ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

CONTRATTO DIDATTICO
ED
EFFETTI CORRELATI

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Correlatori:
Dott.
ANDREA MAFFIA
Dott.ssa
FEDERICA FERRETTI

Presentata da:
ALVISE TRAMONTIN

II Sessione

Anno Accademico 2016-2017

Indice

Capitolo 1

Prefazione

1.1 Sommario

Questa ricerca si propone di interpretare quali siano le dinamiche di pensiero associabili alle clausole del contratto didattico.
Lo studio di tali dinamiche è stato affrontato in maniera sperimentale proponendo alcuni problemi a studenti di classe prima della scuola secondaria di primo grado, i problemi sono stati creati per mettere in luce i comportamenti tipici che e si associano alle clausole del contratto didattico.
Nello specifico la mancata rottura di una clausola del contratto didattico provoca un effetto conseguente. Gli effetti studiati durante il periodo di ricerca sono noti come: *effetto età della Terra, effetto età del capitano e delega formale.*
Lo studio effettuato è stato di tipo qualitativo, la scelta riguardo la metodologia ha favorito l'emergere di fenomeni considerevoli riguardanti le relazioni tra contratto didattico e dinamiche del lavoro di gruppo.
Nonostante il campione scelto non fosse rappresentativo della popolazione scolastica italiana, tutti i risultati si allineano alle ricerche già fatte in pro-

posito, e a cui si ispira questa tesi.
In particolare si è rilevata la presenza di tutti gli effetti suddetti, si verifica inoltre che le dinamiche all'interno di un gruppo di pari aiutano lo studente nella rottura di clausole del contratto didattico.
Quest'ultimo particolare potrebbe essere l'incipit di nuove e costruttive ricerche.

1.2 Com'è nata l' idea

Quando scelsi di studiare matematica, mi posi l'obbiettivo di diventare un insegnante e a tale scopo mi iscrissi al polo didattico di Bologna sapendo che lì c'era una comunità di didattici molto radicata, sin dall'inizio del novecento.
Fu così che sfruttai ogni occasione propostami, e compatibile con il mio piano di studi, per passare il maggior tempo possibile all' interno di una classe, anche perché credevo, e credo tuttora, che l'arma più potente di un insegnante sia sempre e comunque la sua esperienza.
Lo scorso anno 2016, fedele a questo mio proposito, mi iscrissi ad un'attività di supporto alla didattica presso la scuola di psicologia e scienze della formazione ed incontrai Federica Ferretti, che sarebbe diventata la coordinatrice effettiva del progetto (quello di supporto alla didattica) nonché la correlatrice di questa tesi.
Federica Ferretti aveva appena finito il dottorato di ricerca in didattica della matematica, ed io da studente curioso, (penso che la curiosità sia una caratteristica comune a tutti) un giorno le chiesi di parlarmi della sua ricerca.
In quel periodo davo anche ripetizioni, e dal momento in cui sono venuto a conoscenza della ricerca di Federica Ferretti, ho sfruttato ogni pretesto

per mettere alla prova i ragazzi che avevo sottomano in modo da rilevare l'effetto del contratto didattico che costituisce il focus di questa tesi.

1.2.1 Un pensiero che riguarda la didattica della matematica

Penso sinceramente che a tutti, anche agli studenti più abili, prima o poi sia capitato di chiedersi a cosa serva la matematica.
Questa domanda si annida segretamente nel cuore di ogni studente, come il piccolo seme di una pianta che si alimenta delle difficoltà della materia, e cresce nel poveretto fino a quando lo porta a rinunciare.
La matematica è anche percepita dai più come una cosa che dev'essere difficile, puntigliosa e rigorosa; non a caso quando dico cosa studio la maggior parte dei miei interlocutori mostra una faccia allibita, oppure si complimenta o ancora fa versi strani, per sottolineare il mio coraggio nell'aver intrapreso una carriera scientifica così difficile.
Un po' meno stupiti ed allibiti si mostrano quando esprimo la volontà di fare l'insegnante, probabilmente perchè non percepiscono l'importanza del ruolo in ambito educativo di questa professione.
Per non parlare di quegli amici che vedendo un libro di pedagogia nella mia borsa pensavano avessi mentito sui miei studi.
Tutta questa parte introduttiva, è dedicata a loro e ho deciso di inserirla per rispondere alle domande più comuni che mi vengono fatte riguardo la didattica della matematica.
Ci tengo a precisare da subito che tutte le idee espresse in questa prefazione, non sono definizioni formali ma perlopiù concetti per chiarire le idee a chi volesse leggere questo mio elaborato.
Colgo l'occasione per mettere in guardia chiunque fosse digiuno di matema-

tica, dato che gli argomenti trattati richiedono un minimo di competenza riguardo geometria euclidea di base, massimo comun divisore e minimo comune multiplo, nonché un' infarinatura di matrici, risoluzione di sistemi lineari e altri argomenti di algebra lineare.
Per quanto riguarda la materia, in sintesi, la didattica è una scienza che studia il processo di apprendimento che intercorre tra allievo, insegnante e sapere, con lo scopo di rendere più efficace l'insegnamento e di conseguenza migliorare l'apprendimento.
La didattica tutta, non solo quella della matematica è in continua evoluzione, e il mio modesto parere è che chiunque abbia l'intenzione di intraprendere una carriera nell' insegnamento non possa esimersi dal tenersi continuamente aggiornato.

1.3 Introduzione

Guida per una corretta comprensione

Daremo ora alcune definizioni con lo scopo di rendere comprensibile questa tesi anche a eventuali neofiti di didattica che intendessero approfondire le conoscenze acquisite durante gli studi.
Partiamo innanzitutto da una definizione più rigorosa, per quanto possibile, di quello che è la didattica della matematica.
Si tiene a precisare che per raggiungere tale scopo faremo riferimento, in gran parte, alla tesi di dottorato (L' effetto età della terra. Contratto didattico e principi regolativi dell' azione degli studenti in matematica) della dottoressa

Federica Ferretti (2015)[1] e al libro Elementi di didattica della matematica del professor Bruno D' Amore(1999).
Il professor D'Amore, nel testo definisce la didattica come segue:

Definizione 1 *La didattica è quella parte della scienza dell'educazione che ha come scopo lo studio dei processi di insegnamento ed apprendimento nella loro globalità indipendentemente dalla disciplina in oggetto ma tenuto conto dei rapporti istituzionali.*
(D'Amore, 1999, p. 21)

e continua poi citando Brun il quale dice che:

Definizione 2 (secondo Brun (1996)) *La didattica in quanto scienza della produzione, organizzazione e gestione dei beni del sistema di insegnamento-apprendimento, si riallaccia alla questione epistemologica relativa alla trasformazione delle conoscenze.*
(D'Amore, 1999 p.21)

Una precisazione appare doverosa nell'interesse del lettore, ovvero che non è necessario leggere Brun ed andare a fondo sul tema della questione epistemologica relativa alla trasformazione del sapere per poter comprendere a pieno il lavoro redatto in questa tesi; ma è importante ricordare che ogni volta che si farà riferimento alla didattica generale e non disciplinare intenderemo quella espressa in queste due definizioni.
Differente invece è l'approccio di D'Amore per quanto riguarda la didattica

[1] Il lavoro della dottoressa ferretti è disponibile all'indirizzo http://amsdottorato.unibo.it/7213/

disciplinare, essa viene infatti divisa in tipi correlati dalla stessa idea di fondo, ma diversi per quanto riguarda le fasi, di cui si compone questa scienza.

In sintesi si può intendere la didattica della matematica come:

Definizione 3 (Didattica A (A sta per ars)) *Cioè la divulgazione delle idee, fissando dunque l'attenzione sulla fase dell'insegnamento della disciplina. (D'Amore, 1999, p.34)*

Definizione 4 (didattica B) *come ricerca empirica. In questo modo, fissando l'attenzione sulla fase di apprendimento potremmo concentrarci su uno studio critico dei fenomeni che regolano appunto l'apprendimento stesso della matematica.*

Questa seconda definizione non è esattamente quella che si trova sul libro, ma mi sembrava più utile enunciarla in questo modo, perchè la maggior parte del lavoro svolto, è stato svolto appunto in un' ottica di didattica di tipo B.
In ogni caso si può sempre ricorrere a quella del testo (D'Amore, 1999, p.34) che differisce nella scelta dei vocaboli ma non nella sostanza.

1.4 Il Contratto Didattico

Un concetto fondamentale che verrà spesso richiamato durante la trattazione, e a cui verrà dato spazio in seguito, e quello di contratto didattico.
Jean Jaques Rousseau (1712-1778) nel suo *Contrat Social* del 1762 scrive che

in ogni contratto stipulato, sono sempre presenti delle clausole non esplicitate ma tacitamente ammesse, esse sono quelle clausole di comportamento che ci si aspetta dal modello di società in cui si vive.
Facendo un salto avanti di circa due secoli, tra il 1970 ed il 1990 questo concetto pre-rivoluzione francese venne portato all'interno degli studi pedagogici, in particolare di quelli di didattica della matematica.
Le origini della definizione formale di contratto didattico si trovano in (Brousseau, 1980) e (Brousseau & Peres, 1981) e sono stati ispirati da quello che è noto come uno dei più famosi casi della storia della didattica della matematica.

Il caso di Gaël.

Durante uno studio sui fallimenti elettivi degli studenti che se la cavano in tutte le materie ad eccezione della matematica, Brousseau si imbatte in Gaël un bambino di 8 anni che da quel giorno diventerà l'esempio introduttivo perfetto per ogni studioso di didattica che debba affrontare un discorso sul contratto didattico.
La situazione in cui si trova Gaël è descritta in D'Amore come segue:

- *In luogo di esprimere coscientemente la propria conoscenza, Gaël la esprime sempre e solo in termini che coinvolgono l'insegnante.*
- *Le sue competenze non sono mai sue competenze sono quello che la maestra ha detto di fare.*
- *Le sue capacità strategiche non sono mai sue proprie capacità, ma sono quello che la maestra dice di fare e come dice di fare la maestra.*

(D'Amore, 1999, p.98)

Per stimolare processi cognitivi che escano da questo circolo vizioso, in cui si trova immerso il povero Gaël, i ricercatori si trovarono costretti a proporgli situazioni svincolate dall' ambiente didattico, o come definisce Brusseau a-didattiche, ottenendo tralaltro risposte positive come ragionamenti più personali e nel conplesso più produttivi.
Sulla base di questi risultati, e appoggiandosi ad un lavoro precedentemente svolto da alcuni famosi pedagogisti francesi tra cui spicca quelo di Jeanine Filloux, (definizione di contratto pedagogico, 1973-1974), vennero sviluppate nuove teorie che legano i processi cognitivi e il rapporto insegnante allievo all'interno dell'ambiente scolastico.
Differentemente da Filloux che elabora le sue teorie in maniera più generale ed a livello sociale, Brousseau nella sua definizione di contratto didattico tiene conto dei saperi e della situazione scolastica.

Definizione 5 (Contratto didattico secondo Brousseau) *In una situazione di insegnamento preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito quello di risolvere il problema (matematico) che gli viene presentato.*
L' accesso a questo compito avviene mediante un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite e degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro.
Queste abitudini del maestro attese dall'allievo, ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono un tacito accordo che d'ora in poi verrà chiamato contratto didattico.

(D'Amore 1999 p.99)[2]

Dare una definizione rigorosa di effetto del contratto didattico richiederebbe troppo tempo, perché la costruzione di tale concetto si è evoluta negli ultimi trent'anni e meriterebbe una lunga trattazione.
Si preferisce fornirne un paio di esempi concreti partendo da situazioni più generali fino ad arrivare all'età del capitano, che è il più celebre degli effetti finora rilevati.

Esempio 1 *Fingiamo di tornare alle scuole superiori, e che, dall'inizio dell'anno il professore abbia interrogato tutti i lunedì.*
Fingiamo pure che le domande delle varie interrogazioni siano sempre state limitate ad argomenti svolti nelle due settimane antecedenti.
Infine fingiamo che oggi sia venerdì mattina e che il povero docente, che deve presentarsi allo scrutinio con dei voti da esibire, abbia bisogno di valutare uno studente.
Così entra in classe ed annuncia che interrogherà.
In aggiunta, durante l'interrogazione il docente si accorge che lo studente tentenna e quindi l' insegnante tenta di fargli tornare alla mente alcuni concetti che avrebbe dovuto imparare qualche mese prima.

