

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

**IL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI
QUADRATICO**

Tesi di Laurea in Analisi Numerica

Relatore:

Chiar.ma Prof.

VALERIA SIMONCINI

Presentata da:

CARLO MAZZAVILLANI

Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

Il problema quadratico agli autovalori è una classe importante dei problemi agli autovalori non lineari. La risoluzione di tale problema è richiesta in vari ambiti a livello ingegneristico, dall'analisi dinamica dei sistemi meccanici, all'analisi di stabilità di sistemi microelettronici. Nel primo capitolo di questo elaborato viene definito il polinomio matriciale, l'oggetto matematico che sta alla base del problema, vengono dati alcuni risultati riguardanti possibili fattorizzazioni e viene definito il processo di linearizzazione che consente di trasformare il problema quadratico agli autovalori non lineare in un problema generalizzato agli autovalori lineare con lo stesso spettro. Nel secondo capitolo si pone l'attenzione sulle varie applicazioni del problema: a partire dalle equazioni differenziali del secondo ordine che descrivono i sistemi ingegneristici vengono trovate le soluzioni in termini degli autovalori del sistema, con l'aiuto di alcuni strumenti matematici come il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e la trasformata di Laplace. Nel terzo capitolo viene illustrato l'algoritmo QZ, uno dei possibili metodi per la risoluzione del problema quadratico agli autovalori e ne viene data una descrizione dettagliata e una possibile implementazione. Infine viene esposto un esempio di problema agli autovalori quadratico di un sistema giroscopico e vengono messe a confronto le diverse funzioni Matlab che risolvono il problema.

Indice

Introduzione	1
1 λ - matrici: definizione, fattorizzazione e teoria spettrale	5
1.1 Definizioni preliminari	5
1.2 Fattorizzazione di λ -matrici e forma canonica di Smith	7
1.3 Linearizzazione di una λ -matrice	8
1.4 Inversa di una λ -matrice	10
1.5 Triplette di Jordan per una λ -matrice	11
2 Applicazioni del problema agli autovalori quadratico	15
2.1 Circuito RLC	15
2.2 Metodo di sovrapposizione modale	19
2.3 Problema ristretto ai minimi quadrati	21
2.4 Sistemi Multiple Input - Multiple Output (MIMO)	22
2.5 Sistemi giroscopici	23
3 Algoritmo QZ	27
3.1 Fattorizzazione in forma di Schur generalizzata	27
3.2 Teorema Q implicito	29
3.3 Iterazione QR di Francis	30
3.4 Deflazione	31
3.5 Step dell' algoritmo QZ	33
3.6 Esempio	35
Bibliografia	41

Capitolo 1

λ - matrici: definizione, fattorizzazione e teoria spettrale

1.1 Definizioni preliminari

Definizione 1.1. Si definisce **polinomio matriciale di grado k nella variabile λ** o **λ -matrice di grado k** un'applicazione

$$P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$$
$$\lambda \mapsto \sum_{j=0}^k A_j \lambda^j$$

tale che $A_j \in \mathbb{C}^{n \times n} \forall j = 1, \dots, k$ e $A_k \neq 0$. Se A_k risulta essere uguale alla matrice identità il polinomio matriciale si dice **monico**. Dal punto di vista computazionale $P(\lambda)$ può essere visto come una matrice i cui coefficienti sono polinomi di grado $\leq k$ nella variabile λ .

Definizione 1.2. Siano $M, C, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e sia $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ una λ -matrice di grado 2. Il PAQ (**problema agli autovalori quadratico**) consiste nel trovare un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ e i vettori $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x, y \neq 0$, rispettivamente l'autovettore destro e sinistro relativi all'autovalore λ , tali che

$$\begin{cases} P(\lambda)x = 0 \\ y^* P(\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0 \\ y^*(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0 \end{cases}$$

Definizione 1.3. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. Si definisce **spettro di P** l'insieme: $V(P) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tale che } \det P(\lambda) = 0\}$, cioè l'insieme degli autovalori di $P(\lambda)$. $P(\lambda)$ si definisce **regolare** se $\det P(\lambda)$ non è identicamente nullo per tutti i valori di λ , cioè $V(P) \neq \mathbb{C}$ e viene definito **non regolare** altrimenti.

Osservazione 1. Il polinomio caratteristico è $\det P(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda K + C) = \det(M)\lambda^{2n} +$ termini di ordine inferiore quindi se M è non singolare, posso trovare $2n$ autovalori finiti di $P(\lambda)$ che corrispondono alle radici di $\det P(\lambda)$. Nel caso in cui M sia singolare, il grado di $\det P(\lambda)$ risulta essere uguale a $k < 2n$, perciò $P(\lambda)$ possiede k autovalori finiti e $2n - k$ autovalori infiniti.

Definizione 1.4. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice e sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un suo autovalore. Sia $\text{Ker}P(\lambda_0) = \{x \in \mathbb{C}^n \text{ tale che } P(\lambda_0)x = 0 \text{ oppure } x^*P(\lambda_0) = 0\}$. Si definisce **molteplicità algebrica** di un autovalore λ_0 l'ordine del corrispondente zero di $\det P(\lambda)$. Si definisce **molteplicità geometrica** di un autovalore λ_0 la dimensione di $\text{Ker}P(\lambda_0)$.

Definizione 1.5. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice e sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un suo autovalore. Se molteplicità algebrica e geometrica di λ_0 sono uguali a 1 l'autovalore si dice **semplice**. Se molteplicità algebrica e geometrica di λ_0 sono uguali diversi da 1, l'autovalore si dice **semi-semplice**. Se molteplicità algebrica e geometrica di λ_0 sono diverse l'autovalore si dice **defettivo**.

Definizione 1.6. Siano $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice di grado 2, $x_1 \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ autovalore di $P(\lambda)$. Posto $P'(\lambda) = 2\lambda M + C$ derivata prima rispetto a λ di $P(\lambda)$, si dice che x_1 è un **autovettore generalizzato** associato a λ_0 se x_1 è soluzione dell'equazione:

$$P(\lambda_0)x_1 = -P'(\lambda_0)x_0$$

per qualche x_0 autovettore di $P(\lambda)$.

1.2 Fattorizzazione di λ -matrici e forma canonica di Smith

Definizione 1.7. Sia $P(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λ -matrici regolari e siano $Q(\lambda), R(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λ -matrici. $Q(\lambda)$ e $R(\lambda)$ si dicono il quoziente destro e il resto destro, rispettivamente, di $P(\lambda)$ nella divisione per $B(\lambda)$ se $P(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda)$ e il grado di $R(\lambda)$ è minore o uguale al grado di $B(\lambda)$. Allo stesso modo $\hat{Q}(\lambda), \hat{R}(\lambda)$ si dicono il quoziente sinistro e il resto sinistro, rispettivamente, di $P(\lambda)$ nella divisione per $B(\lambda)$ se $P(\lambda) = B(\lambda)\hat{Q}(\lambda) + \hat{R}(\lambda)$ e il grado di $\hat{R}(\lambda)$ è minore o uguale al grado di $B(\lambda)$.

Teorema 1.2.1. (Teorema generalizzato di Bezout per matrici polinomiali di grado k) Sia $P(\lambda) = \sum_{j=0}^k P_j \lambda^j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice di grado k e siano $\lambda \in \mathbb{C}, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Allora $P(\lambda)$ si può fattorizzare in

$$P(\lambda) = P(A)(\lambda I_n - A) = (\lambda I_n - A)\hat{P}(A)$$

tale che $P(A) = \sum_{j=0}^k P_j A^{n-j}, \hat{P}(A) = \sum_{j=0}^k A^{n-j} P_j$

Definizione 1.8. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. Una soluzione $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dell'equazione matriciale $P(S) = 0$ è detta **risolvente** (se ne esiste una).

Osservazione 2. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice e sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Il teorema di Bezout generalizzato fornisce un'ulteriore fattorizzazione di $P(\lambda)$ nel caso in cui esista un risolvente $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $P(\lambda) - P(S) = (M\lambda^2 + C\lambda + K) - (MS^2 + C\lambda + K) = M(\lambda^2 I - S^2) + C(\lambda I - S) = (\lambda M + MS + C)(\lambda I - S)$. Infatti se $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è un risolvente si ha $P(\lambda) = (\lambda M + MS + C)(\lambda I - S)$.

