

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**MODELLI MATEMATICI PER LO STUDIO  
DI POPOLAZIONI INTERAGENTI IN UN  
ECOSISTEMA**

**Relatore:**  
Prof. Paolo Negrini

**Presentata da:**  
Alice Lusuardi

Anno Accademico 2015/2016



# Introduzione

Una delle questioni fondamentali della ricerca scientifica è quella di stabilire se esistano relazioni tra le quantità essenziali per la descrizione di un **fenomeno**. Individuare tali relazioni infatti permette di spiegare il fenomeno, descrivendo come tutti i suoi molteplici aspetti dipendano gli uni dagli altri. Se una quantità è funzione di altre, allora è possibile fare delle previsioni sul suo valore quando le altre variano. L'obiettivo della scienza è quello di comprendere come si svolgono i fenomeni nel mondo che ci circonda. È evidente che, se si tentasse una descrizione della realtà empirica pretendendo di tener conto di tutti gli aspetti tratti dall'osservazione, la descrizione sarebbe così complicata da risultare impossibile. La capacità principale dello studioso della natura deve essere dunque, proprio quello di cogliere l'essenziale tra una molteplicità di aspetti. Il **modello** di un fenomeno naturale è una costruzione ideale, anche molto lontana dalla realtà, che si basa su alcune caratteristiche fondamentali, dette variabili, del modo in cui il fenomeno si realizza. Uno dei vantaggi che si hanno studiando i fenomeni naturali con l'aiuto di modelli matematici è quello di poter ottenere previsioni quantitative. In particolare, può essere importante prevedere l'esito finale di un fenomeno, cioè quello che accade su tempi molto lunghi. Ad esempio, nella dinamica delle popolazioni è importante sapere se una popolazione può sopravvivere e quanto a lungo in determinati ambienti. In questa tesi verranno studiati dei modelli matematici che spiegano e prevedono l'evoluzione nel tempo del numero di individui che compongono una data popolazione. Questo tipo di modelli prende il nome di **modelli di dinamica delle popolazioni**.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 I sistemi dinamici continui</b>	<b>1</b>
1.1 Concetti introduttivi . . . . .	1
1.2 Sistemi di equazioni differenziali ordinarie . . . . .	3
1.2.1 Problema di valori iniziali . . . . .	3
1.2.2 Sistemi differenziali lineari omogenei con coefficienti costanti . . . . .	3
1.2.3 Stabilità . . . . .	10
<b>2 Primi modelli matematici di dinamica delle popolazioni</b>	<b>14</b>
2.1 Modello di Malthus . . . . .	14
2.1.1 Descrizione del modello di Malthus . . . . .	14
2.1.2 Natura differenziale del modello di Malthus . . . . .	17
2.2 Modello logistico . . . . .	17
2.2.1 Natura differenziale del modello di Verhulst . . . . .	18
2.2.2 Descrizione dell'equazione logistica . . . . .	19
2.3 Confronto tra il modello di Malthus e il modello logistico . . . . .	20
<b>3 I sistemi di Lotka-Volterra</b>	<b>23</b>
3.1 Descrizione del sistema di Lotka-Volterra . . . . .	23
3.2 Modello preda-predatore . . . . .	27
3.3 Applicazione del modello preda-predatore . . . . .	35

Bibliografia

39

# Capitolo 1

## I sistemi dinamici continui

Un sistema dinamico è un modello matematico che descrive una situazione che cambia nel tempo. Inizieremo introducendo i concetti e le definizioni fondamentali.

### 1.1 Concetti introduttivi

In ogni sistema dinamico si osservano e si studiano un numero finito di quantità, rappresentate da un vettore di  $n$  variabili. Tale vettore vive in un sottoinsieme dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  detto **spazio degli stati**, ed è funzione di un parametro reale non negativo  $t$  che rappresenta il tempo. Indichiamo con  $W \subset \mathbb{R}^n$  lo spazio degli stati. L'oggetto matematico che si vuole determinare in un sistema dinamico è una funzione:

$$t \mapsto X(t), \text{ con } t \in [0, \infty) \text{ e } X(t) \in W$$

ovvero una legge che esprime il valore dello stato del sistema dinamico ad un dato istante  $t$ .

Ricordiamo che uno stato è in realtà un vettore di  $n$  componenti, ciascuna delle quali rappresenta una delle grandezze di cui vogliamo studiare l'evoluzione. La legge che regola un sistema dinamico esprime la variazione nel tempo degli stati in esame. Più precisamente, un sistema dinamico è specificato tramite una relazione algebrica che coinvolge il tempo  $t$ , il valore

delle singole componenti del vettore  $X(t)$  e la derivata rispetto al tempo della funzione vettoriale  $t \mapsto X(t)$ . Formalizziamo il tutto nella seguente definizione.

**Definizione 1.1. (Sistema dinamico continuo)** Un sistema dinamico continuo in un aperto  $W \subset \mathbb{R}^n$  (spazio degli stati) è un'equazione differenziale ordinaria vettoriale in  $\mathbb{R}^n$  (oppure un sistema di  $n$  equazioni differenziali ordinarie scalari), in forma normale e autonoma (cioè con secondo membro indipendente dal tempo) del tipo:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (1.1)$$

dove  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un campo vettoriale differenziabile (di classe  $C^1$ ). L'**orbita** (o soluzione) di un sistema dinamico continuo è una funzione:

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto X(t) \subset W$$

che soddisfa l'equazione differenziale 1.1.

Abbiamo usato il termine **continuo** per enfatizzare il fatto che il parametro  $t$  da cui dipendono gli stati è un numero reale.

**Definizione 1.2. (Integrale generale)** Il flusso integrale (o integrale generale) di un sistema dinamico continuo è la famiglia di applicazioni  $\phi_t : W \rightarrow W$  (al variare di  $t \in [0, +\infty)$ ) definite come segue: dato  $X_0 \in W$ , l'immagine  $\phi_t(X_0)$  è data dal valore vettoriale  $X(t)$  assunto dalla soluzione del sistema 1.1, avente dato iniziale  $X_0$ , calcolata al tempo  $t$ .

**Definizione 1.3. (punto di equilibrio)** Un punto  $X_0 \in W$  si dice punto di equilibrio del sistema dinamico 1.1 se l'unica orbita corrispondente al dato iniziale  $X_0$  è quella costante  $X(t) \equiv X_0$ .

## 1.2 Sistemi di equazioni differenziali ordinarie

### 1.2.1 Problema di valori iniziali

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x'_1 \equiv \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n \equiv \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

in forma vettoriale:

$$X' \equiv \frac{dX}{dt} = F(t, X)$$

con  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $F = (f_1, \dots, f_n)$ .

$F$  è una funzione definita su un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Il **problema di valori iniziali** è il seguente.

Fissato un punto  $(a, B) \in A$  individuare un intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$  contenente  $a$  e una funzione  $I \ni t \rightarrow X(t)$  derivabile in  $I$  tale che  $(t, X(t)) \in A$  per  $t \in I$ ,  $X'(t) = F(t, X(t))$  e  $X(a) = B$ .

### 1.2.2 Sistemi differenziali lineari omogenei con coefficienti costanti

Il sistema 1.3 si dice **autonomo** se  $F$  è funzione solo di  $X$ .

Sia:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

una matrice  $n \times n$  con i termini  $a_{i,j}$  numeri reali.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

che scriviamo anche:  $X'(t) \equiv \frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$

Sia  $J = C^{-1}AC$  la forma di Jordan di  $A$ .

Posto  $X = CY$ , il sistema 1.3 diventa  $CY' = ACY$ , ossia  $Y' = JY$ .

Per esempio, sia  $A$  una matrice reale  $6 \times 6$  con  $\lambda$  autovalore reale doppio e  $\mu \pm i\sigma$  autovalori complessi coniugati doppi.

Sia, per esempio:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \mu & \sigma & 1 & \\ & & -\sigma & \mu & & 1 \\ & & & & \mu & \sigma \\ & & & & -\sigma & \mu \end{pmatrix}$$

In questo caso il sistema  $Y' = JY$  è:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \\ y_3' = \mu y_3 + \sigma y_4 + y_5 \\ y_4' = -\sigma y_3 + \mu y_4 + y_6 \\ y_5' = \mu y_5 + \sigma y_6 \\ y_6' = -\sigma y_5 + \mu y_6 \end{cases} \quad (1.4)$$

Indichiamo con  $C_1, C_2, \dots$  arbitrarie costanti reali.

La seconda equazione fornisce:

$$y_2 = C_2 e^{\lambda t}$$

Inserendo questa nella prima equazione si ha:

$$y_1 = (C_1 + tC_2)e^{\lambda t}$$

La quinta e la sesta forniscono:

$$\begin{aligned} y_5 &= e^{\mu t}[C_5 \sin(\sigma t) + C_6 \cos(\sigma t)] \\ y_6 &= e^{\mu t}[C_5 \cos(\sigma t) - C_6 \sin(\sigma t)] \end{aligned}$$

Inserendo queste nella terza e nella quarta equazione si ha:

$$\begin{aligned} y_3 &= e^{\mu t}[(C_3 + tC_5) \sin(\sigma t) + (C_4 + tC_6) \cos(\sigma t)] \\ y_4 &= e^{\mu t}[(C_3 + tC_5) \cos(\sigma t) - (C_4 + tC_6) \sin(\sigma t)] \end{aligned}$$

$y_1, y_2, \dots, y_6$  è l'integrale generale di 1.4. A questo punto le costanti si possono determinare univocamente utilizzando il problema di Cauchy rispetto ad un vettore assegnato  $Y(t_0)$ .

