

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Operatori integro-differenziali di Langevin

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Francesca Elisa Leonelli

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Sessione III
Anno Accademico 2016/2017

*Alla mia mamma,
al mio papà,
a mio fratello.*

Sommario

In questo elaborato si studiano i processi stocastici con salti, si descrive il legame che esiste fra equazioni differenziali stocastiche con salti e gli operatori integro-differenziali, in analogia con il caso diffusivo. Si esplicita la funzione caratteristica dei processi con salti che siano somma di integrali di funzioni deterministiche, con l'interesse di comprendere quando si abbia l'esistenza di una densità. In particolare si studiano il processo di salto-diffusione e il processo soluzione dell'equazione di Langevin con salti.

Introduzione

In questo elaborato studiamo le equazioni differenziali stocastiche con salti (SDE con salti), dunque i processi stocastici con salti che ne sono soluzione, e gli operatori integro-differenziali (PIDE) a esse associati.

Per studiare questi oggetti, la cui teoria è al momento in fase di elaborazione, utilizziamo analogie con i casi conosciuti, ampliando le teorie note per le equazioni differenziali stocastiche (SDE).

In particolare studiamo il processo salto-diffusione e l'equazione di Langevin con salti.

In dettaglio, nel primo capitolo esponiamo il legame fra SDE e PDE tramite le formule di Itô e le formule di rappresentazione di Feynmann-Kač. Introduciamo le SDE lineari, i processi soluzione e le condizioni di esistenza della densità di transizione, e le proprietà di gruppo di cui gode la PDE associata.

Nel secondo capitolo introduciamo il processo di Poisson, fondamentale per la definizione di processi con salti, la misura di salto e di Lévy che consentono una scrittura dei processi con salti utile per il loro studio. Definiamo quindi le SDE con salti e si mostra il loro legame con le PIDE tramite le formule di Itô per processi con salti, quindi le formule di rappresentazione di Feynmann-Kač. Appliciamo poi i risultati al processo di salto-diffusione.

Nel terzo capitolo definiamo l'equazione di Langevin e la sua variante con salti, se ne descrive la PIDE associata. Dimostriamo come esplicitare la funzione caratteristica di un processo stocastico con salti che sia somma di integrali di funzioni deterministiche. Quindi applichiamo i risultati all'equazione di Langevin con salti. Cerchiamo infine analogie con il caso diffusivo per le proprietà di gruppo.

Indice

1	SDE, SDE lineari	1
1.1	Legame tra SDE e PDE, Formule di rappresentazione	1
1.2	Equazioni differenziali stocastiche lineari	4
1.2.1	Condizioni di esistenza della densità	6
1.2.2	Proprietà di gruppo	12
2	SDE con salti	15
2.1	Processo di Poisson	15
2.1.1	Misura di salto, Misura di Lévy	18
2.2	SDE con salti	21
2.2.1	Formule di rappresentazione	22
2.3	Processo salto-diffusione unidimensionale	24
3	Equazioni di Langevin	32
3.1	Equazione di Langevin	32
3.2	Equazione di Langevin con salti	35
3.2.1	PIDE associata	37
3.2.2	Valore atteso, Covarianza	40
3.3	Processi con salti integrali di funzioni deterministici	43
3.4	Proprietà di gruppo	56
A	Formule di Itô	57
B	Proprietà di gruppo	61
C	Somma di v.a. normali	62
	Bibliografia	63

Capitolo 1

SDE, SDE lineari

1.1 Legame tra SDE e PDE, Formule di rappresentazione

In questo paragrafo descriviamo il profondo legame che sussiste tra equazioni differenziali stocastiche (SDE) e operatori alle derivate parziali (PDE), attraverso le formule di Itô e le formule di rappresentazione di Feynmann-Kač.

Per la trattazione completa della teoria delle equazioni differenziali stocastiche rimandiamo al [7], Capitolo 9.

Consideriamo $Z \in \mathbb{R}^N$ e le funzioni misurabili

$$b = b(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \sigma = \sigma(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N \times d}$$

Le funzioni b e σ sono dette coefficiente di *drift* e *diffusione* rispettivamente. Sia poi W un moto browniano d -dimensionale definito sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F})_t)$ in cui valgono le ipotesi usuali.

Definizione 1.1. Una soluzione relativa a W della SDE di coefficienti Z, b, σ è un processo stocastico $(X_t)_{t \in [0, T]}$, adattato rispetto alla filtrazione \mathcal{F}_t , tale che

- $b(t, X_t) \in \mathbb{L}_{loc}^1, \sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}_{loc}^2$
- si abbia

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad t \in [0, T]$$

in modo equivalente

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = Z \quad (1.1)$$

Per la formula di Itô (A.4), per ogni funzione $f = f(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ si ha

$$df(t, X_t) = (\mathcal{A}_t + \partial_t)f(t, X_t)dt + \nabla f(t, X_t) \cdot \sigma(t, X_t)dW_t$$

Ove \mathcal{A}_t è l'operatore alle derivate parziali è dato da

$$\mathcal{A}_t f(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\sigma(t, x)\sigma^*(t, x))_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(t, x) + \sum_{j=1}^N b_j(t, X_t) \partial_{x_j} f(t, x)$$

ed è detto l'operatore caratteristico della SDE in (1.1).

Consideriamo il seguente il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} (A + \partial_t)u - au = f, & \text{in } \mathcal{S}_T :=]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ u(T, x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

ove f, a, φ sono funzioni note, con $a \in C(\mathcal{S}_T)$ e $\inf a > -\infty$. Supponiamo che

- i) i coefficienti b e σ siano misurabili e abbiano al più crescita lineare in x
- ii) per ogni $(t, x) \in \mathcal{S}_T$ esista una soluzione $X^{t,x}$ di (1.1), tale che $X_t^{t,x} = x$, relativa a un moto Browniano d -dimensionale W nello spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$

Teorema 1.1 (Formula di Feynmann-Kač). Sia $u \in C^2(\mathcal{S}_T) \cap C(\bar{\mathcal{S}}_T)$ una soluzione del problema di Cauchy (1.2). Supponendo che valgano le ipotesi i), ii) e una fra le seguenti condizioni

1. esistono due costanti positive M e p tali che

$$|u(t, x)| + |f(t, x)| \leq M(1 + |x|^p), \quad (t, x) \in \mathcal{S}_T$$

2. la matrice σ è limitata ed esistono due costanti positive M e α , con α sufficientemente piccolo, tali che

$$|u(t, x)| + |f(t, x)| \leq M e^{\alpha|x|^2}, \quad (t, x) \in \mathcal{S}_T$$

Allora per ogni $(t, x) \in \mathcal{S}_T$ vale la seguente formula di rappresentazione

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T a(s, X_s^{t,x}) ds} \varphi(X_T^{t,x}) - \int_t^T e^{-\int_t^s a(r, X_r^{t,x}) dr} f(s, X_s^{t,x}) ds \right]$$

Osservazione 1.1. Sotto le ipotesi del teorema 1.1, per la soluzione del Problema di Cauchy con $a = f = 0$

$$\begin{cases} (A + \partial_t)u(t, x) = 0, & \text{in } \mathcal{S}_T :=]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ u(T, x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

vale la seguente formula di rappresentazione

$$u(t, x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^{t,x})] \quad (1.4)$$

La formula di rappresentazione di Feynmann-Kač descrive dunque lo stretto legame tra SDE e EDP, generalizza la connessione che esiste fra soluzione fondamentale dell'operatore del calore e densità di transizione del moto Browniano. Infatti la formula (1.4) esprime il nesso fra la soluzione fondamentale della PDE $\mathcal{A} + \partial_t$ e il processo X_t soluzione della SDE (1.1).

