ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

# Complessi di Koszul

**Tesi in Algebra Commutativa**

**Relatrice:**
**Chiar.ma Prof.ssa**
**Mirella Manaresi**

**Correlatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**Rüdiger Achilles**

**Presentata da:**
**Lisa Seccia**

**Sessione III**
**Anno Accademico 2015-2016**

*A mio fratello*

# Indice

**Introduzione** **vii**

**1 Prerequisiti e notazioni** **1**
1.1 Moduli . . . 1
1.1.1 Moduli e omomorfismi di moduli . . . 1
1.1.2 Sottomoduli e moduli quoziente . . . 2
1.1.3 Somma diretta e prodotto diretto di moduli . . . 4
1.1.4 Moduli finitamente generati e moduli proiettivi . . . 4
1.1.5 Supporto e primi associati . . . 6
1.1.6 Successioni esatte di moduli . . . 7
1.1.7 Prodotto tensoriale di moduli . . . 9
1.1.8 Restrizione ed estensione di scalari . . . 10
1.1.9 Proprietà di esattezza del prodotto tensoriale . . . 11
1.2 Cenni di algebra omologica . . . 13
1.2.1 Complessi di catene . . . 13
1.2.2 Risoluzioni libere e proiettive . . . 15
1.2.3 Funtori Ext e Tor . . . 16
1.2.4 Proprietà della dimensione proiettiva . . . 18

**2 Anelli e moduli graduati** **19**
2.1 Moduli e omomorfismi graduati . . . 19
2.2 Sottomoduli ed ideali omogenei . . . 20
2.3 Funzione di Hilbert . . . 23

**3 Successioni regolari e profondità** **27**
3.1 Successioni regolari . . . 27
3.2 Profondità di un modulo . . . 30
3.2.1 Teorema di Rees . . . 30
3.2.2 Grado e profondità . . . 32

**4 Complessi di Koszul** **35**
4.1 Algebra esterna . . . 35
4.2 Complessi di Koszul . . . 38
4.2.1 Definizione e prime proprietà . . . 38
4.2.2 Complessi di Koszul di successioni . . . 43
4.2.3 Complessi di Koszul e profondità . . . 49
4.3 Teorema di Serre . . . 53

**5 Alcuni esempi** **55**

**Bibliografia** **63**

# Introduzione

La prima idea di complesso di Koszul si trova nel celebre lavoro di Hilbert "*Ueber die Theorie der algebraischen Formen*"([HI]), in cui il grande matematico tedesco, dopo aver provato il famoso teorema delle sizigie, determina la prima risoluzione libera del $k[x_1, \ldots, x_n]$-modulo $k$.

Successivamente, intorno al 1950, in un lavoro sulla coomologia delle algebre di Lie, Koszul utilizza questa risoluzione per generalizzare il teorema delle sizigie.

Nel suo corso al Collège de France (1955), le cui note sono diventate il famoso lecture notes "Algèbre locale-multiplicités "([SE]), J.Pierre-Serre definisce il complesso di algebre esterne, attribuendolo a Koszul. Attraverso l'omologia di questo complesso, Serre calcola la molteplicità di intersezione di varietà algebriche. Più precisamente egli esprime le molteplicità di certi ideali rispetto a un modulo come la somma alternata di lunghezze di moduli di omologia di un complesso di Koszul.

Dopo Serre il complesso è diventato per tutti il *complesso di Koszul* ed è stato a lungo studiato da algebristi commutativi e geometri algebrici, anche perchè la sua omologia fornisce informazioni sulla regolarità delle successioni finite di elementi di un anello e sulla profondità di moduli e ideali. Un lavoro fondamentale per lo studio delle proprietà del complesso di Koszul è quello di Auslander-Buchsbaum (si veda [AB]), che sviluppano una teoria assiomatica della molteplicità di intersezione definita da Serre e danno una trattazione unificata dei moduli di Macaulay.

L'esempio più semplice di complesso di Koszul è quello relativo ad un solo elemento di un anello, in cui si considera la moltiplicazione per tale elemento. Utilizzando strumenti di algebra multilineare questa costruzione può essere estesa a successioni finite di elementi dell'anello. In anelli Noetheriani locali la successione è regolare se e solo se il complesso di Koszul è aciclico, ossia se e solo se i moduli di omologia del complesso sono tutti nulli eccetto al più in grado zero.

La tesi è divisa in cinque capitoli. Nel primo capitolo vengono richiamati gli elementi di algebra commutativa e di algebra omologica necessari ai capitoli successivi.

Nel secondo capitolo vengono raccolte nozioni relative ad anelli e moduli graduati e si introduce la funzione di Hilbert di un anello graduato su un campo.

Nel capitolo tre vengono presentati risultati relativi alle successioni regolari e alla profondità di un modulo. Il teorema di Rees dà una descrizione omologica della profondità di un ideale attraverso il funtore Ext.

Nel quarto capitolo viene introdotto il complesso di Koszul di un'applicazione lineare e in particolare di successioni finite di elementi di un anello, vengono studiate le proprietà di tale complesso ed enunciato il famoso risultato di Serre riguardante la molteplicità di intersezione di varietà algebriche.

La tesi si conclude con un capitolo contente la costruzione esplicita del complesso di Koszul per successioni di lunghezza due e tre e la discussione di un esempio significativo. Si tratta del cono sulla famosa curva di Macaulay che viene intersecato con un piano passante per il vertice. In questo esempio la definizione intuitiva di molteplicità di intersezione deve essere corretta utilizzando le lunghezze dei moduli di omologia del complesso di Koszul, secondo il risultato di Serre.

# Capitolo 1

# Prerequisiti e notazioni

In questo capitolo sono riportati, senza dimostrazione, alcune nozioni preliminari di Algebra Commutativa di cui ci serviremo in seguito.

## 1.1 Moduli

I moduli possono essere pensati come una generalizzazione del concetto di spazio vettoriale, in cui gli scalari formano un anello anziché un campo.

### 1.1.1 Moduli e omomorfismi di moduli

**Definizione 1.1 (Modulo).** Sia $A$ un anello commutativo unitario. Un $A$-*modulo* è un gruppo abeliano $(M, +)$ su cui è definita un'operazione

$$\begin{aligned} \mu \colon A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\mapsto ax := \mu(a, x). \end{aligned}$$

tale che:

(i) $a(x + y) = ax + ay$

(ii) $(a + b)x = ax + ay$

(iii) $(ab)x = a(bx)$

(iv) $1x = x$ $\qquad (a, b \in A; x, y \in M)$

*Osservazione* 1. Equivalentemente, $M$ è un $A$-modulo $\Leftrightarrow$ $M$ è un gruppo abeliano con un omomorfismo di anelli $\psi \colon A \longrightarrow \mathrm{End}(M)$ dove $\mathrm{End}(M)$ è l'anello degli endomorfismi del gruppo abeliano $M$.

**Esempio 1.**

- Un ideale $\mathfrak{a}$ di $A$ è un $A$-modulo. In particolare, $A$ è un $A$-modulo.
- Se $A = K$ è un campo, allora un $A$-modulo è un $K$-spazio vettoriale.

- Se $A = \mathbb{Z}$, allora uno $\mathbb{Z}$-modulo è un gruppo abeliano in cui si definisce

$$nx := \begin{cases} x + ... + x \text{ ($n$ volte)} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -x - ... - x \text{ ($n$ volte)} & n < 0 \end{cases}$$

**Definizione 1.2** (**Omomorfismo di moduli**). Siano $M$ e $N$ $A$-moduli. Un *omomorfismo* di $A$-moduli (o mappa $A$-lineare) è una mappa $f\colon M \to N$ tale che:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in M$$
$$f(ax) = a \cdot f(x) \qquad \forall a \in A, \forall x \in M$$

*Osservazione* 2.
1. Se $A = K$ è un campo, un omomorfismo di $A$-moduli è una applicazione lineare di spazi vettoriali.
2. La composizione di mappe $A$-lineari è ancora una mappa $A$-lineare.
3. $\mathrm{Hom}_A(M, N) = \{f\colon M \longrightarrow N \mid f \text{ è omomorfismo di moduli}\}$ ha una struttura di $A$-modulo se definiamo:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(af)(x) = a \cdot f(x)$$
4. Gli omomorfismi $u\colon M \longrightarrow M'$ e $v\colon N \longrightarrow N''$ inducono le mappe:
$$\bar{u}\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M', N)$$
$$\bar{v}\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N'')$$
definite come segue : $\bar{u}(f) = f \circ u, \quad \bar{v}(f) = v \circ f$.
Queste mappe sono omomorfismi di moduli.
5. Per ogni modulo $M$ c'è un isomorfismo naturale $\mathrm{Hom}(A, M) \cong M$.

### 1.1.2 Sottomoduli e moduli quoziente

**Definizione 1.3** (**Sottomodulo**). Si dice che $M'$ è un *sottomodulo* di $M$ se $M'$ è un sottogruppo di $M$ chiuso rispetto alla moltiplicazione per elementi di $A$.

**Definizione 1.4** (**Modulo quoziente**). Sia $M$ un modulo e $M'$ un suo sottomodulo. Sul gruppo abeliano $M/M'$ è possibile definire una moltiplicazione per elementi di $A$ nel seguente modo:

$$a[x] := [ax]$$

Si verifica facilmente che tale definizione è ben posta e in questo modo $M/M'$ eredita da $M$ una struttura di $A$-modulo. Tale modulo è detto *modulo quoziente*. La mappa

$$\pi\colon M \longrightarrow M/M'$$
$$x \mapsto [x]$$

è un omomorfismo suriettivo di $A$-moduli, detto *proiezione naturale*, il cui nucleo coincide con $M'$.

*Osservazione* 3. C'è una corrispondenza biunivoca:

$$\{N \mid N \text{ è sottomodulo di } M \text{ e } N \supseteq M'\} \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{sottomoduli di } M/M'\}$$

**Teorema 1.1.1 (Teorema di omomorfismo).** *Sia $f\colon M \longrightarrow N$ e sia $M'$ un sottomodulo di $M$ tale che $M' \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Se indichiamo con $\pi\colon M \longrightarrow M/M'$ la proiezione al quoziente, allora esiste ed è unico un $A$-omomorfismo $\bar{f}\colon M/M' \longrightarrow N$ tale che $f = \bar{f} \circ \pi$ e $f(M) = \bar{f}(M/M')$. In particolare, $\bar{f}$ è suriettivo se e solo se $f$ è suriettivo; inoltre $\bar{f}$ è iniettivo se e solo se $\mathrm{Ker}(f) = M'$.*

**Definizione 1.5 (Somma di moduli).** Sia $M$ un $A$-modulo e $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottomoduli. Si definisce *somma* degli $M_i$ l'insieme di tutte le somme (finite) $\sum_{i\in I} x_i$ con $x_i \in M_i \quad \forall i \in I$ e tali che quasi tutti gli $x_i$ sono zero. Questo insieme è il più piccolo sottomodulo di $M$ che contiene tutti gli $M_i$ e si indica con $\sum_{i\in I} M_i$.

**Proposizione 1.1.2.** *(i) Se $L \supseteq M \supseteq N$ sono $A$-moduli, allora*

$$(L/N)/(M/N) \cong (L/M)$$

*(ii) Se $M_1, M_2$ sono sottomoduli di $M$, allora*

$$(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$$

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.1. □

**Definizione 1.6.** Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$ e $M$ un $A$-modulo, si definisce

$$\mathfrak{a}M := \left\{\sum a_i x_i \text{ somme finite} \mid a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M\right\}.$$

L'insieme $\mathfrak{a}M$ è un sottomodulo di $M$.
Se $N, P$ sono sottomoduli di $M$, si definisce

$$(N : P) := \{a \in A \mid aP \subseteq N\}$$

ed è un ideale di $A$. In particolare, $(0 : M)$ è l'insieme degli $a \in A$ tale che $aM = 0$; questo ideale si chiama *annullatore* di $M$ e si indica con $\mathrm{Ann}(M)$. Un $A$-modulo si dice *fedele* se $\mathrm{Ann}(M)$=0.

*Osservazione* 4. Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}(M)$, possiamo vedere $M$ come un $A/\mathfrak{a}$-modulo nel modo seguente: se $\bar{x} \in A/\mathfrak{a}$ ( dove $\bar{x}$ indica la proiezione al quziente di $x \in A$), definiamo $\bar{x}m := xm$. Tale definizione è ben posta, ossia non dipende dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza, perché $\mathfrak{a}M = 0$. Se $\mathrm{Ann}(M)$=$\mathfrak{a}$, allora $M$ è fedele come $A/\mathfrak{a}$-modulo.

### 1.1.3 Somma diretta e prodotto diretto di moduli

**Definizione 1.7** (**Somma e prodotto diretto**). Siano $M$ e $N$ due $A$-moduli. La loro *somma diretta* è definita come:

$$M \oplus N := \{(x, y) \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

Questo insieme ha una struttura di $A$-modulo se definiamo addizione e moltiplicazione per scalare in modo naturale come:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(x, y) = (ax, ay)$$

Più in generale se $(M_i)_{i\in I}$ è una qualsiasi famiglia di $A$-moduli, possiamo definire la loro somma diretta $\oplus_{i\in I} M_i$; i suoi elementi sono famiglie $(x_i)_{i\in I}$ tali che $x_i \in M_i \quad \forall i \in I$ e quasi tutti gli $x_i$ sono zero.
Se omettiamo la restrizione sul numero di elementi non nulli, otteniamo il *prodotto diretto* $\prod_{i\in I} M_i$.

*Osservazione* 5. Somma diretta e prodotto diretto sono la stessa cosa se l'insieme degli indici I è finito ma non altrimenti, in generale.

### 1.1.4 Moduli finitamente generati e moduli proiettivi

Se $M = \sum_{i\in I} Ax_i$, si dice che gli $x_i$ sono un *insieme di generatori* per $M$: cioè ogni elmento di $M$ si può esprimere (non necessariamente in modo unico) come combinazione lineare finita degli $x_i$ a coefficienti in $A$.

**Definizione 1.8** (**Modulo finitamente generato**). Un $A$-modulo $M$ si dice *finitamente generato* se ha un insieme finito di generatori.

**Definizione 1.9** (**Modulo libero**). Un $A$-modulo $M$ si dice *libero* se è isomorfo ad un $A$-modulo della forma $\oplus_{i\in I} M_i$, dove $M_i \cong A \quad \forall i \in I$ (come $A$-modulo). A volte si usa la notazione $A^{(I)}$. Un $A$-modulo libero finitamente generato è dunque isomorfo al modulo $A \oplus \ldots \oplus A$ ($n$ addendi), denotato con $A^n$. Per convenzione, $A^0$ è il modulo nullo.

Si verifica immediatamente che la definizione di $A$-modulo libero equivale a richiedere l'esistenza di una base per $M$, cioè un insieme di generatori linearmente indipendenti in $A$. In altre parole, i moduli liberi sono moduli che presentano una struttura particolarmente simile a quella degli spazi vettoriali.

**Esempio 2.** Sono moduli liberi:

- l'anello $A$ come $A$-modulo su se stesso: una base è data da 1;
- per ogni intero positivo $n$, la somma diretta di $A^n$ è un $A$-modulo libero e una base è data dalle $n$-uple

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

- L'anello dei polinomi $A[x]$: una base è data da $1, x, x^2, \dots$;

Non sono moduli liberi:

- gli $\mathbb{Z}_n$ come $\mathbb{Z}$-moduli perché non ci sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{Z}_n$ formati da elementi linearmente indipendenti;
- $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$-modulo: infatti $\mathbb{Q}$ non può essere generato da un solo elemento (non è ciclico) e presi due qualsiasi elementi distinti di $\mathbb{Q}$, questi sono linearmente dipendenti in $\mathbb{Z}$.

**Proposizione 1.1.3.** *$M$ è un $A$-modulo finitamente generato $\Leftrightarrow$ $M$ è isomorfo ad un quoziente di $A^n$ per qualche intero $n > 0$.*

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.3. □

**Proposizione 1.1.4.** *Sia $M$ un $A$-modulo finitamente generato e sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$ tale che $\mathfrak{a}M = M$. Allora esiste $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ tale che $xM = 0$.*

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.4, corollario 2.5. □

**Definizione 1.10 (Radicale di Jacobson).** Sia $A$ un anello si definisce *radicale di Jacobson* di $A$ l'intersezione di tutti i suoi ideali massimali e lo si denota con $\mathfrak{R}(A)$.

**Proposizione 1.1.5 (Nakayama's lemma).** *Sia $M$ un $A$-modulo finitamente generato e $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$ contenuto in $\mathfrak{R}(A)$. Allora*

$$\mathfrak{a}M = M \Rightarrow M = 0.$$

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.6. □

**Corollario 1.1.6.** *Sia $M$ un $A$-modulo finitamente generato, $N$ un sottomodulo di $M$ e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}$ un ideale di $A$. Allora:*

$$M = \mathfrak{a}M + N \Rightarrow M = N.$$

*Dimostrazione.* Si veda [AM], corollario 2.7. □

*Osservazione* 6. Sia $A$ un anello locale, $\mathfrak{m}$ il suo ideale massimale e $k = A/\mathfrak{m}$ il suo campo residuo. Sia $M$ un $A$-modulo finitamente generato. Allora $M/\mathfrak{m}M$ è un $A$-modulo finitamente generato e $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Ann}(M/\mathfrak{m}M)$. Dunque, per quanto visto, $M/\mathfrak{m}M$ è un $A/\mathfrak{m}$-modulo, cioè un $k$-spazio vettoriale, e come tale è finitamente generato. Inoltre, si dimostra che se $x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sono elementi di $M$ le cui immagini mediante la proiezione al quoziente su $M/\mathfrak{m}M$ formano una base di questo spazio vettoriale, allora tali $x_i$ generano $M$ (si veda [AM], proposizione 2.8).

**Definizione 1.11 (Modulo proiettivo).** Un $A$-modulo $P$ si dice *proiettivo* se per ogni $s\colon M \to N$ omomorfismo suriettivo di $A$-moduli e per ogni mappa $A$-lineare $g\colon P \to N$ esiste una mappa $A$-lineare $f\colon P \to M$ tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "s"] & N \end{tikzcd}$$

Questa proprietà che caratterizza i moduli proiettivi è detta *proprietà del sollevamento* o *lifting property*.

*Osservazione* 7. [***Lifting property*** **di moduli liberi**] Si verifica immediatamente che i moduli liberi godono della proprietà del sollevamento; dunque sono proiettivi. Infatti sia $F$ un $A$-modulo libero, $s\colon M \to N$ morfismo suriettivo di $A$-moduli e $g\colon F \to N$ una mappa $A$-lineare. Allora esiste sempre una mappa $A$-lineare $f\colon F \to M$ tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "s"] & N \end{tikzcd}$$

Per costruire tale $f$ è sufficiente definire la mappa su una base $\{e_i\}_{i\in I}$ di $F$ e poi estenderla per linearità. Sfruttando la suriettività di $s$, possiamo porre $f(e_i) = m_i$ con $m_i \in s^{-1}(g(e_i))$. La mappa così costruita soddisfa la proprietà richiesta.

### 1.1.5 Supporto e primi associati

**Definizione 1.12** (**Primo associato**)**.** Dato un $A$-modulo $M$ e un ideale primo $\mathfrak{p}$ di $A$ si dice che $\mathfrak{p}$ è *associato ad* $M$ se $\mathfrak{p}$ è l'annullatore di un elemento $m \in M$, cioè se $\mathfrak{p} = \{a \in A \mid am = 0\}$. L'insieme dei primi associati si indica con $\mathrm{Ass}(M)$.

*Osservazione* 8. Sia $I$ un ideale di $A$ contenuto in $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Per definizione $\exists z \in M$ tale che $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\, z$. Quindi il morfismo $\varphi\colon A/\mathfrak{p} \to M$ definito da $\varphi(\bar{a}) := az$ è iniettivo. Dunque $\varphi$ induce un omomorfismo non nullo $\varphi'\colon A/I \to M$.

**Definizione 1.13** (**Supporto di un modulo**)**.** Sia $M$ un $A$-modulo. Definiamo

$$\mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ è ideale primo di } A \text{ e } M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

**Proposizione 1.1.7.** *Sia $A$ anello e $M$ un $A$-modulo finitamente generato. Allora* $\mathrm{Supp}(M)$ *è l'insieme degli ideali primi di $A$ che contengono* $\mathrm{Ann}(M)$.

*Dimostrazione.* Si veda [MAT], pag.26. □

Si osservi che se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, allora $\mathfrak{p}$ è l'annullatore di qualche elemento $m \in M$, $m \neq 0$. In particolare si ha che nessun elemento di $A \setminus \mathfrak{p}$ annulla $m$, cioè $m$ è un elemento non nullo di $M_{\mathfrak{p}}$. Questo prova che:

**Proposizione 1.1.8.** *Se $M$ è un $A$-modulo allora* $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

Vale inoltre la seguente proprietà per la localizzazione di moduli.

**Proposizione 1.1.9.** *Sia $A$ anello e $M$ un $A$-modulo. Allora*

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \Rightarrow \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}(M_{\mathfrak{p}}).$$

*Dimostrazione.* Si veda [MAT], corollario pag.38. □

Vengono enunciate di seguito alcune proprietà di $\mathrm{Ass}(M)$ e $\mathrm{Supp}(M)$ nel caso in cui $A$ sia anello Noetheriano.

**Proposizione 1.1.10.** *Sia $A$ anello noetheriano e $M$ un $A$-modulo. Allora*

$$M = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ass}(M) = \emptyset.$$

*Dimostrazione.* Si veda [MAT], teorema 6.1, pag.38. □

**Proposizione 1.1.11.** *Sia $A$ anello noetheriano e $M$ un $A$-modulo. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ e $\mathfrak{p}$ è minimale in $\mathrm{Supp}(M)$, allora $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.*

*Dimostrazione.* Si veda [MAT], teorema 6.5, pag.39. □

**Proposizione 1.1.12.** *Sia $A$ anello Noetheriano e sia $M$ un $A$-modulo finito. Se $I \subset A$ è un ideale che contiene solo zero-divisori di $M$, allora $I \subset \mathfrak{p}$ per qualche $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.*

*Dimostrazione.* Conseguenza del teorema 6.1, pag.38 di [MAT]. □

### 1.1.6 Successioni esatte di moduli

Una successione di $A$-moduli e di $A$-omomorfismi

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots \tag{0}$$

si dice *esatta in $M_i$* se $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$. La successione si dice *esatta* se è esatta in ogni $M_i$. In particolare:

(1) $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ è esatta $\Leftrightarrow$ $f$ è iniettiva.