[2]Questa stessa definizione si può trovare sia in D'Amore che in Ferretti fonti citate nella bibliografia, ed è a sua volta tratta da (pag. 127 Brousseau Contratto didattico 1986) se la si cerca in lingua madre oppure nella traduzione all' interno di Schubauer-Leoni, (1996), pag 21

Ecco a questo punto lo studente si sentirà tradito dall'insegnante che non solo ha interrogato in un giorno diverso dal solito ma ha pure osato fare domande su una parte di programma che normalmente non è oggetto di valutazione.

Naturalmente lo studente dell'esempio si sbaglia, l'insegnante, dovendo presentarsi allo scrutinio con delle valutazioni non intendeva tendergli una trappola.
Stava solo svolgendo il suo lavoro, e al più stava cercando di aiutarlo.
Il vero problema è che la ripetizione nella modalità e tempistica delle interrogazioni ha generato nella mente dello studente l'idea che sarebbe sempre stato così, vincolando tacitamente il docente al contratto didattico.

1.4.1 Alcuni effetti del contratto didattico

Altri effetti, come quello che prenderemo in esame in seguito, sono dovuti alla concezione stessa della materia, in particolare in matematica ci si aspetta che le soluzioni ai problemi proposti necessitino di calcoli, e come vedremo in dettaglio in questo elaborato, che le risposte non possano essere immediate.
Il secondo esempio che andremo a prendere in considerazione, è l'effetto più noto all'interno del mondo della didattica della matematica, e da sempre viene identificato con il nome di effetto *età del capitano*.
La versione che trascriverò è la formulazione originale del problema proposto dai ricercatrori dell' IREM (Institut de Recherche sur l' Enseignement des Mathematiques) di Grenoble, (Ferretti 2015), a studenti della scuola primaria.

Esempio 2 (L'effeto età del Capitano) *La consegna del problema proposto è molto semplice e recita:*

In una nave ci sono ventisei pecore e dieci capre.

Quanti anni ha il capitano?

La risposta corretta sarebbe:

-con i dati a mia disposizione non sono in grado di rispondere a questa domanda-

Invece settantasei studenti su novantasette calcolarono l'età del capitano della nave manipolando in qualche modo i numeri forniti nel testo, ad esempio sommandoli o sottraendoli.

In Adda (1987) viene spesso usata l' espressione *effetto età del capitano* per:

designare la condotta di un allievo che calcola la risposta utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorchè questo problema non possieda una soluzione numerica.
(traduzione a cura di Sarrazy, 1995, nota 17, p. 152)
Nel testo del professor Bruno D'amore (1999, p.102) è inolte narrato l'episodio avvenuto in una scuola primaria, in cui l'autore stesso ha proposto il problema agli alunni che hanno risposto davanti allo stupore di un'incredula maestra.
Questi comportamenti sono essenzialmente legati alla concezione stessa della matematica anche al difuori dell'edificio scolastico, e quindi sono effetti che fanno riferimento a contratti sociali ben più generali del contratto didattico, come il contratto sociale definito nel diciottesimo secolo in Francia

(Jean Jaques Rousseau, 1762).

Questo problema, in varie versioni adattate al contesto ed all'età degli allievi, è stato proposto varie volte e in tutti i casi il comportamento degli studenti fa pensare che i loro ragionamenti siano governati dalla ferma convinzione che trattandosi di un problema di matematica, tutti i dati presenti nell'enunciato debbano in qualche modo essere combinati matematicamente, cioè tramite operazioni più o meno semplici, per giungere alla risposta corretta.

É essenziale tenere a mente che, in tutti questi casi, gli studenti non fanno una vera e propria analisi del testo che viene loro sottoposto.

Questo perché non serve esercitare un vero e proprio senso critico dato che l'insegnante, a detta loro, rispetta una tacita regola per cui si impegna a non proporre mai esercizi o problemi che non possano essere risolti se non mediante la manipolazione dei dati presenti nel testo.

Questa totale fiducia nell'insegnante fa sì che in ogni caso:

- il testo del problema ha sempre senso;
- il problema ha sempre una soluzione;
- la strada da intraprendere per arrivare alla soluzione passa in qualche modo tramite la manipolazione dei dati.

Considerando l'importanza di queste tre problematiche si può suppore che, in un contesto di classe, lo studente medio tende ad allineare il proprio pensiero a quello dell'insegnante e a proporre non quello che pensa, ma quello che crede il suo insegnante si aspetti da lui, o quello che l'insegnante gli ha detto di fare in certe situazioni.

Inoltre, tende a farlo come l'insegnante gli ha spiegato che si fa, ripercorrendo i passi del povero Gaël.

Sviluppando l'idea di Brousseau, si potrebbe semplicemente dire che: in una situazione di classe i comportamenti degli studenti e dell' insegnante si fondono fino a raggiungere una sorta di equilibrio che non scontenta nessuno, ovvero lo studente sa che attenendosi a certe norme tacitamente sottintese non rischierà di essere giudicato negativamente.

Dal canto suo l'insegnante, per migliorare la comprensione della lezione o per incentivare lo studio della materia da parte degli studenti, rischia di proporre metodologie rituali che circoscrivono il pensiero dello studente recintandolo all'interno di un costrutto tacitamente fissato e approvato.

In altre parole se l'insegnante, per mezzo di parole o azioni, fa capire allo studente cosa vuole ottenere come risposta, non otterà un ragionamento costruttivo, ma soltanto la mera esecuzione di una procedura rituale.

Allo stesso tempo lo studente posto davanti ad un problema viene rassicurato dalla profonda convinzione che il professore conosce già la risposta, e concentra la sua attenzione nel carpire i passaggi della procedura che lo porteranno alla soluzione senza preoccuparsi di, per così dire, "dare un senso a quello che fa".

Riferendosi alla precedente definizione di didattica e tenendo conto che nel processo di apprendimento i soggetti in gioco sono l'allievo, l'insegnante e il sapere, se analizziamo la situazione appena esposta, salta subito all'occhio che il rapporto che l'allievo ha con il sapere non è mai diretto ed è solo il risultato di una mediazione dell'insegnante.

Il suddetto studente alla fine della giornata di lezione tornerà a casa senza essersi appropriato della conoscienza matematica necessaria per gestire tali problemi anche al di fuori dell'ambiente scolastico.

Sarà quindi necessario che l'insegnante si inventi attività che spingono l'allievo a rompere le clausole del contratto didattico.

Il processo attraverso il quale la responsabilità dell'apprendimento viene condivisa da insegnante e allievo viene definito in (Bolondi *Fandiñio* & Pinilla 2012) come segue :
Cruciali per l'apprendimento degli studenti sono infatti il processo di devoluzione e quello di responsabilizzazione da parte dell' alievo che rompe il contratto didattico e si carica di una responsabilità all' interno dell'attività cognitiva in gioco accettandone le conseguenze.

Un'altra problematica relativa a questo tipo di situazioni, viene descritta così:
messi di fronte a degli enunciati di problemi, gli allievi sono (...) abituati a non rimettere in discussione la legittimità e la pertinenza delle domande dell' insegnante, e ciò permette loro d'altronde di funzionare più economicamente avendo in modo naturale fiducia nell'adulto.
Secondo questa logica ogni problema ha sempre una soluzione, ed inoltre è una soluzione legata ai dati presenti nell'enunciato.
Posto di fronte ad un problema che non ha soluzione come si comporterà l'allievo?
Confortato dalla ripetuta consuetudine di un contratto didattico, secondo il quale l'insegnante non ha come scopo ingannare l'allievo presentandogli un problema privo di soluzione, l'allievo, che crede di aver scoperto una frode in una domanda del maestro, denuncerà la rottura del patto in nome della logica del problema, oppure assumerà su se stesso la rottura del contratto dando in ogni caso una risposta costi quello che costi, anche se fin dal principio si rende conto di essere scorretto o quantomeno presenta dei dubbi.
(Bolondi & *Fandiñio* Pinilla, 2012, p. 214)
Abbiamo quindi messo l'accento su due problematiche riguardanti il con-

tratto didattico che sono:

- la concezione stessa della matematica, ovvero una materia che necessita di calcoli per raggiungere le soluzioni desiserate,
- il comportamento degli studenti messi davanti a problemi o esercizi che rompono il contratto didattico.

(Perret & Clermont, et al. 1992).

Un altro costrutto che sarà utile all'analisi è quello dei modelli concettuali di problemi generati dagli allievi, e questo costrutto è molto importante perché si è presentato durante le rilevazioni fatte in fase di sperimentazione.
In D'Amore (1999) viene esplicitato che queste conclusioni sono tratte da una lunga e laboriosa analisi descritta in un articolo di Rosetta Zan che riporta uno studio condotto a cavallo tra il 1991 e il 1992 e pubblicato successivamente nel 1993.
Il lavoro di Zan è stato condotto su bambini che frequentavano la scuola primaria, e verte pricipalmente sulle differenze sociali che inconsciamente si insinuano nella mente di un bambino.
Principalmente vengono analizzate le differenze comportamentali adottate dal bambino in contesti diversi come la realtà scolastica, cioè il mondo che il bambino vive quando entra in classe, e quella extra-scolastica ovvero la vita al di fuori della scuola.
Per prima cosa, nell'articolo di Zan, emerge che nella mente dei bambini il problema reale e concreto, cioè qualunque problema si possa presentare nella via extra-scolastica, è evidentemente diverso da quello scolastico che viene dato dall'insegnante con il solo scopo di essere risolto.
Citando le fonti risulta inoltre che:

il problema viene caratterizzato dai più attraverso il tipo di procedura che mette in atto per la risoluzione, e come visto in precedenza, viene definito implicitamente dalla necessità di eseguire delle operazioni (Zan, 1993 citato in D'Amore 1999, p.105)
Dallo studio, in primo luogo, emerge che il problema si può identificare con l'operazione necessaria alla sua risoluzione e che il contesto, le situazioni proposte, i soggetti ed i dati stessi siano degli addobbi che cambiano di volta in volta per far sì che i risultati non siano ripetitivi.
Per la maggior parte dei bambini intervistati dalla Zan, il problema è sempre di natura aritmetica, cioè qualunque sia il contesto si può ridurre semplicemente a dei calcoli.
Inoltre alla domanda su quali comportamenti debbano tenere durante la risoluzione di un problema scolastico i bambini rispondono all'unanimità:
-*bisogna leggere e rileggere il testo, ragionare, stare calmi e lavorare da soli.*-
(Zan, 1993 citato in D'Amore, 1999 p.106)
Queste sono evidentemente espressioni del pensiero dell'insegnante, ed appare probabile che frasi come leggere e rileggere il testo o lavorare da soli non siano state coniate indipendentemente dalla mente dei bambini.
Inoltre, ricordando quanto detto precedentemente riguardo al fatto che se l' insegnante fa in qualche modo capire all'allievo quello che vuole non otterà un ragionamento, ma la semplice esecuzione di un ordine, questa risposta mette in chiara evidenza che quei bambini sottostanno a delle norme esplicite del contratto didattico.

Ultimo effetto, che è doveroso prendere in considerazione, è quello che prende il nome di *delega formale.*

Per farlo prenderemo spunto dalla letteratura scientifica esistente, in particolare da (D'Amore & Martini, 1997).

Nell'articolo del professor D'Amore si parla di questo effetto del contratto didattico che si manifesta negli allievi che, avendo intuito quale sia l'operazione esatta da utilizzare per risolvere il problema, non tengono poi conto del fatto che il risultato possa effettivamente essere accettato.

Per chiarire questo concetto si ritiene utile citare uno dei problemi classici che lo scatenano, ovvero il *il problema dei soldati.*

Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?

Si tiene a precisare che i dati statistici confermano l'esistenza dell'effetto citato in quanto, dei quarantacinquemila studenti a cui è stato sottoposto il problema:

- il 29% del totale dice che occorrono 31 bus e che resta 12;
- il 18% del totale dice che servono 31 bus;
- solo il 23% del totale controlla il risultato della divisione sulla base della richiesta del problema e risponde che servono 32 bus.

Doveroso è ricordare che queste percentuali sono calcolate sul 70% delle risposte in quanto il 30% degli studenti ha sbagliato i calcoli.

