Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LEMMA DI SCHWARZ E LA SUA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Nicola Arcozzi

Presentata da:
Gloria Terenzi

III Sessione
Anno Accademico 2015/2016

Se camminassimo solo nelle giornate di sole
non raggiungeremmo mai la nostra destinazione.
Paulo Coelho

Introduzione

Il tema centrale di questa tesi, suddivisa in tre capitoli, è il Lemma di Schwarz e la sua applicazione nella geometria iperbolica. Il lemma di Schwarz, che prende il nome da Hermann Amandus Shchwarz, descrive una proprietà delle funzioni olomorfe.
Nel primo capitolo enuncio il Lemma di Schwarz e la sua versione infinitesimale. Descrivo le mappe conformi del dominio per poi applicare il lemma di Pick che è una forma particolare del lemma di Schwarz.
Nel secondo capitolo introduco brevemente la geometria Euclidea con i cinque postulati di Euclide, per poi passare a descrivere la geometria iperbolica. Introduco la definizione di forma fondamentale (o forma metrica) di una superficie.
Nel terzo capitolo affronto la geometria iperbolica nel disco. Quindi data una forma metrica ho definito distanza iperbolica e lunghezza iperbolica per poi arrivare a dimostrare tramite una reinterpretazione del lemma di Schwarz l'invarianza delle mappe olomorfe.

Indice

Capitolo 1

Lemma di Schwarz e Geometria Iperbolica

1.1 Il Lemma di Schwarz

Teorema 1.1 (Lemma di Schwarz). *Sia f(z) una funzione olomorfa per* $|z| < 1$*. Supponiamo* $|f(z)| < 1$ *per tutti gli* $|z| < 1$*, e* $f(0) = 0$*. Allora*

$$|f(z)| \leq |z|, \qquad |z| < 1.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza $|f(z)| = |z|$ *per qualche punto* $z_0 \neq 0$ *allora f(z)* $= \lambda z$ *per qualche costante* λ *di modulo unitario.*

Dimostrazione. Fattorizziamo $f(z) = zg(z)$, dove $g(z)$ funzione olomorfa, e applichiamo il principio del massimo a $g(z)$. Sia $r < 1$. Se $|z| = r$, allora $|g(z)| = |f(z)|/r \leq 1/r$. Per il principio del massimo, $|g(z)| < 1/r$ per tutti gli z che soddisfano $|z| \leq r$.
Se $r \to 1$, otteniamo $|g(z)| \leq 1$ per tutti gli $|z| < 1$ e quindi abbiamo la disuguaglianza.
Se $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $|z_0| \neq 0$, allora $|g(z_0)| = 1$, e dal principio del massimo, $g(z)$ è costante, cioè $g(z) = \lambda$. Allora $f(z) = \lambda z$.

□

Una stima analoga vale per un qualsiasi disco. Se $f(z)$ è olomorfa per $|z-z_0|<R$, $f(z) \leq M$ e $f(z_0)=0$, allora

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z-z_0|, \qquad |z-z_0|<R$$

con l'ugualianza che vale solo quando $f(z)$ è un multiplo di $z-z_0$. Questo può essere provato direttamente fattorizzando $f(z)=(z-z_0)g(z)$. Può anche essere ottenuta da $|f(z)| \leq |z|$ scalando in entrambe le variabili z e w, con $w=f(z)$ e traslando il centro del disco come segue. Il cambio di variabile $\xi \longmapsto R\xi + z_0$ manda il disco unitario $\{|\xi|<1\}$ nel disco $\{|z-z_0|<R\}$. Se definiamo $h(\xi)=f(R\xi+z_0)/M$, allora $h(\xi)$ è olomorfa sul disco unitario aperto e soddisfa $|h(\xi)|<1$ e $|h(0)|=0$. La stima $|h(\xi)| \leq |\xi|$ diventa $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z-z_0|, |z-z_0|<R$.
Il Lemma di Schwarz fornisce una stima per il "modulo di continuità" di una funzione olomorfa. Mostra che una famiglia di funzioni olomorfe uniformemente limitate è equicontinua in ogni punto.