(2) $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ è esatta $\Leftrightarrow$ $g$ è suriettiva.

(3) $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ è esatta $\Leftrightarrow$ $f$ è iniettiva, $g$ è suriettiva e induce un isomorfismo $\mathrm{Coker}(f)$=$M/f(M') \cong M''$.

Una successione del tipo (3) è detta *successione esatta corta*.
Ogni successione esatta lunga del tipo (0) si può spezzare in successioni esatte corte: se si pone $N_i = \mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ per ogni $i$, si ottengono le successioni esatte corte $0 \to N_i \hookrightarrow M_i \xrightarrow{f_{i+1}} N_{i+1} \to 0$.

**Proposizione 1.1.13.** *Valgono le seguenti proprietà per il funtore* Hom*:*

*(i) Sia*
$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0 \tag{4}$$
*una successione di $A$-moduli e di $A$-omomorfismi. Allora la successione (4) è esatta se e solo se per ogni $A$-modulo $N$, la successione*
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(M', N) \tag{4'}$$
*è esatta.*

*(ii) Sia*
$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \tag{5}$$
*una successione di $A$-moduli e di $A$-omomorfismi. Allora la successione (5) è esatta se e solo se per ogni $A$-modulo $M$, la successione*
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(M, N'') \tag{5'}$$
*è esatta.*

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.9. □

Abbiamo visto come sia sempre possibile spezzare una successione esatta lunga in successioni esatte corte. Il lemma che segue, noto come snake lemma, ci permette di ottenere a partire da una successione esatta corta una successione esatta lunga.

**Lemma 1.1.14 (Snake lemma).** *Sia*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*un diagramma commutativo di $A$-moduli ed omomorfismi in cui le due righe sono successioni esatte corte. Allora esiste un omomorfismo $d$ detto omomorfismo di connessione (o di bordo) tale che la seguente successione sia esatta:*

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f' \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Ker}\, f'' \xrightarrow{d}$$
$$\mathrm{Coker}\, f' \xrightarrow{\bar{u}'} \mathrm{Coker}\, f \xrightarrow{\bar{v}'} \mathrm{Coker}\, f'' \to 0$$

*dove $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono le restrizioni di $u$ e $v$, $\bar{u}'$, $\bar{v}'$ sono le mappe indotte da $u'$ e $v'$.*

*Dimostrazione.* ([AM], proposizione 2.10.) L'omomorfismo di connessione $d$ è definito seguendo il percorso indicato dalle frecce rosse del diagramma: se $x'' \in \operatorname{Ker} f''$, si ha $x'' = v(x)$ per qualche $x \in M$ e $v'(f(x)) = f''(v(x)) = 0$, dunque $f(x) \in \operatorname{Ker}(v') = \operatorname{Im}(u')$. Allora esiste $y' \in N'$ tale che $f(x) = u'(y')$ e si definisce $d(x'')$ come l'immagine di $y'$ in $\operatorname{Coker} f'$. Si dovrebbe verificare che tale definizione è ben posta e che la successione così definita è effettivamente esatta. □

### 1.1.7 Prodotto tensoriale di moduli

**Proposizione-definizione 1.1.15 (Prodotto tensoriale).** *Siano $M$ e $N$ due $A$-moduli. Allora esiste una coppia $(T, g)$, dove $T$ è un $A$-modulo e $g$ è una mappa $A$-bilineare $g\colon M \times N \longrightarrow T$, tale che valga la seguente proprietà: per ogni $A$-modulo $P$ e per ogni mappa $A$-bilineare $f\colon M \times N \longrightarrow P$, esiste un'unica applicazione $A$-lineare $\phi\colon T \longrightarrow P$ tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\phi"] \\ & P \end{tikzcd}$$

*(Cioè ogni applicazione bilineare su $M \times N$ si fattorizza attraverso $T$). Inoltre se $(T, g)$ e $(T', g')$ sono due coppie che verificano questa proprietà, allora esiste un unico isomorfismo $\psi\colon T \xrightarrow{\cong} T'$ tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

*L'$A$-modulo $T$ è detto* prodotto tensoriale *di $M$ e $N$ ed è denotato con $M \otimes_A N$ o, se non c'è rischio di confusione, con $M \otimes N$.*

*Osservazione* 9. Il prodotto tensoriale $M \otimes N$ è generato come $A$-modulo dagli elementi del tipo $x \otimes y$, detti *tensori semplici.* Se $(x_i)_{i \in I}$ e $(y_j)_{j \in J}$ sono famiglie di generatori di $M$ e $N$ rispettivamente, allora i tensori del tipo $x_i \otimes y_j$ generano $M \otimes N$. In particolare, se $M$ e $N$ sono finitamente generati anche $M \otimes N$ lo è.

Se anzichè considerare mappe bilineari, si considerano mappe multilineari definite su $f\colon M_1 \times \ldots \times M_r$, si arriva a definire in modo analogo il *prodotto multitensoriale* di moduli $T = M_1 \otimes \ldots \otimes M_r$.

**Proposizione 1.1.16 (Proprietà del prodotto tensoriale).** *Siano $M, N, P$ degli $A$-moduli e $I$ un ideale di $A$. Allora:*

*(i)* $M \otimes N \cong N \otimes M$

*(ii)* $A \otimes M \cong M$

*(iii)* $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P) \cong M \otimes N \otimes P$

*(iv)* $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

*(v)* $M \otimes_A A/I \cong M/IM$.

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.14. □

**Proposizione 1.1.17.** *Siano $A$ e $B$ due anelli, $M$ un $A$-modulo, $P$ un $B$-modulo e $N$ un $(A, B)$-modulo (questo significa che $N$ è contemporaneamente sia un $A$-modulo che un $B$-modulo e le due strutture sono compatibili, cioè: $a(xb) = (ax)b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$ e $x \in N$). Allora $M \otimes_A N$ ha una struttura naturale di $B$-modulo, $N \otimes_B P$ ha una struttura naturale di $A$-modulo e si ha*

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

### 1.1.8 Restrizione ed estensione di scalari

Sia $f\colon A \longrightarrow B$ morfismo di anelli e sia $N$ un $B$-modulo. Allora $N$ ha anche una struttura naturale di $A$-modulo, che si dice ottenuta per *restrizione degli scalari*, dove la moltiplicazione è definita come segue:

$$\begin{aligned} \mu\colon A \times N &\longrightarrow N \\ (a, x) &\mapsto f(a)x. \end{aligned}$$

In particolare $f$ definisce una struttura di $A$-modulo su $B$.
Un caso interessante è quello in cui $f$ è il morfismo di inclusione di $A$ in un suo sopranello $B$. In tal caso è come se ci si limitasse a moltiplicare gli elementi di $N$ per "meno" scalari, cioè solo per gli scalari di $A$.

*Osservazione* 10. Supponiamo che $N$ sia finitamente generato come $B$-modulo e che $B$ sia finitamente generato come $A$-modulo. Siano $y_1, \ldots, y_n$ i generatori di $N$ su $B$ e $x_1, \ldots, x_m$ i generatori di $B$ su $A$. Allora $N$ come $A$-modulo è finitamente generato e un insieme di generatori è dato dagli $mn$ prodotti $x_i y_j$.

Sia $f\colon A \longrightarrow B$ morfismo di anelli e sia ora $M$ un $A$-modulo. Per quanto appena visto, $B$ si può vedere come un $A$-modulo ed ha dunque senso il prodotto tensoriale $M_B := B \otimes_A M$. $M_B$ è un $A$-modulo. Di fatto, $M_B$ ha anche una struttura di $B$-modulo, che si dice ottenuta per *estensione degli scalari*, con la moltiplicazione definita come segue:

$$\begin{aligned} \mu\colon B \times M_B &\longrightarrow M_B \\ (b, \sum_{\text{finita}} b_i \otimes m_i) &\mapsto \sum_{\text{finita}} bb_i \otimes m_i. \end{aligned}$$

Questa mappa risulta ben definita grazie alle proprietà della moltiplicazione nell'anello $B$ e gode delle proprietà della moltiplicazione per scalare di un $B$-modulo.

*Osservazione* 11. Supponiamo che $M$ sia finitamente generato come $A$-modulo e siano $x_1, \ldots, x_n$ i suoi generatori. Allora $M_B$ è finitamente generato come $B$-modulo e un suo insieme di generatori è dato dai tensori $1 \otimes x_i$.

Concludiamo il paragrafo con la definizione di *algebra*.

**Definizione 1.14 (Algebra).** Sia $A \to B$ un morfismo di anelli. Se $a \in A$ e $b \in B$, si definisce il prodotto

$$ab = f(a)b.$$

Con tale prodotto $B$ è un $A$-modulo (è un esempio particolare di restrizione di scalari). Dunque $B$ ha una struttura sia di $A$-modulo sia di anello e queste due strutture sono compatibili. L'anello $B$, con questa struttura di $A$-modulo, si dice $A$-*algebra*.

### 1.1.9 Proprietà di esattezza del prodotto tensoriale

Sia $S := \{f \colon M \times N \longrightarrow P \mid f \text{ è A-bilineare}\}$. $S$ ha una struttura naturale di $A$-modulo. Sia $f \in S$. Per ogni $x \in M$, l'applicazione $y \mapsto f(x, y)$ è $A$-lineare da $N$ a $P$. Viceversa, un qualsiasi $A$-morfismo $\phi \colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, P)$ definisce una mappa $A$-bilineare $(x, y) \mapsto \phi(x)(y)$ da $M \times N$ a $P$. Dunque c'è un isomorfismo di moduli

$$\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)) \cong S.$$

D'altra parte, per definizione di prodotto tensoriale, c'è una corrispondenza biunivoca tra $S$ e $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$ che è anche $A$-lineare. In conclusione:

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong S \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)).$$

**Proposizione 1.1.18.** *Sia $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una successione esatta di $A$-moduli e $A$-morfismi e sia $N$ un $A$-modulo arbitrario. Allora la successione:*

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$

*(dove 1 indica l'identità su $N$) è esatta.*

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.18. □

*Osservazione* 12. In generale, se $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ è una successione esatta non è detto che la successione $M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M''$ ottenuta tensorizzando con un $A$-modulo arbitrario $N$, sia a sua volta esatta.

**Esempio 3.** Sia $A = \mathbb{Z}$ e consideriamo la successione esatta $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ con $f(x) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Se tensorizziamo la successione con il modulo $N = \mathbb{Z}_2$, otteniamo la successione

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$$

che non è esatta in quanto la mappa $f \otimes 1$ non è iniettiva. Infatti per ogni $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ si ha

$$(f \otimes 1)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0.$$

Quindi $f \otimes 1$ è la mappa nulla ma $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \neq 0$.

**Definizione 1.15** (**Modulo piatto**). Un $A$-modulo $N$ si dice *piatto* se per ogni successione esatta di $A$-moduli

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

la successione ottenuta tensorizzando con $N$

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \otimes N \xrightarrow{f_i \otimes 1} M_i \otimes N \xrightarrow{f_{i+1} \otimes 1} M_{i+1} \otimes N \longrightarrow \ldots$$

è ancora esatta.

La seguente proposizione ci dà alcune condizioni equivalenti affinchè un modulo sia piatto.

**Proposizione 1.1.19.** *Sia $N$ un $A$-modulo. Sono equivalenti:*

*(i)* *$N$ è piatto.*

*(ii)* *Se $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ è una qualsiasi successione esatta corta di $A$-moduli, allora la successione $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ è esatta.*

*(iii)* *Se $f\colon M' \to M$ è iniettiva, allora $f \otimes 1\colon M' \otimes N \to M \otimes N$ è iniettiva.*

*(iv)* *Se $f\colon M' \to M$ è iniettiva e $M$ ed $M'$ sono finitamente generati, allora $f \otimes 1\colon M' \otimes N \to M \otimes N$ è iniettiva.*

*Dimostrazione.* Si veda [AM], proposizione 2.19. □

*Osservazione* 13. Sia $f\colon A \to B$ un morfismo di anelli e $M$ un $A$-modulo piatto. Da 1.1.16 e 1.1.17 segue che $M_B = B \otimes M$ è un $B$-modulo piatto.

*Osservazione* 14. Abbiamo già visto che ogni $A$-modulo libero è proiettivo. Più in generale, su un qualsiasi anello $A$ valgono le seguenti implicazioni

$$\text{Modulo libero} \Rightarrow \text{Modulo proiettivo} \Rightarrow \text{Modulo piatto}$$

. Per l'ultima implicazione si veda [ROT], proposizione 3.46.

# 1.2 Cenni di algebra omologica

## 1.2.1 Complessi di catene

**Definizione 1.16** (**Complesso di catene**). Si definisce *complesso di catene* di $A$-moduli una successione di $A$-moduli e di omomorfismi di $A$-moduli del tipo:

$$K\colon \ \dots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \longrightarrow \dots$$

tale che $d_i \circ d_{i+1} = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ (equivalentemente se $\mathrm{Im}\, d_{i+1} \subseteq \ker d_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$). In genere si è soliti denotare un tale complesso con la scrittura $K = (M, d)$ e $d$ è detto *omomorfismo di bordo* (a volte, per indicare un complesso, si usa anche al notazione $K_\bullet$). In particolare, si parla di complesso sinistro se $M_k = 0$ per ogni $k \leq -1$.
Inoltre si definisce *modulo di omologia di dimensione* $i$ del complesso $K$, il modulo quoziente $H_i(K) = \mathrm{Ker}\, d_i / \mathrm{Im}\, d_{i+1}$.

In modo analogo si definiscono i complessi di cocatene.

**Definizione 1.17** (**Complesso di cocatene**). Si definisce *complesso di cocatene* di $A$-moduli una successione di $A$-moduli e di omomorfismi di $A$-moduli del tipo:

$$K\colon \ \dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\delta^{i-1}} M_i \xrightarrow{\delta^i} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

tale che $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ (equivalentemente se $\mathrm{Im}\, \delta^{i-1} \subseteq \ker \delta^i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$). In particolare, si parla di complesso destro se $M_k = 0$ per ogni $k \leq -1$.
Inoltre si definisce *modulo di coomologia di dimensione* $i$ del complesso $K$, il modulo quoziente $H^i(K) = \ker \delta^i / \mathrm{Im}\, \delta^{i-1}$.

Si noti che se la successione è esatta, l'omologia del complesso è nulla (cioè $H_n(K) = 0$ pe ogni $n$); dunque l'omologia può essere interpretata come una *"misura della non esattezza della successione"*.

**Definizione 1.18** (**Omomorfismi di catene**). Siano $K$ e $K'$ due complessi di catene:

$$K\colon \ \dots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \longrightarrow \dots$$
$$K'\colon \ \dots \longrightarrow M'_{i+1} \xrightarrow{d'_{i+1}} M'_i \xrightarrow{d'_i} M'_{i-1} \longrightarrow \dots$$

Un *omomorfismo di catene* $h\colon K \to K'$ è una successione di omomorfismi $h_i\colon M_i \to M'_i$ tale che $h_{i-1} \circ d_i = d'_i \circ h_i$ per ogni $i$. Cioè i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{d_i} & M_{i-1} \\ \big\downarrow{\scriptstyle h_i} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_{i-1}} \\ M'_i & \xrightarrow{d'_i} & M'_{i-1} \end{array}$$

*Osservazione* 15. Siano $K = (M, d)$ e $K' = (M', d')$ due complessi di catene e sia $h\colon K \to K'$ un morfismo di catene. Allora $h$ induce un morfismo sui moduli di omologia definito da

$$\begin{aligned} h_n^*\colon H_n(K) &\longrightarrow H_n(K') \\ [u] = u + \operatorname{Im} d_{n+1} &\mapsto [h_n(u)] = h_n(u) + \operatorname{Im} d'_{n+1} \end{aligned}$$

Tale definizione è ben posta. Basta ossevare che:

- $u \in \operatorname{Ker} d_n \Rightarrow d'_n(h_n(u)) = h_{n-1}(d_n(u)) = h_{n-1}(0) = 0$
  $\Rightarrow h_n(u) \in \operatorname{Ker} d'_n$
- $w = d_{n+1}(v) \in \operatorname{Im} d_{n+1} \Rightarrow h_n(d_{n+1}(v)) = d'_{n+1}(h_{n+1}(v))$
  $\Rightarrow h_n(w) \in \operatorname{Im} d'_{n+1}$

Si può definire sull'insieme degli omomorfismi di catene una relazione di equivalenza nel modo seguente:

**Definizione 1.19 (Omotopia).** Siano $f, g\colon K \to K'$ due omomorfismi di catene. Si dice che $f$ e $g$ sono *omotopi* (e si scrive $f \simeq g$) se esiste una successione di omomorfismi $s_i\colon M_i \to M'_{i+1}$ tale che

$$d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i = f_i - g_i.$$

$$\begin{tikzcd} M_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d] & M_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[d, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift left, "f_i"] & M_{i-1} \arrow[d] \arrow[dl, "s_{i-1}"] \\ M'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & M'_i \arrow[r, "d'_i"] & M'_{i-1} \end{tikzcd}$$

In particolare un omomorfismo di catene $h$ si dice *omotopicamente nullo* se $h \simeq 0$.

**Proposizione 1.2.1.** *Siano $f, g\colon K \to K'$ due omomorfismi di catene omotopicamente equivalenti. Allora gli omomorfismi $f^*$ e $g^*$ indotti da $f$ e $g$ sui moduli di omologia coincidono.*

*Dimostrazione.* Per semplicità di notazione, omettiamo i pedici. Sia $[z] \in H(K)$, $d(z) = 0$. Allora

$$f(z) - g(z) = (d \circ s + s \circ d)(z) = d(s(z)) + s(d(z)) = d(s(z)).$$

Quindi

$$g^*(z) = [g(z)] = [f(z) - d(s(z))] = [f(z)] = f^*(z).$$

□

Applicando lo *Snake Lemma* possiamo ottenere successioni esatte lunghe di moduli di omologia a partire da successioni esatte corte di complessi.

**Lemma 1.2.2.** *Sia* $0 \to A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \to 0$ *una successione esatta corta di complessi (cioè esatta in ogni grado). É possibile definire un omomorfismo* $D$ *in modo da ottenere la seguente successione esatta lunga sui moduli di omologia*

$$\ldots \to H_i(A_\bullet) \xrightarrow{f^*} H_i(B_\bullet) \xrightarrow{g^*} H_i(C_\bullet) \xrightarrow{D} H_{i-1}(A_\bullet) \to \ldots$$

$D$ *è detto* omomorfismo di connessione *ed è definito come segue:*

$$\begin{aligned} D\colon H_i(C_\bullet) &\longrightarrow H_{i-1}(A_\bullet) \\ [c_i] &\mapsto [a_{i-1}]. \end{aligned}$$

*con* $a_{i-1} = f_{i-1}^{-1} \circ d_B \circ g_i^{-1}(c_i)$.

*Tale definizione è giustificata dalla commutatività del seguente diagramma e dall'esattezza delle sue successioni esatte corte:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d_A"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "d_B"] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "d_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & B_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] & C_{i-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

### 1.2.2 Risoluzioni libere e proiettive

**Definizione 1.20 (Risoluzione di un modulo).** Sia $A$ un anello e $M$ un $A$-modulo. Una *risoluzione proiettiva* (risp. *libera*) di $M$ è un complesso sinistro di $A$-moduli proiettivi (risp. liberi):

$$K\colon \ \ldots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

insieme ad un omomorfismo $\varepsilon\colon P_0 \to M$, tale che la successione:

$$\ldots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

sia esatta. Talvolta si usa scrivere $K \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$.

Si può verificare facilmente che:

**Proposizione 1.2.3.** *Ogni* $A$*-modulo* $M$ *ammette una risoluzione libera, dunque proiettiva.*

*Dimostrazione.* Sia $M$ un $A$-modulo e sia $\{x_i\}_{i \in I_0}$ un suo insieme di generatori. Poniamo $P_0 := A^{(I_0)}$ e consideriamo l'omomorfismo di $A$-moduli

$$\begin{aligned} \varepsilon\colon P_0 &\longrightarrow M \\ e_i &\mapsto \varepsilon(e_i) := x_i. \end{aligned}$$

così definito sugli elementi della base e poi esteso per linearità. Per costruzione $\epsilon$ è suriettivo. Consideriamo ora $\operatorname{Ker}\varepsilon$ e ripetiamo nuovamente il procedimento. Si ottengono in questo modo due successioni esatte:

$$P_1 \to \operatorname{Ker}\varepsilon \to 0 \qquad\qquad P_0 \to M \to 0$$

e dunque la successione

$$P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

è esatta. Iterando il procedimento si ottiene una risoluzione libera per $M$. □

**Definizione 1.21** (**Lunghezza di una risoluzione**). Si dice che una risoluzione $K$ di un $A$-modulo $M$ ha lunghezza $n$, se $n$ è il più piccolo intero positivo tale che $P_i = 0$ per ogni $i > n$.

**Definizione 1.22** (**Dimensione proiettiva**). Sia $A$ un anello e $M$ un $A$-modulo non nullo. Si dice che $M$ ha *dimensione proiettiva* (o *dimensione omologica*) $n$ se $M$ possiede una risoluzione proiettiva di lunghezza $n$ e non possiede risoluzioni proiettive di lunghezza minore. Scriveremo $\operatorname{pd} M = n$. Per convenzione, se $M$ non ha risoluzioni proiettive di lunghezza finita si pone $\operatorname{pd} M = \infty$; se $M = 0$ si pone $\operatorname{pd} 0 = -1$.

*Osservazione* 16. $M = 0 \Leftrightarrow M$ è un modulo proiettivo (non nullo).

### 1.2.3 Funtori Ext e Tor

Riportiamo di seguito la definizione e le proprietà fondamentali del funtore Tor (funtore di *torsione*) e del funtore Ext (funtore di *estensione*).