Inoltre tra gli studenti a cui è stato concesso l'uso della calcolatrice si trovano risposte come:

"servono 31,33333333 autobus"

Questo si può interpretare come palese manifestazione dell'effetto del contratto didattico in questione in quanto fa notare che, una volta capito quale

sia l'operazione da svolgere, lo studente delega all'operazione stessa la correttezza della risposta.
Possiamo quindi dare una definizione dell'effetto usando le parole di (D'Amore & Martini,1996)

Definizione 6 (Delega formale) *Risolvere un problema di tipo scolastico standard coincide con il trovare la o le operazioni più adatte; si tratta cioè di interpretare aritmeticamente il testo, passando dalla sua formulazione in lingua naturale, all'espressione aritmetica che porta dai dati al risultato.*
Una volta eseguito questo passaggio-delega di traduzione e formalizzazione, il testo può anche essere dimenticato, non serve più, non è più oggetto di alcun controllo critico, logico o semantico e tutta la concentrazione e l'attenzione del risolutore si addensano allora sulla esecuzione di tale operazione, a mano o con la macchina calcolatrice.
Quando tale esecuzione è terminata, producendo in qualche modo un risultato (come abbiamo detto, dopo calcoli manuali o con l'uso della calcolatrice), quel risultato è automaticamente interpretato come la risposta al problema, proprio a causa della clausola di delega formale detta sopra. (D'Amore & Martini, 1996 p. 3).

Si noti che in ciascuno degli esempi riportati finora, si presentava una situazione-problema anomala/o alla classe che, saltando la fase di comprensione del testo, di ragionamento e di costruzione di una risposta in modo educativo, manipolava i dati in modo che portassero ad una risposta.
Abbiamo altresì detto che questi comportamenti sono dovuti alla tacita ade-

sione a norme non scritte ma comunemente accettate a livello sociale e scolastico.
D'ora in poi quindi, quando si parlerà di clausula del contratto didattico, si farà sempre riferimento a quste norme, e quando invece si parlerà di effetto del contratto didattico, dovremo sempre pensare a situazioni particolari, come quelle dei problemi senza soluzione, che imbarazzano lo studente che non vuole rompere le clausole del contratto didattico.

Capitolo 2

Descrizione del fenomeno

2.1 Le radici dello studio

Prima di iniziare a parlare del fenomeno osservato, si tiene a precisare, nell'interesse del lettore, che tutte le affermazioni che verranno fatte riguardo l'effetto del contratto didattico in questione sono supportate a livello statistico dal lavoro svolto dalla Dottoressa Ferretti (2015) sulle prove INVALSI di un campione attendibile di classi equamente distribuite su tutto il territorio nazionale.

L'INVALSI è l'istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione italiano e svolge vari compiti tra cui quello di condurre periodicamente (almeno una volta l'anno) valutazioni atte a misurare-valutare gli apprendimenti degli studenti.

Le prove vengono somministrate alle classi quinte e seconde della scuola primaria, alle classi terze di quella secondaria di primo grado e alle classi seconde della scuola secondaria di secondo grado.

Il compito della preparazione di tali prove è attualmente affidato ad un col-

legio di 150 esperti nel campo dell'educazione tra cui è possibile trovare soggetti con alta formazione in psicologia, pedagogia e didattica.
Il modello statistico usato per studiare le reazioni-risposte degli studenti è noto come modello di Rasch e permette di ordinare le domande di una data prova in base alla difficolttà della domanda ed all'abilità degli studenti.
La difficoltà si distingue in base alla percentuale di studenti che rispondono con successo alla domanda, mentre l'abilità dello studente viene valutata in base alle risposte che risultano corrette all'interno del test.
Tramite una funzione studiata *ad hoc,* che prende il nome di **curva caratteristica dell'item**[1], si possono mettere in relazione le risposte che dà uno studente e la sua abilità soggettiva, creando così un modello che prevede l' esattezza della risposta che un dato studente darà in funzione della sua abilità.
Si rimanda il lettore interessato all'argomento alla fonte citata (Ferretti, 2015).
In questa tesi si approfondirà, invece, l'analisi del fenomeno da un punto di vista qualitativo.

2.2 Il fenomeno osservato

Ancora, in queste righe sarà esposto un punto di vista macroscopico per inquadrare a fondo la natura di questa tesi, per eventuali chiarimenti si veda (Ferreti, 2015); questo perché come già detto tutta la tesi è supportata a livello statistico cioè a livello quantitativo, dalle rilevazioni fatte sulle prove INVALSI.

[1] item è il termine tecnico internazionalmente accettato per indicare una domanda della prova

Cominciamo però a chiarire lo scopo di questo lavoro:

Problema di ricerca 1 *Lo scopo della tesi è quello di analizzare qualitativamente i processi cognitivi che portano studenti della scuola secondaria di primo grado a rientrare nelle clausole del contratto didattico, in particolare a una clausola per cui la soluzione di un problema non può coincidere con uno dei dati di partenza, generando effetti del contratto didattico.*
Questo può naturalmente essere studiato solo dopo aver verificato su un piccolo campione di studenti che tali effetti si verifichino realmente.

Prima di proseguire si vuole rimarcare l'importanza cruciale che ha il lavoro di Ferretti (2015), i cui punti salienti saranno descritti nelle prossime righe.
Qest'introduzione risulta necessaria visto che le mie rilevazioni sono state fatte su studenti del primo anno di scuola secondaria di primo grado (prima media) mentre l' effetto in questione si è presentato in un item contenuto in una prova INVALSI rivolta alle classi seconde della scuola secondaria di secondo grado (seconda superiore).
Lo studio nasce dalle risposte riguardanti una domanda contenuta in una prova di valutazione nazionale proposta dal Servizio Nazionale di Valutazione dell' INVALSI nel maggio del 2011 a circa 600 mila studenti di scuole superiori di tutti gli indirizzi di specializzazione.
Da questi è stato estratto un campione di 43.458 studenti (più o meno duemila classi) in maniera che fosse un campione eterogeneo rispetto alla provenienza geografica e al tipo di percorso di studi (semplificando c'era un numero di studenti per ogni regione d'Italia proporzionato alla densità di popolazione studentesca, che a loro volta provenivano in parti uguali da di-

versi indirizzi di studio e all'estrazione socio-economica media della scuola).
La domanda posta era:

Domanda 1 *D5 L'età della Terra è valutata intorno ai* $4,5 \cdot 10^9$ *anni. L' Homo Erectus è comparso* 10^6 *anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?*

- *A. 4,5*$\cdot 10^9$ *anni*
- *B. 3,5*$\cdot 10^9$ *anni*
- *C. 4,5*$\cdot 10^6$ *anni*
- *D. 4,5*$\cdot 10^3$ *anni*

Domanda della prova INVALSI D5-livello10, a.s.2010/2011.

La risposta corretta a questa domanda, ovvero la risposta A, è stata data dal 10,21% degli studenti.
Risulta inoltre che il distrattore D, dove l'esponente della potenza è ottenuto sottraendo gli esponenti dei dati, è il più scelto anche dagli studenti più capaci, probabilmente perchè la domanda chiede di fare una sottrazione.
Il distrattore C è il più scelto dagli studenti con scarse conoscenze, mentre la risposta A, quella corretta, è ben interpolata dalla curva descritta dal modello.
Per approfonddmenti sull'analisi dei distrattori, si vedano (Ferretti, 2015, pp. 19-21 e Maffia, 2013).
Due anni dopo nel 2013, fu presentata una domanda simile:

Domanda 2 ***Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa m_p è all'incirca 2·10^{-21} kg, ed un elettrone la cui massa m_e è all'incirca 9·10^{-31} kg.***

Quale tra i seguenti valori approssima megli la massa totale di un atomo di idrogeno.

(m_p+m_e)

- *A. 2 ·10^{-27} anni*
- *B. 11·10^{-31} anni*
- *C. 11·10^{-58} anni*
- *D. 18·10^{-58} anni*

Questa volta la percentuale di risposte esatte è un po' più alta il 17,89 % e i distrattori C e D che hanno come esponente della decina la somma degli esponenti presenti nella consegna sono i più scelti dagli studenti indipendentemente dalle loro capacità.
Anche riguardo a questa domanda si veda (Ferretti 2015, pp.22-23) dove l'argomento è sviluppato nel dettaglio e la comprensione aiutata dai grafici.

2.3 Quadro di riferimento per l'analisi

Per l'interpretazione dei dati raccolti durante la sperimentazione, sarà utile far riferimento ad altri costrutti largamente utilizzati nei testi di didattica della matematica.

Il primo concetto da definire è quello di misconcezione, e si tratta di un processo mentale che si presenta in molte situazioni siano esse didattiche o a-didattiche.
Per definire tale concetto si farà riferimento in particolare all' articolo di D' Amore e Sbaragli (2005).
Una misconcezione si presenta quando, durante la definizione-spiegazione di un concetto, lo studente privilegia alcuni aspetti di tale concetto a scapito di altri creandosi così una definizione alternativa ma errata del concetto stesso.
Il concetto viene richiamato da D'Amore e Sbaragli con esempi e citazioni, per esempio quella di Fischbein (1989):

≪*Non dobbiamo però dimenticare che se i vari tipi di ragionamento analogico da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall'altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengano enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri.*
Se l'analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può essere anche causa di misconcetti o fraintendimenti (Fischbein, 1987; 1989).
Succede spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un problema da risolvere, è portato a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto ad un altro meno noto tramite un trasferimento per analogia.
Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono plausibili per quei particolari sistemi.
Si parla di analogie tacite che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo≫ (D'Amore & Sbaragli, 2005, p.4).
Tenendo conto dei risultati presentati nel paragrafo precedente, si potrebbe pensare ad una misconcezione sull'argomento operazioni con le potenze.

Questo perché, abituati ad operazioni come prodotti e rapporti di potenze, gli studenti automaticamente applicano le proprietà di tali operazioni anche alla somma e alla sottrazione con l'unico scopo di semplificare il calcolo.
Non si deve però trascurare l'ipotesi che dietro questi comportamenti si nasconda qualcosa di più profondo della semplice misconcezione, come ad esempio una clausola del contratto didattico.
Effettivamente, questo comportamento degli studenti presenta molte analogie con l'effetto età del capitano descritto nelle pagine precedenti e sembra l'adesione alla clausola del contratto didattico che viene chiamata (D'Amore, 2007, pp. 347-369) *delega formale.*
E soprattutto non si deve dimenticare l'aspetto cruciale dei quesiti, ovvero che le risposte sono chiuse e la risposta esatta coincide con uno dei dati del problema, e questa situazione coincide appunto con le problematiche di ricerca enunciate in precedenza.

É doveroso fare un'ultima precisazione prima di proseguire.
Finora si è parlato di contratto didattico come la reazione dell'allievo alle aspettative dell'insegnante, inquadrando questa dinamica all'interno della classe.
Si è considerato anche un concetto più ampio come quello di contratto sociale, mostrando che le stesse dinamiche si ripropongono anche al difuori degli ambienti scolastici.
Non si può ignorare che la ricerca di Ferretti è stata condotta su più di quarantamila studenti, di conseguenza gli effetti rilevati non possono essere attribuiti al singolo rapporto insegnante-studente.
Considerando il modello proposto da Chevallard (1985), nel libro *la transposition didactique. Du savoir savant au savoir seine* nel quale allievo, in-

segnante e sapere sono posti sui vertici di un triangolo, (detto triangolo della didattica della matematica), i cui lati rappresentano le relazioni che intercorrono tra i tre soggetti, questo fenomeno non è collocabile sul lato allievo-insegnante e tantomeno su quello insegnante-sapere.
Si deve quindi supporre che le problematiche di ricerca descritte in precedenza siano da attribuire alla concezione stessa che gli studenti hanno della matematica.
Nel triangolo della didattica della matematica appena presentato bisognerebbe collocarla sul lato che ha come vertici allievo e sapere.

Capitolo 3

Metodologia

3.1 Apparato sperimentale

Presentazione dell'ipotesi di ricerca

Prima di iniziare, è doveroso presentare le ipotesi di ricerca, che sono le stesse del lavoro di (Ferretti 2015) ovvero:

Ipotesi di Ricerca 1 *L'ipotesi di ricerca è che si è di fronte a un comportamento dell'allievo che non è spiegabile se non presupponendo, a monte del problema stesso e in qualche modo indipendentemente da esso, che esistano dei principi regolativi specifici che condizionano la sua azione, accettati esplicitamente o implicitamente, dinamicamente negoziati o profondamente interiorizzati e stabilizzati.*

(Ferretti, 2015, p.33).

