 - u(\hat{y}) - 1 = -u(\hat{y}) \leq 0$$

e questo è assurdo per l'ipotesi fatta. Dunque $(\hat{x}, \hat{y}) \notin \partial(\overline{B}_1 \times \overline{B}_1), \hat{x} \neq \hat{y}$.

Applichiamo allora il teorema delle somme, con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned}
&\Omega = B_1 \\
&v(x) = u(x) - 2|x - z|^2 \\
&w(y) = u(y) \\
&\varphi = C|x - y|^\alpha
\end{aligned}$$

In questo modo sono rispettate tutte le ipotesi del teorema, con $(\hat{x}, \hat{y})$ massimo locale di $\Phi(x, y)$ in $\Omega \times \Omega$.

Sempre dal teorema delle somme, si ottiene allora che per ogni $\mu > 0$ esistono $X, Y \in \mathcal{S}^n$ tali che:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), X) \in \overline{J}^{2,+}_{B_1}(u(\hat{x}) - 2|\hat{x} - z|^2) \\
&(-\nabla_y \varphi(\hat{x}, \hat{y}), Y) \in \overline{J}^{2,-}_{B_1} u(\hat{y}) \\
&\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}) + \frac{1}{\mu}(D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}))^2
\end{aligned}
$$

Osserviamo che la prima è equivalente a scrivere

$$
(\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}) + 4(\hat{x} - z), X + 4I) \in \overline{J}^{2,+}_{B_1} u(\hat{x})
$$

Infatti, dire $(\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), X) \in \overline{J}^{2,+}_{B_1}(u(\hat{x}) - 2|\hat{x} - z|^2)$ significa che

$$
\begin{aligned}
u(y) - 2|y - z|^2 \leq & u(\hat{x}) - 2|\hat{x} - z|^2 + \langle \nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), y - \hat{x} \rangle + \\
& + \frac{1}{2}\langle X(y - \hat{x}), y - \hat{x} \rangle + o(|y - \hat{x}|^2)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
u(y) &\leq u(\hat{x}) - 2|\hat{x} - z|^2 + 2|y - z|^2 + \langle \nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), y - \hat{x} \rangle + \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle X(y - \hat{x}), y - \hat{x} \rangle + o(|y - \hat{x}|^2) \\
&= u(\hat{x}) + 2(|y - z|^2 - |\hat{x} - z|^2) + \langle \nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), y - \hat{x} \rangle + \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle X(y - \hat{x}), y - \hat{x} \rangle + o(|y - \hat{x}|^2)
\end{aligned}
$$

D'altra parte vale che

$$
\begin{aligned}
2(|y - z|^2 - |x - z|^2) &= 2(\langle y - z, y - z \rangle + \langle x - z, x - z \rangle) \\
&= 2(\langle y - z, y - x \rangle + \langle x - z, y - x \rangle) \\
&= 2\langle x - z, y - x \rangle + 2\langle y - x + x - z, y - x \rangle \\
&= 4\langle x - z, y - x \rangle + 2\langle y - x, y - x \rangle \\
&= 4\langle x - z, y - x \rangle + 2\langle I(y - x), y - x \rangle
\end{aligned}
$$

e dunque

$$\begin{aligned}u(y) \leq & u(\hat{x}) + \langle \nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}) - 4(\hat{x} - z), y - z \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle (X + 4I)(y - \hat{x}), y - \hat{x} \rangle\end{aligned}$$

cioè quello che cercavamo. Calcoliamo a questo punto $\nabla\varphi$ e $D^2\varphi$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = C \frac{\partial}{\partial x_i} |x - y|^\alpha = C\alpha |x - y|^{\alpha - 1} \frac{x_i - y_i}{|x - y|} = C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} (x_i - y_i)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = C \frac{\partial}{\partial y_i} |x - y|^\alpha = C\alpha |x - y|^{\alpha - 1} \frac{-(x_i - y_i)}{|x - y|} = -C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} (x_i - y_i)$$

Dunque

$$\nabla \varphi(x, y) = C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} (x - y, -(x - y))$$

Calcoliamo alcuni generici elementi di $D^2\varphi$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} &= C\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (|x - y|^{\alpha - 2} (x_i - y_i)) \\ &= C\alpha(\alpha - 2) |x - y|^{\alpha - 4} (x_j - y_j)(x_i - y_i) + C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} \delta_{ij} \\ &= C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} \left((\alpha - 2) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} \cdot \frac{x_i - y_i}{|x - y|} + \delta_{ij} \right) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial y_i} &= -C\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (|x - y|^{\alpha - 2} (x_i - y_i)) \\ &= -C\alpha(\alpha - 2) |x - y|^{\alpha - 4} (x_i - y_i)(x_j - y_j) - C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} \delta_{ij} \\ &= -C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} \left((\alpha - 2) \frac{x_i - y_i}{|x - y|} \cdot \frac{x_j - y_j}{|x - y|} + \delta_{ij} \right)\end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere:

$$D^2 \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} M & -M \\ -M & M \end{pmatrix}$$

dove

$$M = C\alpha |x - y|^{\alpha - 2} \left((\alpha - 2) \frac{x - y}{|x - y|} \otimes \frac{x - y}{|x - y|} + I \right)$$

Aggiungiamo poi che

$$(D^2\varphi(x,y))^2 = 2\begin{pmatrix} M^2 & -M^2 \\ -M^2 & M^2 \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned}
M^2 &= C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}\left((\alpha-2)\frac{x-y}{|x-y|}\otimes\frac{x-y}{|x-y|}+I\right)\cdot\left((\alpha-2)\frac{x-y}{|x-y|}\otimes\frac{x-y}{|x-y|}+I\right)\\
&= C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}\left((\alpha-2)^2\frac{x-y}{|x-y|}\otimes\frac{x-y}{|x-y|}+2(\alpha-2)\frac{x-y}{|x-y|}\otimes\frac{x-y}{|x-y|}+I\right)\\
&= C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}\left(\alpha(\alpha-2)\frac{x-y}{|x-y|}\otimes\frac{x-y}{|x-y|}+I\right)
\end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che $X-Y$ ha autovalori tutti negativi. Infatti, se $\xi\in\mathbb{R}^n$ vale che

$$\begin{aligned}
\langle (X-Y)\xi,\xi\rangle = \langle X\xi,\xi\rangle - \langle Y\xi,\xi\rangle &= \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}\\
&\le \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} M & -M \\ -M & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}+\frac{2}{\mu}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} M^2 & -M^2 \\ -M^2 & M^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}=0
\end{aligned}$$

per il teorema delle somme. Dunque $\langle (X-Y)\xi,\xi\rangle\le 0$. In particolare, osserviamo che

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \xi\end{pmatrix}\right]^T\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \xi\end{pmatrix}\right]^T\\
&= \begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \xi\end{pmatrix}\\
&\qquad+\begin{pmatrix}0\\ \xi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \xi\end{pmatrix}\\
&\le 2\langle M\xi,\xi\rangle+\frac{2}{\mu}\langle M^2\xi,\xi\rangle\\
&= 2\Big(\langle M\xi,\xi\rangle+\frac{2}{\mu}\langle M^2\xi,\xi\rangle\Big)=2\langle\Big(M+\frac{2}{\mu}M^2\Big)\xi,\xi\rangle
\end{aligned}$$

Ora, se $\xi = \frac{x-y}{|x-y|}$, si ha

$$\begin{aligned}
\langle M\xi, \xi\rangle &= C\alpha|x-y|^{\alpha-2}\langle\Big((\alpha-2)\xi\otimes\xi + I\Big)\xi, \xi\rangle \\
&= C\alpha|x-y|^{\alpha-2}\Big((\alpha-2)\langle(\xi\otimes\xi)\xi,\xi\rangle + |\xi|^2\Big) \\
&= C\alpha|x-y|^{\alpha-2}\Big((\alpha-2)|\xi|^4 + |\xi|^2\Big) \\
\langle M^2\xi, \xi\rangle &= C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}\Big(\alpha(\alpha-2)\langle(\xi\otimes\xi)\xi,\xi\rangle + |\xi|^2\Big) \\
&= C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}\Big(\alpha(\alpha-2)|\xi|^4 + |\xi|^2\Big)
\end{aligned}$$

Allora, poichè $|\xi| = 1$, si ha

$$\langle(X-Y)\xi,\xi\rangle = 2C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(\alpha-1) + \frac{4}{\mu}C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}(\alpha-1)^2$$

Scegliamo allora $\frac{1}{\mu}$ in modo che

$$\frac{4}{\mu}C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}(\alpha-1)^2 < -C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(\alpha-1)$$

In particolare, varrà che, se

$$\mu < -4C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}$$

avremo

$$\langle(X-Y)\xi,\xi\rangle < C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}$$

e cioè esisterà almeno un autovalore di $X-Y$ più piccolo di $C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}$.
Allora, poichè $\operatorname{tr}(X+4I) \geq 0, -\operatorname{tr}(Y) \geq 0$, si avrà che

$$0 \leq \operatorname{tr}(X+4I) - \operatorname{tr}(Y) \leq 4n + C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2} \leq 4n + C\alpha(\alpha-1)2^{\alpha-2} < 0$$

per

$$C(n,\alpha) > \frac{n2^{4-\alpha}}{\alpha(\alpha-2)}$$

ma questo è assurdo.
Dunque $u(x) - u(y) \leq C|x-y|^\alpha + 2|\hat{x}-z|^2$, e dunque, se $x = z$ si ha

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \alpha \in (0,1).$$

$\square$

Teorema 2.2. *Sia $u \in \mathcal{C}(B_4)$ una soluzione viscosa di $F(D^2u) = \Delta u = f$, $f \in \mathcal{C}(B_4)$. Allora per ogni $\alpha \in [0,1)$ esiste $C > 0$:*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \forall x, y \in B_{1/4}$$

Dimostrazione. Vogliamo generalizzare il risultato precedente al caso non omogeneo. Osserviamo allora che, come nel caso precedente, possiamo supporre $0 \leq u \leq 1$, in quanto, se $\mu = \sup(u - \inf u), v = \frac{u - \inf u}{\mu}$, si ha che

$$\Delta(v) = \frac{1}{\mu}\Delta u = \frac{1}{\mu} f = \tilde{f}, \qquad \tilde{f} \in \mathcal{C}(B_4)$$

Dunque v soddisfa un'equazione della stessa classe di quella soddisfatta da u. Sia allora $0 \leq u \leq 1$, e poniamo

$$g(x,y) = \varphi(x,y) + 2|x-z|^2 = C|x-y|^\alpha + 2|x-z|^2$$

Come nel caso precedente, vogliamo mostrare che $u(x) - u(y) - g(x,y) \leq 0$ per $x, y \in B_{1/4}$. Sia allora $(\hat{x}, \hat{y}) \in \overline{B_1} \times \overline{B_1}$:

$$u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - g(\hat{x}, \hat{y}) = \sup_{(x,y) \in \overline{B_1} \times \overline{B_1}} u(x) - u(y) - g(x,y)$$

e supponiamo, per assurdo, che

$$u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - g(\hat{x}, \hat{y}) = \theta > 0$$

Osserviamo allora che $\hat{x} \neq \hat{y}$, altrimenti

$$0 < \theta = u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - g(\hat{x}, \hat{y}) = -g(\hat{x}, \hat{y}) \leq 0$$

che è assurdo.