Più precisamente, se esiste $\Gamma(t, x, T, y)$ soluzione fondamentale per l'operatore $\mathcal{A} + \partial_t$ allora, per ogni $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N)$, la funzione

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \Gamma(t, x, T, y) dy$$

è la soluzione classica del problema di Cauchy (1.3).

Dalla formula di rappresentazione segue che

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \Gamma(t, x, T, y) dy$$

da cui si deduce che, per l'arbitrarietà di φ , fissati $t < T$ e $x \in \mathbb{R}^N$, la funzione

$$y \longrightarrow \Gamma(t, x, T, y)$$

è la densità della variabile aleatoria $X_T^{t,x}$. Per sottolineare questo legame diciamo che Γ è la *densità di transizione* della SDE (1.1).

Analogamente se esiste $y \longrightarrow \Gamma(t, x, T, y)$, densità di transizione della SDE (1.1), allora il problema di Cauchy (1.3) per l'operatore differenziale $\mathcal{A} + \partial_t$ associato alla SDE ha soluzione classica esprimibile in termini di tale densità come

$$u(t, x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \Gamma(t, x, T, y) dy$$

per ogni $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N)$.

In altri termini $\Gamma(t, x, T, y)$ è soluzione fondamentale per l'operatore $\mathcal{A} + \partial_t$.

1.2 Equazioni differenziali stocastiche lineari

Introduciamo in questo paragrafo una classe importante di equazioni differenziali stocastiche, quelle lineari, ovvero le SDE i cui coefficienti siano funzioni lineari della soluzione. Inoltre si descrive la corrispondente classe di operatori alle derivate parziali a queste associati, chiamati operatori di Kolmogorov.

In particolare ci restringiamo al caso in cui i coefficienti delle SDE lineari siano costanti, quindi indipendenti dalle variabili spazio-temporali.

Consideriamo dunque la SDE lineare a coefficienti costanti in \mathbb{R}^N

$$dX_t = (BX_t + b)dt + \sigma dW_t \quad (1.5)$$

ove $b \in \mathbb{R}^N$, B e σ sono matrici reali di dimensione $N \times N$ e $N \times d$ rispettivamente, e W è un moto Browniano d -dimensionale, con $d \leq N$.

Teorema 1.2. La soluzione dell'equazione (1.5) con dato iniziale $X_0^x = x$ è data da

$$X_t^x = e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} b ds + \int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s \right) \quad (1.6)$$

Inoltre X_t^x ha distribuzione multinormale con valore atteso

$$\mathbb{E}[X_t^x] = e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} b ds \right)$$

e matrice di covarianza

$$\text{cov}(X_t^x) = \int_0^t (e^{sB} \sigma)(e^{sB} \sigma)^* ds$$

dove indichiamo con e^{tB} la serie assolutamente convergente

$$e^{tB} = \sum_{n \geq 0} \frac{(tB)^n}{n!}$$

Dimostrazione. Per dimostrare che X_t^x in (1.6) è soluzione della SDE in (1.5) utilizziamo la formula di Itô. Poniamo

$$Y_t = x + \int_0^t e^{-sB} b ds + \int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s$$

per cui $X_t^x = e^{tB} Y_t$. Dunque otteniamo

$$\begin{aligned} dX_t^x &= d(e^{tB} Y_t) = B e^{tB} Y_t dt + e^{tB} dY_t \\ &= B X_t^x dt + e^{tB} (e^{-tB} b dt + e^{-tB} \sigma dW_t) \\ &= (b + B X_t^x) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Per il teorema (A.4), essendo X_t^x somma di integrali di funzioni deterministiche, risulta avere distribuzione multinormale.

Poiché l'integrale stocastico ha media nulla, il valor medio è dato da

$$m_x(t) = e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} b ds \right) = e^{tB} x + \int_0^t e^{(t-s)B} b ds = e^{tB} x + \int_0^t e^{sB} b ds$$

Per il calcolo della matrice di covarianza si utilizza l'isometria di Itô

$$\begin{aligned} C(t) &= \mathbb{E}[(X_t - m_x(t))(X_t - m_x(t))^*] \\ &= (e^{tB}) \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s \right) \left(\int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s \right)^* \right] (e^{tB})^* \\ &= (e^{tB}) \int_0^t (e^{-sB} \sigma) (e^{-sB} \sigma)^* ds (e^{tB})^* \\ &= \int_0^t (e^{(t-s)B} \sigma) (e^{(t-s)B} \sigma)^* ds \\ &= \int_0^t (e^{sB} \sigma) (e^{sB} \sigma)^* ds \end{aligned} \quad (1.7)$$

Osserviamo che in generale la matrice $C(t)$ è soltanto semidefinita positiva poiché $d \leq N$. Il caso in cui la matrice $C(t)$ è definita positiva è di particolare interesse. Infatti in tal caso il processo soluzione X_t^x in (1.6) ha densità $y \rightarrow \Gamma(0, x, t, y)$ dove

$$\Gamma(0, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C(t)}} e^{-\frac{1}{2} \langle C(t)^{-1} (y - m_x(t)), (y - m_x(t)) \rangle} \quad (1.8)$$

per $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$.

Inoltre, per i risultati visti nel paragrafo 1.1, la densità di transizione Γ è la soluzione fondamentale della PDE associata alla SDE lineare in (1.5) data da

$$\begin{aligned} L &= \mathcal{A} + \partial_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\sigma \sigma^*)_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^N b_i \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^N B_{ij} x_j \partial_{x_i} + \partial_t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\sigma \sigma^*)_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \langle b + Bx, \nabla \rangle + \partial_t \end{aligned} \quad (1.9)$$

che si dimostra tramite la formula di Itô in (A.4).

L'operatore L è detto operatore di Kolmogorov.

1.2.1 Condizioni di esistenza della densità

Come si è introdotto nel precedente paragrafo, il processo X_t^x soluzione della SDE lineare in (1.5) ha distribuzione multinormale, la cui matrice di covarianza è semidefinita positiva. Affinché il processo abbia densità, la matrice di covarianza deve essere definita positiva, ovvero il processo X_t^x deve essere non degenere. In questo paragrafo descriviamo le condizioni che garantiscono che la matrice sia definita positiva, quindi l'esistenza della densità di transizione di X_t^x .