**Definizione 1.23** (**Funtore Tor**). Siano $M$ ed $N$ due $A$-moduli e sia $(K,\varepsilon)$ una risoluzione proiettiva di $M$, diciamo:

$$K\colon \ \ldots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

Consideriamo il complesso sinistro:

$$K{\otimes}N\colon \ \ldots \longrightarrow P_i{\otimes}N \xrightarrow{d_i\otimes 1} P_{i-1}{\otimes}N \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0{\otimes}N \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} M{\otimes}N \longrightarrow 0$$

Si definisce

$$\operatorname{Tor}_n(M,N) := \begin{cases} M \otimes N & \text{se } n = 0 \\ H_n(K \otimes N) = \operatorname{Ker}(d_n \otimes 1)/\operatorname{Im}(d_{n+1} \otimes 1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

**Definizione 1.24** (**Funtore Ext**). Siano $M$ ed $N$ due $A$-moduli e sia $(K,\varepsilon)$ una risoluzione proiettiva di $M$, diciamo:

$$K\colon \ \ldots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

Consideriamo il complesso destro:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(K,N)\colon 0 \longrightarrow &\mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0,N) \xrightarrow{\delta^0} \dots \\ &\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_{n-1},N) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Hom}(P_n,N) \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

Si definisce

$$\mathrm{Ext}^n(M,N) := \begin{cases} \mathrm{Hom}(M,N) & \text{se } n=0 \\ H^n(\mathrm{Hom}(K,N)) = \mathrm{Ker}\,\delta^n/\,\mathrm{Im}\,\delta^{n-1} & \text{se } n>0 \end{cases}$$

Per completezza si riportano di seguito alcune proprietà notevoli dei funtori sopra definiti. Per ulteriori approfondimenti si veda [ROT], capitolo 6.

**Proposizione 1.2.4.** *(i)* $\mathrm{Tor}_n(M,N)$ *con* $n \geq 1$ *non dipende dalla risoluzione proiettiva scelta per* $M$.

*(ii)* $\mathrm{Tor}_n(M,N) = \mathrm{Tor}_n(N,M)$ *per* $n \geq 0$.

*(iii) Ad ogni successione esatta corta di A-moduli:*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

*è associata una successione esatta lunga, detta* successione esatta di omologia dei Tor *(fissato un A-modulo arbitrario* $N$*):*

$$\begin{aligned}\dots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}(M',N) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}(M,N) \longrightarrow \dots \longrightarrow M\otimes N \longrightarrow M''\otimes N \longrightarrow 0\end{aligned}$$

**Proposizione 1.2.5.** *(i)* $\mathrm{Ext}^n(M,N)$ *con* $n \geq 1$ *non dipende dalla risoluzione proiettiva scelta per* $M$.

*(ii)* $\mathrm{Ext}^n(M,N) \neq \mathrm{Ext}^n(N,M)$ *per* $n \geq 0$*: ciò è conseguenza della covarianza e della controvarianza dei funtori* $\mathrm{Hom}(M,-)$ *e* $\mathrm{Hom}(-,N)$*, rispettivamente.*

*(iii) Ad ogni successione esatta corta di A-moduli:*

$$0 \to T' \to T \to T'' \to 0$$

*sono associate due successioni esatte lunghe, dette* successioni esatte di omologia degli Ext *(fissati due A-moduli arbitrari* $M$ *e* $N$*):*

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(T'',N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T',N) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T'',N) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}(T',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(T'',N) \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,T') \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,T'') \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,T') \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}(M,T'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(M,T') \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

### 1.2.4 Proprietà della dimensione proiettiva

Enunciamo alcune proprietà notevoli della dimensione proiettiva.

**Proposizione 1.2.6.** *Sia $A$ un anello Noetheriano e $M$ un $A$-modulo finitamente generato. Allora:*

*(i)* $\mathrm{pd}_A M = \sup_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \mathrm{pd}_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} = \sup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)} \mathrm{pd}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$.

*(ii) La dimensione proiettiva di $M$ è il più piccolo intero $n \geq -1$ (se esiste) tale che $\mathrm{Tor}_i(M, A/\mathfrak{m}) = 0$ per ogni $i > n$ e per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di $A$.*

*(iii) $M$ è proiettivo $\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1(M, N) = 0$ per ogni $A$-modulo $N$ finitamente generato.*

*Dimostrazione.* Si veda, ad esempio, [SE], pag. 27–35. □

*Osservazione* 17. Il punto ($i$) della proposizione precedente ci consente di ricondurre lo studio della dimensione proiettiva di un modulo allo studio della dimensione proiettiva di un modulo su un anello locale.

*Osservazione* 18. Più in generale si prova che la dimensione proiettiva di un $A$-modulo $M$ con $A$ anello arbitrario, è il più piccolo intero $n \geq -1$ tale che $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$ per ogni $i > n$ e per ogni $A$-modulo finitamente generato $N$.

# Capitolo 2

# Anelli e moduli graduati

## 2.1 Moduli e omomorfismi graduati

**Definizione 2.1** (**Anello graduato**). Un anello si dice (positivamente) *graduato* se esiste una famiglia di sottogruppi $(A_n)_{n\geq 0}$ del gruppo adittivo di $A$, tale che:

- $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$
- $A_m A_n \subseteq A_{m+n} \quad \forall m, n \geq 0.$

In particolare, $A_0$ è un sottoanello di $A$ e $A_n$ è un $A_0$-modulo $\forall n \geq 0$.
Si definisce $A_+ = \oplus_{n>0} A_n$ e si verifica facilmente che $A_+$ è un ideale di $A$.

**Definizione 2.2** (**Modulo graduato**). Sia $A$ un anello graduato, un $A$-modulo $M$ si dice (positivamente) *graduato* se esiste una famiglia di sottogruppi $(M_n)_{n\geq 0}$ di $M$ tale che:

- $M = \oplus_{n=0}^{\infty} M_n$
- $A_m M_n \subseteq M_{m+n} \quad \forall\ m, n \geq 0.$

In particolare, $M_n$ è un $A_0$-modulo $\forall n \geq 0$.
Un elemento $x \in M$ si dice *omogeneo* se $\exists n$ tale che $x \in M_n$ e $n$ è detto *grado* di $x$.
Ogni elemento $y \in M$ si può scrivere in modo unico come $\sum_n y_n$ con $y_n \in M_n \quad \forall n \geq 0$ e quasi tutti gli $y_n$ sono nulli. Le componenti $y_n$ non nulle sono dette *componenti omogenee* di $y$.

**Definizione 2.3** (**Algebra graduata**). Sia $A$ un anello graduato ed $L$ una $A$-algebra. $L$ si dice (positivamente) *gradauta* se è graduata come $A$-modulo e se $L_m L_n \subset L_{m+n}\ \forall\ m, n \geq 0$.

**Definizione 2.4** (**Morfismo di $A$-moduli graduati**). Siano $M$ e $N$ due $A$-moduli graduati. Un *omomorfismo di $A$-moduli graduati* (o omomorfismo *omogeneo*) è un omomorfismo di $A$-moduli $f\colon M \to N$ tale che $f(M_n) \subseteq N_n \quad \forall n \geq 0$.
Più in generale, se esiste $i \in \mathbb{Z}$ tale che $f(M_n) \subseteq N_{n+i} \quad \forall n \geq 0$ si dice che $f$ è un omomorfismo omogeneo *di grado $i$*.

**Proposizione 2.1.1.** *Sia $A$ un anello graduato. Sono equivalenti:*

*(i) $A$ è un anello Noetheriano*

*(ii) $A_0$ è Noetheriano e $A$ è una $A_0$-algebra finitamente generata.*

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Se $A$ è Noetheriano, anche $A_0$ lo è, perché $A_0 \cong A/A_+$. Per ipotesi $A_+$, essendo un ideale di $A$, è finitamente generato. Siano $x_1, \dots, x_s$ i suoi generatori che possiamo supporre essere omogenei di gradi $k_1, \dots, k_s$ (tutti $> 0$). Sia $A' := A_0[x_1, \dots, x_s]$ il sottoanello di $A$ generato dagli $x_1, \dots, x_s$ su $A_0$. Ovviamente $A_0 \subseteq A' \subseteq A$. Se mostriamo che $A_n \subseteq A' \quad \forall n \geq 0$, ne verrà che $A \subseteq A'$, dunque $A = A'$. Procediamo per induzione su $n$. L'asserto è ovvio per $n = 0$. Supponiamo $n > 0$ e sia $y \in A_n$. Poichè $y \in A_+$, $y$ è combinazione lineare degli $x_i$: $y = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$ con $a_i \in A_{n-k_i}$ (per convezione $A_m = 0$ se $m < 0$). Poichè $k_i > 0$, per ipotesi induttiva si ha che $a_i \in A'$. Dunque $y \in A'$. Questo mostra che $A_n \subseteq A \quad \forall n \geq 0$, da cui la tesi.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Se $A$ è finitamente generata come $A_0$-algebra, allora $A$ è isomorfa ad un quoziente dell'anello di polinomi $A_0[x_1, \dots, x_s]$. Essendo $A_0$ Noetheriano, per il teorema della base di Hilbert, anche $A_0[x_1, \dots, x_s]$ lo è. Dunque $A$, come quoziente di un anello Noetheriano, è Noetheriano. □

## 2.2 Sottomoduli ed ideali omogenei

**Definizione 2.5** (**Sottomoduli graduati**)**.** Sia $M$ un $A$-modulo graduato e $N$ un suo sottomodulo. Si dice che $N$ è un *sottomodulo graduato* (o *omogeneo*) se è graduato e se la mappa di inclusione $i \colon N \hookrightarrow M$ è un morfismo graduato di moduli, ossia se $N_i = N \cap M_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

*Osservazione* 19. Se $M$ è un $A$-modulo graduato e $N$ è un suo sottomodulo graduato, allora $M/N$ ha a sua volta una struttura naturale di $A$-modulo graduato. Infatti

$$M/N = (\oplus_i M_i)/(\oplus_i N_i) = (\oplus_i M_i)/\oplus_i (N \cap M_i) = \bigoplus_i M_i/(N \cap M_i)$$

e chiaramente la relazione $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$ implica lo stesso per i quozienti. Si osservi inoltre che se $\phi$ è un morfismo graduato di $A$-moduli, $\operatorname{Ker} \phi$ e $\operatorname{Im} \phi$ sono graduati.

**Definizione 2.6** (**Ideali graduati**)**.** Sia $A$ è un anello graduato e $I$ un suo ideale. Si dice che $I$ è un *ideale graduato* (o *omogeneo*) se è graduato come sottomodulo di $A$. Se $I$ è un ideale arbitrario di $A$, si definisce $I^*$ l'ideale graduato generato da tutti gli elementi omogenei di $I$. $I^*$ è il più grande ideale graduato contenuto in $I$.

**Lemma 2.2.1.** *Sia $A$ un anello graduato. Allora:*

*(i) Se $P$ è un ideale primo, allora $P^*$ è un ideale primo.*

*(ii)* *Se $M$ è un $A$-modulo graduato e $P \in \operatorname{Supp}(M)$, allora $P^* \in \operatorname{Supp}(M)$.*

*(iii)* *Se $I$ è un ideale graduato e $P$ è un ideale primo minimale per $I$, allora $P$ è graduato. In particolare, ogni ideale primo minimale di $A$ è graduato.*

*Dimostrazione.* $(i)$. Siano $a, b \in A$ tali che $ab \in P^*$. Scriviamo $a = \sum_{a_i \in A_i} a_i$ e $b = \sum_{b_j \in B_j} b_j$. Supponiamo per assurdo che $a \notin P^*$ e $b \notin P^*$. Allora $\exists\ p, q$ tali che

$$\begin{array}{lll} a_i \in P^* \quad \forall\ i < p & \text{e} & a_p \notin P^* \\ b_j \in P^* \quad \forall\ j < q & \text{e} & b_q \notin P^* \end{array}$$

La $(p+q)$-esima componente omogenea di $ab$ è $\sum_{i+j=p+q} a_i b_j$. Dunque $\sum_{i+j=p+q} a_i b_j \in P^*$, poichè $P^*$ è graduato. Si osservi inoltre che, per come sono stati definiti $p$ e $q$, tutti gli addendi di questa sommatoria, eccetto al più $a_p b_q$, sono elementi di $P^*$. Dunque anche $a_p b_q \in P^*$. Poichè $P^* \subseteq P$ e $P$ è primo, ne viene che $a_p \in P$ oppure $b_q \in P$. Ma $a_p$ e $b_q$ sono omogenei quindi si avrebbe che $a_p \in P^*$ oppure $b_q \in P^*$, una contraddizione.
$(ii)$ Supponiamo che $P^* \notin \operatorname{Supp}(M)$; allora $M_{P^*} = 0$. Sia $x \in M$ omogeneo. Allora esiste $a \in A \setminus P^*$ tale che $ax = 0$. Ne viene che $a_i x = 0$ per tutte le componenti omogenee $a_i$ di $a$. Poichè $a \in A \setminus P^*$, esiste $i \in \mathbb{Z}$ tale che $a_i \notin P^*$. Ma poichè $a_i$ è omogeneo necessariamente si ha che $a_i \notin P$. Quindi $x/1 = 0$ in $M_P$ per tutti gli elementi omogenei di $M$. In conclusione $M_P = 0$ e questo contraddice l'ipotesi.
$(iii)$. Poichè $P \supseteq I$ e $P^*$ è il più grande ideale graduato contenuto in $P$, si ha $P^* \supseteq I$. Essendo $P$ minimale per $I$, ne viene che $P = P^*$. Dunque $P$ è graduato. $\square$

Sia $P$ un ideale primo di $A$ e sia $S$ l'insieme degli elementi omogenei di $A$ che non appartengono a $P$. $S$ è chiuso rispetto al prodotto, quindi per ogni $A$-modulo graduato $M$ possiamo costruire il suo modulo dei quozienti (o localizzazione di $M$) rispetto a $S$. Scriveremo $M_{(P)} := M_S$.
Se $x/a \in M_{(P)}$ e $x$ è omogeneo, poniamo $\deg(x/a) = \deg x - \deg a$ e definiamo la *localizzazione omogenea di $M$* come segue:

$$(M_{(P)})_i := \left\{ x/a \in M_{(P)} \mid x \text{ omogeneo}, \deg x/a = i \right\}$$

E' facile verificare che con queste definizioni $A_{(P)}$ è un anello graduato e $M_{(P)}$ è un $A_{(P)}$-modulo graduato.
Si osservi che $P^* A_{(P)}$ è un ideale primo graduato di $A_{(P)}$ e che nell'anello quoziente $A_{(P)}/P^* A_{(P)}$ ogni elemento omogeneo non nullo è invertibile, poichè ogni elemento omogeneo non appartenente a $P$ appartiene a $S$. Gli anelli graduati che godono di questa proprietà rappresentano, nella teoria degli anelli graduati, l'analogo dei campi (in cui ogni elmento non nullo è invertibile).
Tale proprietà può essere specificata meglio dalla seguente proposizione.

**Lemma 2.2.2.** *Sia $A$ un anello graduato. Sono equivalenti:*

*(i)* *ogni elemento omogeneo non nullo è invertibile;*

*(ii)* *$A_0 = K$ è un campo e vale una delle due seguenti condizioni: $A = K$ oppure $A = K[t, t^{-1}]$ per qualche elemento omogeneo $t \in A$ di grado positivo e trascendente su $K$.*

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Per ipotesi ogni elemento non nullo di $A_0$ è invertibile e il suo inverso ha ancora grado 0, dunque $A_0 = K$ è un campo. Se $A = A_0$ non c'è nulla da dimostrare. Se $A \neq A_0$ allora esiste almeno un elemento omogeneo non nullo di grado positivo. Scegliamo $t$ l'elemento omogeneo non nullo di grado positivo minimo e poniamo $d = \deg t$. Sia $T$ un elemento trascendente su $K$. Poichè $t$ è invertibile possiamo definire un omomorfismo $\phi\colon K[T, T^{-1}] \longrightarrow A$ di anelli graduati tale che $\phi|_K = id_K = id_{A_0}$ e $\phi(T) = t$. Affinchè $\phi$ sia graduato la gradazione su $K[T, T^{-1}]$ è definita ponendo $\deg T = d$. Proviamo che $\phi$ è un isomorfismo.
Sia $f \in \ker \phi$, $\quad f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i$, $a_i \in K$; allora $0 = \phi(f) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i$ e quindi $a_i t^i = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}$. Essendo $t$ invertibile, si ha $a_i = (a_i t^i) t^{-i} = 0$ per ogni $i$, cioè $f = 0$. Questo dimostra che $\phi$ è iniettiva e pertanto $t$ è trascendente su $K$. Facciamo vedere che $\phi$ è anche suriettiva. Sia $a \in A$ un elemento omogeneo non nullo di grado $i$. Se $i = 0$, allora $a \in K$ e quindi $a \in \mathrm{Im}(\phi)$. Supponiamo $i \neq 0$. Dividendo per $d$ si ha $i = jd + r$ con $0 \leq r < d$. L'elemento $at^{-j}$ ha grado $i - jd = r$. Ma poichè $d$ era il grado positivo minimo, ne viene che $r = 0$, cioè $at^{-j} \in K$ è invertibile. Quindi $a = bt^j$ per qualche $b \in K$, cioè $a = \phi(bT^j) \in \mathrm{Im}(\phi)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $x \in A$ omogeneo non nullo di grado $i$. Se $i = 0$, allora $x \in A_0 = K$; quindi è invertibile. Sia $i > 0$. Abbiamo due possibilità: se $A = K$, allora $x$ è invertibile; se $A = K[t, t^{-1}]$, possiamo scrivere $x = at^i$ con $a \in A_0 = K, a \neq 0$ e $t$ invertibile, dunque $x$ è invertibile. □

**Lemma 2.2.3.** *Sia $A$ un anello graduato e $P$ un ideale primo non graduato di $A$, allora non esistono ideali primi contenuti tra $P^*$ e $P$; cioè:*

$$\mathrm{height}(P/P^*) = 1.$$

*Dimostrazione.* Passando eventualmente al quoziente $A/P^*$, possiamo assumere senza perdere di generalità che $A$ sia un dominio d'integrità e $P^* = 0$. Allora $P$ non contiene elementi omogenei non nulli. Sia $S$ l'insieme degli elementi omogenei di $A \setminus P$ (cioè l'insieme degli elementi omogenei non nulli di $A$) e consideriamo la localizzazione omogenea $A_{(0)} = A_S$. Si ha dunque che in $A_{(0)}$ tutti gli elementi omogenei non nulli sono invertibili. Poichè $PA_{(0)}$ è un ideale primo non nullo di $A_{(0)}$, dal lemma 2.2.2 segue che $A_{(0)} = K[t, t^{-1}]$. Quindi $\mathrm{height}\, P = \mathrm{height}\, PA_{(0)} = \dim\, K[t, t^{-1}] = 1$. □

Questi lemmi ci consentono di dimostrare il seguente teorema riguardante la dimensione di anelli e moduli graduati.

**Teorema 2.2.4.** *Sia $A$ un anello Noetheriano graduato, $M$ un $A$-modulo graduato finitamente generato e $P \in \mathrm{Supp}\, M$. Allora*

(a) *se $P$ è graduato, esiste una catena $P_0 \subset \cdots \subset P_d = P$, $d = \dim M_P$ di ideali primi graduati $P_i \in \operatorname{Supp} M$;*

(b) *se $P$ non è graduato, allora dim $M_P = \dim M_{P^*}+1$.*

*Dimostrazione.* Per provare sia $(a)$ che $(b)$ è sufficiente dimostrare che per un qualsiasi ideale primo $P \in \operatorname{Supp} M$ esiste una catena $P_0 \subset \cdots \subset P_d = P$ di ideali primi in $\operatorname{Supp} M$ tale che gli ideali $P_0, \ldots, P_{d-1}$ siano graduati. Da questo segue banalmente che se $P$ è graduato allora vale $(a)$ e se $P$ non è graduato allora $P_{d-1} = P^*$ e dunque vale $(b)$.
Consideriamo $P_0 \subset \cdots \subset P_d = P$ una catena di ideali primi in $\operatorname{Supp} M$. Ovviamente $P_0$ è minimale in $\operatorname{Supp} M$ e per il lemma 2.2.1 ${P_0}^* \in \operatorname{Supp} M$. Dunque $P_0 = {P_0}^*$ è graduato. Se $d = 1$, la tesi è dimostrata. Procediamo per induzione su $d$. Supponiamo che $P_0, \ldots, P_{d-2}$ siano graduati. Se $P$ non è graduato, possiamo sostituire $P_{d-1}$ con $P^*$. Per il lemma 2.2.3 si ha che $\operatorname{height}(P/P^*) = 1$ quindi $P_{d-2} \subsetneqq P^* \subsetneqq P$. Se $P$ è graduato, esiste un elemento omogeneo $a \notin P_{d-2}$. Possiamo allora sostituire $P_{d-1}$ con un ideale primo minimale $Q$ di $P_{d-2} + (a)$ contenuto in $P$. Quindi $P_{d-2} \subsetneqq Q \subset P$. Se fosse $P = Q$, $P$ sarebbe un ideale primo minimale per $P_{d-2} + (a)$, dunque $P/P_{d-2}$ sarebbe un ideale primo minimale per l'ideale principale $(a + P_{d-2})$ in $A/P_{d-2}$ e per il teorema degli ideali principali di Krull (si veda [NOR], capitolo III, teorema 7) si avrebbe

$$\operatorname{height}(P/P_{d-2}) = 1.$$

Ma questo è assurdo perchè $P_{d-1}$ è un ideale primo tale che

$$P_{d-2} \subsetneqq P_{d-1} \subsetneqq P.$$

Questa contraddizione prova che $Q \subsetneqq P$. Inoltre poichè $Q$ è minimale per l'ideale graduato $P_{d-2} + (a)$, segue dal lemma 2.2.1 che $Q$ è graduato. □

## 2.3 Funzione di Hilbert

La funzione di Hilbert è una funzione che misura la dimensione della componente omogenea di grado $n$ di un modulo graduato $M$.
Supporremo in questo paragrafo che $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ sia un anello Noetheriano graduato e che $A_0$ si Artiniano. Sappiamo che $A_0$ è Noetheriano e $A$ è generato (come $A_0$-algebra) da elementi omogenei, diciamo $x_1, \ldots, x_s$, che possiamo supporre di gradi $k_1, \ldots, k_s$.
Sia ora $M$ un $A$-modulo graduato e finitamente generato. Allora $M$ è generato da un numero finito di elementi omogenei, diciamo $m_j$ con $1 \leq j \leq t$, di gradi $r_j = \deg m_j$. Ne segue che ogni elemento omogeneo di grado $n$ è della forma $\sum_j f_j(x)m_j$ dove $f_j(x)$ è un elemento di $A$ di grado $n - r_j$. In particolare $f_j(x) = 0$ se $n < r_j$. Pertanto $M_n$ è un $A_0$-modulo generato dagli elementi del tipo $g_j(x)m_j$ con $g_j(x)$ monomio nelle $x_i$ di grado totale $n - r_j$.