Inoltre, come nel caso precedente, se $(\hat{x}, \hat{y}) \in \partial(B_1 \times B_1)$, allora

$$\theta + \frac{9}{8} \leq u(\hat{x}) - u(\hat{y}) \leq 1$$

che è assurdo. Dunque $(\hat{x}, \hat{y}) \notin \partial(B_1 \times B_1)$

A questo punto applichiamo il teorema delle somme, e secondo gli stessi calcoli otteniamo che, se $(\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), X + 4I) \in \overline{J}^{2,+} u(\hat{x})$ e $(-\nabla_y \varphi(\hat{x}, \hat{y}), Y) \in \overline{J}^{2,-} u(\hat{y})$, allora $X - Y$ ha tutti gli autovalori negativi, e di questi ne esisterà almeno uno più piccolo di $C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}$.

Poichè $\operatorname{tr}(X+4I) \geq f(\hat{x}), \operatorname{tr}(Y) \leq f(\hat{y})$, si ha che

$$0 \leq \operatorname{tr}(X+4I) - \operatorname{tr}(Y) - f(\hat{x}) + f(\hat{y}) \leq 4n + C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2} + 2\|f\|_\infty < 0$$

per

$$C(n,\alpha) > \frac{4n + 2\|f\|_\infty}{\alpha(1-\alpha)2^{\alpha-2}}$$

ma questo è assurdo. Dunque per $x, y \in B_{1/4}$

$$u(x) - u(y) \leq C|x-y|^\alpha, \alpha \in [0,1).$$

□

Teorema 2.3. *Sia $u \in \mathcal{C}(B_1)$ una soluzione viscosa di $F(D^2u) = \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2u) = 0$. Allora per $\alpha \in [0,1)$ esiste $C > 0$:*

$$u(x) - u(y) \leq C|x-y|^\alpha, \forall x, y \in B_{1/4}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che possiamo considerare $0 \leq u \leq 1$. Se infatti $\mu = \sup(u - \inf u)$. allora $v := \frac{u - \inf u}{\mu}$ soddisfa un'equazione del tipo $\frac{1}{\mu}F(\mu D^2 v) = 0$, che sta nella stessa classe di $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$.

Sia allora $z \in B_{1/4}$, e poniamo

$$f(x,y) = \varphi(x,y) + 2|x-z|^2 = C|x-y|^\alpha + 2|x-z|^2$$

Vogliamo mostrare allora che $u(x) - u(y) - f(x,y) \leq 0$ per ogni $x, y \in B_{1/4}$. Supponiamo per assurdo che non sia così, e cioè che esistano $\hat{x}, \hat{y} \in B_1$ tali che

$$u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - f(\hat{x},\hat{y}) = \sup_{(x,y)\in \overline{B}_1 \times \overline{B}_1} u(x) - u(y) - f(x,y) = \theta > 0$$

Osserviamo allora che $\hat{x} \neq \hat{y}$, e che $(\hat{x},\hat{y}) \notin \partial(B_1 \times B_1)$. Se infatti $\hat{x} = \hat{y}$, allora

$$0 < -2|x-z|^2$$

ma ciò è assurdo. Se invece $(\hat{x},\hat{y}) \in \partial(B_1 \times B_1)$, allora

$$0 < u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - C|\hat{x}-\hat{y}|^\alpha - 2|x-z|^2 \leq 1 - u(\hat{y}) - \frac{9}{8} < 0$$

che è assurdo. Applichiamo allora il teorema delle somme, e otteniamo

$$(\nabla_x(\hat{x},\hat{y}) + 4(x-z), X + 4I) \in \overline{J}^{2,+}u(x), \qquad (-\nabla_y(\hat{x},\hat{y}), Y) \in \overline{J}^{2,-}u(y)$$

con la disuguaglianza

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq D^2\varphi + \frac{1}{\mu}(D^2\varphi)^2$$

dove

$$\nabla\varphi(x,y) = C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(x-y, -(x-y))$$
$$D^2\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} M & -M \\ -M & M \end{pmatrix}, M = C\alpha|x-y|^{\alpha-2}\left((\alpha-2)\frac{x-y}{|x-y|} \otimes \frac{x-y}{|x-y|} + I\right)$$
$$D^2\varphi(x,y) = 2\begin{pmatrix} M^2 & -M^2 \\ -M^2 & M^2 \end{pmatrix}, M^2 = C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}\left(\alpha(\alpha-2)\frac{x-y}{|x-y|} \otimes \frac{x-y}{|x-y|} + I\right)$$

Allora, tutti gli autovalori di $X-Y$ sono negativi, ed inoltre, posto $\xi = \frac{x-y}{|x-y|}$, vale che

$$\langle (X-Y)\xi, \xi\rangle \leq 2C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(\alpha-1) + \frac{4}{\mu}C^2\alpha^2|x-y|^{2(\alpha-2)}(\alpha-1)^2 \leq C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(\alpha-1)$$

per

$$\mu < -4C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}$$

Dunque almeno un autovalore di $X-Y$ dovrà essere minore di $C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(\alpha-1)$.

Ora, poichè $X + 4I \in \overline{J}^{2,+}u(\hat{x}), Y \in \overline{J}^{2,-}u(\hat{y})$, vale

$$0 \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+4I) - \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(Y)$$

Vale poi che

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+4I) - \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(Y) &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y+4I) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) + 4\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(I) \\ &= \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) + 4n\Lambda \end{aligned}$$

dove la prima disuguaglianza è data dalla convessità di $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ e la seconda dalla proprietà (3) dell'osservazione 1.1.

Otteniamo la contraddizione osservando che, poichè gli autovalori di $X - Y$ sono tutti negativi, e almeno uno è minore di $C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(\alpha-1)$, vale che

$$\begin{aligned} 4n\Lambda + \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) &= 4n\Lambda + \Lambda\sum_{e_i>0} e_i + \lambda\sum_{e_i<0} e_i = 4n\Lambda + \lambda\sum_{e_i<0} e_i \\ &< 4n\Lambda + \lambda C\alpha|x-y|^{\alpha-2}(\alpha-1) < 0 \end{aligned}$$

per $C(\alpha,n) > \frac{4n\Lambda}{\lambda\alpha 2^{\alpha-2}}$.

Dunque $u(x) - u(y) \le C|x-y|^\alpha$ per $x, y \in B_{1/4}$. □

Abbiamo infine il seguente caso più generale, che comprende i precedenti.

Teorema 2.4. *Sia $u \in \mathcal{C}(B_1)$ una soluzione viscosa dell'equazione $F(D^2u) = 0$, F uniformemente ellittico con costanti di ellitticità $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ e omogeneo di grado 1. Allora per $\alpha \in (0,1)$ esiste $C > 0$ tale che*

$$u(x) - u(y) \le C|x-y|^\alpha, \forall x, y \in B_{1/4}$$

Dimostrazione. Anche in questo caso osserviamo che possiamo supporre $0 \le u \le 1$, in quanto $v = \frac{u - \inf u}{\sup(u - \inf u)}$ soddisfa un'equazione che sta nella stessa classe di quella di cui u è soluzione: infatti, se $\mu = \sup(u - \inf u)$

$$F(D^2v, x) = F(\frac{1}{\mu}D^2(u - \inf u)) = \frac{1}{\mu}F(D^2u) = 0$$

Sia, per $z \in B_{1/4}$, $f(x,y) = \varphi(x,y) + 2|x-z|^2 = C|x-y|^\alpha + 2|x-z|^2$, e sia $(\hat{x},\hat{y}) \in \overline{B}_1 \times \overline{B}_1$ tale che

$$|u(\hat{x}) - u(\hat{y})| - f(\hat{x},\hat{y}) = \sup_{\overline{B}_1\times\overline{B}_1} |u(x) - u(y)| - f(x,y)$$

Supponiamo per assurdo che

$$|u(\hat{x}) - u(\hat{y})| - f(\hat{x},\hat{y}) = \theta > 0$$

Osserviamo allora che, come nei casi precedenti, $\hat{x} \ne \hat{y}$ e $(\hat{x},\hat{y}) \notin \partial(B_1 \times B_1)$. Questo perchè se $\hat{x} = \hat{y}$ si ha

$$0 < -2|\hat{x} - z|^2 < 0$$

Se invece $(\hat{x}, \hat{y}) \in \partial(B_1 \times B_1)$, allora

$$0 < 1 - u(y) - \frac{9}{8} < 0$$

che è assurdo.

Applichiamo allora il teorema delle somme, e otteniamo che

$$(\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}), X + 4I) \in \overline{J}^{2,+} u(\hat{x}), (-\nabla_y \varphi(\hat{x}, \hat{y}), Y) \in \overline{J}^{2,-} u(\hat{y})$$

Si ottiene inoltre che $X - Y \leq 0$, e che almeno un autovalore di $X - Y$ è minore di $C\alpha(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}$. Per il lemma 1.2 si ha

$$0 \leq F(X + 4I) - F(Y) \leq F(X) - F(Y) + 4n\Lambda$$

Ora, osserviamo che $Y - X \geq 0$, dunque

$$F(Y) - F(X) = F(X + (Y - X)) - F(X)$$

e allora, per il corollario 1.1, si ha che

$$\frac{\lambda}{n} \operatorname{tr}(Y - X) \leq F(X + (Y - X)) - F(X) \leq \Lambda' \operatorname{tr}(Y - X)$$

da cui

$$\Lambda' \operatorname{tr}(X - Y) \leq F(X) - F(Y) \leq \frac{\lambda}{n} \operatorname{tr}(X - Y)$$

dunque

$$0 \leq F(X) - F(Y) + 4n\Lambda \leq \frac{\lambda}{n} \operatorname{tr}(X - Y) + 4n\Lambda \leq C\alpha(\alpha - 1)|x - y|^{\alpha-2} + 4n\Lambda < 0$$

per $C(n, \alpha) > \frac{n\Lambda 2^{4-\alpha}}{\frac{\lambda}{n}\alpha(1-\alpha)}$ da cui la contraddizione. Ponendo $x = z$ si ha quindi la tesi. $\square$

Capitolo 3

Regolarità Lipschitz

3.1 Regolarità per soluzioni viscose in $\mathbb{R}^n$

In questa sezione ci occuperemo di mostrare che una soluzione viscosa di un'equazione uniformemente ellittica definita su tutto $\mathbb{R}^n$ ha regolarità $\mathcal{C}^{0,1}$. Se poi l'operatore è concavo, allora la soluzione è semiconcava.