Con il termine principio regolativo si intendono tutti quei comportamenti che si attivano nel pensiero dello studente, immerso in una situazione di classe.
Questi comportamenti sono strettamente legati all'interazione allievo-insegnante, (si pensi al triangolo della didattica della matematica) e sono fonte di misconcezioni (nel senso di D'Amore Sbaragli 2005), e di costrutti quali le clausole del contratto didattico.
Il nome che viene dato a questo effetto è: *Effetto Età Della Terra* per ricordarne l'origine, ovvero la domanda precedentemente trascritta sull' età della Terra tratta dalle prove invalsi.

3.1.1 Raccolta dati

La sperimentazione descritta in questa tesi si compone di due fasi in cui agli studenti dell'*istituto comprensivo cinque*, scuola secondaria di primo grado di Bologna, classe prima A, sono stati somministrati vari problemi creati apposta per facilitare il verificarsi dei comportamenti enunciati nelle problematiche di ricerca.
Nella prima fase gli studenti hanno lavorato in piccoli gruppi (di 4-5 ragazzi/ragazze) per facilitare il superamento delle timidezze individuali e fare in modo che nel confrontarsi con i compagni di gruppo, gli studenti esprimessero i loro pensieri in totale libertà.
Durante la risoluzione di questi quesiti, gli studenti sono stati filmati e, dopo aver preso visione e coscienza delle dinamiche risolutive, sono stati selezionati 5 studenti come rappresentanti dei gruppi nei quali si sono maggiormente manifestati gli effetti ricercati.
Si vuole precisare che gli studenti hanno lavorato in maniera semianonima,

cioè nel foglio consegato hanno scritto solo il nome proprio senza il cognome. Questa scelta è stata fatta per garantire la privacy dei ragazzi e allo stesso tempo facilitare la scelta degli studenti da intervistare.
Le prove di gruppo si sono svolte nell'arco di un'ora, i gruppi hanno lavorato su al massimo due problemi.
Nella seconda fase, dato che lo studio è di tipo qualitativo, sono stati intervistati i cinque studenti selezionati, per comprendere quali fossero le ragioni del loro comportamento.
Le interviste sono state realizzate singolarmente, ogni studente si presentava in un'aula concessa dalla scuola, e gli venivano poste alcune domande con lo scopo di capire i comportamenti riscontrati nel filmato girato durante il lavoro di gruppo.
Inoltre, durante l'intervista, ad ogni studente è stato sottoposto un problema aggiuntivo tratto da: *Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 2 (Fischbein, 1993, pp. 139-162)* con lo scopo di osservare l'insorgere del fenoeno anche nel caso di una risoluzione individuale.
I filmati sono stati girati con una telecamera portatile per agevolare gli spostamenti all'interno dell'aula, mentre le interviste sono state registrate tamite webcam di un computer portatile.
Nei paragrafi seguenti verranno presentate ed analizzate nel dettaglio le fasi di questa ricerca, verranno descritti i problemi che sono stati sottoposti agli studenti e trascritte le fasi salienti delle interviste.

3.2 I problemi somministrati

Nel seguente paragrafo verranno enunciati i quesiti che sono stati somministrati all'interno della classe.

Questi saranno analizzati singolarmente evidenziando le modalità di creazione degli stessi, quali siano le conoscenze necessarie alla loro risoluzione, quali fossero le conoscenze in possesso degli studenti che li hanno affrontati e risolti.
Si richiama l'attenzione del lettore su una questione fondamentale. Si è scelto di proporre i problemi nella versione che verrà trascritta per facilitarne la comprensione dato che, dopo aver letto attentamente le Indicazioni Nazionali, è emerso che alcuni saperi necessari alla risoluzione non erano ancora in possesso degli studenti (i problemi 1), 5), 6), coinvolgono l'algebra lineare di base).
Durante tutta la descrizione si farà riferimento, anche se non sempre, alle ipotesi e alle problematiche di ricerca enunciate nei capitoli precedenti.
Come già detto i problemi proposti sono 5 per quanto riguarda il lavoro di gruppo, ed uno per quanto riguarda il lavoro individuale.
Un problema supplementare è stato ideato nel caso gli studenti avessero risolto i problemi assegnati in modo particolarmente rapido, e lo analizzeremo comunque anche se non è poi stato presentato agli allievi.
Di sotto sono riportati i testi.

Lavoro di gruppo:

- 1) Mario, al bar sotto casa spende 8 euro per un panino ed una bibita., Luigi ha mangiato due panini e ha bevuto una bibita spendendo 4 euro in più.

  Quanto costano, rispettivamente, un panino ed una bibita?

  Nei problemi 1, 5, 6, come già detto la soluzione si può ottenere con relativa semplicità risolvendo un sistema lineare di due equazioni linearmente indipendenti nello specifico per il problema uno:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Si vede chiaramente che a questo sistema è associata una matrice le cui righe sono vettori linearmente indipendenti, e che con semplici passaggi (ad esempio col metodo di riduzione) si può ridurla all'identità ottenendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Che ci dà la soluzione del sistema.

Questo problema, se osservato con occhi esperti sembra banale, ed il fatto che faccia riferimento a quelli che in precedenza (nel capitolo uno) abbiamo chiamato *problemi reali*, lo rende comprensibile anche a studenti meno esperti.

Il fatto che coinvolga l'algebra lineare è messo in ombra dalla semplicità del contesto in quanto conoscendo la differenza di prezzo tra i due ordini, gli studenti non devono necessariamente operare una combinazione lineare delle righe.

In questo caso l'intuito sopperisce alla mancanza di conoscenze, e gli studenti possono risolvere comodamente il problema con dei semplici calcoli aritmetici, anche se tali calcoli coinvolgono il metodo di sostituzione.

- 2) Un oste deve ordinare 36 litri di vino rosso, 30 di vino bianco e 6 di spumante.

Il fornitore spedisce tutto il vino usando solo botti della stessa capacità e completamente piene.
Utilizza il minor numero di botti possibile.
Quante botti riceverà l'oste?

Anche la soluzione di questo problema risulta relativamente semplice ma non banale.
Il procedimento risolutivo prevede di trovare il massimo comun divisore tra 36, 30, e 6 dopodichè dividere il numero di botti di vino rosso necessarie per il risultato.
Si noti però che la scelta della stesura del problema permette interpretazioni che possono portare a soluzioni alternative che non coinvolgono l'uso del metodo più comune per la ricerca del massimo comun divisore che, come vedremo, saranno quelle adottate dagli allievi.
Lo stratagemma ideato per rilevare l'effetto desiderato è quello di far comparire il numero 6 più volte durante lo svolgimento dei calcoli.
Come detto il ricorrere del numero 6, che è stato appositamente inserito nei dati, dovrebbe far insorgere dei dubbi nello studente portandolo a confrontarsi con la clausola del contratto didattico.
Si tiene a precisare che i saperi necessari alla risoluzione dei problemi non erano, al momento della somministrazione, in possesso degli studenti. Nello specifico gli studenti non conoscevano alcun algoritmo per la determinazione del massimo comun divisore.
La scelta di proporre ugualmente questo quesito è stata comunque approvata dal docente, che lo ha ritenuto idoneo alla classe perché di ì a poco avrebbe affrontato l'argomento.

- 3) Sapendo che $56 \cdot 68 = 3808$ calcolate:
- $5,6 \cdot 68 =$
- $56,0 \cdot 680 =$
- $0,56 \cdot 68 =$
- $560 \cdot 6,8 =$

  Spiegate come avete fatto a ottenere i risultati.

- 4) sapendo che 429:11=39 calcolate
- 4,29:1,1=
- 4290:11=
- 42,9:1,1=
- 0,429:1,1=
  Spiegare come avete fatto ad ottenere i risultati.

Quseti due problemi sono ispirati al lavoro di (Ferretti, 2015) e sono stati ideati per essere somministrati a studenti della scuola primaria. La scelta di usare le divisioni è stata fatta per aggiungere una difficoltà ulteriore, cioè per verificare la presenza di una tipica misconcezione per cui il risultato di una divisione debba essere minore del dividendo (non può essere uguale).
L'analisi matematica di questo problema è presente nel lavoro di Ferretti (2015) e per ogni chiarimento si rimanda il lettore a tale fonte.

- 5) 2 scatole di cioccolatini al latte e 3 scatole di cioccolatini fondenti contengono 13 cioccolatini in tutto, mentre 3 scatole di cioccolatini al latte e 2 di fondenti ne contengono 12.
  Quanti cioccolatini contiene la scatola di cioccolatini al latte?
  Quanti ne contiene quella di cioccolatini fondenti?

  Il problema 5, da un punto di vista strettamente matematico, presenta le stesse modalità di risoluzione del problema uno, eccezion fatta per il sistema che stavolta è:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

Ma riducibile con semplici passaggi (metodo di riduzione di Gauss) a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sinteticamente basta fare:

$$R_1' = \frac{R_1 + R_2}{5}$$

Ottenendo la prima equazione del sistema del problema 1.

$$R_2' = R_1 - R_1'$$

Ottenendo un sistema analogo a quello del problema uno:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

La somministrazione di tali quesiti, ad un gruppo di allievi, è stata fatta secondo quello che si può descrivere come un percorso in salita. Analogamente ad una strada di montagna, il ragazzo comincia con una piccola pendenza, (il problema 1) poi si cimenta in qualcosa di simile ma più impegnativo il problema 5.
Un altro gruppo invece ha affrontato il problema 5 direttamente, durante l'analisi dei risultati confronteremo le tecniche usate per la risoluzione.

- 6)(PROBLEMA SUPPLEMENTARE) Giuseppe fa il traghettatore ma, fino a poco tempo fa, possedeva solo una barca e tre gommoncini.
  Con queste imbarcazioni riusciva a trasportare fino a 14 persone.
  Adesso Giuseppe ha comprato altre quattro barche. Per portare un gruppo di turisti sull'isola di Capri ha dovuto riempire completamente le sue cinque barche. Al ritorno decide però di usare i suoi tre gommoncini: fa salire tutto il gruppo sui gommoncini ma si rende conto che manca il posto per ben 16 turisti.
  In base alle informazioni fornite nel testo, determinate quante persone possono essere trasportate con una barca e quante con un gommoncino.

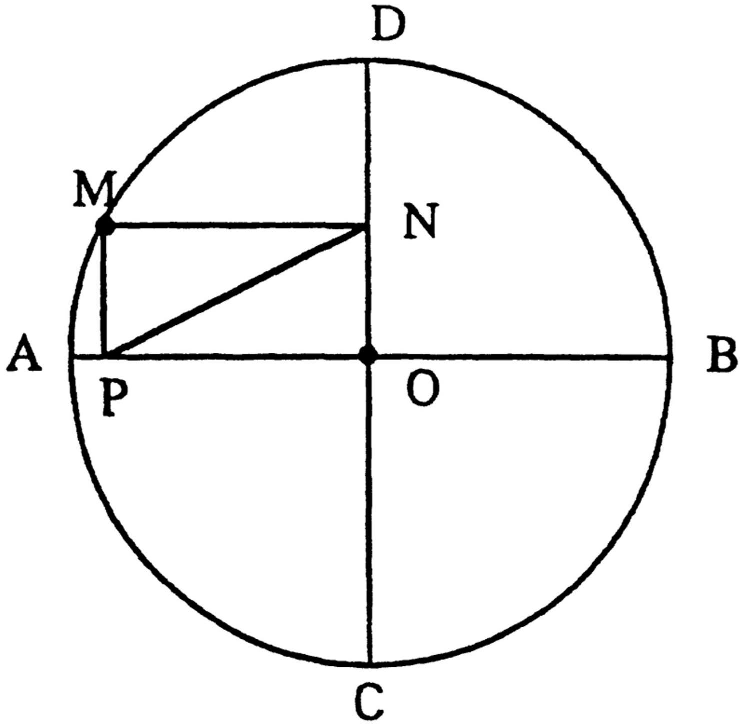
Il problema 6 è analogo nella risoluzione, ma dal punto di vista di un undicenne presenta una difficoltà maggiore.
Infatti la matrice associata al sistema ha dei coefficienti negativi al suo interno come si vede il sistema si presenta così:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$$

e la sua versione matriciale prima della riduzione è:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Questi coefficienti negativi, per uno studente totalmente digiuno di algebra lineare, ostacolano la comprensione e complicano la risoluzione.
Per quanto riguarda i problemi 3 e 4, come già detto, questi quesiti sono emulazioni di alcuni problemi citati in (Ferretti, 2015) elaborati appositamente per rilevare l'effetto desiderato in studenti di scuola primaria.
La scelta di questo tipo di quesiti è stata dettata da fatto che ci si aspetta siano più semplici perciò proponendoli ad una classe prima risultano i più idonei allo scopo.
Infatti le conoscenze di base, per risolvere tali quesiti si acquisiscono alla scuola primaria, e quindi tutti gli studenti avevano acquisito, al momento della somministrazione, i saperi necessari per affrontarli.