Per poter definire la funzione di Hilbert, abbiamo bisogno di introdurre la nozione di lunghezza di un modulo.

A tal scopo premettiamo alcune definizioni.

**Definizione 2.7 (Serie normale).** Sia $M$ un $A$-modulo. Una *serie normale* in $M$ è una catena di sottomoduli

$$(0) = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = M.$$

L'intero $n$ si dice *lunghezza* della serie normale.

*Osservazione* 20. Si osservi che nella definizione di serie normale le inclusioni non devono necessariamente essere inclusioni strette, cioè può accadere che $N_{i-1} = N_i$ per qualche $i$. Nel caso in cui le inclusioni siano tutte strette, ossia

$$(0) = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n = M$$

la serie si dice *senza ripetizioni*.
Un *raffinamento* di una serie normale è una serie normale ottenuta inserendo altri sottomoduli nella serie di partenza.

**Definizione 2.8 (Serie di composizione).** Sia $M$ un $A$-modulo. Una *serie di composizione* di $M$ è una serie normale senza ripetizioni tale che ogni raffinamento abbia delle ripetizioni.

**Definizione 2.9 (Modulo semplice).** Un $A$-modulo $M$ si dice *semplice* se ha esattamente due sottomoduli, se stesso e $(0)$.

*Osservazione* 21. Una serie normale senza ripetizioni è una serie di composizione se e solo se non esisitono $A$-sottomoduli tra $N_{i-1}$ e $N_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, cioè se e solo se i moduli quoziente $N_i/N_{i-1}$ sono semplici per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.
In particolare, la lunghezza di una serie di composizione di un modulo semplice è uno.

In generale non è detto che un $A$-modulo ammetta una serie di composizione. Tuttavia, se ne esiste una tutte le altre devono avere necessariamente la stessa lunghezza. Vale cioè il seguente teorema:

**Teorema 2.3.1 (Jordan).** *Se un $A$-modulo $M$ ha una serie di composizione di lunghezza $n$, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *ogni altra serie di composizione di $M$ ha lunghezza $n$;*
2. *ogni serie normale si può raffinare ad una serie di composizione.*

*Dimostrazione.* Si veda [ZS], capitolo III, teorema 19. □

Questo risultato ci consente di dare la seguente definizione.

**Definizione 2.10 (Lunghezza di un modulo).** Sia $M$ un $A$-modulo. Se $M$ ammette una serie di composizione, si dice che $M$ ha lunghezza finita e si chiama *lunghezza di $M$* la lunghezza $n$ comune a tutte le serie di composizioni. Scriveremo $l(M) = n$.
Se $M$ non ammette una serie di composizione, si pone $l(M) = \infty$.

Si osservi che un modulo semplice ha lunghezza uno e il modulo nullo ha lunghezza 0.

Si può dimostrare il seguente risultato.

**Proposizione 2.3.2.** *Se $M$ è un $A$-modulo e $A$ è un anello Artiniano, allora sono equivalenti*

1. *$M$ è finitamente generato su $A$;*

2. *$M$ ha lunghezza finita.*

*Dimostrazione.* Si veda [BO], capitolo VIII, pg.7. □

Dalla precedente proposizione e da quanto detto all'inizio di questo paragrafo, segue che tutte le componenti omogenee $M_n$ di $M$ hanno lunghezza finita. Si può definire allora la seguente funzione.

**Definizione 2.11 (Funzione di Hilbert).** Sia $M$ un $A$-modulo graduato e finitamente generato. La funzione numerica

$$\begin{aligned} H(M,-)\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto H(M,n) &:= \begin{cases} l(M_n) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

è detta *funzione di Hilbert* e $H_M(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(M,n)t^n$ è detta *serie di Hilbert* di $M$.

Supponiamo che tutti gli $x_i$ abbiano grado 1, cioè $k_i = 1$ per ogni $i$. Sotto questa ipotesi vale il seguente risultato.

**Teorema 2.3.3 (Hilbert).** *Sia $M$ un $A$-modulo graduato e finitamente generato di dimensione $d$. Allora $H(M,n)$ per $n$ sufficientemente grande è una funzione polinomiale (a coefficienti razionali) di grado $d-1$, cioè esiste un polinomio $P_M \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $H(M,n) = P_M(n)$ per $n \gg 0$. Il polinomio $P_M$ è detto* polinomio di Hilbert *e può essere scritto nella forma*

$$P_M(x) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}e_{d-1-i}\binom{x+i}{i}.$$

*Dimostrazione.* Si veda [AM], corollario 11.2 e [BH], definizione 4.1.5. □

**Definizione 2.12 (Molteplicità).** Si definisce la *molteplicità* del modulo $M$ come segue

$$e(M) = \begin{cases} e_0 & d > 0 \\ l(M) & d = 0. \end{cases}$$

Consideriamo un anello Noetheriano locale $(A, \mathfrak{m})$ e $M \neq 0$ un $A$-modulo finitamente generato. Per definire la *molteplicità* di $M$ consideriamo il modulo graduato associato ad $M$, ossia

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M) := (M/\mathfrak{m}M) \oplus \big(\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}^2 M\big) \oplus \big(\mathfrak{m}^2 M/\mathfrak{m}^3 M\big) \oplus \dots$$

e definiamo

$$e(M) := e(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Più in generale possiamo considerare un ideale $I \subset \mathfrak{m}$ tale che $\mathfrak{m}^n M \subset IM$ per qualche $n$. Un ideale di questo tipo è detto *ideale di definizione* di $M$. L'anello graduato associato, definito da

$$\mathrm{gr}_I(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$$

è un'algebra graduata e $\mathrm{gr}_I(M)$ è un $\mathrm{gr}_I(A)$-modulo graduato.

**Definizione 2.13** (**Molteplicità rispetto ad un ideale**)**.** Si definisce la *molteplicità di $M$ rispetto all'ideale $I$*, la quantità

$$e(I, M) := e(\mathrm{gr}_I(M)).$$

# Capitolo 3

# Successioni regolari e profondità

In questo capitolo si introduce quello che è, assieme alla dimensione, il principale invariante numerico di un modulo: la *profondità*. Dapprima definiremo il concetto di profondità attraverso le successioni regolari, poi ne daremo una caratterizzazione mediante il funtore Ext, collegando così algebra commutativa e algebra omologica. Per finire, nel capitolo successivo, vederemo come la profondità può essere misurata mediante l'omologia di un particolare tipo di complesso, detto complesso di Koszul.

## 3.1 Successioni regolari

**Definizione 3.1 (Elemento regolare).** Sia $M$ un $A$-modulo. Un elemento $x \in A$ si dice *$M$-regolare* se: $xz = 0, z \in M \Rightarrow z = 0$. Equivalentemente, se $x$ non è zero-divisore su $M$.

**Definizione 3.2 (Successione regolare).** Una successione $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ di elementi di $A$ si dice *successione $M$-regolare* (o $M$-successione) se:

(i) $x_i$ è un elemento $M/((x_1, \dots, x_{i-1})M)$-regolare per $i = 1, \dots, n$,

(ii) $M/\mathbf{x}M \neq 0$.

Una *successione regolare* è una $A$-successione regolare.
Se una successione $\mathbf{x}$ soddisfa solo la condizione $(i)$ si dice $M$-successione *debole* (o successione debolmente $M$-regolare).

*Osservazione* 22. Supponiamo che $A$ sia un anello locale e $\mathfrak{m}$ il suo unico ideale massimale (che coincide dunque con il suo radicale di Jacobson). Sia $M \neq 0$ un $A$-modulo finitamente generato. Se $\mathbf{x} \subset \mathfrak{m}$, per il lemma di Nakayama la condizione $(ii)$ è automaticamente soddisfatta.

La seguente proposizione ci da delle condizioni affinchè una successione regolare rimanga regolare quando il modulo o l'anello vengono estesi.

**Proposizione 3.1.1.** *Sia $A$ un anello, $M$ un $A$-modulo e $\mathbf{x} \subset A$ una $M$-successione debole. Supponiamo che $\varphi$: $A \to B$ sia un morfismo di anelli e* *che $N$ sia un $A$-modulo piatto e un $B$-modulo. Allora $\mathbf{x} \subset A$ e $\varphi(\mathbf{x}) \subset B$ sono $(M \otimes_A N)$-successioni deboli. In particolare, se $\mathbf{x}(M \otimes N) \neq (M \otimes N)$, allora $\mathbf{x}$ e $\varphi(\mathbf{x})$ sono $(M \otimes_A N)$-successioni.*

*Dimostrazione.* Si osservi che su $M \otimes N$ moltiplicare per $x_i$ è come moltiplicare per $\varphi(x_i)$, per cui è sufficiente provare il teorema per $\mathbf{x}$. Poichè $x_1$ è $M$-regolare, l'omotetia $x_1 \colon M \longrightarrow M$ è iniettiva. Essendo $N$ piatto anche la mappa $x_1 \otimes \mathrm{id}_N$ è iniettiva. Ma $x_1 \otimes \mathrm{id}_N$ è proprio la moltiplicazione per $x_1$ in $M \otimes N$, per cui $x_1$ è un elemento $M \otimes N$-regolare. D'altra parte è facile verificare che $(M \otimes N)/x_1(M \otimes N) \cong (M/x_1M) \otimes N$. Poichè $x_2$ è un elemento $(M/x_1M)$-regolare, possiamo ripetere il ragionamento precedente e si ha che $x_2$ è $(M \otimes N)/x_1(M \otimes N)$-regolare. Procedendo in questo modo si ottiene la tesi. $\square$

Un caso particolare della precedente proposizione è dato dal seguente corollario.

**Corollario 3.1.2.** *Sia $A$ un anello Noetheriano, $M$ un $A$-modulo finitamente generato e $\mathbf{x}$ una successione $M$-regolare. Supponiamo che esista un ideale primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ tale che $\mathbf{x} \subset \mathfrak{p}$. Allora $\mathbf{x}$, come successione in $R_\mathfrak{p}$, è una $M_\mathfrak{p}$-successione.*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che la localizzazione è un funtore esatto e che esiste un isomorfismo naturale $M_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p} \otimes_A M$. Dunque $A_\mathfrak{p}$ è un modulo piatto su $A$. Possiamo allora applicare la proposizione precedente con $N = A_\mathfrak{p}$. Inoltre per ipotesi $M_\mathfrak{p} \neq 0$ perché $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ e $\mathfrak{p}$ è (l'unico) ideale massimale di $A_\mathfrak{p}$; dal lemma di Nakayama segue che $M_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ e a fortiori $\mathbf{x}M_\mathfrak{p} \neq M_\mathfrak{p}$. $\square$

La proposizione che segue è alla base della connessione tra le successioni regolari e l'algebra omologica.

**Proposizione 3.1.3.** *Sia $A$ un anello, $M$ un $A$-modulo e $\mathbf{x}$ una $M$-successione debole. Allora una successione esatta di $A$-moduli:*

$$N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

*induce una successione esatta:*

$$N_2/\mathbf{x}N_2 \longrightarrow N_1/\mathbf{x}N_1 \longrightarrow N_0/\mathbf{x}N_0 \longrightarrow M/\mathbf{x}M \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sulla lunghezza $n$ della successione $\mathbf{x}$. Iniziamo col dimostrare il caso in cui la successione $\mathbf{x}$ sia costituita da un solo elemento $x$. Consideriamo la successione

$$N_2 \otimes A/(x) \longrightarrow N_1 \otimes A/(x) \longrightarrow N_0 \otimes A/(x) \longrightarrow M \otimes A/(x) \longrightarrow 0$$

ottenuta tensorizzando la successione di partenza con $A/(x)$. Ora osserviamo che se $N$ è un $A$-modulo e $I$ un ideale di $A$, si ha $N \otimes A/I \cong N/IN$. Per cui la successione tensorizzata coincide con la successione

$$N_2/xN_2 \longrightarrow N_1/xN_1 \longrightarrow N_0/xN_0 \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$$

D'altra parte per la proposizione 1.1.18, è sufficiente verificare l'esattezza in $N_1/xN_1$. Indichiamo con $^-$ la classe di resto modulo $x$. Se $\bar{\varphi}_1(\bar{y}) = 0$, allora $\varphi_1(y) = xz$ con $z \in N_0$. Per l'esattezza della successione in $N_0$, si ha $0 = \varphi_0(\varphi_1(y)) = \varphi_0(xz) = x\varphi_0(z)$. Per la regolarità di $x$, deve essere $\varphi_0(z) = 0$; quindi $z \in \ker \varphi_0 = \varphi_1(N_1)$. Sia $y' \in N_1$ tale che $z = \varphi_1(y')$. Ne viene che $\varphi_1(y - xy') = 0$. Quindi $y - xy' \in \ker \varphi_1 = \varphi_2(N_2)$, cioè $\bar{y} \in \bar{\varphi}_2(\bar{N}_2)$.
Sia ora $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ con $n > 1$ e supponiamo che la tesi sia valida per successioni di lunghezza $n-1$. Per semplicità di notazione poniamo
$\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$ Allora per ipotesi induttiva la successione

$$N_2/\mathbf{x}'N_2 \longrightarrow N_1/\mathbf{x}'N_1 \longrightarrow N_0/\mathbf{x}'N_0 \longrightarrow M/\mathbf{x}'M \longrightarrow 0$$

è esatta. Inoltre poichè la successione $\mathbf{x}$ è regolare, $x_n$ è un elemento regolare per $M/\mathbf{x}'M$. Ragionando come nel caso $n = 1$ e osservando che per un qualsiasi $A$-modulo $N$ vale

$$N/\mathbf{x}'N \otimes A/(x_n) \cong N \otimes A/(\mathbf{x}') \otimes A/(x_n) \cong N \otimes A/(\mathbf{x}) \cong N/\mathbf{x}N$$

si ha la tesi. □

Se si vuole preservare l'esattezza per successioni più lunghe c'è bisogno di ipotesi più restrittive.

**Proposizione 3.1.4.** *Sia $A$ un anello e sia*

$$N_\bullet\colon \cdots \longrightarrow N_m \xrightarrow{\varphi_m} N_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_0 \xrightarrow{\varphi_0} N_{-1} \longrightarrow 0$$

*un complesso esatto di $A$-moduli. Se $\mathbf{x}$ è una $N_i$-successione debole per ogni $i$, allora $N_\bullet \otimes R/(\mathbf{x})$ è ancora un complesso esatto.*

*Dimostrazione.* Come nella proposizione precedente possiamo ragionare per induzione sulla lunghezza della successione $\mathbf{x}$; pertanto è sufficiente dimostrare il caso in cui $\mathbf{x} = x$. Poichè $x$ è regolare su $N_i$, in particolare è regolare su Im $\varphi_{i+1}$. Possiamo allora applicare la proposizione 3.1.3 ad ogni successione esatta $N_{i+3} \to N_{i+2} \to N_{i+1} \to \text{Im } \varphi_{i+1} \to 0$. □

In generale una permutazione di una successione regolare non è a sua volta regolare. Vediamo un esempio.

**Esempio 4.** Sia $A = k[x, y, z]$ l'anello dei polinomi in tre variabili a coefficienti un campo $k$. La successione $x, y(1-x), z(1-x)$ è regolare: gli ultimi due elementi, modulo $(x)$, diventano $y$ e $z$ in $k[y, z]$. Ma $y(1-x), z(1-x), x$ non è regolare: l'immagine di $y$ in $A/(y(1-x))$ non è 0 ma $z(1-x)y = 0$ in $A/(y(1-x))$.

Tuttavia sotto opportune ipotesi la permutazione di una successione regolare è ancora regolare.

*Osservazione* 23. Sia $x_1, x_2$ una $M$-successione. Mostriamo che $x_1$ è sempre regolare su $M/x_2M$ ma $x_2$ può non essere regolare su $M$.
Sia $x_1\bar{z} = 0$, dove $\bar{z}$ indica la classe di $z$ in $M/x_2M$. Allora $x_1z = x_2z'$ per qualche $z' \in M$. Essendo $x_2$ regolare su $M/x_1M$, si ha $z' \in x_1M$, cioè $z' = x_1z''$ per qualche $z'' \in M$. Dunque $x_1(z - x_2z'') = 0$ ed essendo $x_1$ regolare su $M$, deve essere $z = x_2z'' \in x_2M$, cioè $\bar{z} = 0$ in $M/x_2M$.
Sia ora $x_2z = 0$, $z \in M$. Essendo $x_2$ regolare su $M/x_1M$, deve essere $z \in x_1M$, $z = x_1z'$. Pertanto $x_1(x_2z') = 0$ e da questo segue, per la regolarità di $x_1$ su $M$, che $x_2z' = 0$. Ripetendo il ragionamento si ottiene $z' \in x_1M$, quindi $z \in x_1^2M$ e così via. Se fosse $\cap_{i=1}^{\infty} x_1^iM = 0$, $x_2$ sarebbe regolare su $M$ e la successione trasposta $x_2, x_1$ sarebbe $M$-regolare. In generale tuttavia $\cap_{i=1}^{\infty} x_1^iM \supsetneqq 0$.

Da questa osservazione si deduce la seguente proposizione.

**Proposizione 3.1.5.** *Sia $A$ un anello Noetheriano locale, $M$ un $A$-modulo finitamente generato e $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ una $M$-successione. Allora ogni permutazione di $\mathbf{x}$ è una $M$-successione.*

*Dimostrazione.* Poichè ogni permutazione può essere scritta come prodotto di trasposizioni di elementi adiacenti, è sufficiente mostrare che la successione $x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n$ è una $M$-successione. Inoltre si osserva che le ipotesi della proposizione sono soddisfatte per $\bar{M} = M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ e per la $\bar{M}$-successione $x_i, \dots, x_n$, dunque è sufficiente provare la proposizione per $i = 1$ e mostrare che $x_2, x_1$ è una $M$-successione. Questo segue dall'osservazione precedente e dal teorema di intersezione di Krull il quale garantisce che $\cap_{i=1}^{\infty} x_1^iM = 0$ (si veda [AM], corollario 10.19). □

# 3.2 Profondità di un modulo

## 3.2.1 Teorema di Rees

**Definizione 3.3** (**$M$-successione massimale**)**.** Una $M$-successione $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ in $A$ (rispettivamente in un ideale $I$) si dice *massimale* (rispettivamente *massimale in $I$*) se $x_1, \dots, x_{n+1}$ non è una $M$-successione per ogni $x_{n+1} \in A$ (rispettivamente per ogni $x_{n+1} \in I$).

Sia $A$ un anello Noetheriano e $M$ un $A$-modulo. Se $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ è una $M$-successione, allora $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, \dots, x_n)$ è una catena strettamente ascendente di ideali. Essendo $A$ Noetheriano, tale catena termina. Perciò ogni $M$-successione si può estendere ad una $M$-successione massimale.
In questa sezione proveremo che se $I$ è un ideale di $A$ tale che $IM \neq M$, tutte le $M$-successioni massimali in $I$ hanno la stessa lunghezza (finita). Introdurremo allora le nozioni di *grado* e *profondità*.

La proposizione che segue fornisce una caratterizzazione omologica degli ideali che contengono solo zero-divisori.

**Lemma 3.2.1.** *Siano $A$ un anello, $M$ e $N$ due $A$-moduli e poniamo $I := \operatorname{Ann} N$.*

*(a) Se $I$ contiene un elemento $M$-regolare,* $\operatorname{Hom}(N, M) = 0$*.*

*(b) Supponiamo che $A$ sia Noetheriano ed $M$, $N$ sono finitamente generati. Allora se* $\operatorname{Hom}(N, M) = 0$ *necessariamente $I$ contiene un elemento $M$-regolare.*

*Dimostrazione.* $(a)$ Sia $x \in I$ un elemento $M$-regolare e sia $\varphi \in \operatorname{Hom}(N, M)$. Per ogni $n \in N$ si ha:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(xn) = x\varphi(n)$$

Essendo $x$ $M$-regolare, deve essere $\varphi(n) = 0$. Per l'arbitrarietà di $n$, ne viene che $\varphi = 0$ e per l'arbitrarietà di $\varphi$ si ha la tesi.
$(b)$ Supponiamo che $I$ non contenga elementi $M$-regolari, cioè che $I$ contenga solo zero-divisori di $M$. Per la proposizione 1.1.12 esiste $\mathfrak{p} \in Ass(M)$ tale che $I \subset \mathfrak{p}$. Inoltre, per la proposizione 1.1.7, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(N)$. Indichiamo con $k(\mathfrak{p})$ il campo $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Dal lemma di Nakayama segue che

$$N_\mathfrak{p} \otimes k(\mathfrak{p}) \cong N_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}N_\mathfrak{p} \neq 0.$$

D'altra parte, $N_\mathfrak{p} \otimes k(\mathfrak{p})$ è un $k(\mathfrak{p})$- spazio vettoriale (di dimensione finita). Dunque si ha un morfismo suriettivo da $N_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}N_\mathfrak{p}$ a $k(\mathfrak{p})$ e di conseguenza un morfismo suriettivo $N_\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p})$. Per la proposizione 1.1.9 $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M_\mathfrak{p})$ e per l'osservazione 8 esiste un morfismo non nullo $k(\mathfrak{p}) \to M_\mathfrak{p}$. Componendo i due morfismi si ottiene un morfismo non nullo in $\operatorname{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$. Poichè $\operatorname{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Hom}_A(N, M)_\mathfrak{p}$ risulta $\operatorname{Hom}_A(N, M) \neq 0$. □

**Lemma 3.2.2.** *Siano $A$ un anello, $M$ ed $N$ due $A$-moduli e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una $M$-successione debole in* $\operatorname{Ann} N$*. Allora*

$$\operatorname{Hom}(N, M/\mathbf{x}M) \cong \operatorname{Ext}^n_A(N, M).$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su $n$. Se $n = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $n > 0$ e poniamo $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$. Per ipotesi induttiva $\operatorname{Hom}(N, M/\mathbf{x}'M) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, M)$. Inoltre, essendo $x_n$ $(M/\mathbf{x}'M)$-regolare, segue dal lemma precedente che $\operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, M) = 0$. Consideriamo allora la successione esatta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x_1} M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0$$

dove $\cdot x_1$ indica la moltiplicazione per l'elemento $x_1$. Questa successione induce la seguente successione esatta degli Ext

$$\underbrace{\operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, M)}_{=0} \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n-1}_A(N, M/x_1M) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ext}^n_A(N, M) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ext}^n_A(N, M).$$

La mappa $\varphi$ è la moltiplicazione per $x_1$ ereditata da $M$. D'altra parte, si può dimostrare ([ROT], teorema 7.16) che anche la moltiplicazione per $x_1$

su $N$ induce $\varphi$ ed essendo $x_1 \in \mathrm{Ann}\, N$, si ha $\varphi = 0$. Dunque $\psi$ è un isomorfismo, cioè $\mathrm{Ext}^n_A(N, M) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_A(N, M/x_1M)$. Poichè $x_2, \ldots, x_n$ è una successione regolare su $M/x_1M$, applicando nuovamente l'ipotesi induttiva si ha la tesi. □

Da questi due lemmi segue il teorema di Rees.