Definizione 1.9. Siano $P(\lambda), Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λ -matrici. $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ si dicono **equivalenti** se $\exists E(\lambda), F(\lambda)$ λ -matrici $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolari tali che $P(\lambda) = E(\lambda)Q(\lambda)F(\lambda)$.

Osservazione 3. Siano $P(\lambda), Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λ -matrici equivalenti. Per il teorema di Binet: $\det P(\lambda) = \det E(\lambda) \det Q(\lambda) \det F(\lambda)$. In particolare dall'ipotesi di non singolarità di $E(\lambda), F(\lambda)$ segue che gli zeri di $\det P(\lambda)$ coincidono con quelli di $\det Q(\lambda)$.

Teorema 1.2.2. (Teorema di Smith-McMillan) Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. $P(\lambda)$ può essere ridotta, attraverso operazioni elementari su righe e colonne, alla sua **forma canonica di Smith**:

$$P(\lambda) = E(\lambda)\Lambda(\lambda)F(\lambda)$$

cioè $P(\lambda)$ ha una matrice diagonale equivalente $\Lambda(\lambda) = \text{diag}(e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda))$ tale che $e_i(\lambda)$ polinomio monico e $e_i(\lambda) | e_{i+1}(\lambda) \forall i = 1, \dots, n-1$. $\Lambda(\lambda)$ risulta essere unica mentre $E(\lambda), F(\lambda)$ non lo sono. $e_i(\lambda)$ sono detti **invarianti polinomiali di $P(\lambda)$** .

1.3 Linearizzazione di una λ -matrice

In questa sezione viene introdotto il processo di linearizzazione che permette di trasformare un problema agli autovalori quadratico non lineare in un problema generalizzato agli autovalori lineare con gli stessi autovalori.

Definizione 1.10. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. Si dice che la λ -matrice $(A - \lambda B) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ lineare è una **linearizzazione** di $P(\lambda)$ se $\exists E(\lambda), F(\lambda) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ non singolari tali che

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = E(\lambda)(A - \lambda B)F(\lambda)$$

Osservazione 4. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice e sia $(A - \lambda B) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ una sua linearizzazione. Dalla definizione di linearizzazione segue l'uguaglianza tra gli autovalori di $P(\lambda)$ e quelli di $(A - \lambda B)$.

Osservazione 5. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. Una linearizzazione di $P(\lambda)$ non è unica quindi è opportuno cercarne una che rispetti le proprietà strutturali (per esempio singolarità e simmetria) della λ -matrice $P(\lambda)$.

Definizione 1.11. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. La maggior parte delle linearizzazioni usate sono suddivisibili in due gruppi:

- **Prima forma aggiuntiva:**

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

Si mostra essere una linearizzazione di $Q(\lambda)$ moltiplicando a sinistra per $E(\lambda)$ e a destra per $F(\lambda)$ tali che

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} -(C + \lambda M)N^{-1} & -I \\ N^{-1} & 0 \end{bmatrix}, F(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \lambda I & I \end{bmatrix}$$

tale che $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare.

- **Seconda forma aggiuntiva:**

$$\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} C & M \\ N & 0 \end{bmatrix}$$

Si mostra essere una linearizzazione di $Q(\lambda)$ moltiplicando a sinistra per $E(\lambda)$ e a destra per $F(\lambda)$ tali che

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} -I & -\lambda MN^{-1} \\ -\lambda I & \frac{K + \lambda C}{N(\lambda^2 M + \lambda C + K)} \end{bmatrix}, F(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{\lambda} I & I \end{bmatrix}$$

Osservazione 6. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. Si cerca una linearizzazione $(A - \lambda B) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ di $P(\lambda)$. Un modo per costruirne una è quello di effettuare la sostituzione $u = \lambda x$ in $(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ trovando l'equazione $\lambda Mu + Cu + Kx = 0$. Mettendo a sistema la nuova equazione con l'equazione della sostituzione si trova il sistema:

$$\begin{cases} u = \lambda x \\ \lambda Mu + Cu + Kx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = 0$$

che corrisponde alla prima forma aggiuntiva con $N = I$. La seconda forma aggiuntiva si ottiene riscrivendo l'equazione come $\lambda Mu + \lambda Cx + Kx = 0$. Ponendo a sistema questa equazione con l'equazione della sostituzione $u = \lambda x$ si trova il sistema:

$$\begin{cases} u = \lambda x \\ \lambda Mu + \lambda Cx + Kx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} C & M \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = 0$$

La scelta tra le due forme aggiuntive è fatta in base alla non singolarità di M e K . N in genere è scelta come la matrice identità o come un suo multiplo (in particolare $N = \|M\| I$ o $N = \|K\| I$).

1.4 Inversa di una λ -matrice

Definizione 1.12. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. La matrice $P(\lambda)^{-1}$ è detta **risolutore di $P(\lambda)$** .

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice. Si cerca di dare una caratterizzazione di $P(\lambda)^{-1}$ in funzione delle autocopie di $P(\lambda)$. Sia $(A - \lambda B)$ una linearizzazione di $P(\lambda)$. Per definizione di linearizzazione esistono due matrici non singolari $E(\lambda), F(\lambda)$ tali che

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = E(\lambda)(A - \lambda B)F(\lambda)$$

Isolando $P(\lambda)$ e calcolandone l'inversa:

$$P(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} F(\lambda)^{-1}(A - \lambda B)^{-1}E(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo la prima forma aggiuntiva di $P(\lambda)$ come linearizzazione $(A - \lambda B)$ con $N = -K$ tale che

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} -(C + \lambda M)(-K)^{-1} & -I \\ (-K)^{-1} & 0 \end{bmatrix}, F(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \lambda I & I \end{bmatrix}$$

Sostituendo $E(\lambda), F(\lambda)$ nell'equazione precedente si trova una nuova espressione di $P(\lambda)^{-1}$ più semplice:

$$P(\lambda)^{-1} = - \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} (A - \lambda B)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Osservazione 7. Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice e sia $(A - \lambda B) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ una sua linearizzazione. Siano $X = \{ x_i \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ tale che } x_i \text{ autovettore destro di } P(\lambda) \}$ e $Y = \{ y_i \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ tale che } y_i \text{ autovettore sinistro di } P(\lambda) \}$. Come osservato precedentemente, gli autovalori di $P(\lambda)$ e quelli di una sua linearizzazione $(A - \lambda B)$ sono gli stessi:

$$\begin{cases} P(\lambda_i)x_i = 0 \\ y_i^* P(\lambda_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda B)\phi_i = 0 \\ \psi_i^*(A - \lambda B) = 0 \end{cases}$$

tale che

$$\phi_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i x_i \end{bmatrix}, \psi_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \bar{\lambda}_i y_i \end{bmatrix}$$

Consideriamo il caso in cui M non singolare e tutti gli autovalori di $P(\lambda)$ sono semisemplici, cioè le due molteplicità coincidono per ogni autovalore. Sia $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ matrice degli autovalori di $P(\lambda)$. Dall'ipotesi di semisemplicità degli autovalori di $P(\lambda)$ segue la semisemplicità degli autovalori della linearizzazione $(A - \lambda B)$. Dalle definizioni appena date si ha :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X\Lambda \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \bar{\lambda}_1 y_1 & \dots & \bar{\lambda}_n y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y\bar{\Lambda} \end{bmatrix}$$

Φ e Ψ contengono gli autovettori destri e sinistri di $(A - \lambda B)$. Normalizzando:

$$\Psi^* A \Phi = \Lambda, \Psi^* B \Phi = I$$

Se λ non è un autovalore della linearizzazione di $P(\lambda)$ segue che

$$(A - \lambda B)^{-1} = \Phi(\Lambda - \lambda I)^{-1}\Psi^*$$

e sostituendo nell'espressione di $P(\lambda)^{-1}$ si ha

$$P(\lambda)^{-1} = X(\lambda I - \Lambda)^{-1}Y^* = \frac{\sum_{i=1}^{2n} x_i y_i^*}{(\lambda - \lambda_i)}$$

1.5 Triplette di Jordan per una λ -matrice

Definizione 1.13. Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Nel caso in cui A non sia diagonalizzabile, cioè non sia possibile trovare una similitudine con una matrice diagonale, si ha la decomposizione di Jordan $A = XJX^{-1}$ con $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_t)$. Questa fornisce una λ -matrice di grado 1 monica:

$$P(\lambda) = \lambda I + A = X(\lambda I + J)X^{-1}$$

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

$J_k \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$ sono detti **blocchi di Jordan** e vale $m_1 + \dots + m_t = n$. X è la matrice contenente i vettori generalizzati di A . m_k sono dette **molteplicità parziali** di A . La somma delle molteplicità parziali di un autovalore λ fornisce la sua molteplicità algebrica mentre il numero delle molteplicità parziali di un autovalore λ fornisce la sua molteplicità geometrica.