Vediamo la versione infinitesimale del Lemma di Schwarz.

Teorema 1.2. *Sia f(z) olomorfa per $|z|<1$. Se $|f(z)| \leq 1$ per $|z|<1$, e $f(0)=0$, allora*

$$|f'(0)| \leq 1,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se f(z)= λz per qualche costante λ con $|\lambda|=1$.

La stima $|f'(0)| \leq 1$ segue ponendo z $\longmapsto 0$ nel Lemma di Schwarz. Per il caso dell'uguaglianza, consideriamo la fattorizzazione $f(z)=zg(z)$ usata nella dimostrazione del Lemma di Schwarz e osserviamo che $g(0)=f'(0)$. Se $|f'(0)|=1$, abbiamo $g(0)=1$ e concludiamo dal principio del massimo che $g(z)$ è costante. Quindi $f(z)=\lambda z$.

1.2 Mappe conformi del disco unitario in sè

Definizione 1.3. Denotiamo con $\mathbb{D}$ il disco aperto unitario nel piano complesso, $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Una *mappa conforme del disco unitario in sè* è una funzione olomorfa da $\mathbb{D}$ a se stesso tale che sia iniettiva e suriettiva.

La composizione di due mappe conformi del disco unitario in sè è ancora una mappa conforme, e l'inversa di una mappa conforme del disco unitario in sè è una mappa conforme. Esse formano quello che è chiamato "gruppo", con l'operazione di composizione. Il gruppo identità è la mappa identica $g(z) = z$.
Per un angolo fissato φ, la rotazione $z \longmapsto e^{i\varphi}z$ è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè che fissa l'origine, e queste sono le uniche mappe conformi del disco unitario in sè che lasciano fissato zero.

Lemma 1.4. *Se $g(z)$ è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè tale che $g(0) = 0$, allora $g(z)$ è una rotazione, cioè $g(z) = e^{i\varphi}z$ per qualche φ fissato, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.*

Dimostrazione. Applichiamo il Lemma di Schwarz a $g(z)$ e alla sua inversa. Poichè $g(0) = 0$ e $|g(z)| < 1$, il Lemma di Schwarz vale, e $|g(z)| < |z|$. Se applichiamo il Lemma di Schwarz anche a $g^{-1}(w)$, otteniamo $|g^{-1}(w)| \leq |w|$, che per $w = g(z)$ diventa $|z| \leq |g(z)|$. Perciò $|g(z)| = |z|$. Poichè $g(z)/z$ ha modulo costante, è costante. Quindi $g(z) = \lambda z$ per una costante unimodulare λ.

□

Teorema 1.5. *La mappa conforme del disco unitario $\mathbb{D}$ in sè è la mappa di Möbius della forma*

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \qquad a, c \in \mathbb{C}, \qquad |a|^2 - |c|^2 = 1,$$

o, equivalentemente

$$z \mapsto e^{i\varphi}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \qquad a \in \mathbb{D}.$$

Dimostrazione. Definiamo $g(z) = (z - a)/(1 - \overline{a}z)$. Poichè $g(z)$ è una trasformazione lineare frazionaria, è una mappa conforme del disco unitario in sè del piano complesso esteso, e mappa cerchi su cerchi. Da

$$|e^{i\theta} - a| = |e^{-i\theta} - \overline{a}| = |1 - \overline{a}e^{i\theta}|, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

vediamo che $|g(z)| = 1$ per $z = e^{i\theta}$, quindi $g(z)$ manda il cerchio unitario in se stesso. Poichè $g(a) = 0$, $g(z)$ deve mandare il disco aperto unitario in se stesso. Di conseguenza, $g(z)$ è una mappa conforme del disco unitario in sè, e quindi $f(z)$ è definita da
$f(z) = e^{i\varphi}(z - a)/(1 - \overline{a}z)$, per $|z| < 1$. Sia $h(z)$ una arbitraria mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè, e chiamiamo $a = h^{-1}(0)$. Allora $h \circ g^{-1}$ è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè, e $(h \circ g^{-1})(0) = h(a) = 0$. Per il lemma $(h \circ g^{-1})(w) = e^{i\varphi}w$ per qualche φ fissato, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Scrivendo $w = g(z)$, otteniamo $h(z) = e^{i\varphi}g(z)$, e $h(z)$ ha la forma $f(z) = e^{i\varphi}(z - a)/(1 - \overline{a}z)$, $|z| < 1$.