Anteponiamo ai teoremi alcune premesse.

Definizione 3.1. *Per una funzione* $u : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{m\times n}$ *scriveremo*

$$\|u\|_0 = \|(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|u_{ij}|^2)^{1/2}\|_\infty$$

$$\|u\|_1 = \|(\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\partial_k u_{ij}|^2)^{1/2}\|_\infty$$

$$\|u\|_2 = \|(\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\partial_{kl}^2 u_{ij}|^2)^{1/2}\|_\infty$$

Osservazione 3.1. Dalle definizioni appena date segue

$$\|u\|_\infty = \|u\|_0$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \|u\|_0 + \|u\|_1$$

$$\|u\|_{W^{2,\infty}} = \|u\|_0 + \|u\|_1 + \|u\|_2$$

Riportiamo altri due risultati, necessari per il successivo sviluppo delle dimostrazioni.

Proposizione 3.1 ([3])**.** *Sia $f \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, e siano $x, y, z \in \Omega$. Allora*

$$f(x) + f(y) - 2f(z) \leq \|\nabla f\|_{W^{1,\infty}}(|x-y|^4 + |x+y-2z|^2)^{1/2}$$

Dimostrazione. Scriviamo

$$f(x) + f(y) - 2f(z) = f(x) + f(y) - 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + 2\Big(f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) - f(z)\Big)$$

Osserviamo che per il teorema del valor medio vale

$$\begin{aligned} f(x) - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= \langle \nabla f\Big(sx + (1-s)\frac{x+y}{2}\Big), \frac{x-y}{2}\rangle \\ f(y) - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= \langle \nabla f\Big(ty + (1-t)\frac{x+y}{2}\Big), \frac{y-x}{2}\rangle \end{aligned}$$

allora

$$f(x)+f(y)-2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \langle \nabla f\Big(sx+(1-s)\frac{x+y}{2}\Big) - \nabla f\Big(ty+(1-t)\frac{x+y}{2}\Big), \frac{x-y}{2}\rangle$$

Riapplicando nuovamente il teorema del valor medio otteniamo allora

$$f(x) + f(y) - 2f(z) = \langle D^2 f(\rho)\frac{x-y}{2}, \xi - \eta\rangle + \langle \nabla f(\zeta), x+y-2z\rangle$$

dove $\xi = sx + (1-s)\frac{x+y}{2}, \eta = ty + (1-t)\frac{x+y}{2}, \zeta = uz + (1-u)\frac{x+y}{2}$. Allora

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) - 2f(z) &\leq \|f\|_2 |x-y|^2 + \|f\|_1 |x+y-2z| \\ &\leq \|\nabla f\|_{W^{1,\infty}}(|x-y|^4 + |x+y-2z|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.2. *Sia $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$|g(x) - g(z)| \leq \|g\|_{W^{1,\infty}}(|x-y|^4 + |x+y-2z|^2)^{1/4}$$

Dimostrazione. Osserviamo che vale, per il teorema del valor medio

$$\begin{aligned} |g(x) - g(z)| &\leq \Big|g(x) - g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big| + \Big|g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) - g(z)\Big)\Big| \\ &\leq \|g\|_1 \frac{x-y}{2} + \sqrt{\Big(g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) - g(z)\Big)^2} \end{aligned}$$

Ora, consideriamo $\Big(g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)-g(z)\Big)^2$: sempre per il teorema del valor medio vale che

$$\begin{aligned}\Big(g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)-g(z)\Big)^2 &= g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2-2g(z)g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+g(z)^2\\ &= g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big(g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)-g(z)\Big)+g(z)\Big(g(z)-g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big)\\ &\le \|g\|_0\langle\nabla g(\xi),\frac{x+y-2z}{2}\rangle-\|g\|_0\langle\nabla g(\eta),\frac{x+y-2z}{2}\rangle\\ &\le 2\|g\|_0\|g\|_1\Big|\frac{x+y-2z}{2}\Big|\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}|g(x)-g(z)| &\le \|g\|_1\frac{|x-y|}{2}+\Big(2\|g\|_0\|g\|_1\Big|\frac{x+y-2z}{2}\Big|\Big)^{1/2}\\ &\le \|g\|_{W^{1,\infty}}(|x-y|^4+|x+y-2z|^2)^{1/4}\end{aligned}$$

e cioè la tesi. □

Teorema 3.1 ([3]). *Sia $u\in BUC(\mathbb{R}^n)$ soluzione viscosa di $F(D^2u)-c(x)u(x)=f(x)$, con $c,f\in BUC(\mathbb{R}^n)$, e supponiamo che $0<c_0=\inf_{\mathbb{R}^n}c(x)$. Allora*

$$\|u\|_\infty\le\frac{2}{c_0}\|f\|_\infty$$

Dimostrazione. Sia $\delta>0$, e scegliamo

$$\begin{aligned}L &> \frac{1}{c_0}\|f\|_0\\ C &> \frac{2}{c_0}\|f\|_0\end{aligned}$$

Posto

$$\Phi(x,y)=u(x)-L|x-y|-C-\delta|x|^2$$

vogliamo mostrare $\Phi\le 0$. Supponiamo per assurdo che $\Phi>0$, e che esista una coppia $(\hat{x},\hat{y})$ tale che

$$0<\theta=\Phi(\hat{x},\hat{y})=\sup_{\mathbb{R}^{2n}}\Phi(x,y)$$

Osserviamo innanzitutto che, se $\hat{x},\hat{y}\in\mathbb{R}^n$, allora $\hat{x}\ne\hat{y}$, altrimenti

$$0<-\delta|\hat{x}|^2-\varepsilon<0$$

e questo è assurdo. Osserviamo poi che se $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è tale che

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(x_j, y_j) = \theta$$

allora $|x_j - y_j| \leq \|u\|_\infty$, e dunque ammette una sottosuccessione $|x_{j_k} - y_{j_k}|$ convergente a $|x_0 - y_0| \neq 0$. Allora esisterà un $\gamma > 0$ tale che

$$\gamma \leq |x_{j_k} - y_{j_k}| \leq \frac{1}{\gamma}$$

Infine, anche $\delta|x_j|^2 \leq \|u\|_\infty$, dunque anche questa ammette una sottosuccessione convergente, per ogni $\delta > 0$.

Ora, se $\varphi(x, y) = L|x - y|$, allora

$$D^2\varphi(x, y) \leq \frac{L}{|x-y|}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

Allora, per il teorema delle somme si ha che per ogni $\mu > 0$ esistono $X, Y \in \mathcal{S}^n$ tali che

$$(\hat{p}, X) \in J^{2,+}(u(\hat{x}) - 2\delta|\hat{x}|^2), (\hat{p}, Y) \in J^{2,-}(0)$$
$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \Big(\frac{L}{|\hat{x}-\hat{y}|} + \frac{2L^2}{\mu|\hat{x}-\hat{y}|^2}\Big)\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

dove $\hat{p} = L\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|}$. In particolare, dalla prima parte del teorema, dalle definizioni di sottosoluzione e soprasoluzione viscosa e dal lemma 1.1 otteniamo che

$$f(\hat{x}) - f(\hat{y}) \leq F(X) - F(Y) - c(\hat{x})u(\hat{x}) + 2\delta\Lambda$$

da cui

$$\begin{aligned} c(\hat{x})u(\hat{x}) &\leq F(X) - F(Y) - f(\hat{x}) + f(\hat{y}) + 2\delta\Lambda \\ &\leq F(X) - F(Y) + 2\|f\|_0 + 2\delta\Lambda \end{aligned}$$

dalla seconda parte otteniamo che $X - Y \leq 0$, da cui, per il Corollario 1.1

$$F(X) - F(Y) \leq \frac{\lambda}{n}\operatorname{tr}(X - Y) \leq 0$$

Allora
$$c(\hat{x})u(\hat{x}) \leq 2\|f\|_0 + 2\delta\Lambda$$
Ora, poichè $\Phi > 0$ si ha
$$u(x) > L|x-y| + C + \delta|x|^2 > C$$
Inoltre $c(\hat{x}) > c_0$, e dunque, per ogni $\delta > 0$, si ha
$$c_0 C \leq 2\|f\|_0 + 2\delta\Lambda$$
Allora, per $\delta \to 0$ otteniamo
$$C \leq \frac{2}{c_0}\|f\|_0$$
ma questo è assurdo per l'ipotesi su C. Dunque $\Phi \leq 0$, da cui
$$u(x) \leq L|x-y| + C + \delta|x|^2 + \varepsilon \leq \frac{2}{c_0}\|f\|_0$$
e cioè la tesi. □

Teorema 3.2 ([3])**.** *Sia $u \in BUC(\mathbb{R}^n)$ soluzione viscosa di $F(D^2u) - c(x)u(x) = f(x)$, con $c, f \in BUC(\mathbb{R}^n)$, e supponiamo che $0 < c_0 = \inf_{\mathbb{R}^n} c(x)$. Valgono allora le seguenti:*

1. *Se $c, f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, allora $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, e inoltre*
$$\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{1}{c_0}(\|\nabla f\|_\infty + \|\nabla c\|_\infty \|u\|_\infty)$$

2. *Se $c, f \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e F è un operatore concavo, allora $u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, e*
$$\|D^2u\|_\infty \leq \frac{1}{c_0}(\|\nabla f\|_{W^{1,\infty}} + 2\|c\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{W^{1,\infty}})$$

Dimostrazione. Siano $\varepsilon, \delta > 0$, e sia
$$L > \frac{1}{c_0}(\|c\|_1\|u\|_0 + \|f\|_1)$$
Poniamo poi
$$\Phi(x,y) = u(x) - u(y) - L|x-y| - \delta|x|^2 - \varepsilon$$

e supponiamo, per assurdo che $\Phi > 0$. Allora esistono $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$0 < \theta = \Phi(\hat{x}, \hat{y}) = \sup_{\mathbb{R}^{2n}} \Phi(x, y).$$

Vale dunque che $\hat{x} \neq \hat{y}$, altrimenti

$$0 < -\delta|\hat{x}|^2 - \varepsilon < 0$$

e questo è assurdo.