Sia $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice di grado 2 tale che $M, C, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Sia M non singolare e sia $J = (J_1, \dots, J_t)$ tale che J_k è un blocco di Jordan di ordine m_k e tale che $m_1 + \dots + m_t = 2n$. Suddividendo $X \in \mathbb{C}^{n \times 2n}$ coerentemente con J , cioè $X = (X_1, \dots, X_t)$ tale che $X_k \in \mathbb{C}^{n \times m_k} \forall k = 1, \dots, t$. Le colonne di $X_k = (x_0^k, \dots, x_{m_k-1}^k)$ formano una catena di Jordan di lunghezza m_k per $P(\lambda)$ corrispondente all'autovalore λ_k .

Definizione 1.14. Sia $P(\lambda)$ una λ -matrice di grado 2. La coppia (X, J) è detta **coppia di Jordan** per $P(\lambda)$ e vale $MXJ^2 + CXJ + KX = 0$.

Inoltre si definisce **catena di Jordan sinistra** la matrice $Y \in \mathbb{C}^{2n \times n}$ data da:

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ XJ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} M^{-1}$$

La terna (X, J, Y) viene detta **Tripletta di Jordan**.

Osservazione 8. X e Y autovettori generalizzati soddisfano la condizione di bi-ortogonalità :

$$\begin{bmatrix} Y & JY \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ XJ \end{bmatrix} = I$$

Osservazione 9. Le matrici M, C, K possono essere espresse in termini della tripletta di Jordan (X, J, Y) :

$$\begin{cases} M = (XJY)^{-1} \\ [K \ C] = -MXJ^2 \begin{bmatrix} X \\ XJ \end{bmatrix}^{-1} \end{cases}$$

Osservazione 10. Se M è singolare, la coppia (X, J) può essere decomposta in una coppia di Jordan finita (X_F, J_F) , corrispondente agli autovalori finiti, e in una coppia di Jordan infinita (X_∞, J_∞) , corrispondente agli autovalori infiniti, dove J_∞ è la matrice di Jordan formata dai blocchi di Jordan relativi all'autovalore $\lambda = 0$. Se $Q(\lambda)$ ha r autovalori finiti si ha $X_F \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $J_F \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $X_\infty \in \mathbb{C}^{n \times (2n-r)}$ e $J_\infty \in \mathbb{C}^{(2n-r) \times (2n-r)}$ e la matrice:

$$\begin{bmatrix} X_F & X_\infty J_\infty \\ X_F J_F & X_\infty \end{bmatrix}$$

risulta essere non singolare e

$$\begin{cases} MX_F J_F^2 + CX_F J_F + KX_F = 0 \\ KX_\infty J_\infty^2 + CX_\infty J_\infty + MX_\infty = 0 \end{cases}$$

Capitolo 2

Applicazioni del problema agli autovalori quadratico

In questo capitolo verranno discusse alcune delle applicazioni che richiedono la risoluzione di un PAQ. Queste infatti trovano applicazione dall'analisi dinamica della meccanica strutturale alla modellizzazione dei sistemi microelettronici. In base alle leggi fisiche che si manifestano in ogni situazione viene scelto il metodo per la risoluzione sfruttando alcune proprietà matematiche. Si consideri l'equazione del moto $Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = f(t)$ tale che $M, K, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $q(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Nel seguito viene mostrato che la soluzione all'equazione differenziale del 2° ordine può essere espressa in termini delle autocopie del corrispondente problema agli autovalori quadratico:

$$\begin{cases} (\lambda^2 M + C\lambda + K)x = 0 \\ y^*(\lambda^2 M + C\lambda + K) = 0 \end{cases}$$

2.1 Circuito RLC

Si consideri il flusso della corrente elettrica in un circuito RLC composto da un'induttore con induttanza L , un resistore con resistenza R e un condensatore con capacità C e sia $E(t)$ un generatore di tensione. La legge di Kirchhoff stabilisce che la somma dei potenziali sui singoli componenti in tutto il circuito sia nulla, cioè $Li'(t) + Ri(t) + q(t)/C - E(t) = 0$; $i(t)$ è la corrente che attraversa il resistore, $q(t)$ è la carica del condensatore.

Inoltre $i(t) = dq(t)/dt$ quindi derivando l'equazione precedente rispetto a t :

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = \frac{dE(t)}{dt}$$

trovando quindi un'equazione differenziale del secondo ordine. Consideriamo l'equazione omogenea associata: $q''(t) + 2\zeta\omega q'(t) + \omega^2 q(t) = 0$ tale che $\omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$ e $\zeta = \frac{R}{2\omega L}$.

Definizione 2.1. ω si chiama **frequenza naturale** e ζ viene detto **fattore di smorzamento viscoso**. Il sistema si differenzia molto nel suo comportamento in base al valore di ζ infatti per :

- $\zeta = 0$: si ha un sistema **non smorzato**, cioè oscilla alla sua frequenza di risonanza ω_0 senza decadimento di ampiezza.
- $0 < \zeta < 1$: si ha un sistema **sotto smorzato**, cioè oscilla con frequenze ridotte con un ampiezza decrescente a 0.
- $\zeta > 1$: si ha un sistema **sopra smorzato**, cioè ritorna all'equilibrio senza oscillazioni (decadimento esponenziale).

$\zeta = 1$ viene detto **fattore di smorzamento critico** in quanto è il più piccolo valore di ζ tale che non ci sono oscillazioni.

Definizione 2.2. La soluzione dell'equazione omogenea associata $q''(t) + 2\zeta\omega q'(t) + \omega^2 q(t) = 0$, detta **risposta libera** è data da $q(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ tale che λ_i sono le radici dell'equazione $\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = 0$ e α_i sono costanti determinate da $q(t_0)$ e $q'(t_0)$ (condizioni iniziali).

Osservazione 11. Inizialmente consideriamo il caso in cui tutti gli autovalori λ_i sono distinti $\forall i = 1, \dots, 2n$. Siano $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$, $X = [x_1, \dots, x_{2n}]$, $Y = [y_1, \dots, y_{2n}]$ tale che x_i, y_i sono rispettivamente gli autovettori destro e sinistro relativi all'autovalore λ_i . In tal caso la soluzione generale dell'equazione omogenea $q''(t) + 2\zeta\omega q'(t) + \omega^2 q(t) = 0$ può essere scritta come:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k x_k e^{\lambda_k t} = X e^{\Lambda t} \alpha$$

con $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}]^T \in \mathbb{C}^{2n}$ arbitrario infatti calcolando:

$$q'(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k x_k \lambda_k e^{\lambda_k t} = X \Lambda e^{\Lambda t} \alpha$$

$$q''(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k x_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k t} = X \Lambda^2 e^{\Lambda t} \alpha$$

e sostituendo nell'equazione $q''(t) + 2\zeta\omega q'(t) + \omega^2 q(t) = 0$ si ha: $X \Lambda^2 e^{\Lambda t} \alpha + 2\zeta\omega X \Lambda e^{\Lambda t} \alpha + \omega^2 X e^{\Lambda t} \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha X e^{\Lambda t} (\Lambda^2 + 2\zeta\omega \Lambda + \omega^2) = 0 \Leftrightarrow (\Lambda^2 + 2\zeta\omega \Lambda + \omega^2) = 0$ che risulta essere l'equazione da soddisfare affinché $q(t)$ sia risposta libera del sistema.