□

I parametri a e $e^{i\varphi}$ sono univocamente determinati dalla mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè. Il parametro a è $f^{-1}(0)$, e poiché

$$f'(z) = e^{i\varphi}\frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)^2}, \qquad |z| < 1,$$

il parametro φ è unico (modulo 2π) come argomento di $f'(0)$. Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio di $\mathbb{D}$ x $\partial\mathbb{D}$ e le mappe conformi del disco aperto unitario in sè.
Di seguito facciamo un grande step dimostrando una forma del Lemma di Schwarz che è invariante dispetto alle mappe conformi del disco aperto unitario in sè.

Teorema 1.6 (Lemma di Pick)**.** *Se f(z) è olomorfa e soddisfa $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$, allora*

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}, \qquad |z| < 1.$$

Se f(z) è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè, allora vale l'uguale; altrimenti vale la disuguaglianza stretta per tutti gli $|z| < 1$.

Dimostrazione. Per provare la disuguaglianza, la nostra strategia è di mandare z e $f(z)$ a 0 usando le mappe conformi del disco unitario in sè, e di applicare il Lemma di Schwarz alla composizione risultante. Fissiamo $z_0 \in \mathbb{D}$ e poniamo $w_0 = f(z_0)$. Siano $g(z)$ e $h(z)$ mappe conformi di $\mathbb{D}$ in sè che mandano 0 in z_0 e w_0 in 0, rispettivamente, diciamo

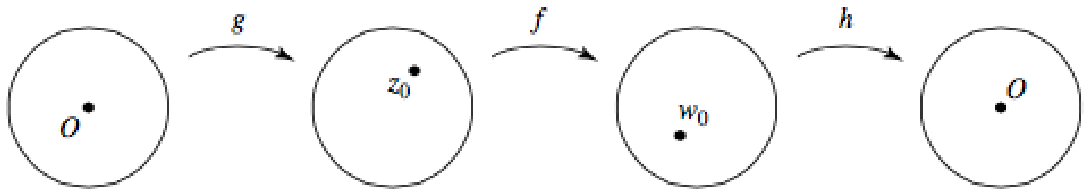
$$g(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}, \qquad h(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}.$$

Allora $h \circ f \circ g$ manda 0 in 0. La stima $|f'(0)| < 1|$ e la regola della catena

$$|(h \circ f \circ g)'(0)| = |h'(w_0) f'(z_0) g'(0)| \leq 1,$$

quindi $|f'(z_0)| \leq 1/|g'(0)||h'(w_0)|$. Sostituendo $g'(0) = 1 - |z_0|^2$ e $h'(w_0) = 1/(1 - |w_0|^2)$, otteniamo la tesi.

$\square$



Se $f(z)$ è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè, allora lo è anche $h \circ f \circ g$, quindi abbiamo l'uguaglianza in $|(h \circ f \circ g)'(0)| = |h'(w_0) f'(z_0) g'(0)| \leq 1$, da cui si ricava l'uguaglianza nel lemma di Pick. Al contrario, supponiamo che $f(z)$ è una funzione olomorfa da $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$ tale che valga l'uguaglianza $|f'(z)| = (1 - |f(z)|^2)/(1 - |z|^2), |z| < 1$ in un punto z_0. Allora i calcoli sopra ci dicono $|(h \circ f \circ g)'(0)| = 1$. In accordo con quanto detto finora $h \circ f \circ g$ è una moltiplicazione di una costante unimodulare, quindi è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè. Componendo con h^{-1} a sinistra, e con g^{-1} a destra, si conclude che f è una mappa conforme del disco unitario $\mathbb{D}$ in sè.