Problema proposto durante le interviste

Il problema proposto durante le interviste dei singoli, è invece il seguente:

Si consideri nel piano la circonferenza $\mathcal{C}$ centrata in O e di raggio 4 cm. Si traccino su di essa due diametri perpendicolari, $\bar{AB}$ e $\bar{CD}$
Si scelga su $\bar{AB}$ un punto P, che non coincida con gli estremi e si tracci la retta r passante per P e perpendicolare ad $\bar{AB}$.
Tale retta interseca la circonferenza nel punto M. Si tracci ora la retta s parallela ad $\bar{AB}$ e passante per M, che incontra il diametro $\bar{CD}$ nel punto N.
Dati che $N\bar{O}PQ$ per come è stato costruito è un rettangolo, determinare la lunghezza della diagonale $\bar{PN}$.

L'enunciato risulta difficile alla comprensione, ma la figura chiarisce tutti i dubbi.

Questo problema, che può sembrare facile in apparenza, in realtà presenta delle difficoltà oggettive non trascurabili.

La sua risoluzione infatti, richiede di saper riconoscere cose non esplicite, come la presenza della diagonale $\bar{PN}$ o quantomeno una certa confidenza con gli endomorfismi ortogonali dello spazio euclideo bidimensionale in se stesso, nel caso specifico le rotazioni.

Un'ultima precisazione è doverosa, in sede di somministrazione del problema, con lo scopo di migliorarne la comprensione, è stato attribuito un valore numerico al raggio del cerchio. Questo valore era deciso in maniera arbitraria di volta in volta per evitare che gli studenti si passassero l'informazione.

Si tiene a precisare che, salvo il problema riguardante la circonferenza, i testi sonooriginali e sono stati redatti appositamente per questa tesi.

3.3 Trascrizione del lavoro degli studenti

Ricordando quanto detto in precedenza, la sperimentazione è stata condotta all'interno della classe e, durante la risoluzione dei problemi, gli studenti sono stati filmati.
Di seguito verrano descritte le dinamiche di risoluzione rilevate nei filmati, verranno trascritti i dialoghi e le interviste in cui si palesa l'effetto descritto nelle problematiche di ricerca precedentemente enunciate.
Verranno inoltre presentate le spiegazioni trascritte dagli allievi per giustificare i risultati.
Le prime risposte che verranno riportate sono quelle di un gruppo di studenti che ha affrontato i problemi 1 e 5 in successione come precedentemente detto.
Il gruppo era composto da quattro elementi, (Carlo,[1] Michael, Maddalena e Sara) ed è uno dei gruppi in cui si è palesato l'effetto del contratto didattico citato nelle problematiche di ricerca.

Le risposte ai quesiti risultano giuste in entrambi i casi. Riportiamo di seguito le risposte date e la trascrizione fedele delle spiegazione addotte.

Risposta del gruppo 1 *Rispetto al problema uno la risposta è stata:*

Il panino costa quattro euro, la bibita costa quattro euro.

Il panino costa quattro euro, perchè Luigi che ne ha mangiato solo uno in più di Mario rispetto a lui ha pagato soltanto quattro euro in più.

La bibita invece costa quattro euro perchè sottraendo dalla spesa di Luigi il

[1] I nomi dei ragazzi sono stati sostituiti con degli pseudonomi per questione di privacy

costo di due panini avanzano proprio quattro euro.

Rispetto al problema cinque la risposta è stata: I cioccolatini fondenti sono tre mentre quelli al latte sono due.
Facendo alcuni tentativi, dato che due scatole di cioccolatini al latte e tre di fondenti sono tredici ciocclolatini e 3 scatole di cioccolatini al latte e due di fondenti sono solo un cioccolatino in meno abbiamo scoperto che i cioccolatini al latte erano meno di quelli fondenti.
Eseguendo varie sottrazioni, visto che non esistono scatole con mezzo cioccolatino, siamo venuti a sapere che la quantità in ogni scatola era :-)

Di seguito la discussione riguardo il problema 1:
1 C: Allora un panino costa quattro euro...
2 Ma: Sei sicuro e perché?
3 C: (con molta sicurezza) Perché Luigi ha mangiato solo un panino in più e ha pagato quattro euro in più.
4 Mi: e Ma. e la bibita?
5 C:Lla bibita costa, vediamo... quattro euro... Ma mi sembra strano... Fa tutto quattro!
6 S: Ma è giusto, se un panino e una bibita costano otto euro e un panino costa quattro!
(Decidono di comune accordo di essere arrivati alla soluzione giusta).

Alla luce di quanto si è detto nelle pagine precedenti riguardo le clausole del contratto didattico, questo risultato è molto eloquente.
Andiamo a vedere nel dettaglio i risultati del primo gruppo.
Per prima cosa il problema ha prodotto proprio il comportamento indagato.

Quando, alla riga 5, C. dice:
- mi sembra strano che faccia tutto quattro- lo fa perché è all'interno di un costrutto mentale proprio delle dinamiche scolastiche, simile a quelli presentati.
Si può inoltre escludere ogni ipotesi rigurdante errori dovuti a misconcezioni dato che gli studenti, nonostante abbiano risolto il problema, non conoscevano l'algebra lineare e quindi non avevano a disposizione nessuna procedura "precostruita" per affrontare il problema.
Di conseguenza non possedendo i saperi necessari alla risoluzione non potevano averne frainteso il senso.
Ultima considerazione dovuta riguarda il fatto che la dinamica di gruppo riesca a scardinare la clausola del contratto didattico, come se il confronto tra pari potenzi la libera espressione dei singoli (si pensi a quel che dice S. riguardo la correttezza dei calcoli alla riga 6).

Andremo ora ad analizzare la discussione che nel filmato ha portato alla risoluzione del problema cinque, anche in questo dialogo emergono particolari interessanti.

7 C: I fondenti potrebbero essere quattro come potrebbero essere cinque.
8 Ma: No, guarda due scatole al latte e tre fondenti fanno tredici e deve essere un numero (sottintende naturale, poi fa una piccola pausa) secondo me le scatole di quelli al latte sono più uno.
9 C: No, (rilegge il testo) ciò vuol dire che quelli fondenti sono di più.
10 Ma: E quel di più dev'essere un numero.
11 C: Potremmo fare dodici diviso due (attimo di riflessione) ma siamo sicuri che è possibile?

12 Ma: Sì ma se quelli al latte sono sei e differiscono di uno... (non viene ascoltata, parla troppo a bassa voce)

13 C: Allora dato che alla gente piace di più la cioccolata al latte...

14 R[2]: Ma tu su cosa la basi questa informazione...

15 C: É impossibile (guarda verso il docente).

16 R: É come prima, cambiano i numeri.

17 C: Allora uno dei due è un cioccolatino in meno degli altri..

18 Ma: Ma?(guarda altrove)

19 S: Sì, secondo me c'è un dato nascosto.

20 C: Secondo me, se qui sono dodici (indica il foglio) e qui tredici (guarda il foglio) c'è un cioccolatino di differenza e non credo possa essere metà e metà. (guarda il ricercatore)

21 R: No, mezzo cioccolatino non può esserci in una scatola bravo.

22 Ma: (scrive lo mostra a Sara che annuisce) Guarda (lo porge a Carlo).

23 C: No, ma è impossiblile..

24 Mi: Guarda uno metti due e l'altra metti tre.

25 C: Sono due al latte e tre fondenti perchè fa tredici e qua dodici (indica il testo del problema)

Dopodichè cominciano a scrivere la risposta.

In primo luogo poniamo l'attenzione sulle dichiarazioni di Ma., che per prima si accorge che sottraendo il contenuto dei due gruppi di scatole avanza un cioccolatino.

Le sue proposte possono essere lette come un tentativo di riformulare il problema in maniera a lei più comprensibile, il cui testo potrebbe esere:
trovare due numeri consecutivi tali che sommando il triplo del maggiore ed il doppio del minore si ottenga tredici.

[2]R sta per ricercatore cioè io stesso ho consigliato i ragazzi sulla sintassi della risposta

Interessante, alla luce di quanto detto finora, la frase di C. alla linea 11 perché prende in considerazione l'eventualità che il problema non abbia soluzione evitando così di cadere nei comportamenti tipici degli effetti del *contratto didattico*.
Un altro elemento che emerge da questo dialogo è la propensione di C. per l'algebra lineare, dopo il consiglio del ricercatore riconduce il problema a quello precedente, e fa la combinazione lineare delle due righe della matrice ottenendo l'equazione:

$$x - y = 1$$

Questa nuova informazione però potrebbe aver vincolato il pensiero del ragazzo che non sta più pensando in modo originale ma sta eseguendo un'operazione già conosciuta, la stessa operazione fatta nel problema uno.
Questo nuovo comportamento unito alla convinzione che, trattandosi di cioccolatini, si stia lavorando all'interno dell'insieme dei numeri interi, porta alla risoluzione del problema.
Possiamo inoltre notare l'importanza della dinamicha di gruppo da cui emerge che dopo il primo problema risolto da C. con relativa semplicità, i compagni si fidano di lui e ascoltano i suoi ragionamenti.
Dall'altro lato la sua è l'unica voce ascoltata, e questo provoca un ritardo nella risoluzione del problema nonostante Ma. avesse già imbocco la strada giusta alla riga otto.
Come in precedenza il lavoro di gruppo aiuta a superare i dubbi, il confronto tra pari e la relativa presenza dell'insegnante favoriscono la libera espressione delle idee.

Il secondo gruppo, ha invece affrontaro il problema cinque senza aver prima visionato il problema uno, la soluzione risulta comunque esatta ma è cambiato il procedimento.

Vediamola nel dettaglio:

Risposta del gruppo 2 *rispetto al problema cique la risposta è stata:*

$$\begin{cases} 2Latte + 2Fondenti = 13ciocc. \qquad 13 : 5 = 2,6 \\ \qquad\qquad 3Latte + 2Fondenti = 12ciocc. \end{cases}$$

Abbiamo fatto un tentativo 13-3·3 perchè le scatole di cioccolatini fondenti sono 3, in seguito abbiamo diviso il risultato per 2 ed è risultato 2.

Poi sapendo che le scatole di cioccolatini fondenti ne contengono 3 abbiamo fatto $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3$ *ed è risutato 6+6 che fa 12.*

Risposta.

le scatole di cioccolatini al latte contengono 2 cioccolatini e quelle di cioccolatini fondenti ne contengono 3.

É evidente che questa soluzione non rispecchia il procedimento usato per ottenerla, non si possono quindi trascurare effetti molto simili a quelli studiati finora.

Infatti il sovrautilizzo dei dati descritto nella frase:

-Abbiamo fatto 3x3 perché le scatole di cioccolatini fondenti sono 3,- ricorda molto l'età del capitano dove, in mancanza di dati o in questo caso di sapere, (ricordiamo che in prima media non si conoscono i sistemi di equazioni) l'allievo manipola quello che ha per dare una risposta.

Differentemente dal problema sull'età del capitano, in questo una risposta giusta c'è ed è notevole il fatto che, dopo aver manipolato in qualche modo i dati che compongono la prima equazione, gli studenti si premurino di usare la seconda equazione per verificarne la correttezza.

Inoltre l'operazione svolta accanto alla prima equazione, dà una chiara indicazione sul numero di cioccolatini presenti nelle scatole, se si considera che 0,6 cioccolatini non si possono trovare in una scatola.
In particolare questo comportamento degli studenti si può ricondurre alla clausola del contratto didattico presentata in precedenza e nota come *delega formale,* e ricorda il comportamento corretto da adottare per risolvere il *problema dei soldati* (D'amore & Martini, 1997, pp. 2-4) inquanto il risultato corretto del problema presenta le approssimazioni per eccesso e per difetto del numero 2,6.