Definizione 2.3. Sia data l'equazione differenziale omogenea $Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = 0$ associata alla λ -matrice $P(\lambda)$. Una soluzione di tale equazione $q(t)$ si dice **stabile** se e solo se $Re(\lambda) < 0 \forall \lambda \in \Lambda(P)$. Nel caso in cui $Re(\lambda) \leq 0 \forall \lambda \in \Lambda(P)$ e $Re(\lambda) = 0 \forall \lambda$ autovalore semisemplice, la soluzione $q(t)$ si dice **debolmente stabile**.

Osservazione 12. Se il sistema è sottoposto ad una forza armonica $f(t) = f_0 e^{i\omega_0 t}$ la soluzione particolare dell'equazione differenziale associata è del tipo:

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{j=1}^{2n} \frac{y_j^* f_0}{i\omega_0 - \lambda_j} x_j$$

In questo caso $i\omega_0$ non è un autovalore di $\lambda^2 M + \lambda C + K$ ma se si avvicina al valore di λ_k , il termine della somma esplose e si ricade in un esempio di **risonanza indesiderata**. Nel caso in cui si vogliono prevenire risonanze indesiderate, il sistema può essere controllato dall'applicazione di un controllo di feedback della forma $f(t) = -B(F_c q'(t) + F_k q(t) + r(t))$ tale che $F_c, F_k \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ sono dette **matrici di Feedback**, $r(t) \in \mathbb{C}^m$ con $m \leq n$. In questo caso l'equazione del sistema è sostituita da:

$$Mq''(t) + (C + BF_c)q'(t) + (K + BF_k)q(t) = -Br(t)$$

e quindi dal corrispondente problema agli autovalori quadratico:

$$(\lambda^2 M + \lambda(C + BF_c) + K + BF_k) x = 0$$

Il comportamento del nuovo sistema può essere modellato cambiando le matrici di feedback F_c, F_k in modo tale da avere il set di autovalori desiderato. Questo modo di risolvere un PAQ viene detto **problema agli autovalori inverso**.

Definizione 2.4. Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e sia $XJX^{-1} = X \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_p) X^{-1}$ la sua forma canonica di Jordan tale che

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$$

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si definisce **funzione di matrice** $f(A)$ il prodotto:

$$f(A) = X \operatorname{diag}(f(J_1), \dots, f(J_p)) X^{-1}$$

tale che

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f^{(1)}(\lambda_i) & \dots & \dots & \frac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & f^{(1)}(\lambda_i) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Definizione 2.5. Data $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, si definisce l'integrale della matrice A nell'intervallo $[a, b]$:

$$\int_a^b A dt = \int_a^b \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int_a^b a_{11} dt & \dots & \int_a^b a_{1n} dt \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \int_a^b a_{n1} dt & \dots & \int_a^b a_{nm} dt \end{bmatrix}$$

Osservazione 13. Si consideri ora il caso in cui gli autovalori non siano distinti. Sia M non singolare e sia (X, J, Y) una tripletta di Jordan per $P(\lambda)$. La soluzione dell'equazione omogenea associata $Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = 0$ risulta essere

$$q_o(t) = X e^{Jt}$$

con $a \in \mathbb{C}^{2n}$ arbitrario. Una soluzione particolare dell'equazione è invece data da:

$$q_p(t) = X e^{Jt} \int_0^t e^{-Js} Y f(s) ds$$

Si può verificare che q_p è soluzione attraverso la regola di Leibniz e le condizioni di normalizzazione definite nella sezione 1.5 ($XYM = 0$, $XJYM = I$, $MXJ^2 + CXJ + KX = 0$) infatti:

$$q_p'(t) = X J e^{Jt} \int_0^t e^{-Js} Y f(s) ds$$

$$q_p''(t) = X J^2 e^{Jt} \int_0^t e^{-Js} Y f(s) ds + X J Y f(t)$$

Quindi si ha: $M q_p''(t) + C q_p'(t) + K q_p(t) = (MXJ^2 + CXJ + KX) e^{Jt} \int_0^t e^{-Js} Y f(s) ds + MXJY f(t) = f(t)$. Si conclude che, se M non singolare, ogni soluzione è della forma

$$q(t) = X e^{Jt} \left(a + \int_0^t e^{-Js} Y f(s) ds \right)$$

cioè data dalla somma della soluzione omogenea e della soluzione particolare.

2.2 Metodo di sovrapposizione modale

Questo metodo viene spesso utilizzato nell'ambito della meccanica strutturale, il cui scopo è analizzare e determinare l'effetto delle vibrazioni nelle strutture meccaniche e di controllarlo. In questo caso l'equazione del moto, discretizzata con il metodo degli elementi finiti risulta essere della forma: $MX''(t) + CX'(t) + KX(t) = F(t)$. In questo caso M è chiamata **matrice di massa**, C è detta **matrice di smorzamento viscoso** mentre K è detta **matrice di rigidità**; $F(t)$ è la forza esterna dipendente dal tempo. M , K sono in relazione quadratica con l'energia cinetica e di deformazione, quindi risultano simmetriche. Inoltre M viene richiesta non singolare affinché sia possibile trovare una soluzione al problema. Si consideri l'equazione $MX''(t) + CX'(t) + KX(t) = F(t)$ con dati iniziali $X(0) = X_0$ e $X'(0) = X'_0$. Si effettui la sostituzione $X(t) = TZ(t)$ tale che $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sia non singolare e la si moltiplichi per T^T a sinistra. L'equazione trovata è detta **equazione modale**:

$$T^T M T z''(t) + T^T C T z'(t) + T^T K T z(t) = T^T f(t) \Leftrightarrow \bar{M} z''(t) + \bar{C} z'(t) + \bar{K} z(t) = \bar{f}(t)$$

tale che $\bar{M} = T^T M T$, $\bar{C} = T^T C T$, $\bar{K} = T^T K T$.

Caso particolare: Se il sistema è non smorzato ($C = 0$), cioè $MX''(t) + KX(t) = 0$ e si suppone che tutti i punti del sistema oscillino armonicamente alla stessa frequenza, cioè $x_k(t) = r_k e^{i\omega t} \forall k = 1, \dots, n$ o equivalentemente $X(t) = r e^{i\omega t} \in \mathbb{C}^n$ tale che $r = (r_1, \dots, r_n)^T$, si ha $X'(t) = i\omega r e^{i\omega t}$ e $X''(t) = -\omega^2 r e^{i\omega t}$. Sostituendo nell'equazione $MX''(t) + KX(t) = 0$ si ha $(-\omega^2 M r + K r) e^{i\omega t} = 0 \Leftrightarrow (-\omega^2 M r + K r) = 0 \Leftrightarrow K r = \omega^2 M r$. Questo è un problema generalizzato agli autovalori in ω^2 . Inoltre ogni r che risolve tale equazione risolve $M^{-1} K r = \omega^2 r$. Sia $K r = \omega^2 M r$ l'equazione del sistema non smorzato allora $[K - \omega^2 M] r = 0$. Se esiste $[K - \omega^2 M]^{-1}$ si ha $[K - \omega^2 M]^{-1} [K - \omega^2 M] r = 0$ e si trova quindi la soluzione banale $r = 0$. Se non esiste $[K - \omega^2 M]^{-1}$ si ha $|K - \omega^2 M| = 0$. Questa è chiamata **equazione caratteristica** con **soluzioni caratteristiche** le autocopie $(\omega_1^2, r_1), \dots, (\omega_n^2, r_n)$ tali che $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$. Nel seguito verranno mostrate le proprietà di ortogonalità di M e K . Consideriamo la t -esima e la s -esima equazione:

$$\begin{cases} K r_t = \omega_t^2 M r_t \\ K r_s = \omega_s^2 M r_s \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima per r_s^T a sinistra e la seconda per r_t^T a destra:

$$\begin{cases} r_s^T K r_t = \omega_t^2 r_s^T M r_t \\ r_t^T K r_s = \omega_s^2 r_t^T M r_s \end{cases}$$

Trasponendo la seconda equazione:

$$r_s^T K^T r_t = \omega_s^2 r_s^T M^T r_t$$

M, K sono per ipotesi simmetriche, cioè $M = M^T$ e $K = K^T$ quindi :

$$r_s^T K r_t = \omega_s^2 r_s^T M r_t$$

Sottraendo questa equazione alla prima equazione del sistema:

$$(\omega_t^2 - \omega_s^2) r_s^T M r_t = 0$$

quindi si ha:

$$r_s^T M r_t = 0 \quad \forall t \neq s$$

Sostituendo nel sistema precedente:

$$r_s^T K r_t = 0 \quad \forall r \neq s$$

Normalizzando:

$$\begin{cases} r_s^T K r_s = \omega_s^2 \\ r_s^T M r_s = I \end{cases}$$

Posti $\Phi = [r_1, \dots, r_n]$, $\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ si trovano le seguenti relazioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} \Phi^T M \Phi = I \\ \Phi^T K \Phi = \Lambda \end{cases}$$

da cui segue $T = \Phi$ dove T era la matrice usata nella trasformazione iniziale per trovare l'equazione modale.