- **Controllabilità**

Definizione 1.2. La coppia (B, σ) si dice *controllabile* sull'intervallo $[0, T]$ se per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ esiste una funzione $v \in C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ tale che il seguente problema

$$\begin{cases} \gamma'(t) = B\gamma(t) + \sigma v(t), & t \in]0, T[\\ \gamma(0) = x, \quad \gamma(T) = y \end{cases} \quad (1.10)$$

ha soluzione. In tal caso la funzione v è detta *controllo* per la coppia (B, σ) .

Osserviamo che il problema in (1.10) senza il dato finale $\gamma(T) = y$ risulta essere un Problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine, che dunque ammette sempre soluzione γ .

Imponendo la condizione finale si chiede che per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ esista una funzione v tale che la traiettoria γ , soluzione del Problema di Cauchy con $\gamma(0) = x$, colpisca il bersaglio y al tempo T . Il problema in tal caso può risultare non risolvibile.

In particolare l'esistenza del controllo dipende sia da B che da σ .

Teorema 1.3. Per $T > 0$ la matrice

$$C(T) = \int_0^T (e^{tB}\sigma)(e^{tB}\sigma)^* dt$$

è definita positiva \Leftrightarrow La coppia (B, σ) è controllabile sull'intervallo $[0, T]$.

In tal caso un controllo è dato da

$$v(t) = (e^{-tB}\sigma)^* M^{-1}(T)(e^{-TB}y - x), \quad t \in [0, T]$$

ove

$$M(T) = \int_0^T (e^{-tB}\sigma)(e^{-tB}\sigma)^* dt$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che il problema di Cauchy (1.10) senza dato finale

$$\begin{cases} \gamma'(t) = B\gamma(t) + \sigma v(t), & t \in]0, T[\\ \gamma(0) = x, \end{cases} \quad (1.11)$$

ha come soluzione

$$\gamma(t) = e^{tB} \left(x + \int_0^t (e^{-sB} \sigma) v(s) ds \right) \quad (1.12)$$

Inoltre notiamo di poter scrivere la matrice di covarianza C del processo in termini della matrice M . Infatti, per quanto visto nel calcolo della matrice di covarianza del processo soluzione in (1.7), abbiamo

$$\begin{aligned} C(T) &= \int_0^T (e^{tB} \sigma) (e^{tB} \sigma)^* dt \\ &= (e^{TB}) \int_0^T (e^{-tB} \sigma) (e^{-tB} \sigma)^* dt (e^{TB})^* \\ &= (e^{TB}) M(T) (e^{TB})^* \end{aligned}$$

Dal momento che l'esponenziale di matrice è non degenere, C è non degenere se e soltanto se M è non degenere.

Supponiamo pertanto $M(T) > 0$ e dimostriamo che la coppia (B, σ) è controllabile. Per quanto visto in (1.12), imponendo la condizione finale $\gamma(T) = y$, otteniamo

$$\begin{aligned} \gamma(T) = y &\iff e^{TB} \left(x + \int_0^T (e^{-tB} \sigma) v(t) dt \right) = y \\ &\iff \int_0^T (e^{-tB} \sigma) v(t) dt = e^{-TB} y - x := z \end{aligned} \quad (1.13)$$

Avendo supposto la matrice $M(T)$ non degenere, scriviamo

$$\begin{aligned} M(T) M^{-1}(T) z = z &\iff \int_0^T (e^{-tB} \sigma) (e^{-tB} \sigma)^* dt M^{-1}(T) z = \int_0^T (e^{-tB} \sigma) v(t) dt \\ &\iff v(t) = (e^{-tB} \sigma)^* M^{-1}(T) z \\ &\iff v(t) = (e^{-tB} \sigma)^* M^{-1}(T) (e^{-TB} y - x) \end{aligned}$$

Viceversa supponiamo che la coppia (B, σ) sia controllabile sull'intervallo $[0, T]$ e per assurdo assumiamo che $M(T)$ sia degenere.

Allora esiste $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tale che

$$0 = \langle M(T)w, w \rangle = \left\langle \int_0^T (e^{-tB}\sigma)(e^{-tB}\sigma)^* dt w, w \right\rangle = \int_0^T |w^* e^{-tB}\sigma|^2 dt$$

Per cui si ottiene

$$w^* e^{-tB}\sigma = 0, \quad t \in [0, T]$$

Per ipotesi la coppia (B, σ) è controllabile sull'intervallo $[0, T]$, pertanto per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ esiste un controllo tale che valga la (1.13). Moltiplicando ambe le parti di (1.13) per w^* si ottiene

$$w^*(e^{-TB}y - x) = \int_0^T w^*(e^{-tB}\sigma)v(t)dt = 0$$

che è assurdo poiché $w^* \neq 0$ e $w^*(e^{-TB}y - x) = 0$ deve valere per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Condizione di Kalman

Teorema 1.4. La matrice $C(T)$ è definita positiva per $T > 0$ se e soltanto se la coppia (B, σ) soddisfa la condizione di Kalman, ovvero la matrice $(N \times (Nd))$ -dimensionale a blocchi, definita da

$$\begin{pmatrix} \sigma & B\sigma & \dots & B^{N-1}\sigma \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

ha rango massimo pari a N .

Dimostrazione. Per la dimostrazione utilizziamo il teorema di Cayley-Hamilton.

Sia

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I_N) = \lambda^N + b_1\lambda^{N-1} + \dots + b_{N-1}\lambda + b_N$$

il polinomio caratteristico della matrice B , $N \times N$ -dimensionale. Il teorema asserisce che $p(B) = 0$, ovvero

$$B^N + b_1B^{N-1} + \dots + b_{N-1}B + b_N = 0$$

da cui si deduce che ogni potenza B^k con $k \geq N$ è esprimibile come una combinazione lineare di I_N, B, \dots, B^{N-1} .

Supponiamo che la matrice in (1.14) non abbia rango massimo, ovvero che esista $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tale che

$$w^* \sigma = w^* B \sigma = \dots = w^* B^{N-1} \sigma = 0$$

Dal teorema di Cayley-Hamilton segue che

$$w^* B^k \sigma = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

da cui si desume

$$w^* e^{tB} \sigma = 0, \quad t > 0$$

In conclusione

$$\langle C(T)w, w \rangle = \int_0^T |w^* e^{tB} \sigma|^2 dt = 0$$

ovvero la matrice $C(T)$ è degenere per ogni $T > 0$.