### Valutiamo il caso in cui $n = 2$

La matrice reale  $2 \times 2$   $A$  ha due autovalori reali e distinti  $\lambda_1, \lambda_2$  oppure due autovalori complessi coniugati  $\mu \pm i\sigma$  oppure un autovalore reale doppio  $\lambda$ .

Corrispondentemente è

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu & \sigma \\ -\sigma & \mu \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema  $Y' = JY$  è, rispettivamente,

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = \mu y_1 + \sigma y_2 \\ y_2' = -\sigma y_1 + \mu y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = \lambda y_1 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}$$

e gli integrali generali sono:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = e^{\mu t}[C_1 \sin(\sigma t) + C_2 \cos(\sigma t)] \\ y_2 = e^{\mu t}[C_1 \cos(\sigma t) - C_2 \sin(\sigma t)] \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda t} \\ y_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \\ y_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

• **Primo caso: autovalori reali e distinti  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$**

1.  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

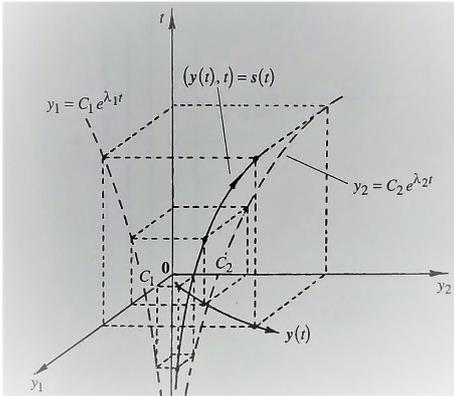


Figura 1.1: Traiettorie

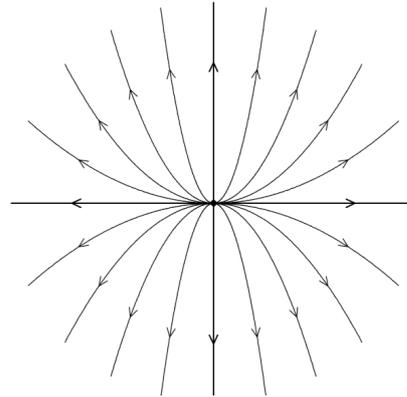


Figura 1.2: Nodo repulsivo

Nella figura 1.1 è  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$ ;  $t \mapsto S(t)$  è l'orbita (o traiettoria o caratteristica) di equazioni:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$$

con  $-\infty < t < +\infty$ .

La freccia indica il verso di percorrenza per  $t$  crescente.

$t \mapsto Y(t)$  è la proiezione ortogonale sul piano  $y_1, y_2$ , che è chiamato **piano delle fasi**.

Nella figura 1.2 sono indicate le proiezioni delle orbite al variare di  $C_1$  e  $C_2$ .

Esse sono le due semirette  $y_1 > 0, y_2 = 0$  (corrispondente a  $C_1 > 0$  e  $C_2 = 0$ ) e  $y_1 < 0, y_2 = 0$  (corrispondente a  $C_1 < 0$  e  $C_2 = 0$ ); le due semirette  $y_1 = 0, y_2 > 0$  (corrispondente a  $C_1 = 0$  e  $C_2 > 0$ ) e  $y_1 = 0, y_2 < 0$  (corrispondente a  $C_1 = 0$  e  $C_2 < 0$ ) e da curve, ciascuna delle quali sta in un quadrante, che escono dal punto  $(0,0)$

( $Y(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow -\infty$ ) con tangente il corrispondente semiasse  $y_1$  e si allontanano da questo; ciascuna di esse ha equazione:

$$\left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{y_2}{C_2}\right)^{\lambda_1}$$

2.  $\lambda_2 > \lambda_1 = 0$

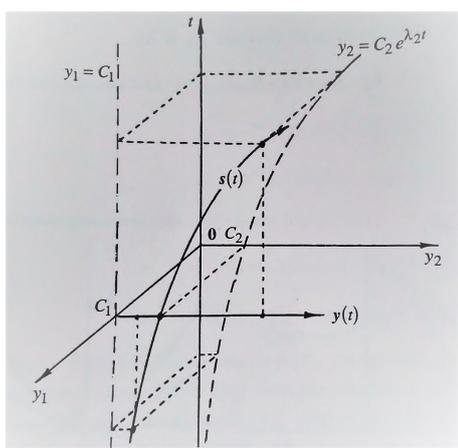


Figura 1.3: Traiettorie

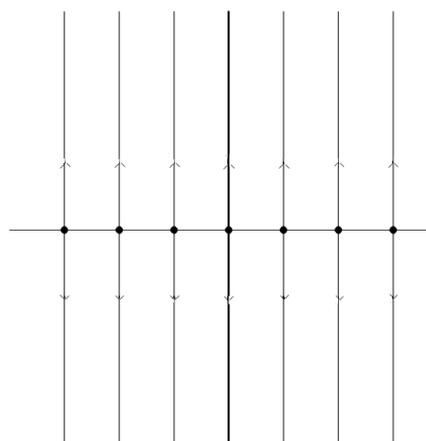


Figura 1.4: Nodo repulsivo

3.  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$

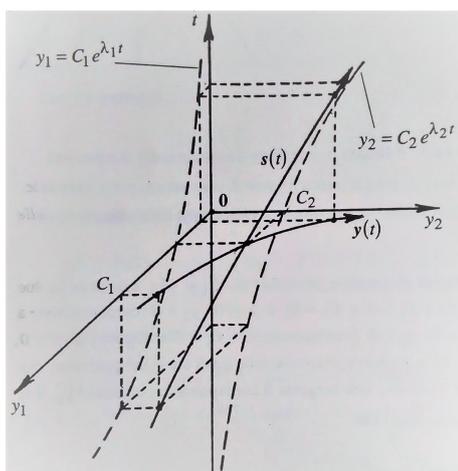


Figura 1.5: Traiettorie

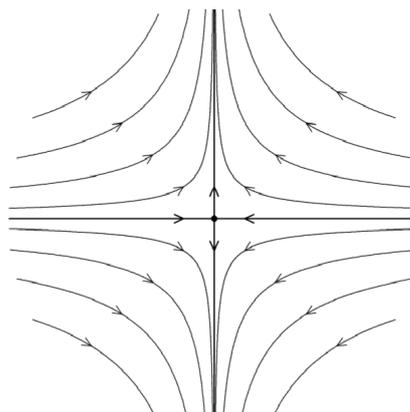


Figura 1.6: Punto di sella o colle

4.  $0 = \lambda_2 > \lambda_1$

Si deduce dal secondo caso mutando  $t$  con  $-t$  e quindi invertendo le frecce.

5.  $0 > \lambda_2 > \lambda_1$

Si deduce dal primo caso mutando  $t$  con  $-t$  e quindi invertendo le frecce.

Conclusioni:

Se  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  si dice che  $(0, 0)$  è un **nodo repulsivo** e se  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  si dice che  $(0, 0)$  è un **nodo attrattivo**. Se  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$  si dice che  $(0, 0)$  è un **colle** o **punto di sella**.

• **Secondo caso: autovalori complessi coniugati  $\mu \pm i\sigma$  con  $\sigma > 0$**

1.  $\mu = 0$

L'integrale generale di  $Y' = JY$  è

$$y_1 = C_1 \sin(\sigma t) + C_2 \cos(\sigma t)$$

$$y_2 = C_1 \cos(\sigma t) - C_2 \sin(\sigma t)$$

Posto

$$\cos \varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

con  $C_1^2 + C_2^2 > 0$

si scrive

$$y_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\sigma t + \varphi)$$

$$y_2 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\sigma t + \varphi)$$

così che  $y_1^2 + y_2^2 = C_1^2 + C_2^2$

Si dice che  $(0, 0)$  è un **centro**.

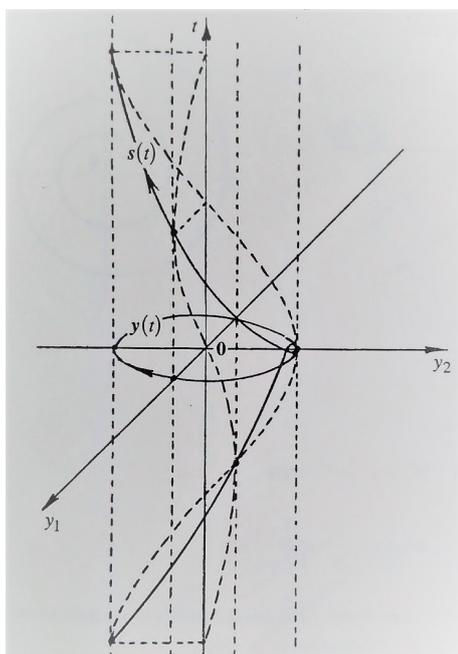


Figura 1.7: Traiettorie

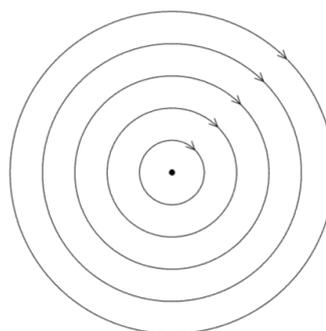


Figura 1.8: Centro

2.  $\mu > 0$

$$y_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{\mu t} \sin(\sigma t + \varphi)$$

$$y_2 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{\mu t} \cos(\sigma t + \varphi)$$

con  $C_1^2 + C_2^2 > 0$

Da  $y_1 = y_2 \tan(\sigma t + \varphi)$ ,

$$y_1^2 + y_2^2 = (C_1^2 + C_2^2) e^{2\mu t}$$

segue che, sostituendo  $t$ , si ottiene:

$$y_1 = y_2 \tan\left(\varphi + \frac{\sigma}{2\mu} \ln\left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{C_1^2 + C_2^2}\right)\right)$$

3.  $\mu < 0$

Si deduce dal caso precedente scambiando  $t$  con  $-t$  e quindi con l'inversione delle frecce.