**Teorema 3.2.3 (Rees).** *Sia $A$ un anello Noetheriano, $M$ un $A$-modulo finitamente generato e $I$ un ideale tale che $IM \neq M$. Allora tutte le $M$-successioni massimali in $I$ hanno stessa lunghezza $n$, data da*

$$n = \min\{i \colon \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}.$$

*Dimostrazione.* Sia $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una $M$-successione massimale in $I$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$ fissato. Poichè $I = \mathrm{Ann}\, A/I$, applicando il lemma 3.2.2 si ha

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_A(A/I, M) \cong \mathrm{Hom}_A(A/I, M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M).$$

Essendo che $x_i \in I$ ed è $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-regolare, segue dal lemma 3.2.1 che $\mathrm{Hom}_A(A/I, M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) = 0$. Dunque

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_A(A/I, M) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

D'altra parte, siccome $IM \neq M$ e $\mathbf{x}$ è una $M$-successione massimale in $I$, $I$ non può contenere elementi $M/\mathbf{x}M$-regolari. Allora per il lemma 3.2.1 si ha

$$\mathrm{Hom}_A(A/I, M/\mathbf{x}M) \neq 0.$$

Pertanto dal lemma 3.2.2 segue che $\mathrm{Ext}^n_A(A/I, M) \neq 0$. □

### 3.2.2 Grado e profondità

Il teorema di Rees assicura che la seguente definizione sia ben posta.

**Definizione 3.4 (Grado di $I$).** Sia $A$ un anello Noetheriano, $M$ un $A$-modulo finitamente generato e $I$ un ideale tale che $IM \neq M$. Si definisce *grado di $I$ su $M$* la lunghezza comune delle $M$-successioni massimali in $I$ e lo si denota con

$$\mathrm{depth}_I(M).$$

*Osservazione* 24. Nel caso in cui $IM = M$ si definisce $\mathrm{depth}_I(M) = \infty$. Tale definizione è consistente con il teorema di Rees, in quanto:

$$IM = M \Leftrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) = 0 \quad \forall i.$$

Infatti, se $IM = M$ segue dal lemma di Nakayama che

$$\mathrm{Supp}\, M \cap \mathrm{Supp}\, A/I = \emptyset.$$

Si può dimostrare (si veda [ROT], proposizione 7.39) che

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/I, M)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Ext}^i_{A_{\mathfrak{p}}}((A/I)_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}).$$

Da questo segue che

$$\operatorname{Supp}\operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) \subset \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp} A/I = \emptyset.$$

Cioè $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) = 0 \quad \forall i$. Viceversa, se $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) = 0$ per ogni $i$, segue dal teorema di Rees che $IM = M$.

Merita particolare attenzione il caso di un anello Noetheriano locale.

**Definizione 3.5 (Profondità).** Sia $A$ un anello Noetheriano locale, $\mathfrak{m}$ il suo unico ideale massimale e $k$ il campo $A/\mathfrak{m}$. Se $M$ è un $A$-modulo finito, si definisce profondità di $M$ il grado di $\mathfrak{m}$ su $M$ e lo si indica con

$$\operatorname{depth}(M).$$

In questo specifico caso il teorema di Rees si può riformulare come segue:

**Teorema 3.2.4 (Rees).** *Sia $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anello Noetheriano locale e $M \neq 0$ un $A$-modulo finitamente generato. Allora*

$$\operatorname{depth}(M) = \min\{i \colon \operatorname{Ext}^i_A(k, M) \neq 0\}.$$

La seguente proposizione mostra come varia il grado di un ideale rispetto a moduli diversi legati tra loro da una successione esatta.

**Proposizione 3.2.5.** *Sia $A$ un anello Noetheriano, $I \subset A$ un ideale e sia $0 \to U \to M \to N \to 0$ una successione esatta di $A$-moduli finitamente generati. Allora valgono le seguenti disuguaglianze:*

1. $\operatorname{depth}_I(M) \geq \min\{\operatorname{depth}_I(U), \operatorname{depth}_I(N)\}$;
2. $\operatorname{depth}_I(U) \geq \min\{\operatorname{depth}_I(M), \operatorname{depth}_I(N) + 1\}$;
3. $\operatorname{depth}_I(N) \geq \min\{\operatorname{depth}_I(U) - 1, \operatorname{depth}_I(M)\}$.

*Dimostrazione.* Ci limitiamo alla prima disuguaglianza, le altre si dimostrano con ragionamenti analoghi.
La successione esatta $0 \to U \to M \to N \to 0$ induce la successione esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i-1}_A(A/I, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_A(A/I, U) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_A(A/I, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_A(A/I, U) \longrightarrow \cdots.$$

Preso $i < \min\{\operatorname{depth}_I(U), \operatorname{depth}_I(N)\}$, risulta $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, U) = 0$ ed $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, N) = 0$, quindi $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) = 0$. Dal teorema di Rees, tenendo conto dell'osservazione 24, segue la tesi.

□

# Capitolo 4

# Complessi di Koszul

In questo capitolo si introduce il *complesso di Koszul* di una generica funzione lineare $f$ da un $A$-modulo nell'anello $A$. In seguito si focalizza l'attenzione sul complesso di Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$ di una successione $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ di elementi di un anello $A$. Si vedrà come, sotto opportune ipotesi, è possibile calcolare il grado di $I$ su $M$ a partire dall'omologia di $K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes M$, dove $I$ è l'ideale generato dalla successione $\mathbf{x}$. Per questo motivo e per altre sue proprietà universali, il complesso di Koszul risulta uno strumento particolarmente importante che consente di collegare algebra omologica e commutativa.

## 4.1 Algebra esterna

Prima di definire il complesso di Koszul, premettiamo alcuni richiami sulle algebre esterne. Per eventuali approfondimenti si consulti [BO], capitolo 3.

Sia $A$ un anello e $M$ un $A$-modulo. Possiamo considerare $A$ come un anello graduato definendo su di esso la graduazione banale (ogni elemento dell'anello è omogeneo di grado 0, cioè $A_0 = A$). Definiamo la $i$-esima *potenza tensoriale* di $M$:

$$M^{\otimes i} := \begin{cases} \underbrace{M \otimes \ldots \otimes M}_{i\text{-volte}}, & i > 0 \\ A, \quad i = 0 \ . \end{cases}$$

Le potenze tensoriali formano un $A$-modulo graduato:

$$\bigotimes M := \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^{\otimes i}.$$

Di più, possiamo dare a $\bigotimes M$ una struttura di $A$-algebra associativa graduata, detta *algebra tensoriale*, definendo il prodotto prima sui generatori, e poi per estensione lineare, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) \cdot (y_1 \otimes \ldots \otimes y_n) &:= x_1 \otimes \ldots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \\ 1 \cdot (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) \cdot 1 &:= x_1 \otimes \ldots \otimes x_m \end{aligned}$$

In generale, l'algebra tensoriale $\bigotimes M$ non è commutativa.

L'algebra tensoriale gode della seguente proprietà universale.

**Proposizione 4.1.1** (Proprietà universale dell'algebra tensoriale)**.** *Sia $B$ una $A$-algebra e $\varphi\colon M \longrightarrow B$ una mappa $A$-lineare, allora esiste un unico omomorfismo di $A$-algebre $\psi\colon \bigotimes M \longrightarrow B$ che estende $\varphi$ (qui identifichiamo $M$ e $M^{\otimes 1}$).*

A partire dalle algebre tensoriali è possibile definire le algebre esterne. Consideriamo l'ideale bilatero $\mathcal{I}$ generato dagli elementi del tipo $x \otimes x$ con $x \in M$. L'*algebra esterna* $\bigwedge M$ è definita come l'algebra quoziente:

$$\bigwedge M := \left(\bigotimes M\right)/\mathcal{I}$$

Poichè l'ideale $\mathcal{I}$ è generato da elementi omogenei, l'algebra quoziente $\bigwedge M$ eredita una struttura di $A$-algebra graduata. Il prodotto in $\bigwedge M$ è denotato con $x \wedge y$. Si pone inoltre:

$$\mathcal{I}_k(M) := \mathcal{I} \cap M^{\otimes k},$$
$$\bigwedge^k M := M^{\otimes k}/\mathcal{I}_k(M).$$

La $i$-esima componente omogenea di $\bigwedge M$, denotata con $\bigwedge^i M$, è detta $i$-esima *potenza esterna* di $M$. In particolare $\bigwedge^0 M = A$ e $\bigwedge^1 M = M$. Ne risulta:

$$\bigwedge M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bigwedge^i M = A \oplus M \oplus \bigwedge^2 M \oplus \ldots \oplus \bigwedge^n M \oplus \ldots.$$

Segue dalla definizione che $x \wedge x = 0 \ \forall\ x \in M$. Pertanto dati $x, y \in M$ risulta

$$0 = (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge x + y \wedge x + x \wedge y + y \wedge y = y \wedge x + x \wedge y$$

Cioè $x \wedge y = -y \wedge x, \forall x, y \in M$. Più in generale:

$$x \wedge y = (-1)^{ij} y \wedge x \qquad \forall x \in \bigwedge^i M, \forall y \in \bigwedge^j M,$$
$$x \wedge x = 0 \qquad \forall x \in \bigwedge^i M \text{ con } i \text{ dispari.}$$

Riportiamo di seguito altre utili identità, ricavabili facilmente dalle precedenti:

- Siano $x_1, \ldots, x_n$ elementi di $M$ e $\pi$ una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$. Allora $x_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi(n)} = \sigma(\pi) x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$; dove $\sigma(\pi)$ indica il segno di $\pi$.
- $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ se $\exists\ i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ tali che $x_i = x_j$.

- Sia $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ un sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$ con $i_1 < \cdots < i_m$. Poniamo
$$x_I = x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_m}.$$
Siano $J, K \subset \{1, \dots, n\}$. Definiamo
$$\sigma(J, K) = \begin{cases} (-1)^i \text{ se } J \cap K = \emptyset \\ 0 \text{ se } J \cap K \neq \emptyset \end{cases}$$
dove $i$ è il numero di elementi $(j, k) \in J \times K$ con $j > k$. Allora vale
$$x_J \wedge x_K = \sigma(J, K) x_{J \cup K}$$

L'algebra esterna è caratterizzata da una proprietà universale derivante dalla proprietà universale dell'algebra tensoriale.

**Proposizione 4.1.2** (Proprietà universale dell'algebra esterna)**.** *Data una mappa $A$-lineare $\varphi\colon M \to E$ da $M$ ad una $A$-algebra $E$ tale che $\varphi(x)^2 = 0$ $\forall x \in M$, esiste un unico omomorfismo di $A$-algebre $\psi\colon \bigwedge M \to E$ che estende $\varphi$.*

*Osservazione* 25. Dalla proprietà universale segue che per ogni mappa $A$-lineare $\varphi\colon M \to N$ esiste un unico omomorfismo di $A$-algebre $\wedge\varphi$ per cui il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "nat"] & N \arrow[d, "nat"] \\ \bigwedge M \arrow[r, "\wedge\varphi"] & \bigwedge N \end{tikzcd}$$

In particolare, $\wedge\varphi$ è omogeneo di grado 0 e
$$\wedge\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in M.$$

Si può far vedere che se $\varphi$ è suriettiva anche $\wedge\varphi$ è suriettiva e $\ker \wedge\varphi$ è l'ideale generato da $\ker \varphi$.

Si indica con $\wedge^i\varphi\colon \bigwedge^i M \to \bigwedge^i N$ la mappa indotta da $\wedge\varphi$ sulle componenti omogenee. Come prima, se $\varphi$ è suriettiva anche $\wedge^i\varphi$ è suriettiva e per quanto detto su $\ker \wedge\varphi$ si vede facilmente che la successione
$$\left(\bigwedge^{i-1} M\right) \otimes \ker\varphi \longrightarrow \bigwedge^i M \xrightarrow{\wedge^i\varphi} \bigwedge^i N \longrightarrow 0$$
è esatta.

Enunciamo alcune proprietà dell'algebra esterna.

**Proposizione 4.1.3.** *Valgono le seguenti proprietà:*

1. ***(Proprietà universale del prodotto esterno)*** *Siano $N$ un $A$-modulo e $\alpha\colon M^i \to N$ una funzione $i$-multilineare e alternante. Allora esiste un'unica mappa $A$-lineare $\lambda\colon \bigwedge^i M \to N$ tale che*

$$\alpha(x_1, \dots, x_i) = \lambda(x_1 \wedge \cdots \wedge x_i)$$

*per ogni $x_1, \dots, x_i \in M$.*

2. *Se $A \to B$ è un morfismo di anelli commutativi, allora esiste un isomorfismo naturale*

$$\left(\bigwedge M\right) \otimes_A B \cong \bigwedge (M \otimes_A B)$$

*di $B$-algebre graduate.*

3. *Siano $M_1$ ed $M_2$ due $A$-moduli. Presi degli elementi omogenei $x, x' \in M_1$ e $y, y' \in M_2$ si può definire su $(\bigwedge M_1) \otimes (\bigwedge M_2)$ un prodotto come segue*

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') := (-1)^{(\deg y)(\deg x)}(x \wedge y) \otimes (x' \wedge y').$$

*Risulta*

$$\left(\bigwedge M_1\right) \otimes \left(\bigwedge M_2\right) \cong \bigwedge (M_1 \oplus M_2)$$

*come $A$-algebre graduate.*

4. *Sia $F$ un $A$-modulo libero e finito. Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di $F$. Allora una base di $\bigwedge^i F$ è data dagli elementi*

$$e_I, \quad I \subset \{1, \dots, n\}, \quad |I| = i.$$

*In particolare, $\bigwedge^i F$ è libero di rango $\binom{n}{i}$. Sugli elementi della base il prodotto agisce in questo modo:*

$$e_I \wedge e_J = \sigma(I, J) e_{I \cup J}.$$

## 4.2 Complessi di Koszul

### 4.2.1 Definizione e prime proprietà

Sia $A$ un anello, $L$ un $A$-modulo ed $f\colon L \to A$ una funzione $A$-lineare. La mappa $L^n \longrightarrow \bigwedge^{n-1} L$ definita da

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n.$$

è $n$-multilineare e alternante (con $\hat{x}_i$ si indica che $x_i$ è stato omesso dal prodotto esterno). Dunque, per la proprietà universale del prodotto esterno, esiste una mappa $A$-lineare $d_f^{(n)}\colon \bigwedge^n L \to \bigwedge^{n-1} L$ tale che

$$d_f^{(n)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n$$

per ogni $x_1, \dots, x_n \in L$. La collezione di queste mappe $d_f^{(n)}$ al variare di $n$ definisce un morfismo graduato di grado -1

$$d_f \colon \bigwedge L \to \bigwedge L.$$

Si verifica facilmente che:

- $d_f \circ d_f = 0$, dunque

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^n L \xrightarrow{d_f} \bigwedge^{n-1} L \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 L \xrightarrow{d_f} L \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

  è un complesso.
- Per tutti gli elementi omogenei $x \in \bigwedge L$ risulta

$$d_f(x \wedge y) = d_f(x) \wedge y + (-1)^{\deg x} x \wedge d_f(y).$$

  Cioè $d_f$ è un'*antiderivazione* (di grado $-1$).

**Definizione 4.1** (**Complesso di Koszul**)**.** Il complesso sopra definito prende il nome di *complesso di Koszul di $f$* e lo si denota con $K_\bullet(f)$. Più in generale, se $M$ è un $A$-modulo, si definisce complesso di Koszul di $f$ *con coefficienti in $M$* il complesso $K_\bullet(f, M) := K_\bullet(f) \otimes_A M$ e si denota con $d_{f,M}$ il suo differenziale.

**Definizione 4.2** (**Algebra grado-commutativa**)**.** Un'algebra graduata $C$ si dice *grado-commutativa* se $\forall x \in C_i$ e $\forall y \in C_j$ si ha:

(i) $xy = (-1)^{ij} yx$

(ii) $x^2 = 0$ se $i$ è dispari.

*Osservazione* 26. Si osservi che se lavoriamo in caratteristica diversa da 2 la seconda proprietà è superflua in quanto conseguenza diretta della prima.

**Definizione 4.3** (**DG-algebra**)**.** Una *DG-algebra* (o *algebra graduata differenziale*) è un'algebra grado-commutativa $C$ munita di una omomorfismo $d \colon C \to C$ tale che:

(i) $d(C_i) \subset C_{i-1}$, cioè $d$ ha grado $-1$;

(ii) $d \circ d = 0$;

(iii) $d(xy) = d(x)y + (-1)^i x d(y)$ per ogni $x \in C_i$.

Per il complesso di Koszul valgono le seguenti proprietà:

**Proposizione 4.2.1.** *Sia $A$ un anello, $L$ un $A$-modulo e $f \colon L \to A$ una mappa $A$-lineare. Allora:*

*(a) $K_\bullet(f)$ ha una struttura di DG-algebra.*

*(b) Per ogni $A$-modulo $M$ il complesso $K_\bullet(f, M)$ è un $K_\bullet(f)$-modulo in modo naturale.*

(c) *Indicando con* $x.y$ *il prodotto per scalare di* $K_\bullet(f, M)$ *come* $K_\bullet(f)$*-modulo, si ha che per tutti gli* $x$ *elementi omogenei in* $K_\bullet(f)$ *e per tutti gli* $y \in K_\bullet(f, M)$ *vale*

$$d_{f,M}(x.y) = d_f(x).y + (-1)^{\deg x} x.d_{f,M}(y).$$

*Dimostrazione.* $(a)$. Segue da quanto detto in precedenza.
$(b)$. Se $C$ è una qualsiasi $A$-algebra e $M$ un $A$-modulo, $C \otimes_A M$ è un $C$-modulo; tenendo conto del punto $(a)$ si ha la tesi.
$(c)$. É sufficiente verificare l'uguaglianza per $y = w \otimes z$ con $w \in K_\bullet(f)$ e $z \in M$. Si ha:

$$\begin{aligned} d_{f,M}(x.(w \otimes z)) &= d_{f,M}((x \wedge w) \otimes z) = d_f(x \wedge w) \otimes z = \\ &= (d_f(x) \wedge w + (-1)^{\deg x} x \wedge d_f(w)) \otimes z = \\ &= d_f(x).(w \otimes z) + (-1)^{\deg x} x.d_{f,M}(w \otimes z). \end{aligned}$$

□

Introduciamo alcune utili notazioni.

- Sia $S \subset K_\bullet(f)$ e $U \subset K_\bullet(f, M)$, denotiamo con $S.U$ l'$A$-sottomodulo di $K_\bullet(f, M)$ generato dai prodotti $s.u$ con $s \in S$ e $u \in U$.
- Poniamo:

$$\begin{aligned} Z_\bullet(f) &:= \ker d_f \qquad & Z_\bullet(f, M) &:= \ker d_{f,M} \\ B_\bullet(f) &:= \operatorname{Im} d_f \qquad & B_\bullet(f, M) &:= \operatorname{Im} d_{f,M}. \end{aligned}$$

**Definizione 4.4 (Omologia di Koszul).** L'omologia $H_\bullet(f) = Z_\bullet(f)/B_\bullet(f)$ si chiama *omologia di Koszul di* $f$. Analogamente, per ogni $A$-modulo $M$ l'omologia $H_\bullet(f, M) = Z_\bullet(f, M)/B_\bullet(f, M)$ si chiama *omologia di Koszul di* $f$ *con coefficienti in* $M$.

É bene introdurre, oltre all'omologia di Koszul, anche la *coomologia di Koszul*. Si vedrà più avanti che l'omologia e la coomologia del complesso di Koszul sono strettamente collegate. Consideriamo il complesso di Koszul *duale*:

$$K^\bullet(f) := \operatorname{Hom}(K_\bullet(f), A) \qquad K^\bullet(f, M) := \operatorname{Hom}(K_\bullet(f), M).$$

La coomologia del complesso di Koszul è definita come segue

$$H^\bullet(f) := H^\bullet(K^\bullet(f)) \qquad H^\bullet(f, M) := H^\bullet(K^\bullet(f, M)).$$

*Osservazione* 27. Dal punto $(c)$ della proposizione 4.2.1 si derivano le seguenti relazioni:

$$\begin{gathered} Z_\bullet(f).Z_\bullet(f, M) \subseteq Z_\bullet(f, M) \\ Z_\bullet(f).B_\bullet(f, M) \subseteq B_\bullet(f, M) \\ B_\bullet(f).Z_\bullet(f, M) \subseteq B_\bullet(f, M). \end{gathered}$$

Dalle proprietà del prodotto tensoriale sappiamo che $K_\bullet(f) \cong K_\bullet(f, A)$. Dunque la prima relazione comporta che $Z_\bullet(f)$ sia una $A$-sottoalgebra graduata di $K_\bullet(f)$, mentre le ultime due relazioni mostrano che $B_\bullet(f)$ è un ideale (bilatero) di $Z_\bullet(f)$.