Viceversa se la matrice $C(T)$ è degenere per ogni $T > 0$ allora esiste $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tale che

$$\langle C(T)w, w \rangle = \int_0^T |w^* e^{tB} \sigma|^2 dt = 0$$

quindi $w^* e^{tB} \sigma = 0$ per $t \in [0, T]$. Derivando otteniamo

$$0 = \frac{d^k}{dt^k} (w^* e^{tB} \sigma) \Big|_{t=0} = w^* B^k \sigma, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

quindi la matrice in (1.14) non ha rango massimo. \square

Condizione di Hörmander

Identifichiamo un operatore differenziale del primo ordine $Y \in \mathbb{R}^N$ dato da

$$Yf(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) \partial_{x_k} f(x)$$

con il campo vettoriale individuato dai suoi coefficienti, quindi scriviamo

$$Y = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

Il commutatore tra due campi vettoriali $Y = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $U = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ è definito come segue

$$[Y, U] = YU - UY = \sum_{k=1}^N (Y\beta_k - U\alpha_k) \partial_{x_k}$$

Teorema 1.5. l'operatore L in (1.9) ha soluzione fondamentale se e solo se lo spazio vettoriale generato dagli operatori differenziali $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}$ e $\langle Bx, \nabla \rangle$ soddisfano la condizione di Hörmander, ovvero se lo spazio generato dagli operatori differenziali $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}$ e $\langle Bx, \nabla \rangle$ e dai loro commutatori di qualsiasi ordine coincide con \mathbb{R}^N .

Per quanto visto nel teorema (1.4) si deduce che il teorema (1.5) è equivalente al seguente

Teorema 1.6. Le condizioni di Kalman e Hörmander sono equivalenti

Dimostrazione. Osserviamo che, posto $Y = \langle Bx, \nabla \rangle$, per $i = 1, \dots, d$ si ha

$$[\partial_{x_i}, Y] = \sum_{k=1}^N B_{ki} \partial_{x_k}$$

ovvero $[\partial_{x_i}, Y]$ è il campo vettoriale con coefficienti dati dalla i -esima colonna di B . Infatti

$$\begin{aligned} Y = \langle Bx, \nabla \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N B_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N B_{Nj} x_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_N} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^N B_{1j} x_j \partial_{x_1} + \dots + \sum_{j=1}^N B_{Nj} x_j \partial_{x_N} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N B_{kj} x_j \partial_{x_k} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \partial_{x_k} \end{aligned}$$

con $\alpha_k = \sum_{j=1}^N B_{kj} x_j$. Da cui otteniamo

$$[\partial_{x_i}, Y] = \sum_{k=1}^N \partial_{x_i} \alpha_k \partial_{x_k} = \sum_{k=1}^N B_{ki} \partial_{x_k}$$

Con lo stesso ragionamento $[[\partial_{x_i}, Y], Y]$ è il campo vettoriale che ha come coefficienti le componenti della i -esima colonna di B^2 , e così via. D'altra

parte $B^k \sigma$, per $k = 1, \dots, N$, è la matrice $N \times d$ -dimensionale le cui colonne sono le prime d colonne di B^k .

□

Proposizione 1.1. *Se è soddisfatta la condizione di Hörmander, ovvero $\text{rg}\mathcal{L}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}, \langle Bx, \nabla \rangle)$, ove con $\mathcal{L}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}, \langle Bx, \nabla \rangle) = N$ indichiamo l'algebra di Lie generata da $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}, \langle Bx, \nabla \rangle$, allora le matrici $A = (\sigma\sigma^*)$ e B hanno rispettivamente la seguente forma*

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

$$B = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ B_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & B_2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_\nu & * \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

ove ogni B_j è una matrice $(m_j \times m_{j-1})$ di rango m_j con

$$m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_\nu \geq 1, \quad \sum_{j=1}^N m_j = N \quad (1.17)$$

Condizione sulla matrice $(\sigma\sigma^*)$

Teorema 1.7. La matrice $C(T)$ è definita positiva $\Leftrightarrow \ker(\sigma\sigma^*)$ non contiene sottospazi non banali invarianti per B .

1.2.2 Proprietà di gruppo

L'operatore di Kolmogorov della forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\sigma\sigma^*)_{ij} \partial_i \partial_j + \langle Bx, \nabla \rangle + \partial_t \quad (1.18)$$

gode dell'importante proprietà di essere invariante rispetto alle traslazioni sinistre di un gruppo di Lie su \mathbb{R}^N . Definiamo l'operazione

$$l_\zeta(t, x) = l_{(\tau, \xi)}(t, x) = (\tau, \xi) \circ (t, x) = (t + \tau, x + e^{tB}\xi)$$

Per una trattazione più completa dell'argomento rimandiamo agli articoli [4] e [5] e al testo [2] ai capitoli 1 e 4

Si riconosce facilmente che $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ è un gruppo con elemento neutro $(0, 0)$ e con elemento inverso

$$(t, x)^{-1} = (-t, -e^{tB}x)$$

Nell'appendice (B) ne riportiamo la dimostrazione.

La matrice jacobiana della traslazione sinistra $l_\zeta(t, x)$ è data da

$$\mathcal{J}_{l_\zeta}(t, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Be^{tB}\xi & \mathbb{I}_N \end{pmatrix}$$

Da cui

$$\mathcal{J}_{l_\zeta}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\xi & \mathbb{I}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b} & \mathbb{I}_N \end{pmatrix}$$

ove si è posto \mathbf{b} la matrice $N \times 1$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tB}\xi = Be^{tB}\xi|_{t=0} = B\xi$$

Una base dell'algebra di Lie di (\mathbb{R}^N, \circ) è data dalla base jacobiana, che è composta dai campi vettoriali associati alle colonne della matrice $\mathcal{J}_{l_\zeta}(0, 0)$, ossia dai campi vettoriali Z_j definiti da

$$Z_j I(x) = \mathcal{J}_{l_\zeta}(0, 0) \cdot e_j = j\text{-esima colonna di } \mathcal{J}_{l_\zeta}(0, 0), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Rimandiamo al paragrafo 1.2 di [2] per le dimostrazioni.

Otteniamo pertanto che la base jacobiana è data dai $N + 1$ campi vettoriali

$$\partial_t + \nabla_x \cdot Bx, \quad \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}$$

Osserviamo che l'operatore di Kolmogorov in (1.18) è ottenuto come somma e prodotto dei campi vettoriali della base jacobiana. Ne consegue che l'operatore L è invariante a sinistra rispetto a l_ζ nel senso che

$$L(u \circ l_\zeta) = (Lu) \circ l_\zeta$$

ovvero se u è soluzione dell'equazione $Lu = 0$ anche $u \circ l_\zeta$ è soluzione della stessa equazione.

In altri termini, se u è soluzione di $Lu = 0$, allora $v := u \circ L_\zeta$ è soluzione di $L^{(\zeta)}v = 0$, ove $L^{(\zeta)}$ è ottenuto da L traslandone a sinistra i coefficienti, vale a dire $L^{(\zeta)} = L \circ l_\zeta$.