Il gruppo era composto da Elisa, Patroclo, Mario e Antonio, di seguito viene esposta la discussione che ha portato alla soluzione del problema:

Dialogo Gruppo 2

Pa: allora facciamo tre meno tre meno tre che fa nove, ne restano quattro due e due fa tredici.

26 El: Qua invece sono due per tre che fa sei e tre per due che fa sei...(attimo di riflessione)

27 Ma: Sei e sei che fa dodici però.

28 El: Ma sono le scatole?

29 Pa: Abbiamo già sbagliato...

30 An: Scrivi due cioccolatini al latte.

31 El: No, scrivi un latte uguale tre..(attimo di silenzio) Cosa scriviamo? (Antonio si convince, prende la penna rossa e scrive: "Risposta" poi prende la penna blu)

R: Scrivi: una scatola di cioccolatini ... contiene ...

32 An: Sì, ma qual è la risposta? Va bene scrivi abbiamo fatto...

Dopodichè comincia la trascrizione della risposta consegnata.
Combinando quanto scritto sul foglio consegnato e quanto viene detto nel filmato si riscontrano entrambi gli effetti citati nelle pagine precedenti.
Ribadiamo che l'utilizzo scorretto dei dati in nome di una risposta a tutti i costi è un tipico comportamento dovuto all'effetto età del capitano, mentre le parole alla riga 10 possono far pensare all' effetto *età della Terra*.
Come in precedenza, il lavorare in gruppo fa passare il dubbio: l'intervento della riga 13 genera in tutti la convinzione che il problema sia ormai risolto e che bisogna concentrarsi sul rendere comprensibile la risposta.
Interessante è il fatto che dopo l'intervento dell'adulto il dubbio torni, almeno per qualche istante, alla riga 15.

Al terzo gruppo di studenti sono stati proposti i problemi due e quattro, di seguito trascriveremo il metodo risolutivo adottato.

Risposta del gruppo 3 *Riguardo al problema due la soluzione trascritta è stata:*

Abbiamo fatto molti tentativi facendo divisioni.

Abbiamo provato come prima cosa con il numero due, ma il risultato ottenuto era sbagliato perché non era il numero più piccolo che potessimo trovare

e il problema ci chiedeva di trovare il minor numero possibile di botti.
La giusta operazione è quindi trentasei diviso sei, perchè provando numeri più piccoli del sei, e che dividono anche il trenta e il sei si ottengono sempre più botti.

Riguardo al problema quattro la risposta è stata:

- *4,29:1,1=3,9*
- *4290:11=390*
- *42,9:1,1=39*
- *0,429:1,1=0,39*

Abbiamo fatto tutti i conti in colonna, ci sono venuti tutti i risultati e per essere sicuri li abbiamo rifatti.

Riguardo la risoluzione di quest'ultimo problema non emergono evidenti comportamenti sospetti che possano ricondurre agli effetti desiderati.
Si deve però tener presente che l'aver esplicitato nella risposta, il fatto di "aver fatto tutti i conti" potrebbe essere riconducibile all'effetto di delega formale citato nei primi capitoli.
Infatti la ripetizione intesa nela frase "per essere sicuri li abbiamo rifatti,"

può essere considerato come lo scaricare la responsabilità del risultato sull'operazione.
Si deve anche tenere in considerazione, riguardo il problema quattro, che gli studenti si accorgono che il risultato coinvolge sempre il numero trentanove solo dopo aver svolto i calcoli due volte.
Nel filmato non sono presenti dialoghi interessanti a riguardo, quindi si è scelto di evitarne la trascrizione.
In ogni caso si è scelto di estrarre anche un componente di questo gruppo per le interviste individuali per sottoporgli il problema sul rettangolo.

Passando ai risultati del quarto gruppo si possono riscontrare fenomeni più interessanti.
Il gruppo in questione era formato da Giulia, Marco, Livia, e Justine e ha affrontato solamente il quarto problema.

Risposta del gruppo 4 *Nella prima operazione abbiamo trasformato dividendo e divisore per dieci, per riuscire a calcolare le divisioni perchè non si può svolgere una divisione coi decimali.*
Dopo aver applicato questo processo a tutte le operazioni abbiamo potuto svolgere i calcoli e abbiamo ottenuto[3]*:*

- *nella prima 3,9 (4,29:1,1=3,9)*
- *nella seconda 390,0 (4290:11=390)*
- *nella terza 390 (42,9:1,1=39)*

[3]tra parentesi i risultati corretti

- *nella quarta 0,39 (0,429:1,1=0,39)*

Nel filmato non ci sono conversazioni interessanti a riguardo, i ragazzi si dividono i compiti, essendo in quattro ognuno svolge un'operazione e poi le controllano in modo che ognuno esegua tutti i calcoli richiesti.
Il video non fa emergere nemmeno il fatto che si siano accorti che il risultato è sempre lo stesso e basta spostare la virgola.
Si tiene però a sottolineare che in fase di stesura della risposta il ricercatore si allontana per non mettere pressione agli allievi e quindi non è disponibile il video del momento della stesura della risposta.
É probabile che il confronto tra i menbri del gruppo sia avvenuto in quel momento.
Rilevante appare invece ciò che viene riportato nel foglio risposte, infatti l'item tre, ovvero quello che ha la risposta uguale al dato di partenza, risulta errato.
Considerando le modaltà di risoluzione del problema adottate dai ragazzi, la risposta è stata controllata almeno quattro volte e comunque risulta errata.
Quindi si può supporre che questo errore sia una manifestazione dell'effetto enunciato nell'ipotesi di ricerca dato che il risultato dell'item tre coincide con quello dell'operazione nel testo.

Il quinto ed ultimo gruppo di studenti (formato da Alessia, Katerina, Yassin e Gertrude), ha affrontato il problema tre.
Anche in questo caso, l'esecuzione di operazioni ha richiesto molto tempo soprattutto nella fase di controllo, e gli studenti non hanno potuto cimentarsi in altri quesiti.

Risposta del gruppo 5 *La risposta del quinto gruppo al problema tre è stata:*

- $5,6 \cdot 68 = 380,8$
- $56,0 \cdot 680 = 3808,0$
- $0,56 \cdot 68 = 38,08$
- $560 \cdot 6,8 = 3808,0$

Abbiamo calcolato le quattro operazaioni e trovato i risultati. Abbiamo constatato che i numeri ottenuti sono sempre gli stessi soltanto che si devono cambiare le posizioni delle virgole e aggiungere alcuni zeri.

Le modaltità di risposta che vengono evidenziate nel filmato sono analoghe a quelle adottate dal quarto gruppo, le quattro operazioni vengono svolte dai membri del gruppo e poi controllate e ricontrollate, il confronto tra i membri viene fatto in fase di stesura della risposta e quindi non è presente nelle registrazioni per le ragioni citate in precedenza.
Non si hanno manifestazioni chiare dell'effetto ricercato, anche se la necessità di inserire lo zero dopo la virgola nella quarta risposta può essere interpretata come la necessità di avere un elemento di discrepanza tra dati e risposte.

3.4 Le interviste

In questo paragrafo verranno presentate le interviste fatte ad alcuni studenti con lo scopo di capire quali fossero i motivi che hanno portato a scegliere i metodi risolutivi descritti nel paragrafo precedente.
Si è scelto di trascrivere solo le interviste che hanno dato esito positivo nella rilevazione dell'effetto descritto nell'ipotesi di ricerca o particolare rilevanza agli altri aspetti.
Le interviste sono state trascritte una dopo l'altra per poter analizzare le analogie nelle risposte e poterne dare classificazione.
Le interviste sono durate circa 20 minuti l'una, i ragazzi sono stati intervistati singolarmente, nei primi dieci minuti veniva fatto vedere allo studente il video registrato durante il lavoro di gruppo e gli veniva chiesto di commentare tale registrazione.
Successivamente veniva loro proposto il problema della diagonale del rettangolo precedentemente trascritto.
La scelta degli studenti da intervistare è stata fatta, dopo un'accurata visione del filmato, in collaborazione con il docente scegliendo gli studenti più sicuri, o che si erano distinti in qualche modo durante il lavoro, anche per evitare che la timidezza fosse un ulteriore ostacolo.
É doveroso premettere che la trascrizione delle interviste ometterà tutte le frasi adoperate dal ricercatore per mettere a proprio agio lo studente, a meno che non siano ritenute pertinenti o abbiano avuto un impatto a livello emotivo tale da indirizzare il soggetto nella giusta direzione.
La scelta del rappresentante del primo gruppo è ricaduta su C., di seguito proponiamo la trascrizione dell' intervista:

(viene fatto visionare il video nel momento che coincide con la riga quattro del precedente paragrafo)

1 R: Perché ti sembra strano che faccia tutto quattro?

2 C: Perché non è normale che un problema di matematica sia così semplice ed...(attimo di attesa) É strano insomma...

3 R: E come mai poi avete optato per credere che quella fosse la soluzione giusta?

4 C: Non c'era altro modo insomma... Abbiamo pensato che non ci fosse niente di male.

5 R: Bene e riguardo al problema dei cioccolatini?

6 C: Ah quello era difficile, pensavo fosse impossibile.

7 R: Quindi può esistere un problema impossibile?

8 C: Sì, ma poi l'abbiamo risolto insomma è strano avere un problema impossibile. Era molto difficile però c'era la soluzione....

9 R: Va vediamo questo. (gli viene mostrato il problema scelto per le interviste senza testo, solo la figura)

10 R: Sapendo che il raggio del cerchio è 4,5 cm quanto vale la diagonale ? (segue un breve ripasso riguardante le nozioni sulla circonferenza e sui parallelogrammi acquisite precedentemente: lo studente ricordava tutte le nozioni studiate alla scuola primaria e il ricercatore le formalizzava.).

11 C: Ah sicuramente è più di questo (mostra la base del rettangolo) ma questo non lo so...

12 R: E che cosa abbiamo appena detto sui rettangoli?

13 C: (Ripete tutto quello che sa sui rettangoli senza nominare le diagonali).

14 R : Sì, ma cosa ti chiede il problema?

15 C: La diagonale PN.

16 R: E cosa sappiamo sulle diagonali?

17 C: Sono uguali... (continua)

18 R: Quindi le diagonali sono due e qui ce n'è una sola?

19 C: L'altra è questa (segna OM con la matita e si ferma)

20 R: E la conosciamo OM?

21 C: No? (non molto convinto)

22 R: Rivediamo quello che abbiamo detto su cerchio.

23 C:(Ripete tutto quello che sa selle circonferenze)

24 R: Fammi vedere quali sono i raggi

25 C: (Mostra due raggi già disegnati)

26 R: Solo quelli o ne puoi tracciare altri?

27 C: No, ce ne sono tanti (comincia a tracciare raggi col dito si ferma sul punto M) ma questa è la diagonale che è uguale allora fa 4,5 cm perché le diagonali sono uguali e una è lunga come un raggio.

Il secondo studente ad essere intervistato è stato G del terzo gruppo; di seguito la trascrizione.

28 R: Raccontami un po' come avete risolto questo problema.

29 G: Allora, innanzi tutto io ho fatto solo le operazioni è F. il genio...

30 R: D'accordo, ma ti ricordi come si fa? C'è un oste...(rilettura del problema).

31 G: Sì, sì, so come si faceva, tutte le botti dovevano essere uguali perché trentasei diviso due abbiamo visto che poi non dava... poi abbiamo fatto tutte le altre divisioni e a sei ci siamo fermati.

32 R: Bene, e con le operazioni? (indica il problema 4).

33 G: Tutto bene abbiamo fatto i conti.

34 R: E dei risultati cosa mi dici?

35 G: Penso che siano giusti, insomma li abbiamo rifatti e...

36 R: Molto bene passiamo a questo (mostra la figura del problema per le interviste) se il raggio è 4 cm quanto vale la diagonale del rettangolo?