Osserviamo che $\theta < \infty$, in quanto

$$0 < \Phi(\hat{x}, \hat{y}) \leq 2\|u\|_\infty - L|\hat{x} - \hat{y}| - \delta|\hat{x}|^2 - \varepsilon < 2\|u\|_\infty$$

Sia $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^{2n}$ tale che

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(x_j, y_j) = \theta$$

Poichè abbiamo supposto $\theta > 0$, varrà che $\Phi(x_j, y_j) > 0$ per $j > j_0$, e dunque

$$L|x_j - y_j| + \delta|x_j|^2 + \varepsilon < 2\|u\|_\infty$$

e cioè $L|x_j - y_j| \leq 2\|u\|_\infty$ è limitata. Dunque $|x_j - y_j|$ ammetterà una sottosuccessione convergente

$$|x_{j_k} - y_{j_k}| \to |x_0 - y_0|$$

In particolare $x_{j_k} \neq y_{j_k}$, altrimenti

$$0 < -\delta|x_{j_k}|^2 - \varepsilon < 0$$

e questo è assurdo. Inoltre, per γ sufficientemente piccolo, abbiamo che

$$|x_{j_k} - y_{j_k}| \geq |x_0 - y_0| - \gamma > 0$$

altrimenti $x_0 = y_0$, ma questo abbiamo visto non può essere. Dunque si avrà che

$$\gamma \leq |x_{j_k} - y_{j_k}| \leq \frac{1}{\gamma}$$

In particolare, notiamo che ciò è indipendente dal δ scelto.

Proseguiamo a questo punto nella dimostrazione. Detta $\varphi(x,y) = L|x-y|$, osserviamo che $D^2\varphi(\hat{x},\hat{y}) \leq \frac{L}{|\hat{x}-\hat{y}|}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$, e dunque per il teorema delle somme si ha che per ogni $\mu > 0$ esistono $X, Y \in \mathcal{S}^n$:

$$(\hat{p}, X) \in \overline{J}^{2,+}_{B_1}(u(\hat{x}) - \delta|\hat{x}|^2) \qquad , \qquad (\hat{p}, Y) \in \overline{J}^{2,-}_{B_1}u(\hat{y})$$
$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \Big(\frac{L}{|\hat{x}-\hat{y}|} + \frac{2L^2}{\mu|\hat{x}-\hat{y}|^2}\Big)\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

dove $\hat{p} = L\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|}$. Osserviamo che dire $(\hat{p}, X) \in \overline{J}^{2,+}_{B_1}(u(\hat{x}) - \delta|\hat{x}|^2)$ è equivalente a

$$(\hat{p} + 2\delta(\hat{x}), X + 2\delta I) \in \overline{J}^{2,+}u(\hat{x})$$

Osserviamo poi che per la prima parte del teorema delle somme, unitamente alla definizione di supersoluzione e sottosoluzione viscosa, si ha

$$F(X + 2\delta I) - c(\hat{x})u(\hat{x}) \geq f(\hat{x})$$
$$F(Y) - c(\hat{y})u(\hat{y}) \leq f(\hat{y})$$

e cioè

$$f(\hat{x}) - f(\hat{y}) \leq F(X + 2\delta I) - F(Y) - c(\hat{x})u(\hat{x}) + c(\hat{y})u(\hat{y})$$

da cui

$$c(\hat{x})(u(\hat{x}) - u(\hat{y})) \leq F(X + 2\delta I) - F(Y) - f(\hat{x}) + f(\hat{y}) + u(\hat{y})(c(\hat{y}) - c(\hat{x}))$$

Ora, poichè F è uniformemente ellittico, vale il lemma 1.1 e nel nostro caso $M = X, N = 2\delta I$, e $(2\delta I)^- = 0$. Allora

$$c(\hat{x})(u(\hat{x}) - u(\hat{y})) \leq F(X) - F(Y) - f(\hat{x}) + f(\hat{y}) + u(\hat{y})(c(\hat{y}) - c(\hat{x})) + 2\delta\Lambda.$$

Poichè $\Phi(\hat{x},\hat{y}) > 0$, si ha

$$u(\hat{x}) - u(\hat{y}) > L|\hat{x}-\hat{y}| + \delta|\hat{x}|^2 + \varepsilon > L|\hat{x}-\hat{y}|$$

Inoltre $c_0 < c(\hat{x})$, e dunque

$$\begin{aligned} c_0 L|\hat{x}-\hat{y}| &\leq F(X) - F(Y) - f(\hat{x}) + f(\hat{y}) + u(\hat{y})(c(\hat{y}) - c(\hat{x})) + 2\delta\Lambda \\ &\leq F(X) - F(Y) + \|f\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + \|u\|_0\|c\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + 2\delta\Lambda \end{aligned}$$

Per la seconda parte del teorema delle somme si ottiene

$$\begin{aligned}\langle (X-Y)\xi,\xi\rangle &= \langle \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \rangle \\ &\leq \Big(\frac{L}{|\hat{x}-\hat{y}|} + \frac{2L^2}{\mu|\hat{x}-\hat{y}|^2} \Big) \langle \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \rangle = 0\end{aligned}$$

Dunque $X - Y \leq 0$. Allora possiamo sfruttare il corollario 1.1, e osservare che

$$F(X) - F(Y) \leq \frac{\lambda}{n}\operatorname{tr}(X-Y) \leq 0$$

Allora

$$\begin{aligned}c_0 L|\hat{x}-\hat{y}| &\leq \frac{\lambda}{n}\operatorname{tr}(X-Y) + \|f\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + \|u\|_0\|c\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + 2\delta\Lambda \\ &\leq \|f\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + \|u\|_0\|c\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + 2\delta\Lambda\end{aligned}$$

Ora, poichè ciò vale per ogni $\delta > 0$, ed essendo δ tale che $\delta|\hat{x}|^2 \leq 2\|u\|_0$, per $\delta \to 0$ si ha

$$L|\hat{x}-\hat{y}| \leq \frac{1}{c_0}(\|f\|_1 + \|c\|_1\|u\|_0)|\hat{x}-\hat{y}|$$

Abbiamo poi visto che $\gamma \leq |\hat{x}-\hat{y}| \leq \frac{1}{\gamma}$ per qualche $\gamma > 0$, e dunque

$$L \leq \frac{1}{c_0}(\|f\|_1 + \|c\|_1\|u\|_0)$$

ma questo è assurdo. Dunque $\Phi(\hat{x},\hat{y}) \leq 0$, da cui

$$u(x) - u(y) \leq L|x-y| \leq \frac{1}{c_0}(\|f\|_1 + \|c\|_1\|u\|_0)|x-y|$$

da cui la tesi

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{1}{c_0}(\|\nabla f\|_\infty + \|\nabla c\|_\infty\|u\|_\infty)$$

Procediamo a questo punto con la dimostrazione della seconda parte del teorema.

Osserviamo innanzitutto che non è restrittivo supporre che F sia concavo; se infatti F fosse convesso, definendo l'operatore $G(M) = -F(-M)$, allora $v = -u$ è soluzione viscosa di $G - cv = -f$, con G concavo.

Fissato $L > 0$, sia

$$M > \frac{1}{c_0}(\|\nabla f\|_{W^{1,\infty}} + 2\|u\|_{W^{1,\infty}}\|c\|_{W^{2,\infty}})$$

Definiamo allora

$$\Phi(x, y, z) = u(x) + u(y) - 2u(z) - M\varphi(x, y, z) - \delta|x|^2 - \varepsilon$$

dove

$$\varphi(x, y, z) = L|x - y|^2 + (|x - y|^4 + |x + y - 2z|^2)^{1/2} \equiv L|x - y|^2 + \varphi_1(x, y, z)$$

Supponiamo allora, per assurdo, che $\Phi > 0$, e sia $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ un suo massimo: in particolare, supponiamo che

$$\Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \theta > 0$$

Osserviamo innanzitutto che $\theta < \infty$, infatti

$$\Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \leq 4\|u\|_\infty < \infty$$

Sia poi $(x_j, y_j, z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione tale che

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(x_j, y_j, z_j) = \theta$$

Poichè $\theta > 0$, si avrà che $\Phi(x_j, y_j, z_j) > 0$ per $j > j_0$. Allora

$$M\varphi(x_j, y_j, z_j) \leq \Phi(x_j, y_j, z_j) \leq 4\|u\|_\infty$$

Dunque $\varphi(x_j, y_j, z_j)$ è limitata, e quindi ammette una sottosuccessione convergente. Allora

$$L|x_{j_k} - y_{j_k}|^2 + (|x_{j_k} - y_{j_k}|^4 + |x_{j_k} + y_{j_k} - 2z_{j_k}|^2)^{1/2} \leq 4\|u\|_\infty$$

Dunque

$$|x_{j_k} - y_{j_k}| \leq 4\|u\|_\infty$$
$$|x_{j_k} + y_{j_k} - 2z_{j_k}| \leq 4\|u\|_\infty$$

ed inoltre $x_{j_k} \neq y_{j_k} \neq z_{j_k}$, altrimenti

$$-\delta|x_{j_k}|^2 - \varepsilon < 0$$

Dunque $0 < \varphi(x_{j_k}, y_{j_k}, z_{j_k}) < 4\|u\|_\infty$, ed esisterà un $\gamma > 0$, indipendente da δ, tale che

$$\gamma \le \varphi(x_{j_k}, y_{j_k}, z_{j_k}) \le \frac{1}{\gamma}$$

Fatte queste premesse, proseguiamo con la dimostrazione. Indicando con $\varphi_1 = \varphi_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, per il teorema delle somme, nella versione estesa (cfr. [6], *Teorema 3.2*), otteniamo che esistono $X, Y, Z \in \mathcal{S}^n$ tali che

$$\begin{aligned}
&(\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), X) \in J^{2,+}(u(\hat{x}) - 2\delta|\hat{x}|^2)\\
&(\nabla_y \varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), Y) \in J^{2,+}u(\hat{y})\\
&(\nabla_z \varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), Z) \in J^{2,-}(-2u(\hat{z}))\\
&\begin{pmatrix} X & 0 & 0\\ 0 & Y & 0\\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix} \le D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + \frac{1}{\mu}(D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}))^2
\end{aligned}$$

dove, indicando genericamente con $\varphi_1 := \varphi_1(x, y, z)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(L|x-y|^2 + \varphi_1)\\
&= \Big(2L(x_j - y_j) + \frac{4(x_j - y_j)|x-y|^2 + 2(x_j + y_j - 2z_j)}{2\varphi_1}\Big)\\
&= 2\Big(L + \frac{|x-y|^2}{\varphi_1}\Big)(x_j - y_j) + \frac{1}{\varphi_1}(x_j + y_j - 2z_j)
\end{aligned}$$

da cui

$$\nabla_x \varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 2\Big(L + \frac{|\hat{x}-\hat{y}|^2}{\varphi_1}\Big)(\hat{x} - \hat{y}) + \frac{1}{\varphi_1}(\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z})$$