2.3 Problema ristretto ai minimi quadrati

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e sia $b \in \mathbb{R}^n$. Si consideri il problema ai minimi quadrati $\min \{x^T A x - 2b^T x; x^T x = \alpha^2\}$. Questo problema può essere ridotto ad un PAQ, applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia $\phi(x, y) = x^T A x - 2b^T x - \lambda(x^T x - \alpha^2)$. Calcolando le derivate parziali rispetto a x e rispetto a λ :

$$\begin{cases} Ax - \lambda x = b \\ \alpha^2 = x^T x \end{cases}$$

Si può dimostrare che il valore più piccolo di λ che risolve queste equazioni è la soluzione al problema ai minimi quadrati iniziale. Sia ora $\lambda \notin \text{spec}(A)$ e si ponga $y = (A - \lambda I)^{-2} b = (A - \lambda I)^{-1} x$.

Allora trovo il sistema equivalente :

$$\begin{cases} b^T y - \alpha^2 = 0 \\ (A - \lambda I)^2 y = b \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema si trova

$$\frac{b^T y}{\alpha^2} = 1$$

ed espandendo la seconda si trova il problema agli autovalori quadratico simmetrico cercato:

$$(\lambda^2 I - 2\lambda A + (A^2 - \alpha^{-2} b b^T)) y = 0$$

allora la soluzione del problema ai minimi quadrati è $x = (A - \lambda I)^{-1}b$ tale che λ è il minimo autovalore che risolve il problema agli autovalori quadratico.

2.4 Sistemi Multiple Input - Multiple Output (MI-MO)

Sia l'equazione del moto $Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = f(t)$. Si supponga che il sistema sia controllato in input da una funzione $u(t) \in \mathbb{C}^m$ tale che $m \leq n$ e fornisca in output un vettore $y \in \mathbb{C}^r$; $r \leq n$ che dipende linearmente da $q(t)$. Questo sistema dinamico viene perciò descritto da:

$$\begin{cases} Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = Bu(t) \\ y(t) = Lq(t) \end{cases}$$

tale che $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $L \in \mathbb{C}^{r \times n}$ rispettivamente le matrici di controllo di input e di output.

Definizione 2.6. La **trasformata di Laplace** è una funzione lineare che associa ad una funzione di variabile reale una di variabile complessa. Data una funzione $f(t)$ reale si definisce la sua trasformata secondo Laplace definita sull'insieme continuo $s \in \mathbb{C}$:

$$L\{f\}\{s\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Esempio 2.1. Nel caso di sistemi del tipo MIMO (Multiple Input Multiple Output) sarà necessario calcolare la trasformata di Laplace di derivata prima e seconda di una generica funzione $f(t)$:

$$\begin{cases} L\{f'\} = sL\{f\} - f(0^+) \\ L\{f''\} = s^2L\{f\} - sf(0^+) - f'(0^+) \end{cases}$$

Calcolando la trasformata di Laplace del sistema dinamico MIMO e assumendo le condizioni iniziali si trova il sistema equivalente :

$$\begin{cases} s^2M\bar{q}(s) + sC\bar{q}(s) + K\bar{q}(s) = B\bar{u}(s) \\ \bar{y}(s) = G(s)\bar{u}(s). \end{cases}$$

La funzione $G(s) = L(s^2M + sC + K)^{-1}B$ è detta **funzione di trasferimento** e permette di mettere in relazione output e input nel dominio di Laplace.

Osservazione 14. Se M è non singolare e tutti gli autovalori sono distinti si ha $(s^2M + sC + K)^{-1} = X(sI - \Lambda)^{-1}Y^*$; Λ , X , Y sono rispettivamente la matrice con gli autovalori e gli autovettori destri e sinistri. Gli autovalori del polinomio quadratico $Q(s) = s^2M + sC + K$ sono i poli di $G(s)$ (cioè le radici del denominatore). La teoria classica del controllo è basata sullo studio della funzione di trasferimento: in particolare si presta particolare attenzione ai valori di s che sono radici di numeratore e denominatore di $G(s)$, detti rispettivamente **zeri** e **poli** di $G(s)$.

Esempio 2.2. Nel caso di un singolo input e un singolo output, si parla di sistemi del tipo SISO quindi $B = b \in \mathbb{C}^n$ e $L^* = l \in \mathbb{C}^n$ e la funzione di trasferimento è data da

$$G(s) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(l^* x_i)(y_i^* b)}{s - \lambda_i}$$

2.5 Sistemi giroscopici

Definizione 2.7. I sistemi giroscopici sono una classe importante di sistemi smorzati non proporzionali. Essi corrispondono a strutture ruotanti in cui vengono prese in considerazione le forze di Coriolis inerziali. Queste forze sono rappresentate da un termine $Gq'(t)$ che viene aggiunto nell'equazione standard del moto tale che G è antisimmetrica ($G = -G^T$). Tra questi sistemi si trovano le lame rotanti degli elicotteri e i satelliti stabilizzati a spinta. Se il sistema è soggetto a forze di frizione o di inseguimento, una matrice di smorzamento D viene aggiunta alla matrice di rigidità K . Se K è affetta da uno smorzamento isteretico, si può modellare K aggiungendo una matrice simmetrica puramente immaginaria. Se sono presenti sia le forze di Coriolis sia quelle di smorzamento, l'equazione del moto è della forma:

$$Mq''(t) + (C + G)q'(t) + (K + D)q(t) = f(t)$$

La soluzione dell'equazione del moto può essere definita in termini della λ -matrice associata $P(\lambda) = M\lambda^2 + (C + G)\lambda + (K + D)$.

Osservazione 15. Più in generale la λ -matrice associata ad un sistema giroscopico è della forma $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda K + C$ tale che M, K sono hermitiane, $M > 0$ e C è anti-hermitiana. Per quanto riguarda la localizzazione degli autovalori, si osserva che

$$P(\lambda)^* = P(-\bar{\lambda})$$

cioè la distribuzione degli autovalori di $P(\lambda)$ nel piano complesso è simmetrica rispetto all'asse immaginario. Se x è l'autovettore destro associato all'autovalore λ allora x risulta essere l'autovettore sinistro associato all'autovalore $-\bar{\lambda}$. Nel caso particolare in cui M, C, K sono reali si ha che gli autovalori di $P(\lambda)$ verificano una proprietà aggiuntiva:

$$P(\lambda)^T = P(\lambda)$$

In questo caso gli autovalori di $P(\lambda)$ sono simmetrici rispetto all'asse reale e a quello immaginario.

Da questa osservazione seguono i seguenti teoremi:

Teorema 2.5.1. Sia $P(\lambda)$ λ -matrice associata ad un sistema giroscopico. Allora tutte le radici di $P(\lambda)$ sono puramente immaginarie o nulle.