Posti $z = (t, x)$, $w = (T, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$, si verifica che la soluzione fondamentale dell'operatore in (1.18), che denotiamo Γ , soddisfa

$$\Gamma(t, x, T, y) = \Gamma(z, w) = \Gamma(w^{-1} \circ z, 0) = \Gamma(t - T, x - e^{(t-T)B}y, 0, 0)$$

Dimostrazione. Per quanto visto in (1.8), la soluzione fondamentale è data da

$$\Gamma(t, x, T, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \langle C(t)^{-1}(y - m_x(T-t)), (y - m_x(T-t)) \rangle}$$

ove, per quanto visto nel teorema (1.2), abbiamo

$$m_x(T-t) = e^{(T-t)B}x$$

da cui

$$m_{x - e^{(t-T)B}y}(-(T-t)) = e^{(T-t)B}(x - e^{(t-T)B}y) = e^{(T-t)B}x - y$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \Gamma(t - T, x - e^{(t-T)B}y, 0, 0) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C(-(t-T))}} e^{-\frac{1}{2} \langle C(-(t-T))^{-1}(-(e^{(T-t)B}x - y)), -(e^{(T-t)B}x - y) \rangle} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \langle C(T-t)^{-1}(y - m_x(T-t)), (y - m_x(T-t)) \rangle} \\ &= \Gamma(t, x, T, y) \end{aligned}$$

□

La classe degli operatori L che soddisfano la condizione di Hörmander, che dunque hanno le matrici A e B come scritte in (1.15) e (1.16) rispettivamente, contiene una sottoclasse di operatori che sono invarianti anche rispetto a un opportuno gruppo di dilatazione.

Definiamo la seguente dilatazione in \mathbb{R}^N

$$\delta_\lambda(t, x) = (\lambda^2 t, D(\lambda)x), \quad \lambda > 0 \quad (1.19)$$

con

$$D(\lambda) = \text{diag}(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \dots, \lambda^{2\nu+1} I_{m_\nu})$$

ove I_{m_j} denota la matrice identità $m_j \times m_j$, ove le m_j sono definite in (1.17).

Si dimostra che l'operatore L in (1.18) è omogeneo rispetto a tale dilatazione se e soltanto se tutti i blocchi * della rappresentazione canonica della matrice B in (1.16) sono nulli. Per la dimostrazione rimandiamo al [5]. In questo caso si ha

$$L(u \circ \delta_\lambda) = \lambda^2 (Lu) \circ \delta_\lambda$$

In altri termini, se u è soluzione di $Lu = 0$, allora $v := u \circ \delta_\lambda$ è soluzione di $L^\lambda v = 0$, ove L^λ è ottenuto da L dilatandone i coefficienti, vale a dire $L^\lambda = L \circ \delta_\lambda$.

Nei capitoli successivi saremo interessati a verificare se gli operatori integro-differenziali di Kolmogorov associati alle equazioni differenziali stocastiche con salti godono anche essi di queste proprietà. Verificheremo come viene mantenuta l'invarianza per traslazione.

Capitolo 2

SDE con salti

2.1 Processo di Poisson

Il processo di Poisson è un esempio fondamentale di processo conteggio, ovvero un processo aleatorio che rappresenta il numero di eventi occorsi entro un tempo t . In altri termini è un processo atto a descrivere fenomeni aleatori che si concentrano in certi istanti temporali.

Si tratta di un processo stocastico di Lévy, ha traiettorie discontinue, e rappresenta lo strumento cardine per definire processi stocastici con salti.

Per una trattazione completa dei processi di Lévy e del processo di Poisson si rimanda al [7], capitolo 13 e al [1], capitoli 1 e 2.

Per costruire un processo di Poisson consideriamo una successione $(\tau_n)_{n \geq 1}$ di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite di distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$, $\tau_n \sim \exp \lambda$. La densità di $(\tau_n)_{n \geq 1}$ pertanto è data da $\lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(t)$.

Consideriamo un modello in cui i salti avvengano in modo aleatorio e τ_n indichi la distanza temporale tra l' n -esimo salto e il precedente. In particolare τ_1 è il tempo in cui accade il primo salto, τ_2 il tempo che intercorre tra il primo e il secondo salto, τ_n il tempo che intercorre tra l' $(n-1)$ e l' n -esimo salto.

Osserviamo che $\mathbb{E}[\tau_n] = \frac{1}{\lambda}$, il che significa che il tempo medio di attesa tra salti consecutivi è $\frac{1}{\lambda}$, da cui si deduce che, maggiore è il parametro λ , minore è l'attesa del tempo che trascorre fra un salto e l'altro. Per questo motivo il parametro λ viene chiamato *intensità*.

Cosideriamo inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, la successione

$$T_n = \tau_1 + \dots + \tau_n = \sum_{k=1}^n \tau_k \quad (2.1)$$

T_n rappresenta il tempo in cui accade l' n -esimo evento. Essendo somma di variabili aleatorie i.i.d. di distribuzione esponenziale la successione $(T_n)_{n \geq 1}$ ha distribuzione Gamma di parametri n e λ , $T_n \sim \Gamma_{n,\lambda}$. Dunque la densità di $(T_n)_{n \geq 1}$ è data da $\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)$.

Definizione 2.1. Il *processo di Poisson* con intensità $\lambda > 0$ è il processo

$$N_t = n \quad \text{se } t \in [T_n, T_{n+1}[$$

con T_n definito in (2.1). In modo equivalente si può scrivere

$$N_t = \sum_{n \geq 1} n \mathbb{1}_{[T_n, T_{n+1}[}, \quad N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

Il processo di Poisson N indica il numero di salti accaduti nell'intervallo temporale $[0, t]$, è dunque una funzione a salti di ampiezza unitaria e prende valori interi non negativi.

Elenchiamo ora alcune delle importanti proprietà del processo di Poisson:

- Per definizione le traiettorie di N sono continue a destra,

$$N_t = N_{t+} := \lim_{s \searrow t} N_s, \quad q.s.$$

- $P(N_t^+ = N_t^-) = 1$, $\forall t > 0$. Per ogni t positivo quasi tutte le traiettorie sono continue in t . Questo è dovuto al fatto che, essendo T_n una variabile aleatoria assolutamente continua, ovvero che ha densità rispetto alla misura di Lebesgue, gli eventi trascurabili per la misura di Lebesgue sono trascurabili per P . Pertanto $P(T_n = t) = 0$, da cui

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} (T_n = t)\right) = P(N_t^+ \neq N_t^-) = 0 \implies P(N_t^+ = N_t^-) = 1$$

- Il processo N ha distribuzione di Poisson, ossia

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo si dimostra a partire dalla conoscenza della distribuzione di T_n e dall'uguaglianza $P(N_t = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t)$.