Conclusioni:

Si dice che  $(0, 0)$  è un **fuoco, repulsivo** se  $\mu > 0$ , **attrattivo** se  $\mu < 0$ .

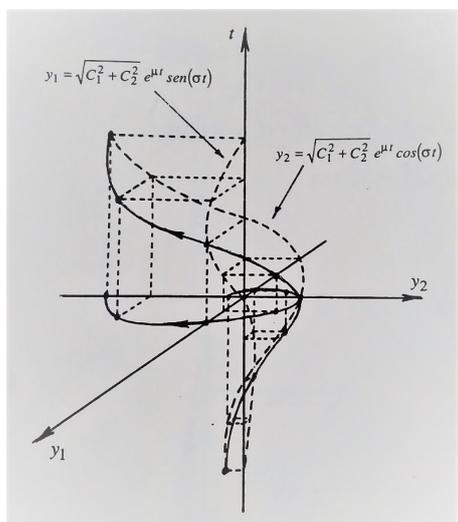


Figura 1.9: Traiettoria

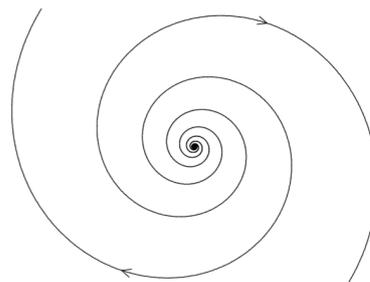


Figura 1.10: Fuoco repulsivo

• **Terzo caso: un autovalore reale doppio  $\lambda$**

1.

$$y_1 = C_1 e^{\lambda t}$$

$$y_2 = C_2 e^{\lambda t}$$

con  $\lambda > 0$  e  $C_1^2 + C_2^2 > 0$  (figura 1.11)

2.

$$y_1 = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$$

$$y_2 = C_2 e^{\lambda t}$$

con  $\lambda > 0$  e  $C_1^2 + C_2^2 > 0$  (figura 1.12)

Conclusioni:

In questi casi si dice che  $(0, 0)$  è un **nodo degenere, repulsivo** se  $\lambda > 0$ , **attrattivo** se  $\lambda < 0$ .

### 1.2.3 Stabilità

Consideriamo il sistema:

$$X' = F(t, X)$$

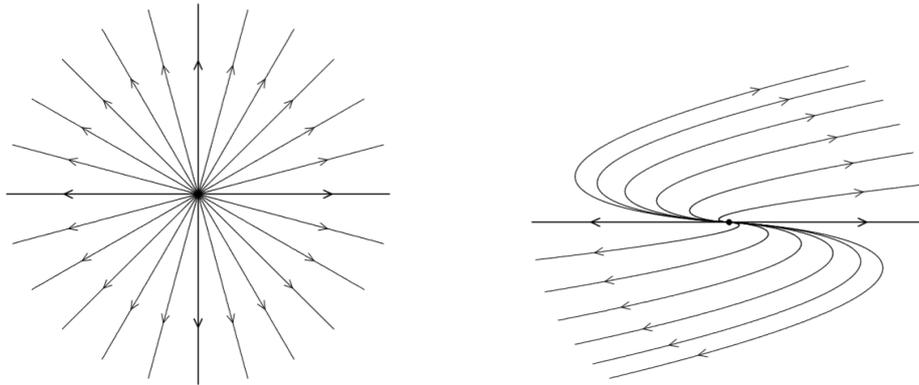


Figura 1.11: Nodo a stella repulsivo    Figura 1.12: Nodo degenerare repulsivo

con  $F$  funzione continua con le derivate parziali prime continue su un aperto  $D$  di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  contenente l'intero asse  $t$ .

Un punto  $X_0$  tale che  $F(t, X_0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$  si chiama **punto critico** o **punto singolare**.

Se vale che  $F(t, X_0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$  allora  $X(t) \equiv X_0$  è una soluzione di  $X' = F(t, X)$  ed è chiamata **stazionaria** o di **equilibrio**.

Se  $X_0$  è punto critico ed esiste un suo intorno nel quale non esiste nessun altro punto critico, si dice che  $X_0$  è un punto critico **isolato**.

Indicata con  $J$  la matrice jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

se  $X_0$  è punto critico e  $\det J(t, X_0) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , allora  $X_0$  è punto critico isolato.

**Definizione 1.4. (punto di equilibrio stabile)** Un punto critico  $X_0$  del sistema  $X' = F(t, X)$  si definisce stabile se, dato un qualsiasi  $\epsilon > 0$ , vi è un  $\delta > 0$  tale che ogni soluzione  $X = \phi(t)$  del sistema iniziale, con  $t = 0$  soddisfa:

$$\|\phi(0) - X_0\| < \delta$$

e per tutte le  $t$  positive soddisfa inoltre:

$$\|\phi(t) - X_0\| < \epsilon$$

Questo significa che tutte le soluzioni partono sufficientemente vicino (cioè entro il  $\delta$  di distanza) a  $X_0$ . Si noti che le traiettorie sono all'interno del cerchio  $\|X - X_0\| = \delta$  per  $t = 0$ , mentre passano fuori da questo cerchio, rimanangono all'interno del cerchio  $\|X - X_0\| = \epsilon$  per  $t \geq 0$ .

**Definizione 1.5. (punto di equilibrio instabile)** Si definisce punto di equilibrio instabile un punto di equilibrio non stabile.

**Definizione 1.6. (punto di equilibrio asintoticamente stabile)** Il punto critico  $X_0$  è chiamato asintoticamente stabile se è stabile e se esiste un  $\delta_0$ , con  $0 < \delta_0 < \delta$ , tale che la soluzione  $X = \phi(t)$  soddisfa:

$$\|\phi(0) - X_0\| < \delta_0$$

allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = X_0$$

Così le traiettorie che iniziano sufficientemente vicine al punto  $X_0$  devono avvicinarsi a  $X_0$ , se  $t \rightarrow \infty$ . Si noti che la stabilità asintotica è una proprietà più forte della stabilità.

Analizziamo ora la stabilità dei punti di equilibrio individuati nel paragrafo precedente. Nel caso di autovalori  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  il punto critico rappresenta un nodo attrattivo che corrisponde ad un punto di equilibrio **asintoticamente stabile**, invece nel caso di  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  si ha un nodo repulsivo e quindi un punto **instabile**. Se gli autovalori sono di segno opposto,  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ , il punto di equilibrio prende il nome di colle o **punto di sella**, che corrisponde ad un punto prettamente **instabile**. Nel caso di autovalori complessi coniugati,  $\lambda = \mu \pm i\sigma$  con  $\sigma > 0$ , se il punto di equilibrio è un fuoco attrattivo allora si tratta di un punto **asintoticamente stabile**, se è un fuoco repulsivo è un punto di equilibrio **instabile**, invece se la parte reale è nulla il punto di

equilibrio si chiama centro ed è un punto **stabile** ma non **asintoticamente stabile**. Infine se il punto di equilibrio è un **nodo a stella**, cioè nel caso di autovalore reale doppio, esso è **asintoticamente stabile** se è attrattivo, **instabile** se è repulsivo.

## Capitolo 2

# Primi modelli matematici di dinamica delle popolazioni

### 2.1 Modello di Malthus

#### 2.1.1 Descrizione del modello di Malthus

Nel 1798 il demografo inglese Thomas Malthus pubblicò il saggio *Essay on the Principles of Population*, in cui per la prima volta, venne studiata con metodi matematici, l'evoluzione della popolazione inglese.

Il modello proposto si basa su tre assunzioni:

- L'ambiente fornisce costantemente tutte le risorse necessarie per lo sviluppo degli organismi;
- La popolazione è isolata, si entra a far parte di essa solo perchè vi si nasce e si esce solo per morte;
- Ogni individuo della popolazione, indipendentemente dall'età, ha la stessa capacità di riprodursi e la stessa possibilità di morire di tutti gli altri

Anche se queste ipotesi sono molto restrittive, alcune popolazioni si sviluppano in accordo con questo modello, per esempio quelle umane o animali

nelle prime fasi di colonizzazione di un nuovo ambiente.

Il modello matematico costruito da Malthus a partire da queste ipotesi, è un modello di **crescita esponenziale** della popolazione. Questo studio si concludeva con la previsione che una popolazione in evoluzione secondo questo modello, per la sua rapidità di crescita, avrebbe finito per esaurire le risorse naturali disponibili, condannandosi a un destino infausto. Malthus prevedeva che per contrastare questo destino si sarebbe scatenata una cruenta *lotta per la sopravvivenza* che avrebbe avuto, come conseguenza, il permanere nella popolazione dei soli individui più dotati.

Gli studi successivi hanno mostrato che le popolazioni naturali possono crescere esponenzialmente solo per un breve periodo, visto che, in genere, la numerosità di una popolazione è in equilibrio con le risorse disponibili e con le popolazioni delle specie che interagiscono ecologicamente con essa.

Se una popolazione è malthusiana, la natalità viene modellizzata assumendo che il numero di nati nell'unità di tempo sia proporzionale al numero di individui. Analogamente, anche il numero di morti nell'unità di tempo è assunto proporzionale alla numerosità totale.