Dimostrazione. Sia λ un autovalore e sia q il relativo autovettore destro. Per semplicità di calcolo si pongono $M = A, C + G = B, K + D = C$. Allora $(A\lambda^2 + B\lambda + C)q = 0$. Moltiplicando a sinistra per \bar{q}' e sostituendo:

$$\begin{cases} a = \bar{q}' A q \\ ib = \bar{q}' B q \\ c = \bar{q}' C q \end{cases}$$

tale che $a > 0, c \geq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ allora $a\lambda^2 + ib\lambda + c = 0$. Per $a > 0$ si calcolino le radici

$$\lambda = \frac{i(-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac})}{2a}$$

Quindi tutte le radici sono della forma $i\omega$ tale che $\omega \in \mathbb{R}$. Allora l'equazione iniziale $(A\lambda^2 + B\lambda + C)q = 0$ diventa :

$$(-A\omega^2 + i\omega B + C)q = 0$$

Considerando i complessi coniugati e trasponendo le matrici :

$$\bar{q}'(-A\omega^2 + i\omega B + C) = 0$$

tale che $B' = -B$, $A' = A$, $C' = C$. Quindi ad ogni autovettore destro è associato un autovettore sinistro. Se l'autospazio degli autovettori destri di $i\omega$ è dato dalle combinazioni lineari di q_1, \dots, q_α allora l'autospazio degli autovettori sinistri di $i\omega$ è dato dalle combinazioni lineari di $\bar{q}_1', \dots, \bar{q}_\alpha'$ \square

Teorema 2.5.2. Sia $P(\lambda)$ λ -matrice associata ad un sistema giroscopico. Allora $P(\lambda)$ è una λ -matrice semplice.

Dimostrazione. Per assurdo, se il teorema fosse falso, dal teorema precedente esisterebbero una radice $i\omega$ e il relativo autovettore destro q tale che

$$\bar{q}'(2i\omega A + B)q = 0 \Leftrightarrow 2\omega a + b = 0$$

Ponendo $\lambda = i\omega$ si ha dalla dimostrazione precedente:

$$2\omega a + b = \lambda = \pm\sqrt{b^2 + 4ac} \neq 0$$

arrivando ad una contraddizione. \square

Capitolo 3

Algoritmo QZ

Sia $P(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una λ -matrice e sia $(A - \lambda B)$ una sua linearizzazione. Si definisce lo spettro di (A, B) l'insieme $\lambda(A, B) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tale che } \det(A - zB) = 0\}$.

L' algoritmo QZ consente di risolvere il problema generalizzato agli autovalori

$$Ax = \lambda Bx$$

e risulta essere un metodo stabile per l' approssimazione delle autocopie nel caso in cui A, B siano simmetriche.

Osservazione 16. Il problema $Ax = \lambda Bx$ risulta avere n soluzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se e solo se B risulta essere non singolare. Infatti in caso contrario troverei la soluzione banale $\lambda = 0$. Da questa osservazione segue che se B é non singolare allora

$$\lambda(A, B) = \lambda(B^{-1}A, I) = \lambda(B^{-1}A).$$

Un primo approccio per risolvere il problema se B é non singolare potrebbe essere il seguente: risolvere il sistema lineare $BC = A$ usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting trovando $C = B^{-1}A$ e poi applicare l' iterazione QR sulla matrice C trovando tutte le autocopie.

3.1 Fattorizzazione in forma di Schur generalizzata

Nel caso generale in cui B potrebbe essere singolare si cerca la **fattorizzazione in forma di Schur generalizzata**:

Teorema 3.1.1. Siano $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Allora esistono $Q, Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitarie tali che

$$Q^H A Z = T, Q^H B Z = S$$

tali che S, T sono triangolari superiori. Se per qualche k gli elementi t_{kk}, s_{kk} di posto (k, k) di T ed S sono entrambi nulli allora $\lambda(A, B) = \mathbb{C}$. In caso contrario $\lambda(A, B) = \{ \frac{t_{ii}}{s_{ii}} \text{ tale che } s_{ii} \neq 0 \}$

Teorema 3.1.2. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora esistono $Q, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonali tali che

$$Q^T A Z = T, Q^T B Z = S$$

tali che S triangolare superiore e T Hessenberg superiore.

Sfruttando i teoremi precedenti si trova il seguente algoritmo che, prese in input $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sostituisce A con una matrice di Hessenberg superiore $Q^T A Z$ e B con una matrice triangolare superiore $Q^T B Z$ dove sia Q che Z sono matrici ortogonali. Si trova la matrice U ortogonale tale che $U^T B = R$ triangolare superiore. U risulta essere prodotto di trasformazioni ortogonali del tipo Givens o Householder. Per preservare gli autovalori la matrice A , allo stesso modo, viene sostituita da $U^T A$, che in generale risulterà essere piena. L' algoritmo ad ogni passo azzerava un elemento di A fino a trasformarla in Hessenberg superiore: al primo passo si applica una rotazione di Givens a sinistra eliminando l' elemento di posto $(n, 1)$ di A e si moltiplica B a sinistra per la stessa trasformazione. In questo modo B perde la struttura triangolare quindi viene moltiplicata a destra per una rotazione di Givens opportuna in modo da azzerare l' elemento $(n, n - 1)$ (unico elemento di B sotto la diagonale diverso da 0) e allo stesso modo A viene moltiplicata a destra per questa matrice di Givens (questa trasformazione non distrugge la forma di A). E così ad ogni passo si procede eliminando un elemento di A con una trasformazione ortogonale, applicando la stessa trasformazione a B e riportando B in forma triangolare con una trasformazione opportuna che viene infine applicata ad A . L' algoritmo appena descritto può essere implementato nel seguente modo:

for $j = 1 : n - 2$:

for $i = n : -1 : j + 2$:

$[c, s] = \text{givens}(A(i - 1, j), A(i, j))$

$A(i - 1 : i, j : n) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T A(i - 1 : i, j : n)$

$B(i - 1 : i, i - 1 : n) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T B(i - 1 : i, i - 1 : n)$

$[c, s] = \text{givens}(-B(i, i), B(i, i - 1))$

$B(1 : i, i - 1 : i) = B(1 : i, i - 1 : i) \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$

$A(1 : n, i - 1 : i) = A(1 : n, i - 1 : i) \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$

end

end

3.2 Teorema Q implicito

Si osserva che la forma di Hessenberg di una matrice non è unica: cambia in base alle trasformazioni ortogonali che vengono applicate. Siano $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonale, $U_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ prodotto di matrici ortogonali e $Q = ZU_0$ tale che $Q^T A Q = H$ Hessenberg superiore. Si osserva che $Q e_1 = Z(U_0 e_1) = Z e_1$, quindi H risulta essere unica una volta che la prima colonna di Q è specificata. Questo è essenzialmente il caso in cui H non ha elementi sotto-diagonali nulli. Le matrici di Hessenberg con questa proprietà vengono dette **non ridotte**. Il seguente teorema specifica le condizioni per l'unicità della riduzione in forma di Hessenberg.

Teorema 3.2.1. Teorema Q implicito Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e siano $Q = [q_1, \dots, q_n]$, $Z = [z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonali tali che $Q^T A Q = H$, $Z^T A Z = G$. Si denota k come il minimo intero positivo tale che $h_{k+1, k} = 0$ con la convenzione che $k = n$ se H è non ridotta. Allora se $q_1 = v_1$ si ha $q_1 = + - v_1$ e $|h_{i, i-1}| = |g_{i, i-1}| \forall i = 2, \dots, k$. Inoltre se $k < n$ allora $g_{k+1, k} = 0$

Osservazione 17. Questo teorema risulta utile in quanto nel caso in cui $Q^T A Q = H$, $Z^T A Z = G$ siano entrambe matrici di Hessenberg superiore

non ridotte e Q, Z abbiano la prima colonna uguale, si avrebbe $G = D^{-1}HD$ tale che $D = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ (si dice che G ed H sono **essenzialmente uguali**)