Capitolo 2

Geometria non-Euclidea

La geometria Euclidea è un sistema matematico attribuito al matematico Euclide, che la descrisse nei suoi Elementi. Consiste nell'assunzione di cinque concetti, detti assiomi o postulati, e nella derivazione, da tali assiomi, di altre proposizioni (teoremi) che non abbiano alcuna contraddizione con essi. Questa organizzazione della geometria permise l'introduzione della retta, del piano, della lunghezza e dell'area. Dopo Euclide sono nati particolari tipi di geometrie che non necessariamente rispettano i cinque postulati; tali geometrie sono definite non-Euclidee.

I cinque postulati di Euclide sono:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta;

2. Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;

3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;

4. Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro;

5. Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

Si nota subito una differenza tra i primi quattro, immediatamente evidenti e praticamente verificabili col semplice uso di matita, righello e compasso, ed il quinto, che non è caratterizzato dall'immediatezza pratica dei primi, mentre presenta una formulazione molto più involuta. Sulla violazione di questi postulati, e soprattutto sul quinto, si fondano le geometrie non-Euclidee come ad esempio la geometria iperbolica.

2.1 Quinto Postulato di Euclide

I tentativi di dimostrare il cosiddetto quinto postulato di Euclide a partire dagli altri postulati, hanno portato alla nascita delle geometrie non-Euclidee.
Il quinto postulato si può enunciare nel seguente modo:

Data una retta r e un punto P fuori da essa, per il punto P passa una ed una sola retta parallela ad r.

Questo postulato è risultato indipendente dagli altri, nel senso che si possono costruire geometrie "piane" in cui valgono tutti gli altri enunciati originali di Euclide, ma il quinto postulato è diverso:

1. Per P esterno ad r non passa nessuna parallela
2. Per P esterno ad r passano due (o addirittura infinite) rette parallele (o non secanti)

Per il caso 1 (**Geometria Ellittica Piana**) possiamo definire come punto la coppia di punti diametralmente opposti (P,P'), e per la retta un cerchio massimo passante per P e P'. Vediamo che per due punti (P,P') e (Q,Q') passa una retta r e che per un punto (T,T') esterno ad r non passa alcuna parallela ad r in quanto tutte le rette per (T,T') intersecano r in un punto.

Analogamente per quanto fatto per il postulato V1), si può definire un modello per il postulato V2), detto **Geometria Iperbolica Piana**. Il piano iperbolico non può venire immerso completamente nello spazio euclideo 3D come quello ellittico. Si possono però fare dei modelli limitati:
Definiamo come punti quelli interni alla circonferenza di raggio 1, le rette sono le corde della circonferenza e i punti di questa corda sono detti punti impropri.

Definizione 2.1. La *distanza iperbolica* tra due punti A e B è data da

$$d(AB) = \left| log\left(\frac{PA \cdot QA}{PB \cdot QB} \right) \right|$$

Si vede che d(AB)$\rightarrow \infty$, uno dei due punti tende alla circonferenza.

2.2 La Prima Forma Fondamentale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto. Sia γ: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ funzione regolare di classe C^∞ che parametrizza una superficie, $\gamma(\Omega) = \mathcal{S}$. Se γ(t) $= x(u(t), v(t))$, con a $\leq$ t $\leq$ b, è una curva su una superficie, e se $s = s(t)$ è la lunghezza d'arco lungo $\overline{\gamma}$ da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ allora definiamo la lunghezza totale L di questa curva integrando $\frac{ds}{dt} = |\frac{d\overline{\gamma}}{dt}|$ sull'intervallo $[a; b]$

$$L \equiv s(t) = \int_a^b \left| \frac{d\overline{\gamma}}{dt} \right| dt.$$

Ma poichè $\dot{\overline{\gamma}} = \overline{x}_u \cdot \dot{u} + \overline{x}_v \cdot \dot{v}$ (con $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ e $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \left| \frac{d\overline{\gamma}}{dt} \right|^2 = \dot{\overline{\gamma}} \cdot \dot{\overline{\gamma}} = (\overline{x}_u \dot{u} + \overline{x}_v \dot{v}) \cdot (\overline{x}_u \dot{u} + \overline{x}_v \dot{v}) = \\ &= \dot{u}^2 (\overline{x}_u \cdot \overline{x}_u) + 2\dot{u}\dot{v} (\overline{x}_u \cdot \overline{x}_v) + \dot{v}^2 (\overline{x}_v \cdot \overline{x}_v). \end{aligned}$$