Supponendo costanti le condizioni ambientali e non ponendo limiti alle risorse che l'ambiente fornisce, si può assumere che il **tasso di natalità**  $n$ , cioè il numero di nati per unità di tempo e per unità di popolazione e il **tasso di mortalità**  $m$ , cioè il numero di morti per unità di tempo e per unità di popolazione, siano costanti.

Supponiamo che al tempo  $t = 0$  in cui si inizia a studiare l'evoluzione della popolazione, la numerosità sia  $N_0$ .

La numerosità al tempo 1 è data da:

$$N(1) = N_0 + nN_0 - mN_0 = (1 + n - m)N_0$$

dove alla numerosità  $N_0$  abbiamo aggiunto il numero di nati nell'unità di tempo,  $nN_0$  (con  $0 \leq n \leq 1$ ) e sottratto il numero di morti,  $mN_0$  (con  $0 \leq m \leq 1$ ).

Definendo  $R = 1 + n - m \geq 0$ , l'espressione precedente può essere scritta come  $N(1) = RN_0$ .

Ripetendo il ragionamento, al tempo  $t$  si ottiene  $N(t) = RN(t-1)$ , che ci permette di concludere che:

$$N(t) = R^t N_0 \quad (2.1)$$

Il numero  $n - m$  è il **tasso di crescita per unità di popolazione**, o anche **tasso di crescita specifico**, infatti equivale alla variazione della numerosità nell'unità di tempo diviso per la numerosità stessa:

$$n - m = \frac{N(t) - N(t-1)}{N(t-1)}$$

La legge esponenziale 2.1 ha un andamento diverso a seconda che sia  $R > 1$  o  $R < 1$ .

Nel caso in cui  $R = 1 + n - m > 1$ , cioè se  $n - m > 0$ , si ha un andamento di crescita; in caso contrario, cioè  $R < 1$  e  $n - m < 0$ , si ha decrescita.

In pratica, se il tasso di natalità supera quello di mortalità la numerosità della popolazione cresce esponenzialmente, nel caso contrario la numerosità decresce esponenzialmente.

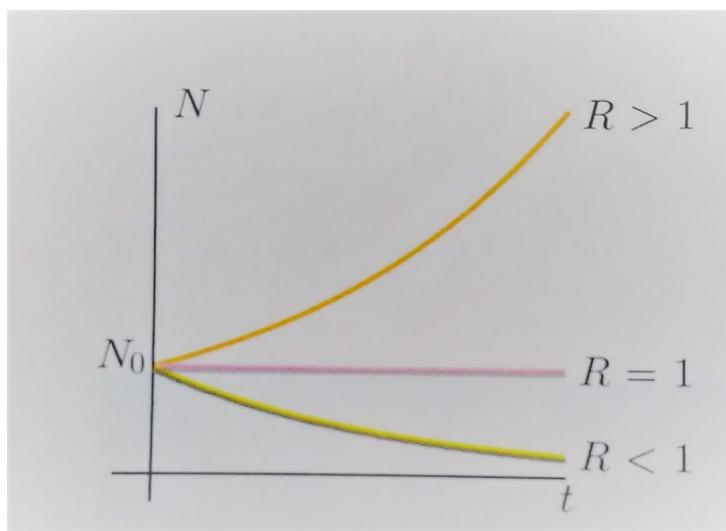


Figura 2.1: Il destino finale di una popolazione malthusiana, a seconda dei valori di  $R$

Chiedersi quale sia il comportamento asintotico della funzione 2.1 equivale a interrogarsi sul destino finale della popolazione; matematicamente il

problema è quello delle proprietà della funzione per  $t$  molto grande.

Osservando il grafico in figura (2.1), fissato  $N_0 > 0$ , è possibile notare che per  $R > 1$  la crescita della popolazione è illimitata, perciò possiamo dire che il risultato finale è l'esplosione demografica. Se invece il tasso di natalità è inferiore a quello di mortalità il destino finale della popolazione è l'estinzione. Infine, se  $n = m$ , si ha  $R = 1$  e la numerosità non cambia nel tempo. In questo caso si dice che la popolazione è in equilibrio.

### 2.1.2 Natura differenziale del modello di Malthus

Consideriamo la legge di crescita di una popolazione malthusiana  $N(t) = R^t N_0$ .

Se poniamo  $a = \ln R$ , questa legge si scrive:

$$N(t) = e^{at} N_0$$

La derivata di  $N(t)$  è:

$$N'(t) = a e^{at} N_0$$

cioè  $a$  volte il valore di  $N(t)$  e la funzione verifica dunque l'equazione:

$$N'(t) = aN(t) \tag{2.2}$$

dove il coefficiente  $a$  è il **tasso istantaneo** di crescita per unità di popolazione.

La 2.2 è un'equazione soddisfatta dalle funzioni del tipo  $N(t) = e^{at} N_0$  (con  $N_0$  dato iniziale da fissare) che descrivono la crescita malthusiana.

La legge di crescita malthusiana risolve dunque il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} N'(t) = aN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

## 2.2 Modello logistico

Abbiamo descritto un unico modello di evoluzione di popolazione, quello di Malthus, che si basa su ipotesi spesso lontane dalla realtà. Un'importante

variante del modello malthusiano, che tiene conto della limitatezza delle risorse descrivendo la crescita limitata di una popolazione, è dovuto al demografo belga P. F. Verhulst (1804-1849).

### 2.2.1 Natura differenziale del modello di Verhulst

Verhulst propose che  $q = n - m$  fosse una funzione lineare della numerosità, decrescente all'aumentare di  $N$ :

$$q = q(N) = b\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

con  $b > 0$  e  $K > 0$  parametri fissati. Il parametro  $K$  è la cosiddetta **capacità portante** dell'ambiente, legata alla quantità di risorse disponibili. Il valore  $q$  è l'aumento di popolazione, per unità di popolazione, nell'unità di tempo. Supponiamo che il tasso specifico istantaneo di crescita  $a$  del modello di Malthus non sia costante, ma dipenda dalla numerosità  $N$  in modo lineare. Assumiamo cioè che sia  $a(N) = \alpha\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ . L'equazione differenziale che si ottiene è dunque:

$$N'(t) = \alpha N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \quad (2.3)$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare perchè la funzione a secondo membro è quadratica in  $N$ .

La soluzione esplicita di dato iniziale  $N_0$  è data da:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}}$$

Mostriamo che in effetti questa funzione risolve l'equazione assegnata.

La derivata di  $N(t)$  è:

$$\begin{aligned} N'(t) &= \alpha KN_0 \frac{(K - N_0)e^{-\alpha t}}{(N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t})^2} = \\ &= \alpha \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}} \frac{(K - N_0)e^{-\alpha t}}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}} = \alpha N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \end{aligned}$$

La funzione 2.3 a secondo membro di si annulla per  $N(t) = 0$  e  $N(t) = K$ , è positiva nell'intervallo  $(0, K)$ , negativa se  $N(t) > K$ . Questa analisi del segno permette di concludere che (vedi figura 2.2):

- Se  $N_0 > K$ , la soluzione  $N(t)$  decresce e tende a  $K$
- Se  $0 < N_0 < K$ , la soluzione  $N(t)$  cresce e tende a  $K$
- Se  $N_0 = K$ , la soluzione  $N(t)$  è di equilibrio stabile (infatti piccole variazioni del dato iniziale non fanno allontanare la soluzione)
- Se  $N_0 = 0$ , la soluzione  $N(t)$  è di equilibrio instabile

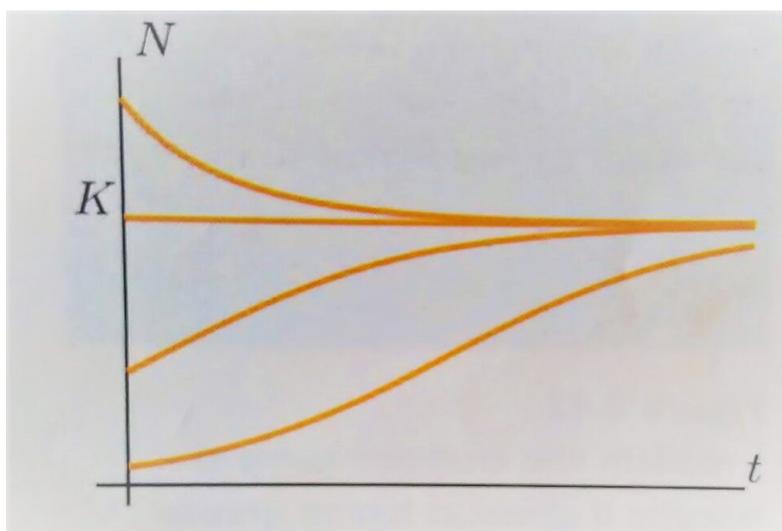


Figura 2.2: Andamento della numerosità

### 2.2.2 Descrizione dell'equazione logistica

La funzione numerosità relativa a questo modello è data quindi da:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}} \quad (2.4)$$

dove  $t$  rappresenta il tempo,  $N_0 = N(0)$  è la numerosità iniziale e  $\alpha$  e  $K$  sono due costanti reali positive.

Questa funzione è detta anche **logistica** e il modello prende il nome di **modello logistico**.

Sostituendo  $t = 0$  si ha:

$$N(0) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)} = N_0$$

Valutiamo il comportamento asintotico della funzione.

Poichè  $\alpha > 0$ , si ha che:

$$e^{-\alpha t} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow +\infty$$

dunque il denominatore di 2.4 converge a  $N_0$  e quindi il rapporto converge a  $K$ .