In modo analogo si ottiengono

$$\begin{aligned}
\nabla \varphi_y(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\Big(L + \frac{|\hat{x}-\hat{y}|^2}{\varphi_1}\Big)(\hat{y} - \hat{x}) + \frac{1}{\varphi_1}(\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z})\\
\nabla \varphi_z(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{1}{\varphi_1}(-2\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z})
\end{aligned}$$

e più in generale

$$\nabla \varphi(x, y, z) = 2L \begin{pmatrix} x-y\\ y-x\\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varphi_1}\left(2|x-y|^2 \begin{pmatrix} x-y\\ y-x\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+y-2z\\ x-2y-2z\\ -2x-2y+4z \end{pmatrix}\right)$$

Osserviamo in particolare che

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix} \leq \Big(2L + \frac{6|x-y|^2}{\varphi_1}\Big)\bigg(1 + \frac{2}{\mu}\Big(2L + \frac{6|x-y|^2}{\varphi_1}\Big)\bigg) \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{\varphi_1}\Big(1 + \frac{6}{\mu\varphi_1}\Big) \begin{pmatrix} I & I & -2I \\ I & I & -2I \\ -2I & -2I & 4I \end{pmatrix}$$

Ciò viene dal fatto che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg(2L(x_j - y_j) + \frac{1}{\varphi_1}\Big(2|x-y|^2(x_j - y_j) + (x_j + y_j - 2z_j)\Big)\bigg)$$
$$= 2L\delta_{ij} + \frac{1}{\varphi_1}\Big(4(x_i - y_i)(x_j - y_j) + 2|x-y|^2\delta_{ij} + \delta_{ij}|\Big)$$
$$- \frac{1}{\varphi_1^2}\Big(\frac{2|x-y|(x_j - y_j) + (x_j + y_j - 2z_j)}{\varphi_1}\frac{2|x-y|(x_i - y_i) + (x_i + y_i - 2z_i)}{\varphi_1}\Big)$$

da cui

$$D^2\varphi = 2L \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varphi_1}\Bigg(2|x-y|^2 \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ 4 \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & I & -2I \\ I & I & -2I \\ -2I & -2I & 4I \end{pmatrix}\Bigg) - \frac{1}{\varphi_1^2}\nabla\varphi_1 \otimes \nabla\varphi_1$$
$$\leq 2L \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varphi_1}\Bigg(2|x-y|^2 \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ 4|x-y|^2 \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & I & -2I \\ I & I & -2I \\ -2I & -2I & 4I \end{pmatrix}\Bigg)$$
$$\leq \Big(2L + \frac{6|x-y|^2}{\varphi_1}\Big) \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varphi_1} \begin{pmatrix} I & I & -2I \\ I & I & -2I \\ -2I & -2I & 4I \end{pmatrix}$$

Da ciò segue, ponendo $\alpha = 2L + \frac{6|x-y|^2}{\varphi_1}$, che

$$(D^2\varphi)^2 \le 2\alpha^2 \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{\varphi_1^2} \begin{pmatrix} I & I & -2I \\ I & I & -2I \\ -2I & -2I & 4I \end{pmatrix}$$

e dunque quanto voluto.

Dalla prima parte del teorema delle somme abbiamo che

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &\le F(X + 2\delta I) - c(\hat{x})u(\hat{x}) \\ f(\hat{y}) &\le F(Y) - c(\hat{y})u(\hat{y}) \\ 2f(\hat{z}) &\ge -F(Z) - 2c(\hat{z})u(\hat{z}) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) + f(\hat{y}) - 2f(\hat{z}) &\le F(X + 2\delta I) + F(Y) + F(Z) - (c(\hat{x})u(\hat{x}) + c(\hat{y})u(\hat{y}) - 2c(\hat{z})u(\hat{z})) \\ &\le F(X) + F(Y) + F(Z) - (c(\hat{x})u(\hat{x}) + c(\hat{y})u(\hat{y}) - 2c(\hat{z})u(\hat{z})) + 2\delta\Lambda \end{aligned}$$

per l'uniforme ellitticità di F e il lemma 1.1. Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned} &c(\hat{x})u(\hat{x}) + c(\hat{y})u(\hat{y}) - 2c(\hat{z})u(\hat{z}) \\ &\quad = c(z)(u(x) + u(y) - 2u(z)) - c(z)u(x) - c(z)u(y) + c(x)u(x) + c(y)u(y) \\ &\quad = c(z)(u(x) + u(y) - 2u(z)) + u(z)(c(x) + c(y) - 2c(z)) \\ &\qquad + (c(x) - c(z))(u(x) - u(z)) + (c(y) - c(z))(u(y) - u(z)) \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} c(\hat{z})(u(\hat{x}) + u(\hat{y}) - 2u(\hat{z})) \le\ & F(X) + F(Y) + F(Z) - f(\hat{x}) - f(\hat{y}) + 2f(\hat{z}) + 2\delta\Lambda \\ & - 2u(\hat{z})) + u(\hat{z})(c(\hat{x}) + c(\hat{y}) - 2c(\hat{z})) \\ & + (c(\hat{x}) - c(\hat{z}))(u(\hat{x}) - u(\hat{z})) + (c(\hat{y}) - c(\hat{z}))(u(\hat{y}) - u(\hat{z}))) \end{aligned}$$

Applicando la Proposizione 3.2 a $(c(\hat{x}) - c(\hat{z}))(u(\hat{x}) - u(\hat{z})) + (c(\hat{y}) - c(\hat{z}))(u(\hat{y}) - u(\hat{z}))$, osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} &|(c(x) - c(z))(u(x) - u(z)) + (c(y) - c(z))(u(y) - u(z))| \\ &\qquad \le \|\nabla c\|_{W^{1,\infty}} \|u\|_{W^{1,\infty}} \varphi_1(x, y, z) \\ &\qquad \le 2\|c\|_{W^{2,\infty}} \|u\|_{W^{1,\infty}} \varphi_1(x, y, z) \end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene che

$$\begin{aligned} c(\hat{x})(u(\hat{x})+u(\hat{y})-2u(\hat{z})) \le F(X)+F(Y)+F(Z)-(f(\hat{x})+f(\hat{y})-2f(\hat{z})) \\ +2\|c\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{W^{1,\infty}}\varphi_1(x,y,z)+2\delta\Lambda \end{aligned}$$

Dalla seconda parte del teorema delle somme si ha invece che

$$\begin{aligned} \langle \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \rangle &\le M\Bigg(2\Big(L+3\frac{|\hat{x}-\hat{y}|^2}{\varphi_1}\Big) \langle \begin{pmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\varphi_1} \langle \begin{pmatrix} I & I & -2I \\ I & I & -2I \\ -2I & -2I & 4I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \rangle \Bigg) \\ &= M\Bigg(2\Big(L+\frac{c|\hat{x}-\hat{y}|^2}{\varphi_1}\Big)|\xi-\eta|^2 + \frac{1}{\varphi_1}|\xi+\eta-2\zeta|^2 \Bigg) \end{aligned}$$

In particolare, se $\xi=\eta=\zeta$, si ha che $X+Y+Z\le 0$ da cui, per il lemma 1.2 e per la concavità di F,

$$F(X)+F(Y)+F(Z) \le F(X+Y+Z) \le \frac{\lambda}{n}\operatorname{tr}(X+Y+Z) \le 0$$

e dunque

$$\begin{aligned} c(\hat{x})(u(\hat{x})+u(\hat{y})-2u(\hat{z})) &\le \frac{\lambda}{n}\operatorname{tr}(X+Y+Z) - (f(\hat{x})+f(\hat{y})-2f(\hat{z})) \\ &\quad + 2\|c\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{W^{1,\infty}}\varphi_1(x,y,z)+2\delta\Lambda \\ &\le -(f(\hat{x})+f(\hat{y})-2f(\hat{z})) + 2\|c\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{W^{1,\infty}}\varphi_1(x,y,z)+2\delta\Lambda \end{aligned}$$

Ora, poichè $\Phi(\hat{x},\hat{y},\hat{z})>0$, si ha

$$u(\hat{x})+u(\hat{y})-2u(\hat{z}) > M\varphi(\hat{x},\hat{y},\hat{z})+\delta|\hat{x}|^2+\varepsilon > M\varphi(\hat{x},\hat{y},\hat{z})+\delta|\hat{x}|^2 > M\varphi_1(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$$

Inoltre $c_0 < c(\hat{z})$. Unito a quanto trovato, e per la Proposizione 3.1 applicata a f, si ha

$$c_0 M\varphi_1(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \le \|\nabla f\|_{W^{1,\infty}}\varphi_1(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) + 2\|c\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{W^{1,\infty}}\varphi_1(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) + 2\delta\Lambda$$

Abbiamo visto, all'inizio della dimostrazione, che $\gamma \leq \varphi_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \leq \gamma^{-1}$ per qualche $\gamma > 0$ indipendente da δ. Allora, per $\delta \to 0$ si ha

$$M\varphi_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \leq \frac{1}{c_0}(\|\nabla f\|_{W^{1,\infty}} + 2\|c\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{W^{1,\infty}})\varphi_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

Ma questo è assurdo per la scelta di M. Dunque $\Phi \leq 0$, e cioè

$$u(x) + u(y) - 2u(z) - M\varphi(x, y, z) - \delta|x|^2 - \varepsilon \leq 0$$

da cui

$$u(x) + u(y) - 2u(z) \leq M\varphi(x, y, z) + \delta|x|^2$$

per ogni $\delta > 0$. Allora, se $\delta \to 0$, si ha

$$u(x) + u(y) - 2u(z) \leq M\varphi(x, y, z) \leq \frac{1}{c_0}(\|\nabla f\|_{W^{1,\infty}} + 2\|c\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{W^{1,\infty}})\varphi(x, y, z)$$

da cui la tesi. □

Tale teorema ci permette di dimostrare un risultato analogo al teorema di Liouville:

Corollario 3.1. *Sia $u \in BUC(\mathbb{R}^n)$ soluzione viscosa di $F(D^2u(x)) - cu(x) = 0$, con $c > 0$ costante e F uniformemente ellittico. Allora u è costante.*

Dimostrazione. Segue dal primo punto del Teorema 3.2, in quanto

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{1}{c}\|\nabla c\|_\infty \|u\|_\infty = 0$$

e dunque u è costante. □

3.2 Localizzazione in B_r

Scopo di questa sezione è quello di localizzare i risultati ottenuti in una palla di centro 0 e raggio r.