Poniamo $E \equiv \overline{x}_u \cdot \overline{x}_u$, $F \equiv \overline{x}_u \cdot \overline{x}_v$, $G \equiv \overline{x}_v \cdot \overline{x}_v$; e otteniamo

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2.$$

Definizione 2.2. Definiamo la lunghezza di γ nella metrica iperbolica come

$$L = \int_a^b \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

e abbreviando diventa $L = \int_{\overline{\gamma}} ds = \int_{\overline{\gamma}} [Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2]^{\frac{1}{2}}$

In forma differenziale otteniamo

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

e viene detta prima forma fondamentale o **forma metrica** di una superficie. Come vedremo, la forma metrica determina completamente la forma intrinseca della superficie, inclusa la sua curvatura.

Definizione 2.3. Definiamo la *curvatura Gaussiana di una superficie* in una parametrizzazione ortogonale (F = 0)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{G_u}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right).$$

Esempio 2.1. Data la metrica

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

Calcoliamo la curvatura di Gauss.

$$ds^2 = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}dx^2 + \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}dy^2$$

$$E = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Allora

$$
\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{G_x}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\right) \\
&= \frac{1}{2\left(\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{16x}{(1-x^2-y^2)^3}}{\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{16y}{(1-x^2-y^2)^3}}{\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\left(\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{4x}{(1-x^2-y^2)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{4y}{(1-x^2-y^2)}\right) \\
&= -\frac{(1-x^2-y^2)^2}{8}\left(\frac{4(x^2-y^2+1)}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{4(y^2-x^2+1)}{(1-x^2-y^2)^2}\right) \\
&= -\frac{(1-x^2-y^2)^2}{8}\left(\frac{4x^2-4y^2+4+4y^2-4x^2+4}{(1-x^2-y^2)^2}\right) \\
&= -\frac{(1-x^2-y^2)^2}{8}\left(\frac{8}{(1-x^2-y^2)^2}\right) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Capitolo 3

Geometria Iperbolica nel Disco

Supponiamo che $w = f(z)$ sia una mappa conforme del disco unitario $\mathbb{D}$ in sè. Dal lemma di Pick abbiamo l'uguaglianza $|f'(z)| = (1 - |f(z)^2)/(1 - |z|^2)$,

$$|ds| = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1 - |w|^2}{1 - |z|^2}$$

Nella forma differenziale questo diventa

$$\frac{|dw|}{1 - |w|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Questa metrica induce una *distanza iperbolica* tra due punti z_0 e z_1 in $\mathbb{D}$ nel seguente modo.

Definizione 3.1. Definiamo la *lunghezza di γ nella metrica iperbolica* come

$$\ell_{\mathbb{D}}(\gamma) = 2\int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Il fattore 2 è un fattore innocuo, e spesso viene omesso. Serve per aggiustare la metrica in modo che la curvatura sia -1.

Definizione 3.2. Definiamo la *distanza iperbolica* $d_{\mathbb{D}}(z_0, z_1)$ da z_0 a z_1 come l'estremo inferiore (il più grande limite inferiore) della lunghezza iperbolica di tutte le curve continue a tratti di $\mathbb{D}$ da z_0 a z_1.

$$d_{\mathbb{D}}(z_0, z_1) = inf_{\gamma}(\ell_{\mathbb{D}}(\gamma)).$$

Teorema 3.3. *Per ogni mappa olomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ allora sono equivalenti:*