3.3 Iterazione QR di Francis

Per capire come agisce l' algoritmo QZ è necessario prima descrivere l' algoritmo QR con doppio shift implicito descritto da Francis nel 1961: questo consente grazie al teorema Q implicito di semplificare l' algoritmo QR con doppio shift classico: si definisce $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ come $M = (H - aI)(H - bI) = H^2 - (a + b)H + abI = ZR$ (fattorizzazione QR di M) tale che a, b sono gli autovalori della sottomatrice $\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ formata dai quattro elementi in basso a destra di H . Si calcola Me_1 , cioè la prima colonna di M , si determina la matrice di Householder P_0 tale che $P_0(Me_1)$ sia multiplo di e_1 e si calcola $Z_1 = P_0P_1 \dots P_{n-2}$ come prodotto di matrici di Householder tale che $Z_1^T H Z_1$ è Hessenberg superiore e Z_1, Z hanno la prima colonna uguale. Osservando nel dettaglio si osserva che P_0 può essere calcolata con $O(1)$ flops e $Me_1 = [x, y, z, 0, \dots, 0]^T$ tale che $x = h_{11}^2 + h_{12}h_{21} - (a + b)h_{11} + ab$, $y = h_{21}(h_{11} + h_{22} - (a + b))$, $z = h_{22}h_{32}$. Inoltre l' applicazione di P_0 ad H ne cambia le prime tre righe e colonne per cui le trasformazioni P_1, \dots, P_{n-2} servono per riportare in forma di Hessenberg la matrice H . L' applicabilità del teorema Q implicito segue dall' osservazione che $P_k e_1 = e_1 \forall k = 1, \dots, n - 2$ e dal fatto che P_0 e Z abbiano la prima colonna uguale. Quindi $Ze_1 = Z_1 e_1$ e si può affermare che Z_1 e Z hanno la prima colonna uguale. Sotto queste ipotesi è possibile applicare il teorema Q implicito concludendo che $Z^T H Z$ e $Z_1^T H Z_1$ sono entrambe matrici di Hessenberg superiore non ridotte e sono essenzialmente uguali. A questo punto si calcola $H_2 = Z^T H Z$ che risulta essere il prodotto finale dell' iterazione QR implicita con doppio shift.

Algoritmo QR di Francis:

$$m = n - 1$$

calcolare la prima colonna di $(M - aI)(M - bI)$

$$s = H(m, m) + H(n, n)$$

$$t = H(m, m)H(n, n) - H(m, n)H(n, m)$$

$$x = H(1, 1)H(1, 1) + H(1, 2)H(2, 1) - sH(1, 1) + t$$

```

y = H(2, 1)(H(1, 1) + H(2, 2) - s)
z = H(2, 1)H(3, 2)
for k = 0 : n - 3
    [v, beta] = house([x, y, z]^T)
    q = max{1, k}
    H(k + 1 : k + 3, q : n) = (I - beta*vv^T)H(k + 1 : k + 3, q : n)
    r = min{k + 4, n}
    H(1 : r, k + 1 : k + 3) = H(1 : r, k + 1 : k + 3)(I - beta*vv^T)
    x = H(k + 2, k + 1)
    y = H(k + 3, k + 1)
    if k < n-3
        z = H(k+4, k+1)
    end
end
end
[v, beta] = house([x, y, ]^T)
H(n - 1 : n, n - 2 : n) = (I - beta*vv^T)H(n - 1 : n, n - 2 : n)
H(1 : n, n - 1 : n) = H(1 : n, n - 1 : n)(I - beta*vv^T)

```

3.4 Deflazione

Per descrivere l'algoritmo QZ si può assumere senza perdere di generalità che A sia non ridotta in forma di Hessenberg superiore e B sia triangolare superiore non singolare. Infatti in caso in cui $a_{k+1,k} = 0$ per qualche k la linearizzazione $A - \lambda B$ si potrebbe scrivere come:

$$A - \lambda B = \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & A_{12} - \lambda B_{12} \\ 0 & A_{22} - \lambda B_{22} \end{bmatrix}$$

tale che $A_{11} - \lambda B_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $A_{12} - \lambda B_{12} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $A_{22} - \lambda B_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ e quindi si potrebbe procedere nella risoluzione di due problemi di dimensione minore $A_{11} - \lambda B_{11}$, $A_{22} - \lambda B_{22}$. Mentre nel caso in cui B triangolare singolare, cioè $b_{kk} = 0$ per qualche k si potrebbe azzerare l'elemento $a_{n,n-1}$ tramite una procedura di **deflazione**. Questo procedimento consente, tramite a rotazioni di Givens in successione, di fare scorrere l'elemento nullo diagonale di B lungo la diagonale stessa. Chiaramente le stesse trasforma-

zioni devono essere applicate ad A , e ad ogni passo bisogna opportunamente sistemare la struttura di Hessenberg di A applicando una rotazione di Givens. Il procedimento appena descritto è generale e può essere utilizzato per azzerare $a_{n,n-1}$ nel caso in cui B abbia un elemento diagonale nullo.

L'idea generale è quella di modificare A , B nel seguente modo:

$$(\bar{A} - \lambda\bar{B}) = \bar{Q}^T(A - \lambda B)\bar{Z}$$

tale che \bar{A} Hessenberg superiore, \bar{B} triangolare superiore, \bar{Q} e \bar{Z} ortogonali. Inoltre $\bar{A}\bar{B}^{-1}$ sarebbe la stessa matrice che si troverebbe applicando l'iterazione QR di Francis della matrice AB^{-1} : questa matrice si può trovare con il teorema Q implicito e alcuni processi di deflazione. Sia $M = AB^{-1}$ (Hessenberg superiore) e sia v la prima colonna della matrice $(M - aI)(M - bI)$ dove a, b sono gli autovalori della sottomatrice inferiore di ordine 2 di M . Si considera il caso $n = 6$. Sia P_0 una matrice di Householder tale che P_0v sia un multiplo di e_1 (primo elemento della base canonica di \mathbb{R}^n).

$$A = P_0A = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}, B = P_0B = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

L'idea è di trasformare le due matrici in forma di Hessenberg-triangolare componendo trasformazioni ortogonali che vengono applicate ad A e B . A tale scopo, inizialmente si determinano una coppia di matrici di Householder Z_1, Z_2 per azzerare b_{31}, b_{32} e b_{21} :

$$A = Z_1Z_2A = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}, B = Z_1Z_2B = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Poi, viene applicata un' altra matrice di Householder P_1 per azzerare a_{31} , a_{41} :

$$A = P_1 A = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}, B = P_1 B = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Si osserva che in questo modo gli elementi non nulli non voluti sono stati shiftati verso il basso, a destra rispetto alla loro posizione iniziale. Questo è un tipico passo dell' algoritmo QZ. Si nota che la matrice $Q = Q_0 Q_1 \dots Q_{n-2}$ ha la prima colonna uguale a Q_0 . Quindi, comunque sia stata determinata la matrice di Householder iniziale, è possibile applicare il teorema Q implicito e affermare che $Q^T(AB^{-1})Q$ è la stessa matrice che si otterrebbe applicando l' iterazione di Francis a $M = AB^{-1}$ direttamente.

3.5 Step dell' algoritmo QZ

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice di Hessenberg superiore non ridotta a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangolare superiore non singolare, il seguente algoritmo sovrascrive A con una matrice di Hessenberg superiore $Q^T A Z$ e B con una matrice triangolare superiore $Q^T B Z$ dove $Q, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono matrici ortogonali e Q ha la prima colonna come quella della trasformazione ortogonale nell' iterazione di Francis quando viene applicata a AB^{-1} .

Sia $M = AB^{-1}$. Si calcola $(M - aI)(M - bI)e_1 = (x, y, z, 0, \dots, 0)^T$ tale che a, b sono gli autovalori della sottomatrice inferiore di ordine 2 di M .

for $k = 1 : n - 2$

Si trovi la matrice di Householder Q_k tale che $Q_k [x, y, z]^T = [* , 0, 0]^T$

$$A = \text{diag}(I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2}) A$$

$$B = \text{diag}(I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2}) B$$

Si trovi la matrice di Householder Z_{k1} tale che

$$[b_{k+2,k} b_{k+2,k+1} b_{k+2,k+2}] Z_{k1} = [0, 0, *]$$

$$A = A \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k1}, I_{n-k-2})$$

$$B = B \operatorname{diag}(I_{k-1}, Z_{k1}, I_{n-k-2})$$

Si trovi la matrice di Householder Z_{k2} tale che

$$[b_{k+1,k} b_{k+1,k+1}] Z_{k2} = [0, *]$$

$$A = A \operatorname{diag}(I_{k-1}, Z_{k2}, I_{n-k-1})$$

$$B = B \operatorname{diag}(I_{k-1}, Z_{k2}, I_{n-k-1})$$

$$x = a_{k+1,k}, y = a_{k+1,k}$$

if $k < n - 2$:

$$z = a_{k+3,k}$$

end

end

Si trovi la matrice di Householder Q_{n-1} tale che $Q_{n-1} [x, y,]^T = [*, 0]^T$