37 G: No, senta, io non sono adatta a queste cose.

38 R: Non preoccuparti. (Rassicura lo studente)

39 G: Sì, ma non so...

40 R: Pensiamoci insieme, cos'è un cerchio o meglio una circonferenza?

41 G: Una circonferenza? Non saprei...

42 R: Calmati, come lo disegno un cerchio?

43 G: Prendo il compasso lo punto e (mima con le dita l'uso del compasso)

44 R: (Dà la definizione formale di circonferenza come il luogo dei punti...)

45 G: (Comincia a riesumare tutte le nozioni utili in particolare quella di raggio)

46 R: Molta brava adesso parliamo del rettangolo.

47 G: (Ricorda le nozioni sul rettangolo ma non parla di diagonali). Un attimo lei cosa mi sta chiedendo?

48 R: Vorrei sapere quanto è lungo PN?

49 G: Un attimo riformuliamo...

50 R: Sì, facciamo attenzione, cos'è PN per il nostro rettangolo?

51 G: La diagonale!

52 R: (Definizione formale di diagonale come il segmento che congiunge due punti non consecutivi di un poligono) E quante sono?

53 G: Due! Ok, e io cosa devo trovare?

54 R: Vogliamo sapere quanto misura la diagonale PN partendo dal fatto che il raggio è 4 cm.

55 G : Allora, lei mi sta dicendo che questa distanza (indica con il dito AO) è quattro centimetri e mi sta chiedendo?

56 R: Questo (indica PN)

57 G: Ah, (con molta tranquillità) è quattro centimetri.

58 R: Sapresti dirmi perché?

59 G: Perché questa parte non è dritta (indica il disegno per far capire che è sicuramente più lunga del lato) e se la porto giù...

60 R: No aspetta, cosa stiamo cercando? La... per il rettangolo...

61 G: Diagonale PN... (Pensa)

62 R: E come possiamo fare?

63 G: Così! (Con le dita mostra che PN coincide col raggio)

64 R: Ma quindi a occhio?

65 G: Eh, sì dai si vede che...

66 R: Ma in matematica non si fa niente ad occhio... Allora rifletti, (rassicura l'allievo) cerchiamo la diagonali giusto?

67 G: Giusto allora...

68 R: Un attimo cos'è la diagonale?

69 (Pensa un secondo poi ripete la definizione corretta data dal ricercatore e ripassa in particolare cita il fatto che le diagonali sono due e sono uguali).

70 G: É questa! (indica PN).

71 R: E quante hai detto che sono?

72 G: Due...

73 R: E dov'è l'altra?

74 G: A è un raggio indica MO.

Un'altra intervista degna di nota, per l'originalità nella risoluzione e la padronanza delle trasformazioni isometriche del piano in sè, è quella di J. del gruppo tre.

Sarà trascritta solo nella parte riguardante il problema per enfatizzare le suddette ragioni.

Si deve però tener conto, leggendo la trascrizione, che le risposte alle domande sullo svolgimento e sui processi risolutivi adottati per la risoluzione dei problemi ricalcano in sostanza quelle di G.

75 R: (Consegna e spiegazione del problema segue piccolo ripasso simile a quello descritto nell'intervista a G.). Allora se il raggio del cerchio è 3,5 cm quanto vale la diagonale PN?

76 J: Secondo me è tre centimetri e mezzo.

77 R: Straordinario, sapresti spiegarmi perché?

78 J: Perchè se questo lo metto in diagonale va a finire qua (con le dita fa girare AO su OM emulando il gesto del compasso usato durante il ripasso) e se questo lo giro sono uguali (fa ruotare il rettangolo con la mano in modo da far coincidere PN con OM).

3.5 Analisi e classificazione delle risposte

Notiamo subito che, già dalle prime righe dell'intervista a C. (riga 1), è evidente la presenza dell'effetto del contatto didattico presentato nelle ipotesi di ricerca.

L'asserzione per cui (riga 2) non è normale che un problema di matematica sia così semplice, può essere interpretata come una chiara manifestazione dell'effetto desiderato.

É doveroso ricordare quanto detto nei primi capitoli riguardo alle norme di contratto sociale, infatti questa frase sottintende una visione della matematica come una materia che deve essere difficile a priori.

L'esistenza di un problema relativamente semplice viene interpretata dallo studente come una rottura delle *convenzioni sociali*, e di tutti quei taciti accordi costruiti nel tempo.

Anche nelle afferrmazioni riguardanti il problema cinque l'intervista a C. fa emergere tematiche interessanti.

Nella riga 5 ad esempio viene presa in considerazione la possibilità di un problema senza soluzione, scardinando completamente la clausola del contratto didattico precedentemente discussa e che prende il nome di *età del capitano*.

La cosa interessante è che dopo l'intervento dell'adulto, R. lo studente rimette in discussione le sue certezze ammettendo che un problema senza soluzione è una cosa insolita, e premettendo il fatto che alla fine le capacità del gruppo hanno portato ad una soluzione.

Questo atteggiamento (uso del plurale alla riga 8 dopo che alla riga 6 usa il singolare) può essere interpretato come la necessità di condividere con i compagni la responsabilità della rottura della clausola del contratto didattico.

Il fatto che i compagni lo sostengono lo sgrava da questa assunzione di responsabilità, come se l'autorità di una decisione di gruppo fosse pari a quella dell'adulto.
Ricordando la trascrizione dei dialoghi del video fatto durante la risoluzione, (cap. 3,3 riga6) si puo notare che S. rassicura C. sull'esattezza della risposta, e questa frase si traduce nell'intervista in: "una presa di coscienza generale (riga 4)".

Nella seconda intervista, si può notare la comparsa dell'effetto di *delega formale* presentato in precedenza.
Alla riga 35 si legge "li abbiamo rifatti" che può essere interpretata come una manifestazione del fatto che una volta fatta l'operazione tutta la responsabilità riguardo i risultati passa dallo studente all'operazione stessa.
Un'altra frase degna di nota, è quella che si legge alla riga 29 in cui G. ammette che nel gruppo tutta la fiducia degli studenti è riposta in F.
A questo proposito si ritiene interessante osservare che tutti i gruppi che hanno, esplicitamente o tacitamente, eletto un leader, si sono potuti cimentare in due problemi.
Quelli in cui questa presenza (del leader) non è manifesta, hanno impiegato più tempo nella risoluzione dei problemi, e al momento della consegna hanno presentato la soluzione di un solo problema.
Queste due dichiarazioni cioè la delega del risultato alle operazioni e il riconoscimento della leadership di F., sono presenti anche nell'intervista di J. anche se non sono state trascritte.

Si può quindi ipotizzare che la dinamica di gruppo abbia influito positivamente su un aspetto precedentemente trattato, che riguarda l'assunzione di responsabilità da parte degli allievi che debbano rompere le clausole del

contratto didattico.
A sostegno di questa ipotesi si aggiunge il fatto che, nella prima intervista (alla riga 4) si può leggere che il giudizio del gruppo aiuta l'accettazione dell'esistenza di un problema semplice.

Tutte queste ipotesi verranno discusse ulteriormente nel capitolo 4.

3.5.1 Dinamica allievo Insegnante

Questa sezione è dedicata all'analisi delle risposte date dagli studenti intervistati, durante la risoluzione del *problema proposto durante le interviste.*
Verranno analizzati e classificati i comportamenti degli allievi, riguardo all'interpretazione del testo, ai metodi adottati per la risoluzione, e alle dinamiche legate all'interazione allievo ricercatore.
Durante tutta la trattazione si terrà presente il lavoro di (Fischbein, 1993) dal quale è stato estratto il problema, e che analizza nel dettaglio le difficoltà di quest'ultimo.
In particolare, la difficoltà maggiore è quella di immaginare oggetti non esplicitati, nella fattispecie la presenza della diagonale OM che coincide con il raggio.
Questa difficoltà si manifesta nei primi due studenti intervistati, nello specifico quando (righe 24-27) a C. viene chiesto di indicare un raggio lui segna con le dita solo quelli già disegnati, e serve l'intervento del ricercatore per farlo riflettere sul fatto che in realtà un cerchio ha infiniti raggi.
Per quanto riguarda G. questa difficoltà si nota nel dialogo che sta tra le righe 70-74.
Il fatto che una volta superata la difficoltà nell'immaginare la diagonale non

disegnata il problema venga immediatamente risolto, allinea i nostri risultati a quelli del lavoro di (Fischbein, 1993).
Un'altra doverosa considerazione dev'essere fatta riguardo la strada scelta da J. per risolvere il problema.
Il dialogo che sta tra le righe 75 e 78 non può assolutamente essere trascurato, infatti lo studente in questione dimostra una padronanza delle isometrie del piano in sè, che sta al di sopra di quanto ci si potrebbe aspettare da uno studente di una classe prima della scuola secondaria di primo grado.
Un'ultima osservazione riguarda il fatto che l'effetto *età della Terra*, presentato nell'ipotesi di ricerca, non si verifica in nessuna intervista.
Questo evento potrebbe essere dovuto al fatto che gli studenti, avendo afrontato qualche settimana prima problemi creati con lo scopo di far emergere l'effetto desiderato, si siano in qualche modo immunizzati, come succede per le vacinazioni.
É doveroso però tenere in considerazione che le interviste sono state fatte su studenti selezionati, che si erano messi in luce durante la registrazione del video del lavoro di gruppo soprattutto per lo spirito di iniziativa, e quindi potrebbero essere più inclini a quel modo raginare divergente che serve per rompere le clausole del contratto didattico.
Riguardo le dinamiche del rapporto uno ad uno tra Ricercatore ed allievo, è doveroso dire che per la maggior parte del tempo dedicato alle interviste, il ricercatore incoraggia il ragazzo al libero pensiero e si pone in modo da fargli capire che crede veramente che possa arrivare da solo alla soluzione del problema.
Tuttavi, in alcuni casi il supporto dell'intervistatore si concretizza in una vera e propria guida verso la soluzione.
In più all'inizio di ogni intervista, lo studente viene rassicurato sul fatto che

non si tratta di un'interrogazione e, in ogni caso, non sarà in alcun modo giudicato o valutato.

Si deve quindi tener conto del fatto che lo studente viene messo, per quanto possibile, in una zona di confort e questo non risponde completamente a quelle che sono le reali dinamiche di classe che si instaurano durante l'assegnazione di una prova.

Capitolo 4

Discussione e conclusioni

4.1 Analisi dei risultati

In questo capitolo verranno analizzati i risultati ottenuti durante la ricerca e, considerando il lavoro fatto, verranno proposte alcune tematiche rilevanti emerse durante la sperimentazione.

- In primo luogo, si può notare che i risultati ottenuti in questa tesi sono in linea con quelli di Ferretti (2015) e ad essi aggiungono ulteriori informazioni.
  Infatti, ricordando che le motivazioni sono supportate a livello statistico dai dati raccolti durante le prove INVALSI, (per chiarimenti si veda Ferretti 2015) si può dire che gli effetti del contratto didattico proposti, in particolare quello enunciato nell'ipotesi di ricerca e denominato effetto *età della Terra,* si manifestano in problemi che coinvolgono le nozioni di moltiplicazione, divisione e algebra lineare, come si evince dai dati raccolti in questo lavoro, oltre che nella risoluzione di quesiti

che coinvolgono le potenze del dieci come si può riscontrare nel lavoro di Ferretti, (2015).
Non si manifestano invece nel problema geometrico in cui prevalgono altri tipi di difficoltà.

- Dai dati raccolti durante le prove INVALSI che come già detto coinvolgevano un campione di studenti eterogeneo per indirizzo di studi e provenienza geografica, si evince che l'effetto studiato si manifesta negli allievi indipendentemente dalle ablità.
  Nello specifico durante la fase sperimentale, il fatto che questi effetti si presentino indiscriminatamente in quasi tutti i ragazzi, può essere visto come un dato ulteriore a sostegno di questa tesi.

Doveroso è considerare anche gli altri effetti citati nel primo capitolo[1].
In primo lugo si evince una costante presenza dell'effetto di *delega formale* e, dai dialoghi delle inteviste, si riscontra un legame tra l'effetto *età della Terra* e la necessità di difficoltà di risoluzione dei problemi proposti.
É come se un problema relativamente semplice da un punto di vista logico, come ad esempio il problema uno, fosse percepito dagli allievi come rottura di un tacito accordo tra allievi ed insegnanti, che sottintende che un problema di matematica debba essere difficile in quanto la matematica è difficile in assoluto.
Queste due considerazioni fanno emergere ulteriori domande:

[1] Ricordando che la prova dell'esistenza di tali effetti è statisticamente provata dai dati presentati in precedenza. Per chiarimenti ed approffondimenti si rimanda il lettore alle opere del professor D'Amore citate nella bibliografia

- *Le manifestazioni degli effetti del contratto didattico sono legate alla visione della matematica che gli allievi maturano durante il percorso educativo-scolastico?*

  Per quanto visto nel primo capitolo quando si sono date le definizioni di contratto sociale e contratto didattico, è palese che anche fuori dagli ambienti scolastici la matematica è percepita come una materia che deve essere difficile.
  I dati raccolti avvalorano queste teorie dato che, anche nelle interviste individuali, si riscontrano risposte positive in tal senso, come ad esempio nell'intervista a C. righe 1-4.