Definizione 3.2. *Sia $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Definiamo l'oscillazione di u come*

$$\operatorname*{osc}_{\Omega} u = \sup_{\Omega} u - \inf_{\Omega} u$$

Teorema 3.3 ([1])**.** *Sia $u \in \mathcal{C}(B_{2r})$ una soluzione viscosa di $F(D^2u) = f(x)$ tale che $\operatorname{osc}_{B_r} u \leq 1$ e $F(0) = 0$, e supponiamo $f \in \mathcal{C}(B_{2r})$. Allora $u \in W^{1,\infty}(B_{r/2})$, e inoltre*

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} \leq C = C(\lambda, \Lambda, n, r)$$

Dimostrazione. Siano $z \in B_{r/2}, L_1, L_2 > 0$, e sia

$$\omega(s) = \begin{cases} s - \omega_0 s^{3/2} & \text{per } s \leq s_0 \\ \omega(s_0) & \text{per } s > s_0 \end{cases}$$

scegliamo poi ω_0 in modo che $s_0 > r$. Definiamo allora, per $z \in B_{r/2}$,

$$\Phi(x, y) = u(x) - u(y) - L_1\omega(|x - y|) - L_2(|x - z|^2 + |y - z|^2)$$

Supponiamo, per assurdo, che

$$0 < \theta = \Phi(\hat{x}, \hat{y}) = \sup_{B_r \times B_r} \Phi(x, y)$$

Osserviamo allora che

$$L_1\omega(|\hat{x} - \hat{y}|) + L_2(|\hat{x} - z|^2 + |\hat{y} - z|^2) < u(\hat{x}) - u(\hat{y}) \leq \operatorname*{osc}_{B_r} u \leq 1$$

Scegliamo, a questo punto $L_2 = \left(\frac{4}{r}\right)^2$. Allora

$$|\hat{x} - z|^2 + |\hat{y} - z|^2 \leq \left(\frac{r}{4}\right)^2$$

Questo ci assicura che $\hat{x}, \hat{y}$ siano all'interno di B_r. Inoltre $\hat{x} \neq \hat{y}$: se così non fosse varrebbe

$$-L_2(|\hat{x} - z|^2 + |\hat{y} - z|^2) > 0$$

ma questo è assurdo.

Sia ora $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione tale che

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(x_j, y_j) = \theta$$

Allora per $j > j_0$ varrà che

$$\Phi(x_j, y_j) > 0$$

e cioè

$$L_1\omega(|x_j - y_j|) + L_2(|x_j - z|^2 + |y_j - z|^2) \leq 2\|u\|_\infty$$

e dunque la successione $\omega(|x_j - y_j|)$ è limitata. Allora esisterà una sua sottosuccessione convergente. In particolare

$$\lim_{k\to\infty} \omega(|x_{j_k} - y_{j_k}|) = \omega(|x_0 - y_0|))$$

e dunque

$$\omega(|x_0 - y_0|) - \varepsilon \leq \omega(|x_{j_k} - y_{j_k}|)$$

Ora, se $\omega(|x_0-y_0|) \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora $\omega(|x_0-y_0|) \leq 0$, e cioè $\omega(|x_0-y_0|) = 0$, e cioè $x_0 = y_0$, ma ciò è assurdo. Dunque $0 < \omega(|x_0 - y_0|) \leq \omega(|x_j - y_j|)$ e dunque $\omega(|x_j, y_j|)$ è limitata anche dal basso da un numero positivo per $j > \bar{j}$.

Applichiamo il teorema delle somme in B_r a Φ. Detta

$$\varphi(x, y) = L_1\omega(|x - y|) + L_2(|x - z|^2 + |y - z|^2)$$

calcoliamo il gradiente e la matrice Hessiana di φ: per fare questo ci occorrono alcuni calcoli preliminari:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_j}\omega(|\xi|) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}(|\xi| - \omega_0|\xi|^{3/2}) = \frac{\xi_j}{|\xi|} - \frac{3\omega_0\xi_j}{2|\xi|^{1/2}} \\
\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\omega(|\xi|) &= \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big(\frac{\xi_j}{|\xi|} - \frac{3\omega_0\xi_j}{2|\xi|^{1/2}}\Big) = \frac{\delta_{ij}}{|\xi|} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^3} - \frac{3\omega_0\delta_{ij}}{2|\xi|^{1/2}} + \frac{3\omega_0\xi_i\xi_j}{4|\xi|^{5/2}} \\
&= \frac{1}{|\xi|}\Big(\frac{2 - 3\omega_0|\xi|^{1/2}}{2}\delta_{ij} - \frac{4 - 3\omega_0|\xi|^{-1/2}}{4}\frac{\xi_i}{|\xi|}\frac{\xi_j}{|\xi|}\Big)
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\nabla\omega(|\xi|) &= \Big(1 - \frac{3}{2}\omega_0|\xi|^{-1/2}\Big)\frac{\xi}{|\xi|} \\
D^2\omega(|\xi|) &= \frac{1}{|\xi|}\Big(\frac{2 - 3\omega_0|\xi|^{1/2}}{2}I - \frac{4 - 3\omega_0|\xi|^{1/2}}{4}\frac{\xi}{|\xi|} \otimes \frac{\xi}{|\xi|}\Big)
\end{aligned}$$

Osserviamo allora che

$$\begin{aligned}\nabla_x\varphi(x,y) &= L_1\omega'(|x-y|)\frac{x-y}{|x-y|}+2L_2(x-z)\\ \nabla_y\varphi(x,y) &= -L_1\omega'(|x-y|)\frac{x-y}{|x-y|}+2L_2(y-z)\end{aligned}$$

Poniamo a questo punto $Z = L_1 D^2\omega(|\cdot|)(x-y)$ e $\hat{p} = L_1\omega'(|\hat{x}-\hat{y}|)\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|}$. Osserviamo che $\|Z\| < \infty$: questo per la definizione di Z, e per il fatto che $\omega \in C^2$ per $x \neq y$, fatto che si verifica in $(\hat{x},\hat{y})$ per quanto visto.

Applicando il teorema delle somme, e tenendo conto dell'osservazione 1.3, otteniamo che per ogni $\mu > 0$ sufficientemente piccolo, dipendente dalla norma di Z, esistono $X, Y \in \mathcal{S}^n$ tali che

$$\begin{aligned}&(\hat{p}+2L_2(\hat{x}-z), X) \in J^{2,+}u(\hat{x}) \quad , \quad (\hat{p}-2L_2(\hat{y}-z), Y) \in J^{2,-}u(\hat{y})\\ &\begin{pmatrix} X & 0\\ 0 & -Y\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Z & -Z\\ -Z & Z\end{pmatrix} + (2L_2+\mu)I\end{aligned}$$

Dalla prima parte del teorema segue che

$$f(\hat{x}) - f(\hat{y}) \leq F(X) - F(Y)$$

Dalla seconda parte osserviamo che si ha

$$\langle (X-Y)\xi, \xi\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} X & 0\\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}\right\rangle \leq (4L_2+\mu)|\xi|^2$$

dunque gli autovalori di $X - Y$ saranno più piccoli di $4L_2 + \mu$. D'altra parte, applicando $X - Y$ al vettore $(\hat{\xi}, -\hat{\xi}) = (\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|}, -\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|})$, osserviamo che si ha

$$\langle (X-Y)\hat{\xi}, \hat{\xi}\rangle \leq 4\langle Z\hat{\xi}, \hat{\xi}\rangle + (4L_2+\mu)|\hat{\xi}|^2$$

Ora, poichè

$$\begin{aligned}\langle Z\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle &= \langle L_1 D^2\omega(|x-y|)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle\\ &= \frac{L_1}{|\hat{x}-\hat{y}|}\Big(\frac{2-3\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2}}{2}\langle I\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle - \frac{4-3\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2}}{4}\langle(\hat{\xi}\otimes\hat{\xi})\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle\Big)\\ &= \frac{L_1|\hat{\xi}|^2}{|\hat{x}-\hat{y}|}\Big(\frac{4-6\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2}-(4-3\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2})|\hat{\xi}|^2}{4}\Big)\\ &\leq \frac{L_1|\hat{\xi}|^2}{|\hat{x}-\hat{y}|}\Big(\frac{-6\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2})}{4}\Big) \leq -L_1(6\omega_0|x-y|^{-1/2})|\hat{\xi}|^2\end{aligned}$$

si ha che

$$\begin{aligned}\langle(X-Y)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle &\leq \Big(4L_2+\mu-L_1 6\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{-1/2})\Big)|\hat{\xi}|^2\\ &\leq \Big(4L_2+\mu-3\sqrt{\frac{2}{r}}\omega_0 L_1\Big)|\hat{\xi}|^2\end{aligned}$$

Dunque esiste un autovalore di $X-Y$ più piccolo di $4L_2+\mu-3\sqrt{\frac{2}{r}}\omega_0 L_1$. Consideriamo a questo punto l'operatore di Pucci $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$: applicato a $X-Y$, per quanto appena visto, sarà tale che

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) = \lambda\sum_{e_i<0} e_i + \Lambda\sum_{e_i>0} e_i \leq \lambda\Big(4L_2+\mu-3\sqrt{\frac{2}{r}}\omega_0 L_1\Big) + \Lambda(n-1)(4L_2+\mu)$$

D'altra parte vale anche che

$$F(X)-F(Y) \leq P^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y)$$

e dunque, ricordando quanto ottenuto dal teorema delle somme

$$0 \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y)+2\|f\|_\infty \leq \lambda\Big(4L_2+\mu-3\sqrt{\frac{2}{r}}\omega_0 L_1\Big)+\Lambda(n-1)(4L_2+\mu)+2\|f\|_\infty$$