Questo numero è interpretabile come il massimo numero di individui della popolazione che, a lungo termine, le risorse ambientali possono sostenere.

Inoltre, se  $N_0 = K$ , si ha proprio  $N(t) = K$ , cioè la numerosità mantiene per sempre lo stesso valore. In questo caso si dice che la popolazione è in equilibrio.

Osservando il grafico nella figura 2.3, se  $N_0 < K$ , cioè se la popolazione iniziale è inferiore al livello di equilibrio, la funzione è crescente, mentre se  $N_0 > K$  la funzione è decrescente. Quindi, se  $N_0 \neq K$ , la numerosità  $N(t)$  converge a  $K$  in modo monotono.

## 2.3 Confronto tra il modello di Malthus e il modello logistico

Nel caso logistico, il comportamento asintotico della numerosità è molto diverso da quello malthusiano, perchè non si verifica una esplosione demografica o l'estinzione ma la numerosità della popolazione tende, in ogni caso, all'equilibrio.

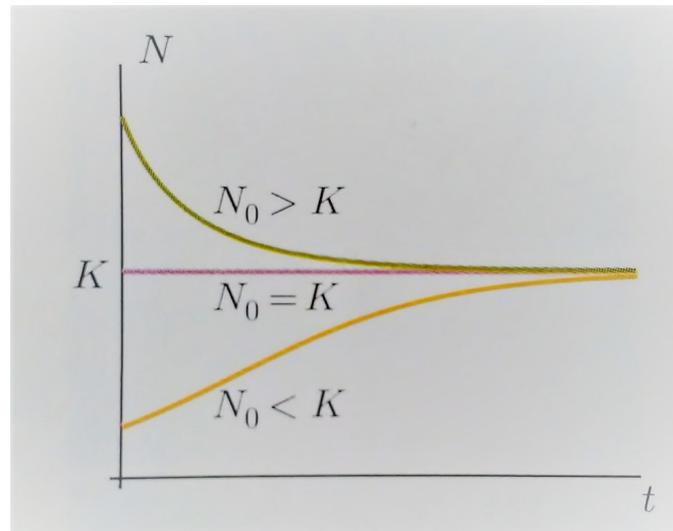


Figura 2.3: La curva logistica per tre diversi dati iniziali  $N_0$

Questi due modelli sono però meno diversi di quanto sembri.

Dividiamo numeratore e denominatore per  $K$ , otteniamo:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}} = \frac{N_0}{\frac{N_0}{K} + (1 - \frac{N_0}{K})e^{-\alpha t}}$$

Se fissiamo  $t$  e consideriamo il secondo membro come una funzione di  $K$ , possiamo studiare il limite di questa espressione per  $K \rightarrow +\infty$ . Otteniamo:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{N_0}{\frac{N_0}{K} + (1 - \frac{N_0}{K})e^{-\alpha t}} = \frac{N_0}{e^{-\alpha t}} = N_0 e^{\alpha t}$$

Come è possibile vedere in figura 2.4, per  $K \rightarrow \infty$ , cioè le risorse sono illimitate, il limite è proprio l'espressione esponenziale della numerosità di una popolazione malthusiana, assumendo  $\alpha = \ln R$ . Quindi all'aumentare di  $K$ , la crescita logistica converge alla crescita malthusiana.

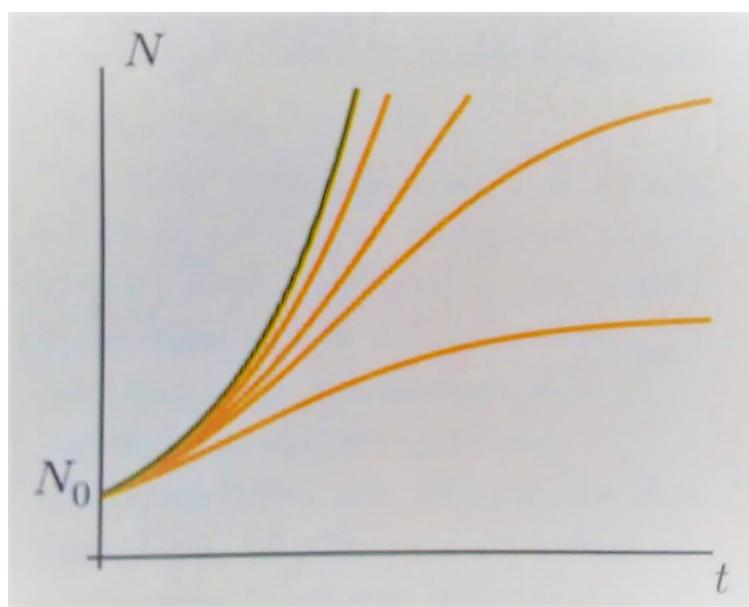


Figura 2.4: La crescita logistica che converge alla crescita malthusiana

# Capitolo 3

## I sistemi di Lotka-Volterra

In questo capitolo studieremo un modello matematico formulato dal matematico Vito Volterra negli anni venti del secolo scorso e, indipendentemente dal chimico austriaco Alfred James Lotka. Volterra ricevette lo spunto dalla richiesta del biologo D'Ancona, relativamente ad un fenomeno osservato in natura, ovvero la diminuzione del rapporto prede/predatori nel pescato nel mare Adriatico, durante la prima guerra mondiale. Per spiegare il fenomeno, Volterra propose il modello oggi noto come **equazioni di Lotka-Volterra**.

### 3.1 Descrizione del sistema di Lotka-Volterra

Il sistema di Lotka-Volterra è:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_1AX - k_2XY \\ \frac{dY}{dt} = k_2XY - k_3Y \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $A$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  sono costanti positive.

Posto

$$x = \frac{k_2}{k_3}X, \quad y = \frac{k_2}{k_1A}Y, \quad \tau = k_1At, \quad a = \frac{k_3}{k_1A}$$

il sistema 3.1 diventa:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x - xy \\ \frac{dy}{d\tau} = a(xy - y) \end{cases} \quad (3.2)$$

I punti critici sono  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .

Si procede ora con la linearizzazione del sistema, che permette lo studio della dinamica nell'intorno del punto di equilibrio, cioè un'approssimazione che consiste nel considerare solo i termini lineari nello sviluppo di Taylor. Il sistema linearizzato rispetto al punto  $(0, 0)$  è:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x \\ \frac{dy}{d\tau} = -ay \end{cases} \quad (3.3)$$

Si considera ora la matrice associata al sistema 3.3 e i corrispondenti autovalori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono:  $1$  e  $-a$  ( $< 0$ ).

Si ha quindi che  $(0, 0)$  è un **colle**.

Si consideri ora il punto critico  $(1, 1)$  e si applichi un cambio di variabile del tipo:

$$\begin{cases} x = \xi + 1 \\ y = \eta + 1 \end{cases}$$

Il sistema 3.2 diventa

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = -\eta - \xi\eta \\ \frac{d\eta}{d\tau} = a\xi + a\xi\eta \end{cases}$$

Il corrispondente sistema linearizzato è:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = -\eta \\ \frac{d\eta}{d\tau} = a\xi \end{cases}$$

La matrice associata a questo sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori corrispondenti sono  $\pm i\sqrt{a}$ .

Quindi  $(1, 1)$  è un **centro**.

Cerchiamo ora la soluzione del sistema di equazioni differenziali 3.2.

Dividiamo tra loro le due equazioni differenziali:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay(x-1)}{x(1-y)}$$

e quindi

$$a\left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy$$

perciò integrando entrambi i membri:

$$a(x - \ln x) = \ln y - y + \text{costante}$$

Poniamo:

$$f(x, y) = ax + y - \ln(x^a y)$$

che rappresenta la soluzione del sistema di equazioni differenziali.

Studiamo ora le derivate seconde parziali rispetto alla  $x$  e rispetto alla  $y$  della funzione  $f$  trovata, così da ricavare la forma quadratica, tramite la matrice hessiana relativa alla  $f$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a\left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{a}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}$$

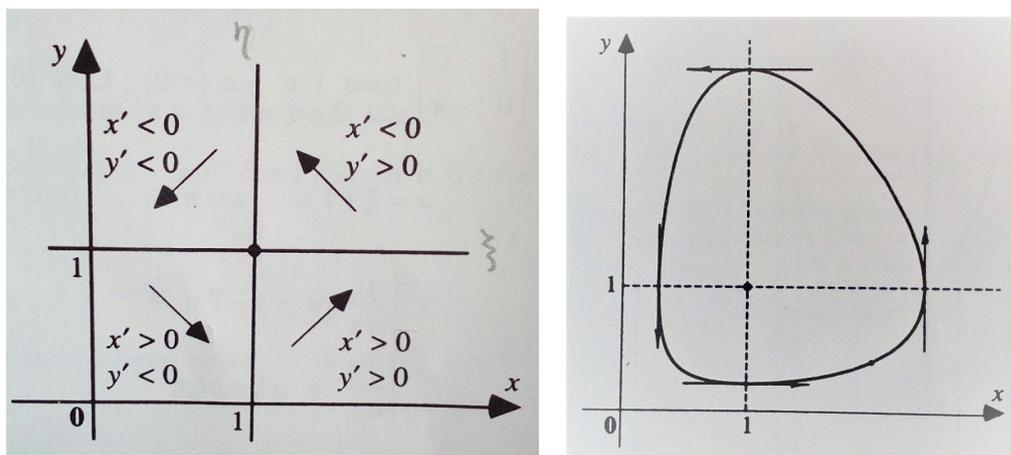
Per  $x > 0$  e  $y > 0$ , la forma quadratica è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \alpha^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \alpha \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \beta^2 \equiv \frac{a}{x^2} \alpha^2 + \frac{1}{y^2} \beta^2$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ed è definita positiva.