1. *f è un automorfismo di $\mathbb{D}$;*
2. *f è un' isometria della metrica ds;*
3. *f è un' isometria della distanza $d_{\mathbb{D}}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che (1) implica (2):
Infatti, se vale (1), allora f è della forma $z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}$, e abbiamo visto che vale

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2},$$

perciò abbiamo (2). Vediamo il viceversa:
Supponiamo che (2) valga, cioè che f sia un' isometria della metrica iperbolica. Allora per un qualsiasi automorfismo g di $\mathbb{D}$, $h = g \circ f$ è ancora un' isometria della metrica iperbolica. se scegliamo g tale che $h(0) = g(f(0)) = 0$, allora

$$2|h'(0)| = 2.$$

Così, h è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ che fissa l'origine e $|h'(0)| = 1$, perciò il Lemma di Schwarz implica che h appartenga al sottogruppo formato dagli automorfismi che fissano l'origine. Allora anche $f = g^{-1} \circ h$ appartiene a questo sottoguppo, e quindi abbiamo dimostrato che (1) e (2) sono equivalenti.
Ora dimostriamo che (1) e (3) sono equivalenti:
Se f appartiene al gruppo delle mappe conformi di $\mathbb{D}$, allora è un' isometria della metrica iperbolica. Quindi per ogni curva regolare γ in $\mathbb{D}$,

$$\ell_{\mathbb{D}}(f \circ \gamma) = \int_{f\circ\gamma} \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \ell_{\mathbb{D}}(\gamma).$$

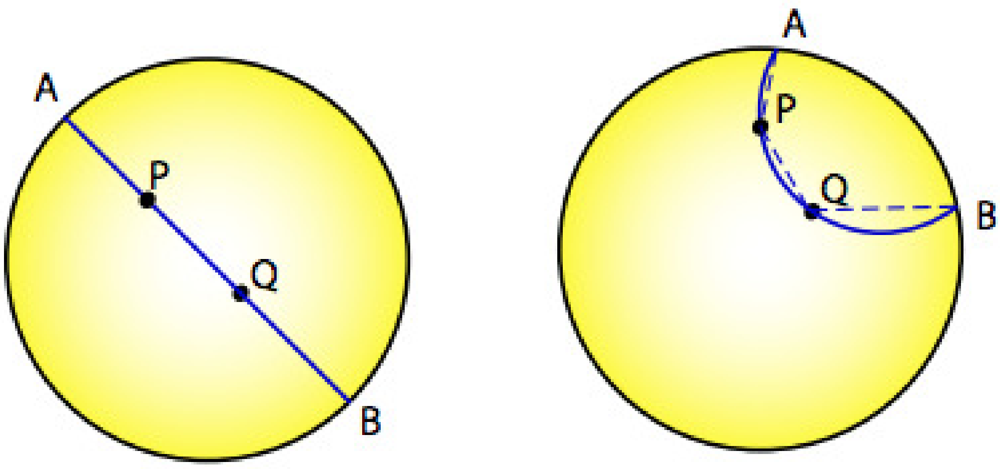
Questo implica che per tutti gli $z \in \mathbb{D}$, $d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq d_{\mathbb{D}}(z, w)$. Poichè f appartiene al gruppo delle mappe conformi di $\mathbb{D}$, lo stesso discorso vale per f^{-1}, e quindi possiamo concludere che f è una $d_{\mathbb{D}}$-isometria. Infine ci rimae da dimostrare che (3) implica (1):
Prendiamo una qualsiasi $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tale che sia olomorfa e una $d_{\mathbb{D}}$-isometria.

Scegliamo una qualsiasi g della forma $\frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}$ che manda $f(0)$ in 0 e componiamole in $h = g \circ f$.
Allora h è olomorfa, è una $d_{\mathbb{D}}$-isometria, e $h(0) = 0$. Così $d_{\mathbb{D}}(0, h(z)) = d_{\mathbb{D}}(h(0), h(z)) = d_{\mathbb{D}}(0, z)$ e questo implica che $|h(z)| = |z|$ e quindi che $h(z) = e^{i\varphi}z$ per qualche $\varphi \in \mathbb{R}$.