- Poiché N ha distribuzione di Poisson si ha che $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$. Perciò λ rappresenta il valore atteso del numero di eventi che accadono in un intervallo di tempo unitario, motivo per il quale viene chiamato *intensità del processo* N .
- Gli incrementi del processo,

$$N_t - N_s, \quad 0 \leq s < t$$

sono indipendenti, ovvero incrementi disgiunti sono tra loro indipendenti. Inoltre gli incrementi sono stazionari,

$$N_t - N_s \stackrel{d}{=} N_{t-s}, \quad 0 \leq s < t$$

ovvero la distribuzione degli incrementi dipende soltanto dalla lunghezza dell'intervallo temporale.

- Il processo di Poisson N gode della proprietà di Markov, ossia dell'assenza di memoria. Vale a dire che, per ogni funzione f \mathcal{B} -misurabile,

$$\mathbb{E}[f(N_t)|F_s] = \mathbb{E}[f(N_t)|N_s], \quad 0 \leq s < t$$

Quindi l'attesa di $f(N_t)$, note le informazioni del processo fino all'istante s , è uguale all'attesa di $f(N_t)$, note le informazioni solo all'istante s , indipendentemente da quanto successo prima.

Questa proprietà si dimostra utilizzando la definizione di processo di Poisson partendo dalla posizione x al tempo t

$$N_T^{t,x} = N_T - N_t + x, \quad T \geq t$$

- La funzione caratteristica del processo di Poisson N è data da

$$\varphi_{N_t}(\xi) = e^{\lambda t(e^{i\xi} - 1)} = e^{t\psi(\xi)}$$

Notiamo che, come ogni processo di Lévy, la funzione caratteristica di N_t è esprimibile tramite l'esponente caratteristico ψ , il quale è funzione nella sola variabile ξ . L'esponente caratteristico di N è dato da

$$\psi(\xi) = \lambda(e^{i\xi} - 1)$$

Definizione 2.2. Sia N un processo di Poisson con intensità $\lambda > 0$, sia $Z = (Z_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. a valori in \mathbb{R}^d di distribuzione η , indipendenti da N . Il *processo di Poisson composto* è il processo dato da

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \quad (2.2)$$

I salti del processo S occorrono negli stessi istanti temporali dei salti del processo N ma, se N ha salti unitari, i salti di S hanno ampiezze aleatorie con distribuzione η .

Un processo di Poisson composto ha ancora incrementi indipendenti e stazionari. Osserviamo che posto $m = \mathbb{E}[Z_1]$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N_t} Z_n\right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n Z_k \mathbb{1}_{N_t=n}\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} n \mathbb{E}[Z_1] \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= m \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 1} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = m \lambda t \end{aligned}$$

Inoltre la funzione caratteristica del processo è data da

$$\begin{aligned} \varphi_{S_t}(\xi) &= \mathbb{E}[e^{i\xi S_t}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi \sum_{n=1}^{N_t} Z_n\right)\right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi \sum_{k=1}^n Z_k\right) \mathbb{1}_{N_t=n}\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} (\mathbb{E}[e^{i\xi Z_1}])^n \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 1} \frac{(\lambda t \tilde{\eta}(\xi))^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} e^{\lambda t \tilde{\eta}} = e^{\lambda t (\tilde{\eta}(\xi) - 1)} = e^{t \psi(\xi)} \end{aligned}$$

ove si è posto $\tilde{\eta}(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi Z_1}]$.

Come ogni processo di Lévy, la funzione caratteristica di S è esprimibile tramite l'esponente caratteristico, che risulta

$$\psi(\xi) = \lambda (\tilde{\eta}(\xi) - 1) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\xi \cdot x} - 1) \lambda \eta(dx) \quad (2.3)$$

2.1.1 Misura di salto, Misura di Lévy

Denotiamo con T_n la successione definita in (2.1) degli istanti temporali in cui avvengono i salti del processo di Poisson N . Sia S il processo di Poisson composto definito in (2.2).

Definizione 2.3. Per ogni $I \times H \in \mathcal{B}([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ la *misura di salto* relativa al processo S è la misura data da

$$J(I \times H) = \sum_{n \geq 1} \delta_{T_n}(I) \delta_{Z_n}(H)$$

Osserviamo che per $I = [0, t]$ abbiamo

$$J([0, t] \times H) = \sum_{n=1}^{N_t} \delta_{Z_n}(H) \quad (2.4)$$

In altri termini $J([0, t] \times H)$ conta il numero di salti che accadono nell'intervallo temporale $[0, t]$ che abbiamo ampiezza contenuta nel borelliano H . J risulta essere ben definita poiché si ha che, con probabilità uno, accadono solo un numero finito di salti in intervalli di tempi limitati. Inoltre J prende solo valori interi non negativi, essendo somma di delte di Dirac. Si tratta di una misura aleatoria poiché dipende anche da $\omega \in \Omega$.

Calcoliamo il valore atteso della misura di salto $J([0, t] \times H)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J([0, t] \times H)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N_t} \delta_{Z_n}(H)\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \delta_{Z_n}(H) \mathbb{1}_{N_t=n}\right] \\ &= \sum_{n \geq 1} P(N_t = n) \sum_{k=1}^n P(\delta_{Z_n}(H)) \\ &= \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} n \eta(H) \\ &= t \lambda \eta(H) \end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbb{E}[J([0, t] \times H)] = t \mathbb{E}[J([0, 1] \times H)]$$

Definizione 2.4. Sia $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sia J la misura di salto di S . La *misura di Lévy* del processo S è la misura data da

$$\nu(H) := \mathbb{E}[J([0, 1] \times H)] = \lambda \eta(H)$$

che è una misura finita su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tale che $\nu(\mathbb{R}) = \lambda$. Dunque ν indica il numero atteso di salti occorsi nell'intervallo temporale $[0, t]$ che abbiamo ampiezza contenuta nel borelliano H e, a differenza di J , ν non è a valori interi.

Osservazione 2.1. L'esponente caratteristico del processo $S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$ può essere espresso in termini della misura di Lévy. Infatti, per quanto visto in (2.3), abbiamo

$$\psi_{S_t}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi x} - 1) \lambda \eta(dx) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi x} - 1) \nu(dx) \quad (2.5)$$

Questo fatto mette in risalto l'importante proprietà della misura di Lévy di caratterizzare il processo S . Infatti la misura di Lévy determina l'esponente caratteristico, che a sua volta determina la funzione caratteristica del processo.