Ora, poichè abbiamo posto $L_2 = \left(\frac{4}{r}\right)^2$, osserviamo che vale

$$0 \leq \lambda\Big(4\Big(\frac{4}{r}\Big)^2+\mu-3\sqrt{\frac{2}{r}}\omega_0 L_1\Big)+\Lambda(n-1)\Big(\Big(\frac{4}{r}\Big)^2+\mu\Big)+2\|f\|_\infty$$

Allora
$$3\sqrt{\frac{2}{r}}\lambda L_1 \leq (\lambda + \Lambda(n-1))\Big(4\Big(\frac{4}{r}\Big)^2 + \mu\Big) + 2\|f\|_\infty$$
e questo per ogni $\mu > 0$. Dunque, se prendiamo
$$L_1 > \frac{(\lambda + \Lambda(n-1))\Big(\frac{8}{r}\Big)^2 + 2\|f\|_\infty}{\sqrt{\frac{2}{r}}\omega_0}$$
abbiamo un assurdo. Dunque $\Phi(x,y) \leq 0$, e dunque $u(x) - u(y) \leq L_1|x-y|$, cioè quanto cercato. In particolare,
$$L_1 = L_1(\lambda, \Lambda, n, r)$$
$\square$

Capitolo 4

Limiti dei metodi presentati. Il caso di un operatore degenere

Consideriamo l'operatore di Grushin su $\mathbb{R}^2$

$$F = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1^2 \end{pmatrix} D^2 u(x_1, x_2) \right)$$

e l'equazione omogenea associata

$$F(D^2 u(x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$$

È una situazione leggermente diversa dalle precedenti: l'operatore infatti non è uniformemente ellittico, in quanto per ogni $M \in \mathcal{S}^n$ si ha

$$F(M + N, (0, x_2)) - F(M, (0, x_2)) = F(N, (0, x_2)) = 0$$

se $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$. Dunque

$$0 \leq F(M + N, x) - F(M, x)$$

per $N \geq 0$. Inoltre $F(M + N, x) - F(M)$ non è neppure limitata superiormente da $\Lambda \|N\|$: se $N = I$, allora

$$F(M + N, x) - F(M) = F(N, x) = 1 + x_1^2$$

che non è limitato superiormente.

Cerchiamo di capire se sia possibile estendere i metodi usati finora per gli operatori uniformemente ellittici ad un operatore come questo, che non lo è. Osserviamo innanzitutto che vale

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x_1,x_2) &= F(D^2u(x_1,x_2),(x_1,x_2)) - c(x_1,x_2)u(x_1,x_2)\\ &= \operatorname{tr}(A(x_1,x_2)u(x_1,x_2)) - c(x_1,x_2)u(x_1,x_2)\end{aligned}$$

dove $a_{i,j} \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, per ogni $i,j = 1,\ldots,2$.

In particolare, sotto queste ipotesi, si ha che

$$\sigma \equiv \sqrt{A} \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$$

Poniamo allora

$$\lambda_0 = \sup_{x\neq y} \frac{\operatorname{tr}(\sigma(x)-\sigma(y))^2}{|x-y|^2}$$

Provando ad applicare l'approccio di Ishii, osserviamo che la matrice A non può avere autovalori che crescano troppo velocemente: in particolare, la soglia sembra essere quella data da $|x|^2$, come si evince dai seguenti passaggi:

Siano $0 < c_0 = \inf_{\mathbb{R}^n} c$, $\quad c_0 > \lambda_0$, $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ una soluzione viscosa di $\mathcal{L}u(x_1,x_2) = 0$.

Siano poi $\delta, \varepsilon > 0$, e posto

$$L > \frac{\|c\|_1 \|u\|_0}{c_0 - \lambda_0}$$

definiamo

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}, \quad \Phi(x,y) = u(x) - u(y) - L|x-y| - \delta|x|^2 - \varepsilon$$

Supponiamo, per assurdo, che $\sup_{\mathbb{R}^4} \Phi(x,y) = \Phi(\hat{x},\hat{y}) = M > 0$.

Osserviamo allora che $M < \infty$. Questo perchè

$$\Phi(\hat{x},\hat{y}) = u(\hat{x}) - u(\hat{y}) - L|\hat{x}-\hat{y}| - \delta|\hat{x}|^2 - \varepsilon \leq 2\|u\|_\infty$$

Se poi $(x_j,y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è tale che

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(x_j,y_j) = M$$

allora $\Phi(x_j, y_j) > 0$ per $j > j_0$. Allora

$$L|x_j - y_j| \leq 2\|u\|_\infty$$

e cioè $|x_j - y_j|$ è una successione limitata. Dunque ammette una sottosuccessione convergente. In particolare varrà che se $|x_{j_k} - y_{j_k}| \to |x_0 - y_0|$, allora $x_0 \neq y_0$, e dunque esiste un $\gamma > 0$, indipendente da δ, tale che

$$\gamma \leq |x_{j_k} - y_{j_k}| \leq \frac{1}{\gamma}$$

per $k > k_0$. Inoltre, per ogni $\delta > 0$, si ha $\delta|x_j|^2 \leq 2\|u\|_\infty$.

Sia ora $\varphi(x, y) = L|x - y|$. Allora

$$\nabla\varphi(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{L}{|\hat{x} - \hat{y}|}(\hat{x} - \hat{y}, \hat{y} - \hat{x})$$
$$D^2\varphi(\hat{x}, \hat{y}) \leq \frac{L}{|\hat{x} - \hat{y}|}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

Applicando il teorema delle somme si ottiene allora che per ogni $\mu > 0$ esistono $X, Y \in \mathcal{S}^2$

$$(\hat{p}, X) \in J^{2,+}(u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - \delta|\hat{x}|^2) \quad , \quad (\hat{p}, X) \in J^{2,-}u(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$$
$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \left(\frac{L}{|\hat{x} - \hat{y}|} + \frac{2L^2}{\mu|\hat{x} - \hat{y}|^2}\right)\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

dove $\hat{p} = L\frac{\hat{x} - \hat{y}}{|\hat{x} - \hat{y}|}$. Allora, per la prima parte del teorema abbiamo che

$$\operatorname{tr}(A(\hat{x})X) - c(\hat{x})u(\hat{x}) + 2\delta\operatorname{tr}(A(\hat{x})) \geq 0$$
$$\operatorname{tr}(A(\hat{y})Y) - c(\hat{y})u(\hat{y}) \leq 0$$

da cui

$$0 \leq \operatorname{tr}(A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y) - c(\hat{x})u(\hat{x}) + c(\hat{y})u(\hat{y}) + 2\delta\operatorname{tr}(A(\hat{x}))$$

e dunque

$$\begin{aligned} c(\hat{x})(u(\hat{x}) - u(\hat{y})) &\leq \operatorname{tr}(A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y) + u(\hat{y})(c(\hat{y}) - u(\hat{x})) + 2\delta\operatorname{tr}(A(\hat{x})) \\ &\leq tr(A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y) + \|u\|_0\|c\|_1|\hat{x} - \hat{y}| + 2\delta\operatorname{tr}(A(\hat{x})) \end{aligned}$$

Dalla seconda parte del teorema otteniamo invece

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y) &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}\sigma(\hat{x}) & \sigma(\hat{y})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X & 0\\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma(\hat{x})\\ \sigma(\hat{y})\end{pmatrix}\right)\\
&\leq \left(\frac{L}{|\hat{x}-\hat{y}|} + \frac{2L^2}{\mu|\hat{x}-\hat{y}|^2}\right)\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}\sigma(\hat{x}) & \sigma(\hat{y})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -I\\ -I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma(\hat{x})\\ \sigma(\hat{y})\end{pmatrix}\right)\\
&\leq \left(\frac{L}{|\hat{x}-\hat{y}|} + \frac{2L^2}{\mu|\hat{x}-\hat{y}|^2}\right)\operatorname{tr}(\sigma(\hat{x})-\sigma(\hat{y}))^2
\end{aligned}$$

Allora, poichè $\Phi > 0$, ed essendo $c_0 > c(\hat{x})$, ponendo $\theta = \frac{1+\mu}{\mu}$ si ha

$$\begin{aligned}
c_0 L|\hat{x}-\hat{y}| &\leq \left(\frac{L}{|\hat{x}-\hat{y}|} + (\theta-1)\frac{2L^2}{|\hat{x}-\hat{y}|^2}\right)\operatorname{tr}(\sigma(\hat{x})-\sigma(\hat{y}))^2 + \|u\|_0\|c\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + 2\delta\operatorname{tr}(A(\hat{x}))\\
&\leq \lambda_0 L|\hat{x}-\hat{y}| + (\theta-1)2L^2\frac{\operatorname{tr}(\sigma(\hat{x})-\sigma(\hat{y}))^2}{|\hat{x}-\hat{y}|^2} + \|u\|_0\|c\|_1|\hat{x}-\hat{y}| + 2\delta(1+\hat{x}_1^2)
\end{aligned}$$

Osserviamo che dai calcoli precedenti abbiamo ottenuto $\delta|\hat{x}|^2 \leq 2\|u\|_\infty$, d'altra parte questo non ci garantisce che $\lim_{\delta\to 0}\delta|\hat{x}|^2 = 0$: quello che possiamo dire è che tale valore è finito, ma questo ci impedisce di ottenere la regolarità cercata per le soluzioni.

Anche l'approccio usato da C. Imbert, L. Silvestre in [1] non sembra di immediata estensione al caso degenere, soprattutto per quanto riguarda la localizzazione. Ciò sembra collegato al fatto che un autovalore della matrice $A(x) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & x_1^2\end{pmatrix}$ può essere 0 in un sottinsione di $\mathbb{R}^2$, cioè su tutta la retta delle ordinate.

Supponiamo infatti di procedere con la dimostrazione della regolarità di una soluzione viscosa in una palla centrata nell'origine di raggio r con l'approccio di C. Imbert, L. Silvestre.

Sia $u \in \mathcal{C}(B_{2r})$ una soluzione viscosa a

$$\mathcal{L}u = f$$

con $f \in \mathcal{C}(B_2 r)$ e $\operatorname{osc}_{B_r} u \leq 1$. Poniamo

$$\omega(s) = \begin{cases} s - \omega_0 s^{3/2} & \text{per } s \leq s_0\\ \omega(s_0) & \text{per } s > s_0\end{cases}$$

scegliendo ω_0 tale che $s_0 > r$.