$\square$

Teorema 3.4. *La distanza iperbolica $d_{\mathbb{D}}(z, w)$ in $\mathbb{D}$ è data da*

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = log\left(\frac{1 + p_{\mathbb{D}}(z, w)}{1 - p_{\mathbb{D}}(z, w)}\right), \qquad dove p_{\mathbb{D}} = \left|\frac{z - w}{1 - z\overline{w}}\right|.$$



Dimostrazione. Innanzitutto proviamo che se $-1 < x < y < 1$ allora

$$d_{\mathbb{D}}(x, y) = log\left(\frac{1 + \frac{y-x}{1-xy}}{1 - \frac{y-x}{1-xy}}\right).$$

Consideriamo una curva regolare γ che va da x a y in $\mathbb{D}$, e scriviamo $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$, dove $0 \leq t \leq 1$. Allora

$$\ell_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|dt}{1 - |\gamma(t)|^2} \geq \int_0^1 \frac{2u'(t)dt}{1 - u(t)^2}$$

perchè $|\gamma(t)|^2 \leq |u(t)|^2 = u(t)^2$ e $|\gamma'(t) \geq |u'(t)| \geq u'(t)$. Il secondo integrale può essere valutato direttamente e si ottiene

$$\ell_{\mathbb{D}}(\gamma) \geq log\left(\frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1-x}{1+x}\right) = log\left(\frac{1+\frac{y-x}{1-xy}}{1-\frac{y-x}{1-xy}}\right).$$

Poichè qui vale l'uguaglianza quando $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $0 \leq t \leq 1$, vediamo che $d_{\mathbb{D}}(x,y) = log\left(\frac{1+\frac{y-x}{1-xy}}{1-\frac{y-x}{1-xy}}\right)$ vale, quindi $d_{\mathbb{D}}(z,w) = log\big(\frac{1+p_{\mathbb{D}}(z,w)}{1-p_{\mathbb{D}}(z,w)}\big)$ per $-1 < x < y < 1$.
Ora dobbiamo estendere la definizione di distanza iperbolica $d_{\mathbb{D}}$ per ogni coppia di punti z e w in . Il teorema precedente mostra che ogni rotazione Euclidea sull'origine è un' isometria iperbolica e questo implica che, per tutti gli z, $d_{\mathbb{D}}(0,z) = d_{\mathbb{D}}(0,|z|)$.
Prendiamo z e w qualsiasi in $\mathbb{D}$, e sia $f(z) = (z-w)/(1-z\overline{w})$. Quindi f è un automorfismo di $\mathbb{D}$, e quindi una isometria iperbolica. Perciò

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}} &= d_{\mathbb{D}}(w,z) \\ &= d_{\mathbb{D}}(f(w), f(z)) \\ &= d_{\mathbb{D}}(0, f(z)) \\ &= d_{\mathbb{D}}(0, |f(z)|) \\ &= d_{\mathbb{D}}(0, p_{\mathbb{D}}(z,w)), \end{aligned}$$

che, per $x = 0$ e $y = p_{\mathbb{D}}(z,w)$, otteniamo $d_{\mathbb{D}}(z,w) = log\big(\frac{1+p_{\mathbb{D}}(z,w)}{1-p_{\mathbb{D}}(z,w)}\big)$.

□

La distanza iperbolica da 0 a z può essere quindi calcolata esplicitamente. Ed è

$$d_{\mathbb{D}}(0,z) = 2\int_0^{|z|} \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^{|z|} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right] dt = log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Questo mostra che la distanza iperbolica da 0 a z tende a $+\infty$ quando z tende al bordo del disco unitario.