Definizione 2.5. Sia $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, siano J e ν rispettivamente le misure di salto e di Lévy di S . La *misura di salto compensata* del processo S è la misura data da

$$\tilde{J}(dt, dy) = J(dt, dy) - \nu(dy)dt \quad (2.6)$$

Enunciamo ora l'importante teorema che permette di scrivere S in termini di misura di salto, ossia nella forma

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x J(ds, dx)$$

Teorema 2.1. Sia $S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$ il processo di Poisson composto, con misura di salto J e misura di Lévy ν . Per ogni funzione $f = f(t, x)$ abbiamo

$$\sum_{\substack{0 < s \leq t \\ \Delta S_s \neq 0}} f(s, \Delta S_s) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) J(ds, dx)$$

Inoltre se $f \in L^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}, ds \otimes \nu)$ abbiamo

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) J(ds, dx) \right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) \nu(dx) ds$$

Se $f \in L^2([0, +\infty[\times \mathbb{R}, ds \otimes \nu)$ allora si ottiene

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) \tilde{J}(ds, dx) \right)^2 \right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f^2(s, x) \nu(dx) ds$$

Osserviamo che considerando una funzione che non dipenda dalla variabile temporale $f = f(x)$ si ottiene

$$\sum_{\substack{0 < s \leq t \\ \Delta S_s \neq 0}} f(\Delta S_s) = \sum_{n=1}^{N_t} f(Z_n) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x) J(ds, dx)$$

In particolare prendendo la funzione $f(x) = x$ si ha infine

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x J(ds, dx) \quad (2.7)$$

2.2 SDE con salti

Introduciamo in questo paragrafo le equazioni differenziali stocastiche con salti (SDE con salti) nel caso generico con coefficienti variabili.

Quindi studiamo il legame che esiste fra le SDE con salti e gli operatori integro-differenziali (PIDE), attraverso le formule di Itô e di Feynmann-Kač.

In particolare esaminiamo il processo di salto diffusione, soluzione di una SDE con salti a coefficienti costanti.

Per una trattazione completa delle SDE con salti si rimanda a [7] capitolo 14.

Denotiamo con W il moto browniano unidimensionale definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F})_t)$ su cui valgono le ipotesi usuali. Sia poi J la misura di salto compensata definita in (2.6). Inoltre consideriamo $Z \in \mathbb{R}$ e le seguenti funzioni localmente limitate e misurabili:

- $\mu = \mu(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ coefficiente di drift
- $\sigma = \sigma(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ coefficiente di diffusione
- $a = a(t, x, y) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ coefficiente di salti

Definizione 2.6. Una *soluzione* relativa al moto browniano W e alla misura di salto J dell'equazione differenziale stocastica di coefficienti Z, μ, σ, a è un processo $(X_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2$, $a(t, X_t, y) \in \mathbb{L}_{\nu, \text{loc}}^2$ e

$$X_t = Z + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(s, X_{s-}, y) \tilde{J}(ds, dy)$$

In forma differenziale

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t + \int_{\mathbb{R}} a(t, X_{t-}, y) \tilde{J}(dt, dy), \quad X_0 = Z \quad (2.8)$$

Teorema 2.2 (Formula di Itô unidimensionale per SDE con salti). Sia X soluzione della SDE (2.8), sia f una funzione limitata in $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$. Allora, sotto ipotesi standard di Lipschitzianità e di crescita dei coefficienti, si ha

$$df(t, X_t) = (\mathcal{A} + \partial_t)f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\partial_x f(t, X_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}} (f(t, X_{t-} + a(t, X_{t-}, y)) - f(t, X_{t-}))\tilde{J}(dt, dy) \quad (2.9)$$

ove \mathcal{A} è l'operatore integro-differenziale con coefficienti variabili

$$\mathcal{A}f(t, x) = \mu(t, x)\partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2(t, x)}{2}\partial_{xx}f(t, x) + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x + a(t, x, y)) - f(t, x) - a(t, x, y)\partial_x f(t, x))\nu(dy) \quad (2.10)$$

Osservazione 2.2. Osserviamo che l'operatore integro-differenziale associato alla SDE in (2.8) è dato da

$$Lf(t, x) = (\mathcal{A} + \partial_t)f(t, x) = \mu(t, x)\partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2(t, x)}{2}\partial_{xx}f(t, x) + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x + a(t, x, y)) - f(t, x) - a(t, x, y)\partial_x f(t, x))\nu(dy) + \partial_t f(t, x) \quad (2.11)$$

2.2.1 Formule di rappresentazione

In analogia col caso di diffusione, anche per i processi stocastici con salti la formula di Itô stabilisce un profondo legame fra le SDE con salti e gli operatori integro-differenziali (PIDE).

Sotto le ipotesi del paragrafo precedente consideriamo la SDE con salti

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}} a(t, X_{t-}, y)\tilde{J}(dt, dy)$$

Denotiamo $(X_s^{t,x})_{s \in [t, T]}$ per $t \in [0, T[$ e per $x \in \mathbb{R}$ la soluzione della SDE con salti con condizione iniziale $X_t^{t,x} = x$, e

con \mathcal{A} l'operatore caratteristico di X definito in (2.10),

$$\mathcal{A}f(t, x) = \mu(t, x)\partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2(t, x)}{2}\partial_{xx}f(t, x) + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x + a(t, x, y)) - f(t, x) - a(t, x, y)\partial_x f(t, x))\nu(dy)$$

Definizione 2.7. Siano φ e r funzioni continue e limitate, $\varphi = \varphi(x) \in C_b(\mathbb{R})$ e $r = r(t, x) \in C_b(\mathbb{R}^2)$. Una *soluzione classica* del problema di Cauchy per $\mathcal{A} + \partial_t$ con dato finale φ , è una funzione $u = u(t, x) \in C^{1,2}([0, T[\times \mathbb{R}) \cap C([0, T] \times \mathbb{R})$ tale che verifichi

$$\begin{cases} (A + \partial_t)u(t, x) = r(t, x)u(t, x), & (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R} \\ u(T, x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.12)$$

Teorema 2.3 (Formula di rappresentazione di Feynman-Kač). Se esiste una soluzione classica u al problema di Cauchy (2.12) tale che $u, \partial_x u \in L^\infty([0, T[\times \mathbb{R})$ allora vale la seguente formula rappresentazione stocastica

$$u(t, x) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s, X_s^{t,x}) ds} \varphi(X_T^{t,x})\right], \quad t \in [0, T[, \quad x \in \mathbb{R}$$

Osservazione 2.3. Nelle ipotesi del teorema (2.3) per la soluzione u del problema di Cauchy con $r \equiv 0$

$$\begin{cases} (A + \partial_t)u(t, x) = 0, & (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R} \\ u(T, x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.13)$$

vale la seguente formula di rappresentazione

$$u(t, x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^{t,x})]$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso in cui $r \equiv 0$. Per la formula di Itô in (2.9) abbiamo

$$\begin{aligned} u(T, X_T^{t,x}) - u(t, x) &= \int_t^T \sigma(s, X_s^{t,x}) \partial_x u(s, X_s^{t,x}) dW_s \\ &\quad + \int_t^T \int_{\mathbb{R}} (u(s, X_{s-}^{t,x} + a(s, X_{s-}^{t,x}, y)) - u(s, X_{s-}^{t,x})) \tilde{J}(ds, dy) \end{aligned}$$

Entrambi gli integrali del membro destro dell'equazione hanno media nulla. Quindi, prendendo il valor medio dell'equazione e imponendo la condizione finale $u(T, x) = \varphi(x)$, otteniamo

$$u(t, x) = \mathbb{E}[u(t, x)] = \mathbb{E}[u(T, X_T^{t,x})] = \mathbb{E}[\varphi(X_T^{t,x})]$$

□

La formula di rappresentazione di Feynmann-Kač descrive dunque lo stretto legame tra SDE con salti e PIDE, generalizza i risultati visti nel paragrafo 1.1.