Da questa osservazione si ricava che l'omologia di Koszul non ha solo una struttura di $A$-modulo. Più precisamente:

**Proposizione 4.2.2.** *Sia $A$ un anello, $L$ un $A$-modulo e $f\colon L \longrightarrow A$ una mappa $A$-lineare. Allora*

*(a) l'omologia di Koszul $H_\bullet(f)$ è un $A$-algebra grado-commutativa;*
*(b) per ogni $A$-modulo $M$ l'omologia di Koszul $H_\bullet(f, M)$ a coefficienti in $M$ è un $H_\bullet(f)$-modulo in maniera naturale.*

*Dimostrazione.* (a). Per l'osservazione precedente $H_\bullet(f)$ è una $A$-algebra in quanto quoziente di $Z_\bullet(f)$ modulo l'ideale graduato $B_\bullet(f)$. In particolare, essendo $Z_\bullet(f)$ sottoalgebra di $K_\bullet(f)$ eredita da esso la proprietà di essere un'algebra grado-commutativa.
(b). Dalle relazioni enunciate nell'osservazione precedente si deduce che: $Z_\bullet(f, M)$ è uno $Z_\bullet(f)$-modulo, $B_\bullet(f, M)$ è un sottomodulo di $Z_\bullet(f)$ e $B_\bullet(f) \subset \operatorname{Ann}(Z_\bullet(f, M)/B_\bullet(f, M))$. Per l'osservazione 4 si ha la tesi. □

**Corollario 4.2.3.** *$H_\bullet(f, M)$ è un $A/I$-modulo con $I := \operatorname{Im}(f)$.*

*Dimostrazione.* Sappiamo dal teorema precedente che $H_\bullet(f, M)$ è un $H_\bullet(f)$-modulo. D'altra parte, per costruzione, $H_0(f) = Z_0(f)/B_0(f) = A/I$, da cui la tesi. □

In realtà si può dimostrare un risultato più generale.

**Proposizione 4.2.4.** *Sia $A$ un anello, $L$ un $A$-modulo e $f\colon L \to A$ una mappa $A$-lineare. Posto $I := \operatorname{Im} f$, si ha:*

1. *Per ogni $a \in I$ la moltiplicazione per $a$ su $K_\bullet(f)$ e $K_\bullet(f, M)$ è omotopicamente nulla.*
2. *In particolare $I$ annulla $H_\bullet(f)$ e $H_\bullet(f, M)$.*
3. *Se $I = A$ allora i complessi $K_\bullet(f)$ e $K_\bullet(f, M)$ sono omotopicamente nulli. In particolare, la loro omologia è nulla.*

*Dimostrazione.* (1) $a \in I \Rightarrow \exists x \in L$ tale che $a = f(x)$. Sia $\sigma_a$ la moltiplicazione per $a$ su $K_\bullet(f)$ e $\lambda_x$ la moltiplicazione a sinistra pe $x$ su $K_\bullet(f)$. Allora $\sigma_a = d_f \circ \lambda_x + \lambda_x \circ d_f$, cioè $\sigma_a$ è omotopicamente nulla su $K_\bullet(f)$. Infatti, dato $l \in \bigwedge^n L$ si ha

$$\begin{aligned} d_{n+1}(\lambda_x(l)) + \lambda_x(d_n(l)) &= d_{n+1}(x \wedge l) + x \wedge d_n(l) = \\ &= f(x) \wedge l - x \wedge d_n(l) + x \wedge d_n(l) = al = \sigma_a(l). \end{aligned}$$

La moltiplicazione per $a$ su $K_\bullet(f, M)$ è data da $\sigma_a \otimes \mathrm{id}_M$ da cui, per quanto appena detto, segue immediatamente che anche $\sigma_a \otimes \mathrm{id}_M$ è omotopicamente nulla su $K_\bullet(f, M)$.
(2) Conseguenza della proposizione 1.2.1.
(3) Basta considerare $a = 1$ e applicare (a) e (b). □

Premettiamo la definizione di prodotto tensoriale di complessi.

**Definizione 4.5** (**Prodotto tensoriale di complessi**). Dati due complessi di $A$-moduli $(K_1, d_1)$ e $(K_2, d_2)$, il loro prodotto tensoriale è il complesso di $A$-moduli $(K_1 \otimes K_2)$ le cui componenti omogenee sono definite da

$$(K_1 \otimes K_2)_n := \bigoplus_{i+j=n} (K_1)_i \otimes (K_2)_j$$

e per ogni $x \otimes y \in (K_1)_i \otimes (K_2)_{n-i}$ il differenziale è dato da

$$(d_1 \otimes d_2)(x \otimes y) := d_1(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes d_2(y).$$

*Osservazione* 28. Si verifica svolgendo i conti che se $K_1$ e $K_2$ sono delle DG-algebre anche $K_1 \otimes K_2$ col differenziale sopra definito è una DG-algebra, cioè $d_1 \otimes d_2$ è un'antiderivazione.

La proposizione che segue mostra che il prodotto tensoriale di due complessi di Koszul è ancora un complesso di Koszul. Tale isomorfismo risulterà di particolare importanza quando ci occuperemo di complessi di Koszul di successioni regolari.

**Proposizione 4.2.5.** *Siano $L_1$ ed $L_2$ due $A$-moduli e $f_1 \colon L_1 \to A$ ed $f_2 \colon L_2 \to A$ due mappe $A$-lineari. Sia poi $f \colon L_1 \oplus L_2 \to A$ definita da $f(x_1 \oplus x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ la forma lineare indotta da $f_1$ ed $f_2$. Allora si ha il seguente omomorfismo di complessi:*

$$K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2) \cong K_\bullet(f)$$

*Dimostrazione.* Sia $L = L_1 \oplus L_2$. Sappiamo già dalla proposizione 4.1.3 che le due strutture sono isomorfe come $A$-algebre grado-commutative, cioè

$$(\bigwedge L_1) \otimes (\bigwedge L_2) \cong \bigwedge L.$$

Rimane da dimostrare che i differenziali coincidono. Abbiamo visto che il differenziale $d_f$ su $\bigwedge L$ è costruito estendendo $f$ ad un'antiderivazione. D'altra parte, dall'osservazione 28 sappiamo che $K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2)$, come prodotto di DG-algebre, è a sua volta una DG-algebra e il differenziale $d_1 \otimes d_2$ coincide con $d_f$ sulle componenti omogenee di grado uno. Poichè un'antiderivazione è determinata univocamente dai suoi valori sulle componenti omogenee di grado uno, i due differenziali devono coincidere. Dunque $K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2) \cong K_\bullet(f)$ come complessi. □

Un argomento analogo si può utilizzare per mostrare che i complessi di Koszul "commutano" con le estensioni di anelli e lo stesso accade per l'omologia di Koszul nel caso in cui l'estensione sia piatta.

**Proposizione 4.2.6.** *Sia $A$ un anello, $L$ un $A$-modulo ed $f \colon L \to A$ una mappa $A$-lineare. Supponiamo che $\varphi \colon A \to B$ sia un omomorfismo di anelli. Allora*

*(i)* $K_\bullet(f) \otimes_A B \cong K_\bullet(f \otimes \mathrm{id}_B)$.

*(ii) Se $\varphi$ è piatto, allora $H_\bullet(f, M) \otimes B \cong H_\bullet(f \otimes B, M \otimes B)$ per ogni $A$-modulo $M$.*

*Dimostrazione.* $(i)$ C'è un isomorfismo naturale $(\bigwedge L) \otimes B \cong \bigwedge(L \otimes B)$ e $d_f$ e $d_{f\otimes \mathrm{id}_B}$ sono antiderivazioni che coincidono in grado 1. Ne segue, come nella dimostrazione precedente, che i due complessi di Koszul sono isomorfi. $(ii)$ Sia $C_\bullet$ un complesso su $A$ e sia $B$ piatto su $A$. Allora, poichè il prodotto tensoriale per un modulo piatto preserva l'esattezza, si ha che

$$H_\bullet(C_\bullet \otimes B) = H_\bullet(C_\bullet) \otimes B.$$

□

*Osservazione* 29. Siano $L$ ed $L'$ due $A$-moduli e siano

$$f\colon L \to A \qquad \text{ed} \qquad f'\colon L' \to A$$

due forme lineari. Sappiamo che ogni $A$-omomorfismo $\varphi\colon L \to L'$ si estende ad un omomorfismo $\bigwedge \varphi\colon \bigwedge L \to \bigwedge L'$ di $A$-algebre. Se $f = f' \circ \varphi$ allora $\bigwedge \varphi\colon K_\bullet(f) \to K_\bullet(f')$ è un omomorfismo di complessi di Koszul.

### 4.2.2 Complessi di Koszul di successioni

Studiamo il caso particolare di complessi di Koszul definiti da successioni di elementi di $A$. Per capire l'idea che è alla base della costruzione di tali complessi di Koszul, partiamo dal seguente esempio.

**Esempio 5.** Sia $A$ una anello, $x$ un elemento di $A$ ed $M$ un $A$-modulo. Consideriamo l'omotetia $M \xrightarrow{\cdot x} M$. Allora

$$\begin{aligned} \ker(\cdot x) &= \{m \in M \mid xm = 0\} = (0 :_M x) \\ \mathrm{Im}(\cdot x) &= xM \\ \mathrm{Coker}(\cdot x) &= M/xM \end{aligned}$$

Si osserva dunque che l'iniettività e la suriettività dell'omotetia sono connesse alla regolarità dell'elemento $x$. In particolare:

- l'omotetia è iniettiva se e solo se $x$ è debolmente $M$-regolare (cioè $x$ non è uno zero-divisore su $M$).
- l'omotetia è suriettiva se e solo se $xM = M$.
- l'omotetia è iniettiva ma non suriettiva se e solo se $x$ è $M$-regolare (ricordiamo che questo vuol dire che $x$ non è zero divisore su $M$ e $xM \neq M$).

Consideriamo allora il seguente complesso centrato in grado 0 ed 1:

$$K_\bullet(\mathbf{x}, M)\colon \quad 0 \to M \xrightarrow{\cdot \mathbf{x}} M \to 0$$

Questo sarà quello che chiameremo complesso di Koszul di $x$ a coefficienti in $M$. Si hanno i seguenti isomorfismi per i moduli di omologia:

$$H_0(K_\bullet(x, M)) \cong M/xM \qquad H_1(K_\bullet(x, M)) \cong (0 :_M x)$$

da cui segue:

$$x \text{ è } M\text{-regolare} \Leftrightarrow H_0(K_\bullet(x,M)) \neq 0 \text{ e } H_1(K_\bullet(x,M)) = 0.$$

La costruzione vista in questo esempio si può generalizzare ad una successione $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$. Questo ci consentirà di ricavare informazioni sulla regolarità della successione a partire dall'omologia del complesso.

Sia $L$ un $A$-modulo libero e finitamente generato con base $e_1, \dots, e_n$. Una forma lineare $f\colon L \to A$ è univocamente determintata dai valori $x_i = f(e_i)$ che assume sulla base. Viceversa, data una successione $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ possiamo sempre definire una forma lineare $f$ su $L$ tale che $f(e_i) = x_i$. Definiamo

$$K_\bullet(\mathbf{x}) := K_\bullet(f).$$

il *complesso di Koszul della successione* $\mathbf{x}$.

*Osservazione* 30. Per ogni $i = 1, \dots, n$ poniamo $f_i\colon A \to A$, $f_i(1) = x_i$. Allora $f\colon L \cong A^n \to A$ definita come in precedenza (cioè $f(e_i) = x_i$ sui vettori di base e poi estesa per linearità), è data dalla somma degli $f_i$. In questo modo la proposizione 4.2.5 diventa

$$K_\bullet(\mathbf{x}) \cong K_\bullet(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K_\bullet(x_n) \cong K_\bullet(x_1) \otimes \dots \otimes K_\bullet(x_n).$$

Consideriamo ora $\pi$ una permutazione su $\{1, \dots, n\}$ e sia $\varphi\colon L \to L$ la mappa $A$-lineare definita permutando gli elementi della base, cioè $\varphi(e_i) = e_{\pi(i)}$. Posto $f' = f \circ \varphi$, risulta $f'(e_i) = x_{\pi(i)}$ e dall'osservazione 29 sappiamo che $K_\bullet(f) \cong K_\bullet(f')$. Questo mostra che il complesso di Koszul di una successione $\mathbf{x}$ è invariante rispetto alle permutazioni degli elementi della successione.

Essendo $L$ un $A$-modulo libero e finito con base $e_1, \dots, e_n$, segue dalla proposizione 4.1.3,(4) che le componenti omogenee del complesso di Koszul della successione $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ sono date da

$$K_i(\mathbf{x}) = \bigwedge^i L \cong A^{\binom{n}{i}}$$

e una base è data dagli elementi

$$e_I, \quad I \subset \{1, \dots, n\}, \quad |I| = i.$$

Più in generale:

$$K_i(\mathbf{x}, M) = \bigwedge^i L \otimes M \cong A^{\binom{n}{i}} \otimes M \cong M^{\binom{n}{i}}.$$

**Proposizione 4.2.7.** *Sia $I = (\mathbf{x})$ e $F_\bullet$ una risoluzione libera di $A/I$. Allora esiste un omomorfismo di complessi $\varphi\colon K_\bullet(\mathbf{x}) \to F_\bullet$, unico a meno di omotopia, che solleva l'identità su $A/I$, cioè i seguenti diagrammi commutano:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
K_\bullet\colon & \cdots \longrightarrow & K_{i+1}(\mathbf{x}) & \xrightarrow{d} & K_i(\mathbf{x}) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & K_0(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\pi} & A/I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
F_\bullet\colon & \cdots \longrightarrow & F_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & F_i & \xrightarrow{f_i} & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{f_0} & A/I & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

*dove* $K_i(\mathbf{x}) = \bigwedge^i L$*,* $\pi$ *è la proiezione sul quoziente* $H_0(\mathbf{x}) = A/I$ *e* $d$ *è il differenziale del complesso di Koszul.*

*Dimostrazione.* Essendo $F_0 \twoheadrightarrow A/I$ suriettiva ($F_\bullet$ è una risoluzione di $A/I$ dunque è una successione esatta), per la lifting property dei moduli liberi (vedi l'osservazione 7) la mappa $K_0 \xrightarrow{\pi} A/I \xrightarrow{id} A/I$ si solleva ad una mappa $K_0(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi_0} F_0$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\pi} & A/I \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ F_0 & \xrightarrow{f_0} & A/I \ . \end{array}$$

Procediamo per induzione: supponiamo di aver costruito delle mappe $K_i(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi_i} F_i$ per $i \leq n$ che rendono commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccccccccc} K_{n+1}(\mathbf{x}) & \xrightarrow{d} & K_n(\mathbf{x}) & \xrightarrow{d} & K_{n-1}(\mathbf{x}) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & K_0(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\pi} & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ F_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & F_n & \xrightarrow{f_n} & F_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{f_0} & A/I & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e cerchiamo di costruire una mappa $K_{n+1}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} F_{n+1}$ con le proprietà richieste. Per prima cosa osserviamo che la composizione

$$K_{n+1}(\mathbf{x}) \xrightarrow{d} K_n(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi_n} F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1}$$

è uguale a

$$K_{n+1}(\mathbf{x}) \xrightarrow{d} K_n(\mathbf{x}) \xrightarrow{d} K_{n-1}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} F_{n-1}$$

perché per ipotesi induttiva i diagrammi prima di $n$ commutano. D'altra parte quest'ultima è la mappa nulla perché $d \circ d = 0$, essendo la composizione consecutiva di due differenziali del complesso $K_\bullet(\mathbf{x})$. In particolare ne segue che $\mathrm{Im}(\varphi_n \circ d) \subseteq \ker(f_n) = \mathrm{Im}(f_{n+1})$, per l'esattezza della successione $F_\bullet$. Consideriamo allora il diagramma esatto

$$\begin{array}{ccccc} & & K_{n+1}(\mathbf{x}) & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n \circ d} & & \\ F_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & \mathrm{Im}(f_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Di nuovo dall'osservazione 7 segue che è possibile sollevare la mappa $\varphi_n \circ d$ ad una mappa $K_{n+1}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} F_{n+1}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1}(\mathbf{x}) & \xrightarrow{d} & K_n(\mathbf{x}) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} \\ F_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & F_n \ . \end{array}$$

Concludiamo la dimostrazione mostrando che l'omomorfismo di complessi che abbiamo costruito è unico a meno di omotopia. Siano $\varphi$ e $\phi$ due omomorfismi di complessi come nell'enunciato del teorema. Cominciamo col definire la mappa $s_0 : K_0(\mathbf{x}) \to F_1$ tale che $s_0 \circ f_1 = \varphi - \phi$.
La mappa $s_0$ si ottiene ragionando analogamente a quanto fatto prima osservando che $\mathrm{Im}(\varphi - \phi) \subseteq \ker f_0 = \mathrm{Im}(f_1)$ e applicando l'osservazione 7. Procediamo di nuovo per induzione: supponiamo di aver definito le mappe di omotopia $s_i \colon K_i(\mathbf{x}) \to F_{i+1}$ per $i \leqslant n$ tali che $f_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d = \varphi - \phi$ e cerchiamo di costruire $s_{n+1} \colon K_{n+1}(\mathbf{x}) \to F_{n+2}$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& K_{n+1}(\mathbf{x}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "\phi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & K_n(\mathbf{x}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "\phi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] \arrow[dl, "s_n"'] & K_{n-1}(\mathbf{x}) \arrow[d, shift right, "\phi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] \arrow[dl, "s_{n-1}"] \\
F_{n+2} \arrow[r, "f_{n+2}"] & F_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & F_n \arrow[r, "f_n"] & F_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Vogliamo definire $s_{n+1} \colon K_{n+1}(\mathbf{x}) \to F_{n+2}$ in modo tale che

$$f_{n+2} \circ s_{n+1} = \varphi - \phi - s_n \circ d.$$

Per ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned}
f_{n+1} \circ (\varphi - \phi - s_n \circ d) &= f_{n+1} \circ \varphi - f_{n+1} \circ \phi - f_{n+1} \circ (s_n \circ d) \\
&= \varphi \circ d - \phi \circ d - (\varphi - \phi - s_{n-1} \circ d) \circ d = 0
\end{aligned}$$

Questo mostra che $\mathrm{Im}(\varphi - \phi - s_n \circ d) \subseteq \ker f_{n+1} = \mathrm{Im} f_{n+2}$. Dunque possiamo considerare il diagramma esatto

$$\begin{tikzcd}
& K_{n+1}(\mathbf{x}) \arrow[d, "\varphi-\phi-s_n\circ d"] & \\
F_{n+2} \arrow[r, "f_{n+1}"] & \mathrm{Im}(f_{n+2}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e ricorrendo ancora una volta all'osservazione 7 si riesce a costruire $s_{n+1}$ con la proprietà richiesta. Questo mostra che $\varphi$ e $\phi$ sono omomorfismi di catene omotope e conclude la dimostrazione.

$\square$

Come immediata conseguenza della precedente proposizione si ha:

**Corollario 4.2.8.** *Sia $A$ un anello, $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una successione in $A$ e $I = (\mathbf{x})$. Allora per ogni $i$ esistono degli omomorfismi naturali*

$$H_i(\mathbf{x}, M) \to \mathrm{Tor}_i^A(A/I, M) \quad e \quad \mathrm{Ext}_A^i(A/I, M) \to H^i(\mathbf{x}, M).$$

*Dimostrazione.* La mappa $\varphi$ introdotta nella dimostrazione della proposizione precedente induce gli omomorfismi di complessi

$$\varphi \otimes \mathrm{id}_M \colon K_\bullet(\mathbf{x}, M) \to F_\bullet \otimes M \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}(\varphi, M) \colon \mathrm{Hom}(F_\bullet, M) \to K^\bullet(\mathbf{x}, M).$$

Tali omomorfismi a loro volta inducono degli omomorfismi sui moduli di omologia, da cui la tesi (si vedano l'osservazione 15 e la proposizione 1.2.1). □

Vedremo più avanti che se la successione è regolare, il complesso di Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$ è una risoluzione libera di $A/I$, cioè gli omomorfismi del corollario precedente sono in realtà isomorfismi.

Altra immediata conseguenza del fatto che le componenti di $K_\bullet(\mathbf{x})$ sono moduli liberi e quindi piatti è che il complesso di Koszul è un funtore esatto, cioè:

**Proposizione 4.2.9.** *Sia $A$ un anello, $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ una successione in $A$ e sia $0 \to U \to M \to N \to 0$ una successione esatta di $A$-moduli. Allora la successione indotta*

$$0 \to K_\bullet(\mathbf{x}, U) \to K_\bullet(\mathbf{x}, M) \to K_\bullet(\mathbf{x}, N) \to 0$$

*è un complesso di catene esatto. In particolare, si ha la seguente successione esatta lunga di moduli di omologia*

$$\cdots \to H_i(\mathbf{x}, U) \to H_i(\mathbf{x}, M) \to H_i(\mathbf{x}, N) \to H_{i-1}(\mathbf{x}, U) \to \cdots .$$

Fino ad ora ci siamo limitati a tensorizzare il complesso di Koszul con un $A$-modulo $M$. Si può estendere tale costruzione ai complessi di catene: si considera un complesso di catene $C_\bullet$ e si definisce *l'omologia di Koszul di* $C_\bullet$ come l'omologia del prodotto tensoriale di complessi $K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes C_\bullet$. Focalizzamo ora la nostra attenzione sul caso in cui $\mathbf{x} = x$, cioè la successione è in realtà formata da un solo elemento.