Quindi la funzione  $f$  è convessa e studiando la matrice hessiana rispetto al punto  $(1, 1)$ , si ottiene che  $f$  ha minimo nel punto  $(1, 1)$ .

Si analizza ora il sistema 3.2 e si ottiene il seguente disegno nel primo quadrante:



Le orbite delle soluzioni di 3.2 nel primo quadrante sono le **linee di livello** della  $f$ . Come è possibile notare si generano delle curve attorno al punto  $(1, 1)$ , che come abbiamo visto in precedenza, è un centro, perciò le curve sono chiuse e concentriche (figura 3.2).

La soluzione:

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \end{cases}$$

del sistema 3.2 soddisfacente

$$\begin{cases} x_0 = x(\tau_0) \\ y_0 = y(\tau_0) \end{cases}$$

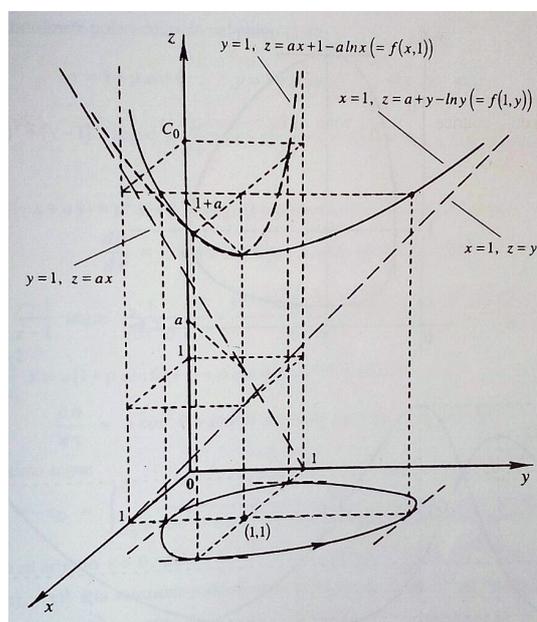


Figura 3.1: Traiettorie

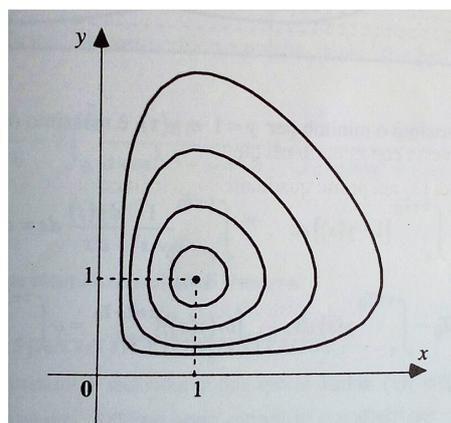


Figura 3.2: Curve di livello chiuse e concentriche attorno al punto (1, 1)

con  $x_0 > 0, y_0 > 0$  è quella corrispondente a:

$$C_0 = ax_0 + y_0 - \ln(x_0^a y_0)$$

Prendendo spunto dalla figura 3.2 è possibile affermare che queste sono **soluzioni periodiche** di periodo  $T_0$  (figure: 3.2 e 3.3)

Al variare della costante  $C$  e delle soluzioni  $x_0$  e  $y_0$ , le curve di livello mutano la loro forma allargandosi o restringendosi.

## 3.2 Modello preda-predatore

Consideriamo ora il modello di Lotka-Volterra che prende in considerazione due specie (più precisamente, popolazioni) interagenti. In natura, non abbiamo mai due sole specie, ma in alcuni casi è possibile raggrupparle in grandi famiglie, ad esempio predatori e prede.

Nel caso di due specie con gli individui della seconda (**predatori**) che si nu-

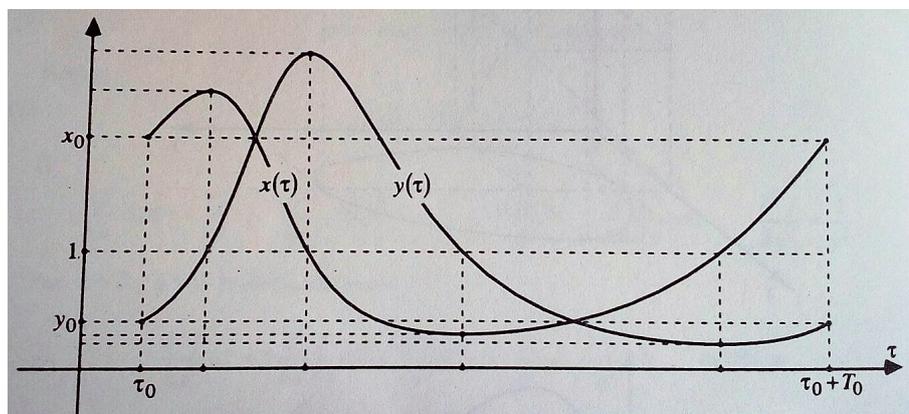


Figura 3.3: Le soluzioni periodiche del sistema di equazioni differenziali considerato

trono di quelli della prima (**prede**), Volterra presenta il modello, in prima approssimazione,

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = (-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

dove  $\epsilon_1 > 0$  è il coefficiente di accrescimento della prima specie nel caso che manchi la seconda e  $-\epsilon_2 < 0$  è quello della seconda nel caso che manchi la prima,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono costanti positive.

Posto:

$$x = \frac{\gamma_2}{\epsilon_2} N_1, \quad y = \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} N_2, \quad \tau = \epsilon_1 t, \quad a = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

il sistema 3.4 si scrive:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (1 - y)x \\ \frac{dy}{d\tau} = a(x - 1)y \end{cases} \quad (3.5)$$

che è il sistema 3.2.

Al posto di 3.5 Volterra per migliorare la spiegazione del fenomeno, avvicinandosi al caso reale, inserisce un termine quadratico  $-Ax^2$ , grazie al quale

viene limitata la crescita delle prede. Propone quindi in seconda approssimazione il sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - Ax^2 - cxy \\ \frac{dy}{dt} = -dy + exy \end{cases} \quad (3.6)$$

dove  $a, c, d, e, A$  sono costanti positive e  $0 < A < \frac{ae}{d}$ .

Osserviamo che se  $A = 0$  si ricade nel caso precedente.

Esaminando il sistema 3.6 si ottengono i seguenti punti critici e il disegno approssimativo delle curve attorno ad essi (figura 3.4):

$$O = (0, 0), \quad P = \left(\frac{a}{A}, 0\right), \quad Q = \left(\frac{d}{e}, \frac{1}{c}\left(a - \frac{Ad}{e}\right)\right)$$

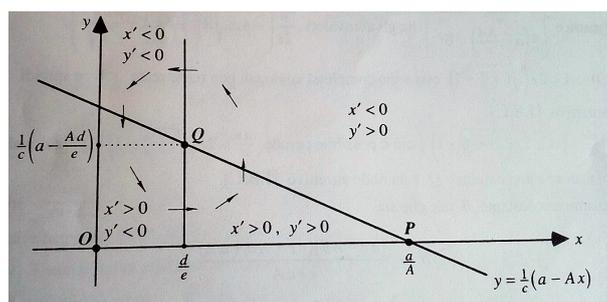


Figura 3.4: Direzione dell'orbita nel primo quadrante

Analizziamo ora i punti di equilibrio trovati.

Il sistema linearizzato di 3.6 è:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -dy \end{cases} \quad (3.7)$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

ha gli autovalori  $a > 0$  e  $-d < 0$  e quindi  $O$  è un **colle**.

Traslando il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x = \xi + \frac{a}{A} \\ y = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -a\xi - \frac{ac}{A}\eta - A\xi^2 - c\xi\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = (-d + \frac{ae}{A})\eta + e\xi\eta \end{cases} \quad (3.8)$$

e il corrispondente sistema linearizzato è:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -a\xi - \frac{ac}{A}\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = (-d + \frac{ae}{A})\eta \end{cases} \quad (3.9)$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} -a & -\frac{ac}{A} \\ 0 & -d + \frac{ae}{A} \end{pmatrix}$$

ha gli autovalori  $-a < 0$  e  $-d + \frac{ae}{A} > 0$  e quindi  $P$  è un **colle**.

Ripetendo le stesse azioni di prima:

$$\begin{cases} x = \xi + \frac{d}{e} \\ y = \eta + \frac{1}{c}(a - \frac{Ad}{e}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{Ad}{e}\xi - \frac{cd}{e}\eta - A\xi^2 - c\xi\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{e}{c}(a - \frac{Ad}{e})\xi + e\xi\eta \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{Ad}{e}\xi - \frac{cd}{e}\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{e}{c}(a - \frac{Ad}{e})\xi \end{cases} \quad (3.11)$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} -\frac{Ad}{e} & -\frac{cd}{e} \\ \frac{e}{c}(a - \frac{Ad}{e}) & 0 \end{pmatrix}$$

ha gli autovalori:

$$\frac{d}{2e}(-A \pm \sqrt{A^2 + 4eA - \frac{4ae^2}{d}})$$

Analizziamo il radicando degli autovalori trovati. Se esso è positivo allora gli autovalori sono entrambi reali, se invece è negativo, gli autovalori sono dei complessi. Si ottengono infatti i seguenti risultati:

- Se  $0 < A < 2e(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1)$  gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale  $< 0$  e quindi  $Q$  è un **fuoco attrattivo**.
- Se  $A \geq 2e(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1)$  e ciò è possibile perchè  $\frac{ae}{d} > 2e(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1)$ , gli autovalori sono entrambi reali negativi e quindi  $Q$  è un **nodo attrattivo**.