Definiamo poi, per $z \in B_{r/4}$, la funzione

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}, \quad \Phi(x,y) = u(x) - u(y) - L_1\omega(|x-y|) - L_2(|x-z|^2 + |y-z|^2)$$

e supponiamo che esista un punto $(\hat{x}, \hat{y}) \in \overline{B}_r \times \overline{B}_r$ tale che:

$$0 < \theta = \Phi(\hat{x}, \hat{y}) = \sup_{\overline{B}_r \times \overline{B}_r} \Phi(x,y)$$

Osserviamo che $\hat{x} \neq \hat{y}$, altrimenti

$$0 < -L_2(|x-z|^2 + |y-z|^2) < 0$$

Inoltre, se poniamo $L_2 = \frac{16}{r^2}$, otteniamo che

$$\frac{16}{r^2}(|\hat{x}-z|^2 + |\hat{y}-z|^2) \leq u(\hat{y}) - u(\hat{x}) \leq \operatorname*{osc}_{B_r} u \leq 1$$

da cui

$$|\hat{x}-z|^2 + |\hat{y}-z|^2 \leq \frac{r^2}{16}$$

e cioè $(\hat{x}, \hat{y}) \notin \partial(B_1 \times B_1)$.

Applichiamo allora il teorema delle somme: detti $\varphi(x,y) = L_1\omega(|x-y|) + L_2(|x-z|^2 + |y-z|^2)$ e $\hat{p} = L_1\omega'(|\hat{x}-\hat{y}|)\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|}$, otteniamo che per ogni $\mu > 0$, dipendente dalla norma di $D^2\varphi(x,y)$, esistono $X, Y \in \mathcal{S}^2$ tali che

$$(\hat{p} + 2L_2(x-z), X) \in J^{2,+}u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad , \quad (\hat{p} - 2L_2(y-z), X) \in J^{2,-}u(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} + (2L_2 + \mu)I$$

dove

$$Z = L_1 D^2\omega(|\cdot|)(\hat{x}-\hat{y}) = \frac{L_1}{|\hat{x}-\hat{y}|}\Big(\frac{2 - 3\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2}}{2}I - \frac{4 - 3\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2}}{4}\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|} \otimes \frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|}\Big)$$
$$= \frac{L_1}{|\hat{x}-\hat{y}|}\Big(\alpha I - \beta\frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|} \otimes \frac{\hat{x}-\hat{y}}{|\hat{x}-\hat{y}|}\Big)$$

Ora, poichè

$$\operatorname{tr}(A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y) = \operatorname{tr}(\sigma(\hat{x})X\sigma(\hat{x}) - \sigma(\hat{y})Y\sigma(\hat{y}))$$

studiamo $\sigma(\hat{x})X\sigma(\hat{x}) - \sigma(\hat{y})Y\sigma(\hat{y})$.

Ricordiamo che vale il seguente risultato: Se $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \geq N$, allora

$$Q^T MQ \geq Q^T NQ$$

Dunque, per il teorema delle somme si ha

$$\begin{aligned}
\sigma(\hat{x})X\sigma(\hat{x}) - \sigma(\hat{y})Y\sigma(\hat{y}) &= \begin{pmatrix} \sigma(\hat{x}) & -\sigma(\hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(\hat{x}) \\ -\sigma(\hat{y}) \end{pmatrix} \\
&\leq \begin{pmatrix} \sigma(\hat{x}) & -\sigma(\hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(\hat{x}) \\ -\sigma(\hat{y}) \end{pmatrix} + (2L_2 + \mu) \begin{pmatrix} \sigma(\hat{x}) & -\sigma(\hat{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(\hat{x}) \\ -\sigma(\hat{y}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

da cui

$$\sigma(\hat{x})X\sigma(\hat{x}) - \sigma(\hat{y})Y\sigma(\hat{y}) \leq (\sigma(\hat{x}) + \sigma(\hat{y}))Z(\sigma(\hat{x}) + \sigma(\hat{y})) + 2(L_2 + \mu)(A(\hat{x}) + A(\hat{y}))$$

Studiamo a questo punto $(\sigma(\hat{x}) + \sigma(\hat{y}))Z(\sigma(\hat{x}) + \sigma(\hat{y}))$.

Posti $\xi = \hat{x} - \hat{y}$ e $\gamma = |\hat{x}_1| + |\hat{y}_1|$ si ha che

$$\sigma(\hat{x}) + \sigma(\hat{y}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned}
(\sigma(\hat{x}) + \sigma(\hat{y})Z(\sigma(\hat{x}) + \sigma(\hat{y})) &= \frac{L_1}{|\xi|} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \left(\alpha I - \beta \frac{\xi}{|\xi|} \otimes \frac{\xi}{|\xi|} \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \\
&= \frac{L_1}{|\xi|} \left(\alpha \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 4\xi_1^2 & 2\gamma\xi_1\xi_2 \\ 2\gamma\xi_1\xi_2 & \gamma^2\xi_2^2 \end{pmatrix} \right) = B
\end{aligned}$$

Applicando tale matrice a $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\langle B\eta, \eta \rangle &= \frac{L_1}{|\xi|} \left(\alpha \langle \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} \eta, \eta \rangle - \beta \langle \begin{pmatrix} 4\xi_1^2 & 2\gamma\xi_1\xi_2 \\ 2\gamma\xi_1\xi_2 & \gamma^2\xi_2^2 \end{pmatrix} \eta, \eta \rangle \right) \\
&= \frac{L_1}{|\xi|} \Big(\alpha(4\eta_1^2 + \gamma^2\eta_2^2) - \beta(4\xi_1^2\eta_1^2 + 4\gamma\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + \gamma^2\xi_2^2\eta_2^2) \Big)
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che se $|\hat{x}_1| = |\hat{y}_1| = 0$, allora $\gamma = 0$, con $|\hat{x} - \hat{y}| \neq 0$ (basta $\hat{x}_2 \neq \hat{y}_2$), e dunque

$$\langle B\eta, \eta \rangle = \frac{4L_1\alpha\eta_1^2}{|\hat{x} - \hat{y}|} \geq 0$$

In quanto $\alpha = \frac{2-3\omega_0|\hat{x}-\hat{y}|^{1/2}}{2} \geq 0$. Dunque quello che in realtà possiamo dire è che gli autovalori di $\sigma(\hat{x})X\sigma(\hat{x}) - \sigma(\hat{y})Y\sigma(\hat{y})$ sono più piccoli di $2(L_2 + \mu)(2\eta_1^2 + (\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2)\eta_2^2) \geq 0$, e che almeno uno di essi è più piccolo di $\frac{4L_1\alpha\eta_1^2}{|\hat{x}-\hat{y}|} \geq 0$. Dunque non siamo in grado di avere $\mathrm{tr}(A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y) \leq \lambda + \Lambda$, con Λ arbitrariamente negativo per una opportuna scelta di L_1, e quindi ottenere la contraddizione $0 \leq \mathrm{tr}(A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y) < 0$.

In sostanza quello che notiamo è che tramite il teorema delle somme non appare immediato controllare un autovalore di $A(\hat{x})X - A(\hat{y})Y$ con un numero strettamente negativo. Ciò ci impedisce di proseguire nella dimostrazione come fatto precedentemente nel caso di operatori uniformemente ellittici, e mostra un limite dell'approccio scelto nell'ambito degli operatori degeneri.

L'operatore di Grushin è lineare e soddisfa le ipotesi fatte da H. Ishii in [3]. Tuttavia, se la crescita degli autovalori di A non è $o(|x|^2)$ per $x \to \infty$, l'approccio di Ishii non pare utilizzabile. D'altra parte anche localizzando ed utilizzando l'approccio di Imbert e Silvestre la degenerazione della matrice A introduce un nuovo ostacolo apparentemente legato alla perdita di uniforme ellitticità che ne impedisce l'applicazione immediata.

Bibliografia

[1] C. Imbert, L. Silvestre, *$C^{1,\alpha}$ regularity solutions of some degenerate fully nonlinear elliptic equations*, Advances in Mathematics, 233 (2013) 196-206

[2] G. Barles, E. Chasseigne, C. Imbert, *Hölder continuity of solutions of second orded non-linear elliptic integro-differential equations*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 13 (1) (2011) 1-26

[3] H. Ishii, *On the Equivalence of Two Notions of Weak Solutions, Viscosity Solutions and Distribution Solutions*, Funkcialaj Ekvacioj, 38 (1995) 101-120

[4] H.Ishii, P-L. Lions, *Viscosity solutions for fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Differential Equations 83 (1) (1990) 26-78

[5] L. A. Caffarelli, X. Cabrè, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995

[6] M.G. Crandall, H.Ishii, P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc, 27 (1992),1-67

[7] M. Parviainen, *Viscosity Theory Lecture Notes*, University of Jyväskylä, 2015

[8] N. Nadirashvili and S. Vladuts, *Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. (9), 89(2):107–113, 2008.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che mi hanno aiutato nella realizzazione della mia Tesi con suggerimenti, critiche ed osservazioni: a loro va la mia gratitudine, anche se a me spetta la responsabilità per ogni errore o imprecisione contenuta in questa tesi.

Ringrazio innanzitutto il professor Fausto Ferrari, Relatore: senza il suo supporto e la sua guida sapiente questa tesi non esisterebbe.

Proseguo con il personale degli archivi e delle biblioteche consultate, in particolare della Biblioteca del Dipartimento di Matematica e della Biblioteca del Quartiere Savena/Mazzini N. Ginzburg, fonti inestimabili di documentazione.

Un ringraziamento particolare va alla mia famiglia e agli amici che mi hanno incoraggiato o che hanno speso parte del proprio tempo per discutere con me le bozze del lavoro, in particolare Alessandro De Gregorio, Alessandro Calzolari, Gioacchino Ruocco, Federico Zucchini, Francesca Bologna.

Grazie anche a Carolina, Francesco e Stefano, grazie a tutti i rover e le scolte del clan, presenti e passati: ognuno di voi merita menzione e ha tutta la mia stima e gratitudine. Grazie alle comunità capi del Bologna 18 e del Bologna 6.

Grazie a I Camminatori, gli amici di Beat-Bit Music School, in particolare Riccardo Negrelli e Giulia Matteucci, il Madela's calcio, gli Amici di Matematica.

Ognuno di voi è un mattoncino in quest'elaborato e non solo: il ringraziamento che quivi compare è ben misera cosa se paragonato a quanto ricevuto nell'arco di una vita da tutti voi. Grazie.