- *La dinamica di gruppo aiuta a scardinare le clausole del contratto didattico?*

  Premettendo che il campione su cui è stata svolta la ricerca non è statisticamente rappresentativo della popolazione studentesca italiana, si vuole comunque far notare che durante i lavori di gruppo, nonostante si siano verificati gli effetti del contratto didattico presentati nel primo capitolo, la dinamica di gruppo ha aiutato gli allievi a romperne le clausole.
  Questo avviene ad esempio durante la risoluzione del problema uno da parte del primo gruppo.
  In quel frangente infatti, il dubbio si insinua in C., ma il confrononto tra pari lo estingue immediatamente.
  Questo comportamento potrebbe essere dovuto alla mancanza dell'adulto come punto di riferimento.
  Dato che le opinioni all'interno di un gruppo di pari hanno tutte lo stesso peso, il pensiero della maggioranza vince su quello del singolo,

in più si può supporre che il fatto di condividere la responsabilità di rottura delle clausole del contrarro didattico aiuti questa prassi.
A tal proposito si deve ricordare che una delle principali motivazioni della mancata rottura di clausole del contratto didattico è la mancata assunzione di responsabilità da parte dello studente che non si carica da solo delle conseguenze di tale comportamento.
Alla luce di quanto emerso durante la ricerca, si può ipotizzare che la dinamica di gruppo provochi una sorta di redistribuzione di questa responsabilità, e quindi aiuti la rottura delle clausole del contratto didattico.
Di conseguenza si può pensare che un'altra motivazione a sostegno di questo pensiero è quella che riguarda l'assenza dell'adulto.
Durante il lavoro di gruppo infatti gli studenti lavorano da soli. Questo stimola il ragionamento autonomo e non più dipendente dal pensiero dell'insegnante.

- *Perché i gruppi che hanno riconusciuto una leadership ad uno dei componenti hanno risolto due problemi e gli altri solo uno?*

  Si nota dalle trascrizioni presentate, che tutti e tre i gruppi che hanno riconosciuto un leader al loro interno hanno potuto cimentarsi in due dei cinque problemi proposti.
  Infatti il gruppo uno, che ha riconoscito in C. un leader ha risolto sia il problema uno che il problema cinque, il gruppo tre che come leader ha scelto F. ha risolto sia il problema due che il problema quattro, mentre i gruppi in cui non si esplicita questa presenza (come ad esempio il gruppo quattro) hanno risolto un solo problema.
  Bisogna però considerare il fatto che i gruppi che hanno risolto solo

un problema sono quelli che hanno cominciato con i problemi delle operazioni.

É anche emerso che nel momento in cui il leader non trovava la soluzione, e un altro membro del gruppo invece la conosceva, quest'ultimo non veniva ascoltato con lo stesso interesse, e il gruppo perdeva del tempo prezioso aspettando la reazione del leader, come appare evidente nella trascrizione della risoluzione del problema cinque da parte del primo gruppo.

Si può quindi suppore che la delega al leader di tutte le responsabilità aiuti l'accettazione della risposta.

Dal canto suo il leader si sente legittimato, dall'autorità tacitamente concessagli, ad assumere comportamenti non consueti che possono scardinare le clausole del contratto didattico.

4.2 Implicazioni didattiche

Premettendo che lo studio effettuato in questo elaborato è stato di tipo unicamente qualitativo, si è messo in evidenza che i risultati della ricerca si allineano a tutte le teorie e le affermazioni sul contratto didattico, trattate negli articoli e nei libri riportati nella bibliografia.

É doveroso considerare che il contratto didattico è un costrutto mentale che si evolve man mano che lo studente progredisce nel percorso di crescita culturale.

Esso è influenzato dalle norme sociali tacitamente accettate e dalle consuetudini imposte, anche se involontariamente, all'interno dell'ambiente scolastico dagli insegnanti.

Non si deve perciò pensare che sia uguale per tutti gli studenti; il contratto didattico è un costrutto che si radica nel pensiero dell'allievo che lo interiorizza e lo collega alle varie discipline scolastiche.

Trattandosi di un concetto così soggettivo, bisogna interrogarsi su come sia possibile scardinarne gli effetti.

Come già detto le pratiche di devoluzione, l'acquisizione di competenze in modo autonomo, l'assunzione di responsabilità da parte degli allievi, di visione critica e l'abbandono dei comportamenti abitudinari sono alcuni degli strumenti che permettono agli studenti di evitare la trappola delle clausole del contratto didattico.

É importante però ricordare che a certi livelli di scolarizzazione, l'autorità dell'insegnante è necessaria all'apprendimento, e l'instaurarsi di taciti accordi tra allievi e docenti favorisce la trasmissione dei saperi.

Si hanno quindi degli effetti positivi del contratto didattico ed è responsabilità dell'insegnante fare in modo che lo studente capisca gli errori fatti a causa di clausole del contratto didattico, senza che insorga in lui la paura di sbagliare.

Questa paura di sbagliare, è uno dei principali responsabili del verificarsi di effetti del contratto didattico, come si nota anche nelle trascrizioni, l'effetto di *delega formale*, è proprio una manifestazione di questo sentimento.

Infatti lo studente delega all'operazione tutto il lavoro scaricando la responsabilità dell'eventuale fallimento su di essa.

Interessanti implicazioni didattiche emergono dal fatto che alcuni problemi, come ad esempio il problema cinque, coinvolgevano conoscenze al di fuori dei programmi scolastici di una classe prima della scuola secondaria di primo grado.

Nonostante il deficit di sapere, gli studenti hanno risolto i suddetti problemi cimentandosi nella ricerca di soluzioni logiche e razionali.

Un ulteriore risultato della ricerca quindi è quello di mostrare che un problema può essere affrontato dagli studenti anche quando non hanno a loro disposizione tutti gli strumenti matematici che potrebbero essere impiegati per risolverlo.

La mancanza di procedure automatiche per la soluzione del problema porta a un'esplorazione da parte degli studenti e li può svincolare dalle clausole del contratto didattico.

Quindi alla luce delle osservazioni fatte in questa tesi appare opportuno utilizzare in classe problemi che non contengano argomenti precedentemente trattati, sarebbe ad esempio utile proporre alcuni problemi prima di presentare l'argomento del programma che contiene i saperi atti alla loro risoluzione.

Dal punto di vista delle metodologie didattiche si è notato che l'attività di gruppo porta a scardinare il contratto didattico.

Pertanto questa metodologia appare consigliabile per questo motivo oltre che per i molti altri motivi già presentati dalla letteratura di matrice pedagogica.

L'importanza di un leader all'interno del gruppo suggerisce anche che nelle attività di gruppo può essere importante dare dei ruoli agli studenti che compongono il gruppo, così come viene suggerito nelle metodologie di *cooperative-learning.*

Per chiunque fosse interessato all'argomento si consiglia ad esempio la lettura di (R. M. Felder, 1993).

4.3 Problemi aperti, direzioni future

In questo paragrafo verranno trattate tutte le implicazioni rilevanti emerse durante la ricerca, anche se non direttamente connesse alle ipotesi di ricerca.

Si premette che gli studi sul contratto didattico si stanno rivelando sempre più utili ai fini dell'educazione anche al di fuori del singolo ambiente disciplinare della matematica; in D'Amore (1999) si può trovare:
... una delle maggiori difficoltà del rapporto insegnamento-apprendimento consiste in questo: l'insegnante dovrebbe convincere l'allievo e sé stesso che quel che si apprende, lo si apprende per la vita e non per il breve spazio di tempo legato ad una prova, ad una verifica, ad una qualche forma di valutazione.
(D'Amore, 1999, p. 386).

Le teorie che nascono vengono sempre adattate per poter essere applicate ai più bassi livelli scolastici, scuola primaria e secondaria di primo grado, come si riscontra nella letteratura scientifica attualmente disponibile.
Entrando nel dettaglio i punti che verranno discussi riguardano le dinamiche di gruppo, e in particolare come queste influiscano sul lavoro degli studenti, e sugli effetti del contratto didattico.

Alcuni spunti interessanti per future ricerche potrebbero essere:

- I dati mostrano che i gruppi in cui si osserva un'assunzione della leadership lavorano differentemente, quindi ci si chiede se è possibile individuare degli indicatori per comprendere in quali situazioni la presa di leadership avviene e quindi studiarne in modo sistematico gli effetti sulla risoluzione di problemi in matematica.

- L'esistenza di una leadership può essere considerarta come un fattore che contribuisce, in parte o del tutto, al superamento degli ostacoli imposti dalle clausole del contratto didattico?

In caso di risposta affermativa su un campione statisticamente rappresentativo come si potrebbero utilizzare i risultati?

- Considerando le ricerche dei primi anni settanta su pratiche di apprendimento di gruppo come ad esempio il *mastery learning*, (Block,1972) si può pensare a progetti didattici mirati che stimolino l'apprendimento di materie che vengono percepite come difficili, come nel caso della matematica?

Prima di concludere appare importante, se non addirittura doveroso, ricordare al lettore che le pratiche segnalate nel terzo punto dell'elenco proposto presentavano già negli anni settanta, delle criticità non indifferenti, e che chiunque volesse cimentarsi in tali ricerche ha il dovere di informarsi a tal proposito.
A titolo esemplificativo, ma non esaustivo, si rimanda quindi alla lettura di Block (1972).
Sebbene i dati raccolti non siano sufficienti a rispondere adesso a queste domande, appare importante prororre tali problematiche come spunto per future ricerche.

Bibliografia

[1] Block James H. (1972) Alternative Strategies for Tomorrow's Education, Educational Horizons Vol. 50, No. 4, pp. 183-191

[2] Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (2009). Valutazione in matematica. *Vita Scolastica. Anno 63, numero 11, pagine 15-17* .

[3] Bolondi G., Fandiño Pinilla M. I., (2012). *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica.* Pagine 214. Napoli: Edises.

[4] Branchetti, L., Ferretti, F., Lemmo, A., Maffia, A., Martignone, F., Matteucci, M., Mignani, S. (2016). A longitudinal analysis of the Italian standardized mathematics test. Proceedings of the 9th CERME. Prague: ERME.

[5] D'Amore B., Martini B. (1997). *Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. La matematica e la sua didattica. 2, 150-175.* [Questo articolo è stato pubblicato in lingua spagnola: Números, 32, 1997, 26-32. In lingua francese: Scientia Paedagogica Experimentalis, XXXV, 1, 95-118. In lingua inglese in: Gagatsis A. (ed) (1999). A multidimensional approach to learning in mathematics and science. Nicolsia: Intercollege. 3-24].

[6] D'Amore B. (1999) *Elementi di Didattica della Matematica.* Pitagora Editrice Bologna

[7] D'Amore B. (2007). La didattica della matematica, oggi. In: Marazzani I. (ed.) (2007). *La matematica e la sua didattica. Atti del I Convegno Nazionale, Giulianova (Te), 4-5-6 maggio 2007. Bologna: Pitagora 18-24. ISBN: 88-371-1677-2.*

[8] D'Amore B., Sbaragli S. (2005). *Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". La matematica e la sua didattica. 2, 139-163.*

[9] Ferretti F., Lemmo A., Maffia A. (2016). Rational numbers conceptions: comparing fractions and decimals representations. Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Hobart, Australia: PME.

[10] Felder R. M. (1993) *Reaching the Second Tier - Learning and Teaching Styles in College Science Education, J. Coll. Sci. Teach, 23, 286.*

[11] Fischbein E. (1993) *The Theory of Figural Concepts, Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 2 , pp. 139-162*

[12] Zan R. (1991-1992). *I modelli concettuali di "problema" nei bambini della scuola elementare. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. In 3 parti: I: 1991, 14, 7, 659-677; II: 1991, 14, 9, 807-840; III: 1992, 15, 1, 39-53*

[13] Zan R. (2012). *La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 35 A.*