Andiamo ora a studiare le orbite nel piano  $xy$  costruendo un trapezio nel primo quadrante.

**Consideriamo il caso in cui**  $A \geq 2e(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1)$ .

Prendiamo una costante  $\mathbf{B}$  tale che sia:

$$\mathbf{B} > \frac{(ae - Ad)(ae + Ad + aA)}{ceaA} \quad (3.12)$$

Indichiamo con  $T$  il trapezio di lati:

$$A = \{(0, y); 0 < y < \mathbf{B}\}$$

$$B = \{(x, 0); 0 < x < \frac{a}{A}\}$$

$$C = \{(x, \mathbf{B}); 0 < x < \frac{d}{e}\}$$

$$D = \{(x, y); \frac{d}{e} < x < \frac{a}{A}, y = \frac{ABe}{dA - ea}(x - \frac{a}{A})\}$$

Poichè  $\frac{(ae - Ad)(ae + Ad + aA)}{ceaA} > \frac{1}{c}(a - \frac{Ad}{e})$  e  $\mathbf{B} > \frac{(ae - Ad)(ae + Ad + aA)}{ceaA}$  il punto  $Q$  è interno a  $T$  (vedi figura 3.5).

Sia  $\mathbf{r}(t)$  la soluzione di 3.6 che per  $t = t_0$  soddisfa  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$  con  $(x_0, y_0) \in \partial T$ .

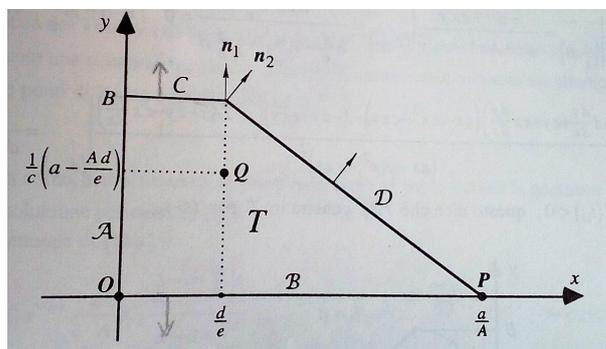


Figura 3.5: Trapezio

Consideriamo il vettore normale ad ogni lato del trapezio:  $\mathbf{n}$ .

Su C si ha:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}' \rangle = \langle (0, 1), \mathbf{r}' \rangle = y' \Big|_{y=\mathbf{B}} = -dy + exy \Big|_{y=\mathbf{B}} = (ex - d)\mathbf{B} < 0$$

perchè in C,  $x < \frac{d}{e}$ .

Quindi il vettore tangente l'orbita (cioè  $\mathbf{r}'$ ) crea un angolo ottuso con il vettore normale al lato del trapezio C, quindi l'orbita va verso l'interno del trapezio.

Il semiasse positivo delle  $y$  (ricordando che  $y' = -dy + ex$ ) è l'orbita della soluzione:

$$\begin{cases} x(t) \equiv 0 \\ y(t) = e^{-dt} \end{cases}$$

con  $-\infty < t < +\infty$

Su B si ha

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}' \rangle = \langle (0, -1), \mathbf{r}' \rangle = -y' \Big|_{y=0} = 0$$

Il vettore normale al lato B tende a creare un angolo retto con il vettore tangente l'orbita quindi, in questo caso, l'orbita tende a rimanere sul lato .

Il vettore  $\vec{OP}$ , esclusi i punti  $O$  e  $P$ , è l'orbita della soluzione:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{ae^{at}}{1+ Ae^{at}} \\ y(t) \equiv 0 \end{cases}$$

con  $-\infty < t < +\infty$ .

Su D si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{ea - dA}{ABe}\right)^2} \langle \mathbf{n}, \mathbf{r}' \rangle &= \left(x' + \frac{ea - dA}{ABe} y'\right) \Big|_{y = \frac{ABe}{dA - ea} \left(x - \frac{a}{A}\right)} = \\ ax - Ax^2 - cx \frac{ABe}{dA - ea} \left(x - \frac{a}{A}\right) + \frac{ea - dA}{ABe} (ex - d) \frac{ABe}{dA - ea} \left(x - \frac{a}{A}\right) &= \\ \left(c \frac{ABe}{ea - dA} - A - e\right) x^2 - \left(c \frac{aBe}{ea - dA} - a - d - \frac{ea}{A}\right) x - \frac{da}{A} & \end{aligned}$$

Poniamo  $\left(c \frac{ABe}{ea - dA} - A - e\right) x^2 - \left(c \frac{aBe}{ea - dA} - a - d - \frac{ea}{A}\right) x - \frac{da}{A} \equiv p(x)$ .

Poichè  $c \frac{ABe}{ea - dA} - A - e > 0$  e  $-\frac{da}{A} < 0$ , utilizzando la regola di Cartesio<sup>1</sup>, possiamo dire che  $p(x)$  ha una radice positiva e una radice negativa. Andando a sostituire alla  $x$ ,  $\frac{a}{A}$  si ha che  $p\left(\frac{a}{A}\right) = 0$ , quindi abbiamo trovato la radice positiva del polinomio considerato. Così  $p(x) < 0$  per  $0 \leq x < \frac{a}{A}$ .

Su D l'angolo tra il vettore tangente l'orbita e il vettore normale al lato D è quindi un angolo ottuso, perciò l'orbita tende ad andare verso l'interno del trapezio.

Esaminiamo ora i punti di intersezione tra i vari lati del trapezio.

$\left(\frac{a}{A}, 0\right)$  è soluzione di equilibrio e quindi se  $\mathbf{r}(t_0) = \left(\frac{a}{A}, 0\right)$ , è  $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{a}{A}, 0\right)$ ,  $\forall t$ .

Lo stesso vale per  $(0, 0)$ .

Se  $\mathbf{r}(t_0)$  è il vertice comune ad A e C, poichè il semiasse positivo delle  $y$  è l'orbita di una soluzione,  $\mathbf{r}(t)$  appartiene a tale semiasse  $\forall t$ .

Nel vertice comune a C e D si ha:

$$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{r}'(t_0) \rangle = 0 \quad \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{r}'(t_0) \rangle < 0$$

Il vettore tangente l'orbita crea un angolo retto con  $n_1$  e un angolo ottuso con  $n_2$ . Quindi l'orbita prosegue lungo il lato del trapezio oppure va verso l'interno di esso.

<sup>1</sup>REGOLA DI CARTESIO: dato un polinomio, ad ogni permanenza di segno corrisponde una radice negativa e ad ogni variazione di segno una radice positiva

È:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(\frac{d}{e}, B)} = \frac{-dy + exy}{ax - Ax^2 - cxy}\Big|_{(\frac{d}{e}, B)} = \frac{-dB + e\frac{d}{e}B}{a\frac{d}{e} - A\frac{d^2}{e^2} - c\frac{d}{e}B} = 0$$

$$\text{e } a - A\frac{d}{e} - cB < 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{(\frac{d}{e}, B)} = \\ \frac{(-d\frac{dy}{dx} + ey + ex\frac{dy}{dx})(ax - Ax^2 - cxy) - (-dy + exy)(a - 2Ax - cy - cx\frac{dy}{dx})}{(ax - Ax^2 - cxy)^2}\Big|_{(\frac{d}{e}, B)} = \\ \frac{e^3B}{d(ae - Ad - ceB)} < 0 \end{aligned}$$

Si ha quindi nel punto  $(\frac{d}{e}, B)$  una concavità e poichè  $x'(t_0) < 0$  (ricordando che  $x' = ax - Ax^2 - cxy$ ),  $\mathbf{r}(t)$  penetra in  $T$  per  $t > t_0$  (figura 3.6).

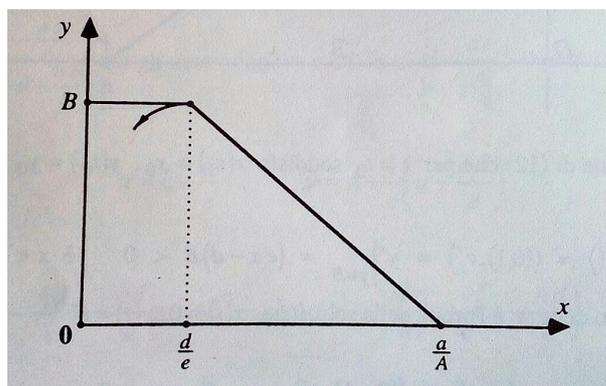


Figura 3.6: Orbita nel trapezio

Dunque  $\bar{T}(T)$  è una regione assorbente per ogni soluzione  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  che per un  $t = t_0$  soddisfa  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$  con  $(x_0, y_0) \in \partial T$  con  $x_0 > 0, y_0 > 0$ .

**Consideriamo ora il caso in cui  $0 < A < 2e(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1)$ .**

Scriviamo il sistema 3.10 nella forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ad}{e} & -\frac{cd}{e} \\ \frac{e}{c}(a - \frac{Ad}{e}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A\xi^2 - c\xi\eta \\ e\xi\eta \end{bmatrix} \equiv M(A) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \mathbf{f}(\xi, \eta; A)$$

con  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  ha tutte le derivate continue,  $\mathbf{f}(0, 0; A) = \mathbf{0}$ .

Posto:

$$\mathbf{J}(\xi, \eta; A) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

è  $\mathbf{J}(0, 0; A) = O$  (matrice nulla).