**Proposizione 4.2.10.** *Sia $A$ un anello e $x \in A$.*

1. *Per ogni complesso $C_\bullet$ di $A$-moduli si ha una successione esatta*

$$0 \to C_\bullet \to C_\bullet \otimes K_\bullet(x) \to C_\bullet(-1) \to 0$$

2. *La successione esatta lunga indotta sull'omologia è*

$$\cdots \to H_i(C_\bullet) \to H_i(C_\bullet \otimes K_\bullet(x)) \to H_{i-1}(C_\bullet) \xrightarrow{(-1)^{i-1}x} H_{i-1}(C_\bullet) \to \cdots$$

3. *Inoltre, se $x$ è $C_\bullet$-regolare, c'è un isomorfismo*

$$H_\bullet(C_\bullet \otimes K_\bullet(x)) \cong H_\bullet(C_\bullet / xC_\bullet).$$

*dove con $C_\bullet(-1)$ indichiamo il complesso $C_\bullet$ "shiftato"di un grado, cioè $C_i(-1) = C_{i-1}$.*

*Dimostrazione.* (1). Osserviamo che in $K_\bullet(x)$ le uniche componenti non nulle sono quelle di grado 0 ed 1 e il complesso di Koszul in questo caso è semplicemente $0 \to A \xrightarrow{\cdot x} A \to 0$. Per la definizione di prodotto tensoriale di complessi, la $i$-esima componente graduata di $C_\bullet \otimes K_\bullet(x)$ è data da $(C_i \otimes A) \oplus (C_{i-1} \otimes A) = C_i \oplus C_{i-1}$ e il differenziale $d\colon C_i \oplus C_{i-1} \to C_{i-1} \oplus C_{i-2}$ è definito dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \partial & (-1)^{i-1}x \\ 0 & \partial \end{bmatrix}$$

in cui $\partial$ denota il differenziale del complesso $C_\bullet$. Chiaramente le successioni

$$0 \to C_i \xrightarrow{l} C_i \oplus C_{i-1} \xrightarrow{\pi} C_{i-1} \to 0,$$

dove $l$ e $\pi$ sono rispettivamente la mappa di embedding e di proiezione, sono esatte in ogni grado. Inoltre tali mappe formano effettivamente dei morfismi di complessi, infatti è immediato verificare che i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "l"] & C_i \arrow[d, "l"] \\ C_{i+1} \oplus C_i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\pi"] & C_i \oplus C_{i-1} \arrow[d, "\pi"] \\ C_i \arrow[r, "\partial"] & C_{i-1} \end{tikzcd}$$

(2). Sia $z \in C_{i-1}$ con $\partial(z) = 0$ e scriviamo esplicitamente il morfismo di connessione:

$$z \xmapsto{\pi^{-1}} (0, z) \xmapsto{d} ((-1)^{i-1}xz, 0) \xmapsto{l^{-1}} (-1)^{i-1}xz.$$

Quindi il morfismo di connessione $H_i(C_\bullet(-1)) = H_{i-1}(C_\bullet) \to H_{i-1}(C_\bullet)$ è la moltiplicazione per $(-1)^{i-1}x$.

(3). Un morfismo di complessi $C_\bullet \otimes K_\bullet(x) \to C_\bullet/xC_\bullet$ è dato in modo naturale dalle mappe $C_i \oplus C_{i+1} \to C_i \to C_i/xC_i$.

Verifichiamo che nell'ipotesi che $x$ sia $C_\bullet$-regolare, la mappa indotta da tale morfismo sull' omologia è suriettiva ed iniettiva. Sia $z \in C_i$ tale che $\partial(z) \in xC_{i-1}$, cioè $\bar{z} \in C_i/xC_i$ è un ciclo. Allora esiste $z' \in C_{i-1}$ con $\partial(z) = xz'$ da cui segue che $x\partial(z') = \partial(\partial(z)) = 0$. Dalla $C_\bullet$-regolarità di $x$, si ha $\partial(z') = 0$. Osserviamo ora che $d(z, (-1)^{i-1}z') = (0, (-1)^i\partial(z')) = (0, 0)$, cioè $(z, (-1)^i z')$ è un ciclo che viene mappato nel ciclo $\bar{z} \in C_i/xC_i$. Per l'iniettività si ragiona in modo analogo. □

*Osservazione* 31. Siano $A$ un anello, $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una successione in $A$ e $M$ un $A$-modulo. Poniamo $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$. Applicando la proposizione precedente al complesso $C_\bullet = K_\bullet(\mathbf{x}', M)$ si ottengono i seguenti isomorfismi:

$$K_\bullet(\mathbf{x}', M) \otimes K_\bullet(x_n) \cong K_\bullet(\mathbf{x}') \otimes M \otimes K_\bullet(x_n) \cong K_\bullet(\mathbf{x}') \otimes K_\bullet(x_n) \otimes M \cong K_\bullet(\mathbf{x}, M)$$

Pertanto si ottiene la seguente successione esatta di moduli di omologia:

$$\cdots \xrightarrow{(-1)^i x_n} H_i(\mathbf{x}', M) \to H_i(\mathbf{x}, M) \to H_{i-1}(\mathbf{x}', M) \to$$
$$\xrightarrow{(-1)^{i-1} x_n} H_{i-1}(\mathbf{x}', M) \to \cdots$$

**Corollario 4.2.11.** *Siano $A$ un anello, $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ una successione in $A$ e $M$ un $A$-modulo. Sia $p \leq n$ e poniamo $\mathbf{x}' = x_1, \dots, x_p$ e $\mathbf{x}'' = x_{p+1}, \dots, x_n$. Se $\mathbf{x}'$ è debolmente $M$-regolare, allora*

$$H_\bullet(\mathbf{x}, M) \cong H_\bullet(\mathbf{x}'', M/\mathbf{x}'M)$$

*Dimostrazione.* É sufficiente provare l'asserto per $p = 1$; il caso generale segue ragionando induttivamente. Essendo $\mathbf{x}' = x_1$ $M$-regolare per ipotesi e $K_\bullet(\mathbf{x}'')$ libero, dunque piatto, segue dalla proposizione 3.1.1 che $x_1$ è $K_\bullet(\mathbf{x}'', M)$-regolare. Possiamo allora considerare la permutazione della successione $\mathbf{x}$ data da $x_2, \dots, x_n, x_1$ e applicare il punto (3) della proposizione 4.2.10:

$$H_\bullet(\mathbf{x}, M) \cong H_\bullet(K_\bullet(\mathbf{x}'', M)/x_1 K_\bullet(\mathbf{x}'', M)) \cong H_\bullet(\mathbf{x}'', M/x_1 M)$$

Per l'ultimo isomorfismo si veda la proposizione 1.1.16, $(v)$. □

Come immediata conseguenza dell'osservazione 31 e del corollario 4.2.11, si ottiene il seguente risultato che lega l'omologia del complesso di Koszul alle successioni regolari.

**Proposizione 4.2.12.** *Siano $A$ un anello, $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ una successione in $A$ e $M$ un $A$-modulo. Se i primi $p$ elementi di $\mathbf{x}$ formano una $M$-successione, allora $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ per ogni $i = n-p+1, \dots, n$. In particolare:*

1. *Se $\mathbf{x}$ è una successione $M$-regolare, allora $K_\bullet(\mathbf{x}, M)$ è aciclico, cioè $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ per ogni $i > 0$.*
2. *Se $\mathbf{x}$ è una successione $A$-regolare, allora $K_\bullet(\mathbf{x})$ è una risoluzione libera di $A/(\mathbf{x})$.*

*Dimostrazione.* Posto $\mathbf{x}' = x_1, \dots, x_p$ e $\mathbf{x}'' = x_{p+1}, \dots, x_n$, per il corollario 4.2.11 si ha $H_i(\mathbf{x}, M) \cong H_i(\mathbf{x}'', M/\mathbf{x}'M)$. Poichè $\mathbf{x}''$ è una successione di lunghezza $n - p$, si ha la tesi. □

In realtà, come vedremo nel prossimo paragrafo, vale un risultato ancor più generale.

### 4.2.3 Complessi di Koszul e profondità

La conclusione del paragrafo precedente mostra la connessione che c'è tra le successioni regolari e l'esattezza del complesso di Koszul corrispondente. É bene osservare che la condizione $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ è indipendente dall'ordine della successione in quanto si è visto che il complesso di Koszul è invariante rispetto alle permutazioni della successione. Tuttavia sappiamo che in generale la regolarità delle successioni dipende dall'ordine. Questo suggerisce che il viceversa della proposizione 4.2.12 valga solo sotto ipotesi aggiuntive. Cominciamo mostrando una generalizzazione del risultato ottenuto alla fine del paragrafo precedente. A tal scopo premettiamo una proposizione riguardante una notevole proprietà dei complessi di Koszul, la cui importanza prescinde dall'uso limitato che ne faremo in questa tesi.

**Teorema 4.2.13 (Auto-dualità).** *Sia $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una successione in un anello $A$.*

*(a) Il complesso di Koszul della successione $\mathbf{x}$ è isomorfo al suo duale, cioè: $K_\bullet(\mathbf{x}) \cong K^\bullet(\mathbf{x})$.*

*(b) Più in generale, dato un $A$-modulo $M$ si ha $K_\bullet(\mathbf{x}, M) \cong K^\bullet(\mathbf{x}, M)$.*

*(c) $H_i(\mathbf{x}, M) \cong H^{n-i}(\mathbf{x}, M)$ per $i = 0, \ldots, n$.*

*Dimostrazione.* Si veda [BH], proposizione 1.6.10. □

**Proposizione 4.2.14.** *Sia $A$ un anello, $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una successione in $A$ e $M$ un $A$-modulo. Se $I = (\mathbf{x})$ contiene una $M$-successione debole $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_m$, allora*

$$H_{n+1-i}(\mathbf{x}, M) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$
$$H_{n-m}(\mathbf{x}, M) \cong \mathrm{Hom}_A(A/I, M/\mathbf{y}M) \cong \mathrm{Ext}^m_A(A/I, M)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è per induzione su $m$. Se $m = 0$ si tratta di dimostrare che

$$H_n(\mathbf{x}, M) = \mathrm{Hom}(A/I, M).$$

Dalla auto-dualità del complesso di Koszul (teorema 4.2.13) sappiamo che $H_n(\mathbf{x}, M) \cong H^0(\mathbf{x}, M)$. D'altra parte, essendo la successione

$$A^n \to A \to A/I \to 0$$

una successione esatta, segue dalla proposizione 1.1.13 che anche la successione

$$0 \to \mathrm{Hom}(A/I, M) \to \mathrm{Hom}(A, M) \to \mathrm{Hom}(A^n, M)$$

è esatta. Pertanto $H^0(\mathbf{x}, M) \cong \mathrm{Hom}(A/I, M)$.
Sia ora $m \geq 1$ e poniamo $\bar{M} = M/y_1M$. La successione esatta

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot y_1} M \to \bar{M} \to 0$$

induce (vedi proposizione 4.2.9) la successione esatta lunga

$$\cdots \to H_i(\mathbf{x}, M) \xrightarrow{\cdot y_1} H_i(\mathbf{x}, M) \to H_i(\mathbf{x}, \bar{M}) \to H_{i-1}(\mathbf{x}, M) \xrightarrow{\cdot y_1} \cdots$$

Dalla proposizione 4.2.4 sappiamo che $y_1$ annulla $H_i(\mathbf{x}, M)$ per ogni $i$, dunque la successione precedente si spezza in successioni esatte corte del tipo

$$0 \to H_i(\mathbf{x}, M) \to H_i(\mathbf{x}, \bar{M}) \to H_{i-1}(\mathbf{x}, M) \to 0.$$

Poichè $y_2, \ldots, y_m$ è una successione debolmente $\bar{M}$-regolare, applicando l'ipotesi induttiva si ha la tesi. □

Vediamo sotto quali ipotesi vale anche il viceversa. Questo ci consentirà, come vedremo anche in alcuni esempi riportati nel capitolo successivo, di calcolare il grado di un ideale mediante l'omologia del complesso di Koszul. Il teorema che segue mostra la proprietà del complesso di Koszul di rilevare la lunghezza delle $M$-successioni massimali. Si è soliti riferirsi a tale proprietà con il nome di *depth-sensitivity* del complesso di Koszul.

**Teorema 4.2.15 (Depth-sensitivity).** *Sia $A$ un anello Noetheriano ed $M$ un $A$-modulo finitamente generato. Supponiamo che $I$ sia un ideale in $A$ generato da $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$. Allora*

*(a) $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$ se e solo se $M = IM$.*

*(b) Supponiamo che $H_i(\mathbf{x}, M) \neq 0$ per qualche $i$ e sia*

$$h = \max\{i \colon H_i(\mathbf{x}, M) \neq 0\}.$$

*Allora ogni $M$-successione massimale in $I$ ha lunghezza $n - h$, ossia*

$$\operatorname{depth}_I(M) = n - h.$$

*Dimostrazione.* ($a$) Supponiamo che $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$. In particolare si ha $H_0(\mathbf{x}, M) \cong M/IM = 0$, cioè $M = IM$. Viceversa, supponiamo che $M = IM$ e sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo. Per la proposizione 4.2.6 si ha che

$$(H_i(\mathbf{x}, M))_{\mathfrak{p}} \cong H_i(\mathbf{x}, M_{\mathfrak{p}})$$

dove nel secondo membro dell'uguaglianza $\mathbf{x}$ è considerata come successione in $A_{\mathfrak{p}}$. Se $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ allora $H_i(\mathbf{x}, M_{\mathfrak{p}}) = 0$ (proposizione 4.2.4). Se $I \subset \mathfrak{p}$, allora $M_{\mathfrak{p}} = 0$ per il lemma di Nakayama. Dunque anche in questo caso si ha $H_i(\mathbf{x}, M_{\mathfrak{p}}) = 0$.
($b$) Per la parte ($a$) sappiamo che $M \neq IM$. Sia $\mathbf{y}$ una $M$-successione massimale in $I$, allora $\mathbf{y}$ ha lunghezza $g = \operatorname{depth}_I(M)$. Segue dalla proposizione 4.2.14 e dal teorema di Rees (teorema 3.2.3) che $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ per ogni $i = n - g + 1, \dots, n$ e $H_{n-g}(\mathbf{x}, M) \cong \operatorname{Ext}^g_A(A/I, M) \neq 0$. Questo mostra che $n - g = h$, cioè $\operatorname{depth}_I(M) = n - h$. □

*Osservazione* 32. Osserviamo che il punto ($b$) del teorema precedente può essere dimostrato senza ricorrere al teorema di Rees. Supponiamo che $\mathbf{y}$ sia una $M$-successione massimale in $I$ di lunghezza $g$. Per la proposizione 4.2.14 si ha che $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ per ogni $i = n - g + 1, \dots, n$ e

$$H_{n-g}(\mathbf{x}, M) \cong \operatorname{Hom}(A/I, M/\mathbf{y}M).$$

Poichè $I$ è un ideale che contiene solo zero-divisori di $M/\mathbf{y}M$, segue dal lemma 3.2.1 che $H_{n-g}(\mathbf{x}, M) \neq 0$.
Questa dimostrazione è indipendente dal lemma 3.2.2 e mostra nuovamente che tutte le $M$-successioni massimali in $I$ devono avere la stessa lunghezza. Dunque si potrebbe dare una definizione equivalente di grado utilizzando il teorema 4.2.15.

Per concludere analizziamo il caso particolare di anelli Noetheriani locali.

**Lemma 4.2.16.** *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello Noetheriano locale, $M$ un $A$-modulo finitamente generato e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una successione in $\mathfrak{m}$. Poniamo $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$. Se $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ allora $H_i(\mathbf{x}', M) = 0$.*

*Dimostrazione.* Per la proposizione 4.2.5 si ha $K_\bullet(\mathbf{x}) \cong K_\bullet(\mathbf{x}') \otimes K_\bullet(x_n)$ e l'osservazione 31 ci dà la seguente successione esatta

$$H_i(\mathbf{x}', M) \xrightarrow{\cdot(-1)^i x_n} H_i(\mathbf{x}', M) \to H_i(\mathbf{x}, M).$$

Tutti questi moduli sono finitamente generati. Se $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$, la moltiplicazione per $(-1)^i x_n$ è suriettiva, cioè $(-1)^i x_n H_i(\mathbf{x}', M) = H_i(\mathbf{x}', M)$. Segue dal lemma di Nakayama che $H_i(\mathbf{x}', M) = 0$. □

Questo lemma ci consente di rovesciare la proposizione 4.2.12 nel caso di anelli Noetheriani locali.

**Proposizione 4.2.17.** *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello Noetheriano locale, $M \neq 0$ un $A$-modulo finitamente generato e $I \subset \mathfrak{m}$ l'ideale generato da $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$. Sono equivalenti:*

*(i)* $\operatorname{depth}_I(M) = n$;

*(ii)* $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$ *per ogni* $i > 0$;

*(iii)* $H_1(\mathbf{x}, M) = 0$;

*(iv)* $\mathbf{x}$ *è una $M$-successione.*

*Dimostrazione.* $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Segue banalmente dalla proposizione 4.2.14 e dalla proprietà di depth-sensitivity (Teorema 4.2.15).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ovvia.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Procediamo per induzione su $n$. Sia $n = 1$ e $I = (x)$. Per il lemma di Nakayama, essendo $M \neq 0$, deve essere $M \neq xM$. Allora, poichè per ipotesi $H_1(x, M) = 0$, segue dal teorema 4.2.15 che $H_0(x, M) \neq 0$ e $\operatorname{depth}_I(M) = 1$, cioè $x$ è regolare su $M$. Supponiamo ora che l'enunciato sia vero per successioni di lunghezza $n-1$ e dimostriamolo per successioni di lunghezza $n$. Per il lemma precedente, essendo per ipotesi $H_1(\mathbf{x}, M) = 0$, deve essere $H_1(\mathbf{x}', M) = 0$. Segue allora dall'ipotesi induttiva che $\mathbf{x}'$ è $M$-regolare. In particolare $M/\mathbf{x}'M \neq 0$. Sappiamo dal corollario 4.2.11 che $H_1(\mathbf{x}, M) \cong H_1(x_n, M/\mathbf{x}'M)$. Dal caso $n = 1$ si ha che $x_n$ è regolare su $M/\mathbf{x}'M$. Dunque la successione $\mathbf{x}$ è $M$-regolare.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Poichè $\mathbf{x}$ è una $M$-successione in $I$, certamente $\operatorname{depth}_I(M) \geq n$. D'altra parte per 4.2.15 si ha $\operatorname{depth}_I(M) = n - h \leq n$.

□

## 4.3 Teorema di Serre

Sia $A$ un anello graduato con $A_0$ Artiniano e sia $M$ un $A$-modulo graduato finitamente generato. Abbiamo definito alla fine del secondo capitolo la molteplicità di $M$ rispetto ad un ideale di definizione $I$ e lo abbiamo denotato con $e(I, M)$.
Serre ha dimostrato che se consideriamo $I$ un ideale generato da una successione $\mathbf{x}$, sotto opportune ipotesi sulla successione, la molteplicità di $M$ rispetto ad $I$ è legata all'omologia del complesso di Koszul di $\mathbf{x}$ a coefficienti in $M$.

Vale il seguente teorema.

**Teorema 4.3.1 (Serre).** *Sia $A$ un anello Noetheriano e sia $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ una successione di elementi di $A$ contenuti nel radicale di Jacobson di $A$ e sia $I$ l'ideale generato da $\mathbf{x}$. Se $M$ è un $A$-modulo finitamente generato tale che $M/\mathbf{x}M$ abbia lunghezza finita, allora:*

1. *i moduli $H_p(\mathbf{x}, M)$ sono di lunghezza finita, diciamo $h_p(\mathbf{x}, M)$;*
2. *se $\chi(\mathbf{x}, M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p h_p(\mathbf{x}, M)$, allora $\chi(\mathbf{x}, M) = e(I, M)$.*

*Dimostrazione.* Si veda [SE], capitolo IV–12. □

*Osservazione* 33. Il teorema di Serre continua a valere nel caso di algebre graduate standard (cioè finitamente generate in grado 1) su un campo $k$. Infatti, nella dimostrazione del teorema, l'unico punto in cui si fa uso dell'ipotesi che la successione sia nel radicale di Jacobson è per dimostrare che una certa filtrazione è separata. Questo viene fatto utilizzando il teorema di intersezione di Krull di cui esiste anche una versione graduata.

# Capitolo 5

# Alcuni esempi

Riportiamo in questo capitolo alcuni esempi di complessi di Koszul. Cominciamo col costruire esplicitamente il complesso di Koszul di successioni di lunghezza $n = 2$ ed $n = 3$.

**Esempio 6 (n = 2).** Sia $\mathbf{x} = x_1, x_2$. Sappiamo che

$$K_0(x_1, x_2) = A \qquad K_1(x_1, x_2) = L \cong A^2 \qquad K_2(x_1, x_2) = \bigwedge^2 L \cong A$$

e delle possibili basi di questi moduli liberi sono date rispettivamente da

$$\{1\} \qquad \{e_1, e_2\} \qquad \{e_1 \wedge e_2\}.$$

Dunque il complesso di Koszul risulta essere

$$K_\bullet(x_1, x_2)\colon \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

Vediamo come agiscono i differenziali sugli elementi della base fissata:

- $f(e_1) = x_1$ e $f(e_2) = x_2$ per come abbiamo definito il complesso di Koszul di una successione;
- $d(e_1 \wedge e_2) = x_1 e_2 - x_2 e_1$ per definizione del differenziale di un complesso di Koszul.

Scritto in forma matriciale si ha:

$$K_\bullet(x_1, x_2)\colon \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow[\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}]{d} A^2 \xrightarrow[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}]{f} A \longrightarrow 0$$

**Esempio 7 (n = 3).** Sia $\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3$. Sappiamo che

$$\begin{array}{ll} K_0(x_1, x_2, x_3) = A & K_1(x_1, x_2, x_3) = L \cong A^3 \\ K_2(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge^2 L \cong A^3 & K_3(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge^3 L \cong A \end{array}$$

e delle possibili basi di questi moduli liberi sono date rispettivamente da

$$\begin{array}{cc} \{1\} & \{e_1, e_2, e_3\} \\ \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\} & \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\} \end{array}.$$

Dunque il complesso di Koszul risulta essere

$$K_\bullet(x_1, x_2, x_3) : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{d} A^3 \xrightarrow{d} A^3 \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

Vediamo come agiscono i differenziali sugli elementi della base fissata:

$$\begin{aligned} f(e_1) = x_1, \qquad f(e_2) = x_2, \qquad & f(e_3) = x_3 \\ d(e_1 \wedge e_2) &= x_1 e_2 - x_2 e_1 \\ d(e_1 \wedge e_3) &= x_1 e_3 - x_3 e_1 \\ d(e_2 \wedge e_3) &= x_2 e_3 - x_3 e_2 \\ d(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) &= x_3(e_1 \wedge e_2) - x_2(e_1 \wedge e_3) + x_1(e_2 \wedge e_3). \end{aligned}$$

Scritto in forma matriciale si ha:

$$K_\bullet(x_1, x_2, x_3) : 0 \longrightarrow A \xrightarrow[\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}]{d} A^3 \xrightarrow[\begin{pmatrix} -x_2 & -x_3 & 0 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}]{d} A^3 \xrightarrow[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}]{f} A \longrightarrow 0$$

Cerchiamo ora di applicare i teoremi visti e gli esempi espliciti di complessi di Koszul appena introdotti per verificare la regolarità di successioni date e determinare il grado di un ideale.