$$A = \operatorname{diag}(I_{n-2}, Q_{n-1}) A$$

$$B = \operatorname{diag}(I_{n-2}, Q_{n-1}) B$$

Si trova la matrice di Householder Z_{n-1} tale che

$$[b_{n,n-1} b_{n,n}] Z_{n-1} = [0, *]$$

$$A = A \operatorname{diag}(I_{n-2}, Z_{n-1})$$

$$B = B \operatorname{diag}(I_{n-2}, Z_{n-1})$$

Applicando una sequenza di passi dell' algoritmo QZ alla linearizzazione Hessenberg- triangolare $(A - \lambda B)$ è possibile ridurre A in forma quasi triangolare. Per fare ciò è necessario monitorare ad ogni passo la sottodiagonale di A e la diagonale di B in modo da realizzare il disaccoppiamento quando possibile. Il processo completo, descritto da Moler e Sterart (1973) è il seguente: date $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l' algoritmo costruisce due matrici Q , Z ortogonali tali che $Q^T A Z = T$ è quasi triangolare superiore e $Q^T B Z = S$ è triangolare superiore. La coppia (A, B) viene quindi sovrascritta dalla coppia (T, S) . Utilizzando l' algoritmo di riduzione in forma Hesseneber-triangolare descritto in precedenza si sovrascrive A con $Q^T A Z$ (Hessenberg superiore) e B con $Q^T B Z$ (triangolare superiore).

Fino a quando $q = n$:

Si pongono uguali a zero gli elementi sottodiagonali di A che soddisfano:

$$|a_{i,i-1}| \leq \epsilon (|a_{i-1,i-1}| + |a_{i,i}|)$$

Si cerca il più grande q non negativo e il più piccolo p non negativo tali che:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

tale che $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p-q)}$, $A_{13} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p-q) \times (n-p-q)}$ sia Hessenberg superiore non ridotta, $A_{23} \in \mathbb{R}^{(n-p-q) \times q}$, $A_{33} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ sia quasi triangolare superiore.

Si partiziona B coerentemente:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}$$

tale che $B_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p-q)}$, $B_{13} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $B_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p-q) \times (n-p-q)}$, $B_{23} \in \mathbb{R}^{(n-p-q) \times q}$, $B_{33} \in \mathbb{R}^{q \times q}$.

Se $q < n$:

Se B_{22} singolare: si azzerava $a_{n-q, n-q-1}$

altrimenti: si applica il QZ step a A_{22} , B_{22}

$A = \text{diag}(I_p, Q, I_q)^T A \text{diag}(I_p, Z, I_p)$

$B = \text{diag}(I_p, Q, I_q)^T B \text{diag}(I_p, Z, I_p)$

3.6 Esempio

Si consideri l'equazione del moto $Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = f(t)$ tale che $M, C, K \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $f(t) \in \mathbb{R}^4$. Come visto nei capitoli precedenti, per trovare la soluzione a questa equazione occorre risolvere il problema agli autovalori quadratico $(M\lambda^2 + C\lambda + K)x = 0$. La funzione Matlab $[X, e] = \text{polyeig}(K, C, M)$, date in input le matrici M , K e C , calcola la seconda forma aggiuntiva $(A - \lambda B)$, sfrutta la funzione $[AA, BB, Q, Z] = \text{qz}(A, B)$ per trovare la decomposizione di Schur generalizzata e applica la funzione $e = \text{eig}(AA, BB)$. Il risultato della funzione polyeig è un vettore $e \in \mathbb{R}^8$ contenente gli autovalori e una matrice $X \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$ contenente gli autovettori generalizzati. Si consideri ad esempio il caso di un sistema giroscopico con

$$M = \begin{bmatrix} 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolando con Matlab $[X, e] = \text{polyeig}(K, C, M)$ si trovano i seguenti risultati:

$$X = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,5 - 0,5i & 0,5 + 0,5i & -0,7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,7071 & -0,5 - 0,5i & -0,5 + 0,5i & -0,7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5880 & 0,5880 & 0,5667 & -0,5667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8088i & 0,8088i & -0,8239 & 0,8239 \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} -1,0000 + 0,0000i \\ 0,0000 + 1,0000i \\ 0,0000 - 1,0000i \\ 1,0000 + 0,0000i \\ -0,0000 + 2,5701i \\ -0,0000 - 2,5701i \\ 0,7782 + 0,0000i \\ -0,7782 + 0,0000i \end{bmatrix}$$

Ora è possibile controllare se le autocopie soddisfano l'equazione del problema agli autovalori quadratico. Per la prima autocoppia per esempio:

$$\lambda = e(1)$$

$$x = X(:, 1)$$

$$(M * \lambda^2 + C * \lambda + K) * x$$

trovando come risultato:

$$\text{ans} =$$

$$1,0e - 15 *$$

$$-0,2161$$

$$0,0853$$

$$0$$

$$0$$

Allo stesso modo gli altri autovalori calcolati possiedono un'accuratezza dell'ordine di 10^{-15} quindi è possibile affermare che la soluzione al problema agli autovalori ha un errore dell'ordine dell'incertezza della macchina. Un'altro

modo per risolvere il problema agli autovalori è quello di scegliere e calcolare una linearizzazione $(A - \lambda B)$ e applicare la funzione Matlab $e = \text{eig}(A, B)$ per trovare gli autovalori. Si consideri ad esempio la prima forma aggiuntiva:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -10^{-7} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo modo la funzione $\text{eig}(A, B)$ fornisce come output il vettore:

$$e = \begin{bmatrix} -1,0000 + 0,0000i \\ -0,0000 + 1,0000i \\ -0,0000 - 1,0000i \\ 1,0000 + 0,0000i \\ 0,0000 + 2,5701i \\ 0,0000 - 2,5701i \\ -0,7782 + 0,0000i \\ 0,7782 + 0,0000i \end{bmatrix}$$

In questo caso se si ripete il test di accuratezza per la prima autocoppia:

$$\lambda = e(1)$$

$$x = X(:, 1)$$

$$(M * \lambda^2 + C * \lambda + K) * x$$

si trova:

ans =

$1,0e - 09 *$

0,1888

-0,188

0

0

In questo caso l' errore calcolato risulta essere maggiore di sei ordini di grandezza. Questo è dovuto al fatto che si è utilizzata una forma aggiuntiva diversa da quella utilizzata di default dalla funzione polyeig. Infatti se si considera la seconda forma aggiuntiva $(A - \lambda B)$ con

$$A = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} C & M \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando la funzione $e = \text{eig}(A, B)$ si trova il seguente risultato:

$$e = \begin{bmatrix} -1,0000 + 0,0000i \\ -0,0000 + 1,0000i \\ -0,0000 - 1,0000i \\ 1,0000 + 0,0000i \\ 0,0000 + 2,5701i \\ 0,0000 - 2,5701i \\ -0,7782 + 0,0000i \\ 0,7782 + 0,0000i \end{bmatrix}$$

In questo caso ripetendo il test di accuratezza per la prima autocoppia:

$lambda = e(1)$

$x = X(:,1)$

$(M * lambda^2 + C * lambda + K) * x$

si trova:

ans =

1,0e - 15 *

-0,2161

0,0853

0

0

I risultati ottenuti risultano essere gli stessi dati dall' utilizzo della funzione `polyeig`. L' errore dato dalla funzione `eig` utilizzando la prima forma aggiuntiva sono dovuti alla forma aggiuntiva stessa: in questo caso le matrici M e C sono diagonali con un elemento diagonale pari a 10^{-7} e potrebbero essere considerate come quasi singolari durante lo svolgimento della funzione stessa. È quindi opportuno scegliere una linearizzazione in base alle matrici di partenza del problema per evitare di incorrere in un errore di calcolo troppo grande.

Bibliografia

- [1] F. Tisseur, K. Meerbergen - *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM Rev. Vol. 43, Number 2 (2001)
- [2] P. Lancaster - *Lambda-matrices and vibrating systems*, Pergamon Press (1966)
- [3] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman - *Matrix polynomials*, Academic Press (1982)
- [4] A. Taneja - *Mode superposition problem analysis* (2015)
- [5] G.H. Golub, C.F. Van Loan - *Matrix computation*, John Hopkins University Press (1996)