Gli autovalori di  $M(A)$  sono:

$$-\frac{d}{2e}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d^2}{e^2}A^2 + \frac{4d^2}{e}A - 4ad} \equiv \mu(A) \pm i\nu(A)$$

ed è  $\nu(A) > 0$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\frac{d}{dA}\mu(A)\Big|_{A=0} = -\frac{d}{2e} \neq 0$ .

Allora, a causa del teorema di biforcazione di Hopf <sup>2</sup>, per  $A$  in un intorno opportuno dello zero esiste almeno una soluzione periodica. L'orbita di questa è una curva chiusa attorno al punto  $Q$  e poichè contiene punti di  $T$ , essa è tutta contenuta in  $T$  (figura 3.7).

### 3.3 Applicazione del modello preda-predatore

Nella sezione precedente abbiamo visto un modello matematico che può descrivere un fenomeno naturale. Questo però, come tutti i modelli matematici, non è così fedele a ciò che accade nella realtà.

Indichiamo con  $x(t)$  la numerosità delle prede e con  $y(t)$  la numerosità dei predatori. Si assume che, in assenza di predatori, la popolazione delle prede segua una crescita malthusiana, con tasso specifico costante e positivo  $q$ ; al

<sup>2</sup>Teorema di biforcazione di Hopf. Si consideri il sistema autonomo dipendente dal parametro  $\alpha$ :  $\frac{dx}{dt} = A(\alpha)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $A(\alpha) = (a_{i,j}(\alpha))_{i,j=1,2}$ ,  $\mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x}) = (f_1(\alpha, \mathbf{x}), f_2(\alpha, \mathbf{x}))$ ,  $A(\alpha)$  e  $\mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x})$  reali di classe  $C^1$ . Supponiamo che  $A(\alpha)$  per  $\alpha$  in un intorno dello zero abbia gli autovalori  $\mu(\alpha) \pm i\nu(\alpha)$  e che sia  $\mu(0) = 0$ ,  $\nu(0) > 0$ ,  $\mu'(0) \neq 0$ . Esistono allora delle costanti  $a_0 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta_0 > 0$ , delle funzioni reali  $\alpha(a)$  e  $\omega(a)$  con  $\alpha(0) = 0$  e  $\omega(0) = 2\pi$  e una funzione  $\mathbf{x}^*(a) \omega(a)$  - periodica, tutte continue con le derivate prime continue per  $|a| < a_0$ .

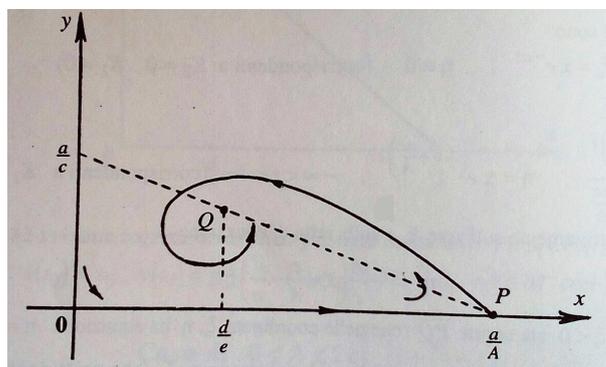


Figura 3.7: Orbita

contrario, in assenza di prede, la popolazione dei predatori decresce esponenzialmente con tasso specifico costante  $-r$ .

La presenza di predatori causa un decremento del numero di prede, con un tasso proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori, quindi al prodotto della loro numerosità  $-\beta x(t)y(t)$ . Al contrario, le prede sono nutrimento dei predatori, il cui numero si accresce quindi con un tasso specifico di crescita proporzionale al numero di prede  $\gamma x(t)$ .

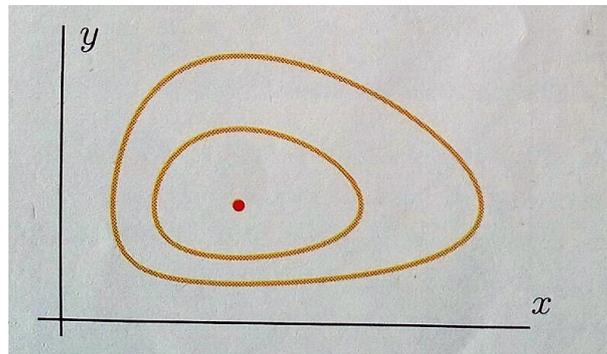
Queste assunzioni si traducono nel seguente sistema di due equazioni differenziali non lineari:

$$\begin{cases} x'(t) = qx(t) - \beta x(t)y(t) = x(t)(q - \beta y(t)) \\ y'(t) = \gamma x(t)y(t) - ry(t) = y(t)(\gamma x(t) - r) \end{cases} \quad (3.13)$$

Imponendo che i secondi membri delle due equazioni siano nulli si ottiene, non considerando il caso di assenza di prede o di predatori:

$$\begin{cases} x = \frac{r}{\gamma} \\ y = \frac{q}{\beta} \end{cases}$$

Questi valori rappresentano l'equilibrio del sistema: le funzioni costanti  $x(t) = \frac{r}{\gamma}$  e  $y(t) = \frac{q}{\beta}$  risolvono infatti il sistema.

Figura 3.8: Orbite nel piano  $xy$ 

Nella figura 3.8 le curve sono chiuse perchè  $x(t)$  e  $y(t)$  sono funzioni periodiche. Il punto rosso al centro è la soluzione di equilibrio.

Se assumiamo questi valori come condizioni iniziali, le due popolazioni sono in perfetto equilibrio.

Possiamo tradurre ciò con delle semplici considerazioni: il numero di nati delle prede equivale a quelle scomparse a causa di questo esatto numero di predatori, mentre questo particolare ammontare di prede contribuisce a una quantità di risorse (cibo) che rende il tasso di natalità della popolazione dei predatori esattamente uguale al tasso di mortalità naturale della popolazione stessa. Le numerosità delle popolazioni rimangono quindi costanti nel tempo. Nel caso più comune di dati iniziali che non siano in equilibrio, si assiste a un interessante fenomeno che si deduce dal sistema 3.13: sia il numero di prede sia il numero di predatori oscillano, anche se sfasati.

Si può descrivere questo fenomeno a parole: se il numero di prede è cresciuto, con un certo ritardo cresce anche il numero di predatori, che hanno più nutrimento. A questo aumento dei predatori, segue una diminuzione delle prede. Quando il numero di prede diventerà però troppo piccolo, non ci sarà abbastanza cibo disponibile per sostenere la crescita dei predatori, il cui numero diminuirà. Dopo un certo tempo, i predatori saranno così pochi da rendere di nuovo positivo il tasso di crescita delle prede. Il ciclo può ora ricominciare.

Nella figura 3.9 in verde è rappresentata la numerosità delle prede  $x(t)$ ,

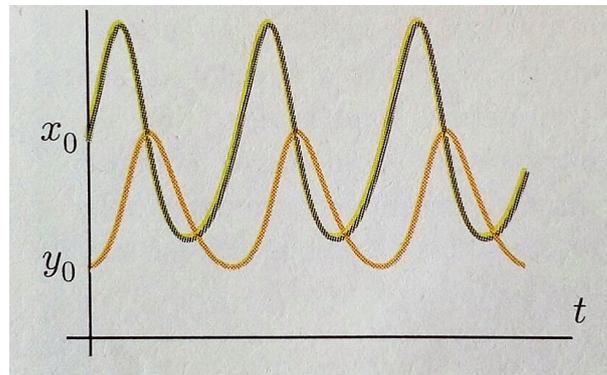


Figura 3.9: Le soluzioni del sistema di equazioni differenziali rispetto al tempo

in anticipo quella dei predatori  $y(t)$ . Si tratta di due funzioni periodiche. I picchi del numero di prede sono seguiti dai picchi del numero di predatori.

# Bibliografia

- [1] D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, *Matematica per le scienze della vita*, Milano, Casa editrice Ambrosiana (2008)
- [2] B. Pini, P. Negrini, *Lezioni su sistemi differenziali di modelli fisici, chimici, biologici*, Bologna, Pitagora Editrice Bologna (2002)
- [3] C. Dionisi, *Sistemi dinamici*, <http://web.math.unifi.it/users/dionisi/corsoanalisi3/sistemidinamici.pdf>
- [4] A. Giorgilli, *Equilibri e stabilità*, [http://www.mat.unimi.it/users/antonio/metmod/Note\\_3.pdf](http://www.mat.unimi.it/users/antonio/metmod/Note_3.pdf)



# Ringraziamenti

Vorrei innanzitutto ringraziare il relatore Paolo Negrini, che mi ha sostenuto in questo lavoro di tesi. Ci sarebbero molte persone da ringraziare per avermi aiutato ad affrontare questo periodo di studi. Ringrazio in particolare modo la mia famiglia: genitori, fratelli, nonni, zii, cugini che, in questo lungo percorso, ha sempre creduto in me e mi ha aiutato ad andare avanti. Un ringraziamento speciale va a tutti i miei amici: gli amici di maria, le F(S), gli amici d'infanzia, gli amici Erasmus, gli amici dell'università, gli amici del mare. Mi sento di ringraziare in modo particolare Sofia, con la quale oltre ad aver condiviso una delle esperienze probabilmente più belle della mia vita, il soggiorno Erasmus a Barcelona, mi ha supportato nell'affrontare questo ultimo periodo stressante, ricco di esami, esaurimenti, studio disperato. The last but not the least, vorrei ringraziare Fabiano, che in questo anno (circa) mi ha sopportato e supportato nei momenti difficili e mi ha dato la forza per non arrendermi e per superare le difficoltà.