**Esempio 8.** Sia $A = k[x, y]$ l'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti nel campo $k$ e sia $I = (x^3, x^2 - y^2)$ ideale di $A$. Consideriamo il complesso di Koszul $K_\bullet(x^3, x^2 - y^2)$:

$$K_\bullet(x^3, x^2 - y^2) : 0 \longrightarrow A \xrightarrow[\begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}]{d_2} A^2 \xrightarrow[\begin{pmatrix} x^3 & x^2 - y^2 \end{pmatrix}]{d_1} A \longrightarrow 0$$

e calcoliamone l'omologia. Per prima cosa osserviamo che:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(d_1) &= \{x^3 f + (x^2 - y^2)g \mid f, g \in A\} = I \subseteq A \\ \mathrm{Im}(d_2) &= \{((y^2 - x^2)f, x^3 f) \mid f \in A\} \subseteq A \oplus A. \end{aligned}$$

Verifichiamo ora che

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} d_1 &= \mathrm{Im}(d_2) \\ \operatorname{Ker} d_2 &= 0 \end{aligned}$$

Se $(f, g) \in \operatorname{Ker}(d_1)$, allora $d_1((f, g)) = x^3 f + (x^2 - y^2)g = 0$, da cui segue $x^3 f = (y^2 - x^2)g$. Da questa uguaglianza si deduce che $x^3$ necessariamente divide il prodotto $(y^2 - x^2)g$. Poichè $k[x, y]$ è un UFD e $x^3$ e $(y^2 - x^2)$ non hanno fattori in comune, ne viene che $x^3$ deve dividere $g$, cioè $g = x^3 h$ per qualche $h \in k[x, y]$. Ma allora $x^3 f = (y^2 - x^2)x^3 h$, dunque $f = (y^2 - x^2)h$. Abbiamo dunque mostrato che

$$\operatorname{Ker}(d_1) \subseteq \{((y^2 - x^2)h, x^3 h) \mid h \in k[x, y]\} = \mathrm{Im}(d_2).$$

L'inclusione opposta è banale, pertanto $\mathrm{Ker}(d_1) = \mathrm{Im}(d_2)$.
Sia ora $f \in k[x, y]$. Osserviamo che

$$d_2(f) = ((y^2 - x^2)f, x^3 f) = (0, 0) \Leftrightarrow f = 0.$$

Quindi $\mathrm{Ker}(d_2) = 0$.
Allora l'omologia del complesso di Koszul è data da:

$$H_0(x^3, x^2 - y^2) = A/I \qquad H_1(x^3, x^2 - y^2) = 0 \qquad H_2(x^3, x^2 - y^2) = 0.$$

Questo mostra che il complesso di Koszul $K_\bullet(x^3, x^2 - y^2)$ è aciclico. Poichè $k[x, y]$ è un anello Noetheriano, segue dalla proprietà di depth-sensitivity dei complessi di Koszul che $\mathrm{depth}_I(A) = 2$.

Si può verificare manualmente che la successione $\mathbf{x} = x^3, x^2 - y^2$ è effettivamente $A$-regolare. Chiaramente $x^3$ non è uno zero-divisore in $A$. D'altra parte neppure $x^2 - y^2$ è uno zero-divisore in $k[x, y]/(x^3)$: se $(x^2 - y^2)f(x, y) \in (x^3)$ allora $x^3$ divide $(x^2 - y^2)f(x, y)$ ma $x^3$ e $(x^2 - y^2)$ non hanno fattori in comune dunque, essendo $k[x, y]$ un UFD, ne viene che $f(x, y) \in (x^3)$, cioè $\bar{f} = \bar{0}$ in $k[x, y]/(x^3)$.

Sappiamo inoltre dalla proposizione 4.2.12 che il complesso di Koszul $K_\bullet(x^3, x^2 - y^2)$ fornisce una risoluzione libera per $A/I$:

$$K_\bullet(x^3, x^2 - y^2)\colon 0 \longrightarrow A \xrightarrow[\begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}]{d_2} A^2 \xrightarrow[\begin{pmatrix} x^3 & x^2 - y^2 \end{pmatrix}]{d_1} A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

*Osservazione* 34. Osserviamo che il ragionamento usato nell'esempio precedente si può generalizzare come segue: se $A$ è un UFD e $x, y \in A$ sono due elementi che non hanno fattori in comune allora il complesso di Koszul $K_\bullet(x, y)$ è aciclico.

**Esempio 9.** Sia $A = k[x, y]$ l'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti nel campo $k$ e sia $I = (x^3, x^2 y)$ ideale di $A$. Consideriamo il complesso di Koszul $K_\bullet(x^3, x^2 y)$:

$$K_\bullet(x^3, x^2 y)\colon 0 \longrightarrow A \xrightarrow[\begin{pmatrix} -x^2 y \\ x^3 \end{pmatrix}]{d_2} A^2 \xrightarrow[\begin{pmatrix} x^3 & x^2 y \end{pmatrix}]{d_1} A \longrightarrow 0$$

e calcoliamone l'omologia. Per prima cosa osserviamo che:

$$\mathrm{Im}(d_1) = \{x^3 f + (x^2 y)g \mid f, g \in A\} = I \subseteq A$$
$$\mathrm{Im}(d_2) = \{(-x^2 y f, x^3 f) \mid f \in A\} \subseteq A \oplus A.$$

Come nell'esempio precedente, si vede facilmente che $\mathrm{Ker}(d_2) = 0$. Dunque

$$H_0(x^3, x^2 y) = A/I \qquad H_2(x^3, x^2 y) = 0.$$

Rimane da calcolare $H_1(x^3, x^2 y)$. Iniziamo col determinare $\mathrm{Ker}(d_1)$.
Se $(f, g) \in \mathrm{Ker}(d_1)$, allora $d_1((f, g)) = x^3 f + (x^2 y)g = x^2(xf + yg) = 0$, da cui segue

$$(f, g) \in \mathrm{Ker}(d_1) \Leftrightarrow xf + yg = 0.$$

Osservando che $x$ e $y$ non hanno fattori in comune e $k[x,y]$ è UFD, si conclude che
$$\mathrm{Ker}(d_1) = \{(-yf, xf) \mid f \in A\}.$$
Dunque
$$H_1(x^3, x^2y) = \frac{\mathrm{Ker}(d_1)}{\mathrm{Im}(d_2)} \neq 0.$$
In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, il complesso di Koszul non è aciclico, dunque la successione $x^3, x^2y$ non può essere $A$-regolare. Infatti $x^2y$ non è regolare su $k[x,y]/(x^3)$: ad esempio $(x^2y)\bar{x} = \overline{x^3y} = \bar{0}$ in $k[x,y]/(x^3)$ ma $x \notin (x^3)$, cioè $\bar{x} \neq \bar{0}$.
Di più, dal teorema di depth-sensitivity si può concludere che
$$\mathrm{depth}_I(A) = 2 - 1 = 1,$$
cioè ogni successione $A$-regolare e massimale in $I$ ha lunghezza 1 (ad esempio, $x^3$ è regolare su $A$).

Facciamo ora un esempio con $n = 3$.

**Esempio 10.** Sia $A = k[x,y,z]$ l'anello dei polinomi in tre variabili a coefficienti nel campo $k$ e sia $I = (x,y,z)$ ideale (massimale) di $A$. Consideriamo il complesso di Koszul $K_\bullet(x,y,z)$:

$$K_\bullet(x,y,z)\colon 0 \longrightarrow A \xrightarrow[\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}]{d_3} A^3 \xrightarrow[\begin{pmatrix} -y & -z & 0 \\ x & 0 & -z \\ 0 & x & y \end{pmatrix}]{d_2} A^3 \xrightarrow[\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}]{d_1} A \longrightarrow 0$$

Ovviamente $x, y, z$ è una successione regolare in $A$, dunque ci aspettiamo che il complesso di Koszul sia aciclico. Calcoliamo l'omologia.
Iniziamo determinando le immagini dei differenziali.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(d_1) &= \{xf + yg + zh \mid f,g,h \in A\} = I \subseteq A \\ \mathrm{Im}(d_2) &= \{(-yf - zg, xf - zh, xg + yh) \mid f,g,h \in A\} \subseteq A \oplus A \oplus A \\ \mathrm{Im}(d_3) &= \{(zf, -yf, xf) \mid f \in A\} \subseteq A \oplus A \oplus A \end{aligned}$$

Passiamo ora a determinare i nuclei. Ovviamente
$$d_3(f) = (zf, -yf, xf) = (0,0,0) \Leftrightarrow f = 0.$$
Quindi $\ker(d_3) = 0$ e di conseguenza $H_3(x,y,z) = 0$.
Sia ora $(f,g,h) \in \mathrm{Ker}(d_2)$, allora $(-yf - zg, xf - zh, xg + yh) = (0,0,0)$. Consideriamo dunque il sistema
$$\begin{cases} -yf - zg = 0 \\ xf - zh = 0 \\ xg + yh = 0. \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si ricava $x(f+g) = (z-y)h$, quindi $x$ divide il prodotto $(z-y)h$. Essendo che $x$ non divide $z-y$, deve necessariamente dividere $h$, cioè $h = xh_1$ per qualche $h_1 \in A$. Sostituendo nella seconda equazione si ha $xf = zxh_1$, cioè $f = zh_1$. Infine sostituendo nella prima si ottiene $zg = -yzh_1$, cioè $g = -yh_1$. Questo mostra che

$$\mathrm{Ker}(d_2) = \{(zf, -yf, xf) \mid f \in A\} \subset \mathrm{Im}(d_3).$$

L'inclusione opposta è banale, pertanto $\mathrm{Ker}(d_2) = \mathrm{Im}(d_3)$ e $H_2(x,y,z) = 0$.

Mostriamo ora che il complesso di Koszul è esatto in grado 1, cioè che $\mathrm{Ker}(d_1) = \mathrm{Im}(d_2)$. Sia $(f,g,h) \in \mathrm{Ker}(d_1)$, allora $xf+yg+zh = 0$. Fissiamo come ordine monomiale su $k[x,y,z]$ l'ordine lessicografico. Utilizzando l'algortimo di divisione euclidea per polinomi in più variabili, possiamo dividere $g$ e $h$ per $x$ e otteniamo

$$\begin{aligned} g &= xg_1 + r_1 \\ h &= xh_1 + r_2 \end{aligned}$$

dove $r_1$ e $r_2$ o sono nulli o sono combinazioni lineari di monomi non divisibili per $x$. Sostituendo nell'equazione $xf + yg + zh = 0$, si ha

$$xf + xyg_1 + yr_1 + zxh_1 + zr_2 = 0.$$

Ne segue che $yr_1 + zr_2 = -xf - yxg_1 - zxh_1$, quindi $yr_1 + zr_2 \in (x)$. D'altra parte, poichè $r_1$ e $r_2$ sono combinazioni lineari di monomi che non contengono la variabile $x$, deve essere necessariamente $yr_1 + zr_2 = 0$. Poichè $y$ e $z$ non hanno fattori in comune, ragionando come nell'esempio 8, si ha che

$$\exists\ r \in k[y,z] \text{ tale che } r_1 = -zr \text{ e } r_2 = yr.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} xf &= -xyg_1 - xzh_1 \\ yg &= -xf - zh = xyg_1 + zxh_1 - zh = xyg_1 - zyr \\ zh &= -yg - xf = xzh_1 + zyr. \end{aligned}$$

Posto $\tilde{f} = g_1$, $\tilde{g} = h_1$ e $\tilde{h} = r$, si ottiene

$$\begin{aligned} f &= -y\tilde{f} - z\tilde{g} \\ g &= x\tilde{f} - z\tilde{h} \\ h &= x\tilde{g} + y\tilde{h}. \end{aligned}$$

Questo mostra che $(f,g,h) \in \mathrm{Im}(d_2)$, cioè $\ker(d_1) \subset \mathrm{Im}(d_2)$. L'inclusione opposta è banale pertanto $\ker(d_1) = \mathrm{Im}(d_2)$ e quindi $H_1(x,y,z) = 0$.
Infine osserviamo che $H_0(x,y,z) = A/I$.
Abbiamo dunque mostrato che, come già sapevamo, il complesso di Koszul risulta essere aciclico ed è una risoluzione libera di $A/I \cong k$:

$$K_\bullet(x,y,z)\colon 0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_3} A^3 \xrightarrow{d_2} A^3 \xrightarrow{d_1} A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

*Osservazione* 35. Questo esempio mostra esplicitamente che il complesso di Koszul $K_\bullet(x, y, z)$ è una risoluzione libera di $k$ come $k[x, y, z]$-modulo. Più in generale, come mostrato da Hilbert, il complesso di Koszul $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$ è una risoluzione libera di $k$ come $k[x_1, \ldots, x_n]$-modulo.

Per concludere mostriamo un esempio di applicazione geometrica dei complessi di Koszul.

**Esempio 11** (**Molteplicità di intersezione**)**.** Sia $k$ un campo algebricamente chiuso (ad esempio $k = \mathbb{C}$). Consideriamo il sottoanello

$$k[s^4, s^3t, st^3, t^4] \subset k[s, t].$$

Geometricamente questa è la parametrizzazione di un cono $C$ in uno spazio affine di dimensione 4 sulla curva di Macaulay.
Mettiamoci nell'anello in quattro variabili $A = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ e consideriamo l'ideale omogeneo

$$\mathfrak{p} = (x_1x_4 - x_2x_3, x_2^3 - x_1^2x_3, x_3^3 - x_2x_4^2, x_1x_3^2 - x_2^2x_4)$$

che è l'ideale che definisce il cono come varietà algebrica affine.
Siano $M := A/\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{m} := (x_1, \ldots, x_4)$ ideale massimale omogeneo di $A$.
Vogliamo calcolare $e(I, M)$, ossia la molteplicità di $M$ rispetto all'ideale $I = (x_1, x_4)$. Geometricamente questa sarà la molteplicità di intersezione della varietà con il piano $x_1 = x_4 = 0$.
Per fare questo, l'idea è quella di usare il teorema di Serre (tenendo conto dell'osservazione 33) e ricorrere all'omologia del complesso di Koszul $K_\bullet(x_1, x_4, M)$.
Poichè il cono $C$ è definito da una parametrizzazione polinomiale, la varietà algebrica definita da $\mathfrak{p}$ è irriducibile, pertanto $\mathfrak{p}$ è primo (per eventuali approfondimenti si veda [COX], pag.198-199). Ne segue che $M$ è un dominio d'integrità dunque $x_1$ deve essere regolare su $M$ (analogamente, per simmetria, anche $x_4$ è regolare su $M$). Applicando la proposizione 4.2.14 riguardante i complessi di Koszul e le successioni regolari, risulta

$$\begin{aligned} H_2(x_1, x_4, M) &= 0 \\ H_1(x_1, x_4, M) &= \mathrm{Hom}_A(A/I, M/x_1M) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(A/I, A/((x_1) + \mathfrak{p})). \\ H_0(x_1, x_4, M) &\cong M/IM. \end{aligned}$$

Vogliamo ora calcolare $\mathrm{Hom}_A(A/I, A/((x_1)+\mathfrak{p}))$. Sappiamo che una mappa $f\colon A \to A/((x_1) + \mathfrak{p})$ $A$-lineare è univocamente definita dal suo valore su $1_A$. Per ottenere degli omomorfismi in $\mathrm{Hom}_A(A/I, A/((x_1) + \mathfrak{p}))$ dobbiamo trovare gli elementi di $A/((x_1)+\mathfrak{p})$ che vengono annullati dall'ideale $I$, cioè

$$(0 :_{A/((x_1)+\mathfrak{p})} I) := \{\overline{g} \in A/((x_1) + \mathfrak{p}) \mid \overline{g}I = 0\} \tag{I}$$

oppure, equivalentemente

$$((x_1) + \mathfrak{p} :_A I) := \{g \in A \mid gI \subset (x_1) + \mathfrak{p}\}. \tag{II}$$

Utilizzando un sistema di computer algebra, ad esempio SINGULAR ([DGPS]), si vede che

$$(0 :_{A/((x_1)+\mathfrak{p})} I) = (\overline{x_2^2})$$

dove $\overline{x_2^2}$ indica la classe del polinomio $x_2^2$ in $A/((x_1)+\mathfrak{p})$.
Riportiamo di seguito due possibili esempi di codici SINGULAR (si veda [DGPS]) per il calcolo rispettivamente di (I) e (II).

**CODICE SINGULAR 1**

```
> ring r=complex, (x1,x2,x3,x4),lp;
> ideal p=x1*x4-x2*x3,x2^3-x1^2*x3,x3^3-x2*x4^2,x1*x3^2-x2^2*x4;
> ideal I1=x1;
> ideal psum= I1+p;
> qring qr= std(psum);
> ideal I=(x1,x4);
> quotient(0,I);
_[1]=x2^2
```

**CODICE SINGULAR 2**

```
> ring r=complex, (x1,x2,x3,x4),lp;
> ideal p=x1*x4-x2*x3,x2^3-x1^2*x3,x3^3-x2*x4^2,x1*x3^2-x2^2*x4;
> ideal I1=x1;
> ideal psum= I1+p;
> ideal I=x1,x4;
> minbase(quotient(psum,I));
_[1]=x1
_[2]=x2*x3
_[3]=x2^2
_[4]=x2*x4^2-x3^3
```

Si osservi che nel primo codice il polinomio $x_2^2$ è inteso come classe di equivalenza in $A/((x_1)+\mathfrak{p})$ mentre nel secondo codice i polinomi ottenuti vanno interpretati come rappresentanti delle classi di equivalenza. Passando all'anello quoziente si ha $\overline{x_1} = \overline{x_2x_3} = \overline{x_2x_4^2 - x_3^3} = 0$, dunque come in precedenza si ottiene $\overline{x_2^2}$.

Calcoliamo la lunghezza dei moduli di omologia.
Banalmente $(\overline{x_2^2})$ ha lunghezza 1 in $A/((x_1)+\mathfrak{p})$. Infatti $\mathfrak{m}\cdot\overline{x_2^2} = \overline{0}$, quindi $(\overline{x_2^2}) \cong A/\mathfrak{m} \cong k$ è semplice.
Per calcolare $l(M/IM) = l(A/((x_1,x_4)+\mathfrak{p}))$ consideriamo la seguente catena di ideali

$$\begin{aligned}(x_1,x_4)+\mathfrak{p} =&(x_1,x_2^3,x_2x_3,x_4,x_3^3) \subsetneq (x_1,x_2^3,x_2x_3,x_4,x_3^2) \subsetneq (x_1,x_2^2,x_2x_3,x_4,x_3^2)\\ &\subsetneq (x_1,x_2^2,x_4,x_3) \subsetneq (x_1,x_2,x_3,x_4) \subsetneq A.\end{aligned}$$

Passando al quoziente si ottiene la catena di sottomoduli

$$\begin{aligned}0 &\subsetneq (x_1, x_2^3, x_2x_3, x_4, x_3^2)/((x_1, x_4) + \mathfrak{p}) \subsetneq (x_1, x_2^2, x_2x_3, x_4, x_3^2)/((x_1, x_4) + \mathfrak{p})\\ &\subsetneq (x_1, x_2^2, x_4, x_3)/((x_1, x_4) + \mathfrak{p}) \subsetneq (x_1, x_2, x_3, x_4)/((x_1, x_4) + \mathfrak{p})\\ &\subsetneq A/((x_1, x_4) + \mathfrak{p}) \cong M/IM.\end{aligned}$$

Questa catena ha lunghezza 5 e non possono esistere catene di lunghezza maggiore. Infatti, consideriamo il quoziente di due sottomoduli consecutivi, ad esempio

$$\frac{((x_1, x_2^2, x_3, x_4)/((x_1, x_4) + \mathfrak{p}))}{((x_1, x_2^2, x_2x_3, x_4, x_3^2)/((x_1, x_4) + \mathfrak{p}))} \cong \frac{(x_1, x_2^2, x_3, x_4)}{(x_1, x_2^2, x_2x_3, x_4, x_3^2)} \cong (\overline{x_3}).$$

Tale quoziente è generato da un solo elemento ed è immediato verificare che $\mathfrak{m}(\overline{x_3}) = \overline{0}$. Dunque, come prima, $(\overline{x_3}) \cong A/\mathfrak{m} \cong k$, cioè questo ideale (pensato come modulo) è semplice. Per gli altri quozienti si ragiona in modo analogo.
Questo mostra che la precedente catena di sottomoduli non può essere raffinata.
Dunque si ha

$$\begin{aligned}l(H_1(x_1, x_4, M)) &= l(\mathrm{Hom}_A(A/I, A/((x_1) + \mathfrak{p}))) = 1.\\ l(H_0(x_1, x_4, M)) &= l(M/IM) = 5.\end{aligned}$$

Dal teorema di Serre, risulta

$$e(I, M) = \chi(x_1, x_4, M) = l(H_0(x_1, x_4, M)) - l(H_1(x_1, x_4, M)) = 5 - 1 = 4.$$

# Bibliografia


[AB] M.Auslander-D.A.Buchsbaum, *Codimension and multiplicity*, Ann.of.Math.(2) **68** (1958), 625–657.

[AM] M.F.Atiyah-I.G.Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[BO] N.Bourbaki, *Algèbre, Chap. I-X*, Hermann-Masson, 1970-1980.

[BH] W.Bruns-J.Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, 1993.

[COX] D.Cox-J.Little-D.O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms* (Third Edition), Springer, 2007.

[DGPS] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR 4-1-0 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2016).

[HI] D.Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Math.Ann.36 (1890), 473–534.

[MAT] H.Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[NOR] D.G.Northcott, *Ideal Theory*, Cambridge University Press, 1953.

[ROT] J.Rotman, *An introduction to homological algebra* (Second Edition), Springer, 2009.

[SE] J-P.Serre, *Algèbre locale-multiplicités* (Second Edition), Springer-Verlag, 1965. http://www.singular.uni-kl.de (2016)

[ZS] O.Zariski-P.Samuel, *Commutative Algebra*, Springer-Verlag, 1958.