Il disco unitario $\mathbb{D}$ insieme alla metrica iperbolica è chiamata *modello di Poicarè del piano iperbolico.* I percorsi di lunghezza iperbolica più corti tra i punti si chiamano *geodetiche iperboliche.* Le geodetiche iperboliche giocano il ruolo che le rette giocano nella geometria Euclidea del piano. Le "linee" nel piano iperbolico sono le geodetiche iperboliche e l'angolo tra due linee che si intersecano è l'angolo Euclideo tra linee tangenti Euclidee nel punto di intersezione. Il piano iperbolico soddisfa tutti gli assiomi della geometria iperbolica con eccezione del postulato delle parallele. É facile vedere che se γ è una geodetica iperbolica in $\mathbb{D}$ e $a \in \mathbb{D}$ è un punto che non appartiene a γ, allora ci sono infinite geodetiche che passano per a che non intersecano γ e quindi sono parallele a γ.

Torniamo ora ad un importante reinterpretazione del lemma di Pick.

Teorema 3.5. *Supponiamo che $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sia una funzione olomorfa. Allora*

1. *f è una contrazione iperbolica tale che, per tutti gli z_0 e z_1 in $\mathbb{D}$ vale,*

$$d_{\mathbb{D}}(f(z_0), f(z_1)) < d_{\mathbb{D}}(z_0, z_1),$$

oppure

2. *f è una mappa conforme del disco unitario $\mathbb{D}$ e per tutti gli z_0 e z_1 in $\mathbb{D}$ vale,*

$$d_{\mathbb{D}}(f(z_0), f(z_1)) = d_{\mathbb{D}}(z_0, z_1).$$

Dimostrazione. Sia γ geodetica da z_0 a z_1. Allora $f \circ \gamma$ è una curva da $f(z_0)$ a $f(z_1)$. Il lemma di Pick e lsa definizione di metrica iperbolica ci danno

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(f(z_0), f(z_1)) &\leq 2 \int_{f \circ \gamma} \frac{|dw|}{1 - |w|^2} = 2 \int_{\gamma} \frac{|f'(z)||dz|}{1 - |f(z)|^2} \\ &\leq 2 \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2} = d_{\mathbb{D}}(z_0, z_1). \end{aligned}$$

Se $f(z)$ non è una mappa conforme di $\mathbb{D}$ in sè, abbiamo una disuguaglianza stretta nel lemma di Pick, e di conseguenza otteniamo una disuguaglianza stretta in questa stima ovvero $d_{\mathbb{D}}(f(z_0), f(z_1)) = d_{\mathbb{D}}(z_0, z_1)$.

□

Bibliografia

[1] Manfredo Perdigao Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976

[2] Theodore W. Gamelin, Complex Analysis, Springer, 2001

[3] A. F. Brandon and D. Minda, The Hyperbolic Metric and Geometric Funtcion Theory, 2006

Ringraziamenti

Per prima cosa ringrazio il professor Nicola Arcozzi per avermi guidato nella stesura di questa tesi con estrema disponibilità e professionalità.
Un grazie particolare va alla mia famiglia, che in questo lunghissimo percorso non ha mai smesso di credere in me, sostenermi, incitarmi e rassicurarmi. Sicuramente senza di voi non ce l'avrei mai fatta.
Ringrazio le mie amiche di sempre Laura e Vanessa, non per un motivo particolare ma semplicemente perchè siete voi. Ci siete state, ci siete e ci sarete sempre.
Ringrazio la mia compagna di studio Elena, che è stata una delle persone fondamentali nell'ultimo periodo, quando non riuscivo più a vedere l'obbiettivo mi ha aiutato e spronato a fare di più. Oltre che una compagna di studio ho trovato una ragazza fantastica e un'amica vera.
Ringrazio Chicco per aver creduto in me sempre, anche quando stavo iniziando a non crederci più nemmeno io.
Grazie anche alle mie ex-coinquiline Lucia, Claudia e Martina, che hanno reso questo percorso sicuramente più interessante, più piacevole e assolutamente indimenticabile.
Volevo ringraziare anche Chiara, Federico e Simone, che mi hanno ascoltato, supportato e soprattutto sopportato in questo ultimo periodo, e mi hanno sempre fatto tornare il sorriso.
Un grazie infinito a tutti coloro che mi hanno seguito in questo percorso, che mi hanno sopportato in tutti i momenti difficili e mi son stati vicini.