Più precisamente, diciamo che esiste una soluzione fondamentale $\Gamma(t, x, T, y)$ per l'operatore integro-differenziale $\mathcal{A} + \partial_t$ se, per ogni $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N)$, la funzione

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \Gamma(t, x, T, y) dy$$

è la soluzione classica limitata del problema di Cauchy (2.13). Se la soluzione fondamentale Γ esiste, dalla formula di rappresentazione segue che

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \Gamma(t, x, T, y) dy$$

Per l'arbitrarietà di φ , fissati $t < T$ e $x \in \mathbb{R}$, si deduce che la funzione

$$y \longrightarrow \Gamma(t, x, T, y)$$

è la densità della variabile aleatoria $X_T^{t,x}$. Γ è chiamata la *densità di transizione* della SDE con salti in (2.8).

Analogamente se esiste $y \longrightarrow \Gamma(t, x, T, y)$, densità di transizione della SDE con salti in (2.8), allora il problema di Cauchy (2.13) per l'operatore integro-differenziale $\mathcal{A} + \partial_t$ associato alla SDE con salti ha soluzione classica esprimibile in termini di tale densità come

$$u(t, x) = \mathbb{E}[\varphi(X_t^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \Gamma(t, x, T, y) dy$$

per ogni $\varphi \in C$ limitata, ossia $\Gamma(t, x, T, y)$ è soluzione fondamentale per l'operatore $\mathcal{A} + \partial_t$.

2.3 Processo salto-diffusione unidimensionale

Consideriamo il processo di salto-diffusione in \mathbb{R} della forma

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \quad (2.14)$$

ove $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, W è un moto browniano unidimensionale $W_t \sim \mathcal{N}_{0,t}$, N è un processo di Poisson con intensità λ , e $(Z_n)_{n \geq 1}$ è una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione η . Supponiamo che il moto browniano, il processo

di Poisson e le variabili Z_n siano tra loro indipendenti.

L'intento è di descriverne l'operatore integro-differenziale associato al processo, la funzione caratteristica e la densità.

Osservazione 2.4. L'operatore integro-differenziale associato al processo salto-diffusione è dato da

$$Lf(t, x) = \mu \partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} f(t, x) + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x+y) - f(t, x)) \nu(dy) + \partial_t f(t, x)$$

Dimostrazione. Il teorema (2.1), in particolare quanto visto in (2.7) permette di riscrivere il processo di salto-diffusione nella forma

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n = \mu t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x J(ds, dx)$$

dunque in versione differenziale

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t + \int_{\mathbb{R}} x J(dt, dx)$$

Volendo utilizzare la formula di Itô per SDE con salti vista nel teorema (2.2), per poi scrivere l'operatore $L = \mathcal{A} + \partial_t$ associato, esplicitiamo il processo salto-diffusione nella forma (2.8), ottenendo

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t + \int_{\mathbb{R}} x \tilde{J}(dt, dx) + \int_{\mathbb{R}} x \nu(dx) dt$$

Riconosciamo che l'ultimo integrale rappresenta il valore atteso delle variabili Z_n moltiplicato per l'intensità del processo N . Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} x \nu(dx) dt = \lambda \int_{\mathbb{R}} x \eta(dx) dt = \lambda \mathbb{E}[Z_1] dt$$

Da cui possiamo riscrivere

$$dX_t = (\mu + \lambda \mathbb{E}[Z_1]) dt + \sigma dW_t + \int_{\mathbb{R}} x \tilde{J}(dt, dx)$$

Scriviamo dunque l'operatore integro-differenziale L associato alla SDE con salti relativa al processo salto-diffusione, utilizzando (2.11). Otteniamo

$$\begin{aligned}
Lf(t, x) &= (\mathcal{A} + \partial_t)f(t, x) = (\mu + \lambda\mathbb{E}[Z_1])\partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}f(t, x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x+y) - f(t, x) - y\partial_x f(t, x))\nu(dy) + \partial_t f(t, x) \\
&= (\mu + \lambda\mathbb{E}[Z_1])\partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}f(t, x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x+y) - f(t, x))\nu(dy) - \lambda\mathbb{E}[Z_1]\partial_x f(t, x) + \partial_t f(t, x) \\
&= \mu\partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}f(t, x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x+y) - f(t, x))\nu(dy) + \partial_t f(t, x)
\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.5. Dal momento che il processo di salto-diffusione X in (2.14) è somma di un moto Browniano correlato con drift e un processo di Poisson composto tra loro indipendenti ha esponente caratteristico

$$\psi_{X_t}(\xi) = i\mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi x} - 1)\nu(dx)$$

Infatti ponendo

$$Y_t = \mu t + \sigma W_t, \quad S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

tra loro indipendenti, otteniamo la funzione caratteristica di $X_t = Y_t + S_t$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}(\xi) &= \mathbb{E}[e^{i\xi X_t}] = \mathbb{E}[e^{i\xi(Y_t+S_t)}] = \mathbb{E}[e^{i\xi Y_t}] \mathbb{E}[e^{i\xi S_t}] \\
&= \varphi_{Y_t}(\xi) \varphi_{S_t}(\xi) = e^{t\psi_{Y_t}(\xi)} e^{t\psi_{S_t}(\xi)} = e^{t(\psi_{Y_t}(\xi) + \psi_{S_t}(\xi))}
\end{aligned}$$

Per il teorema (A.2) e per quanto visto in (2.5) abbiamo rispettivamente

$$\psi_{Y_t}(\xi) = \mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2, \quad \psi_{S_t}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi x} - 1)\nu(dx)$$

Da cui otteniamo

$$\psi_{X_t}(\xi) = \psi_{Y_t}(\xi) + \psi_{S_t}(\xi) = i\mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi x} - 1)\nu(dx)$$

Un processo di salto-diffusione come in (2.14) è dunque completamente identificato se si conoscono il coefficiente μ della parte di drift, il coefficiente σ della parte di diffusione e la misura di Lévy ν della parte di salto.

Osservazione 2.6. Studiamo ora il processo di salto diffusione

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

scegliendo le Z_n di distribuzione normale, $Z_n \sim \mathcal{N}_{m, \delta^2}$. In questo caso la densità del processo X_t ammette un'espansione in serie, data da

$$\Gamma_{X_t}(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\delta^2)}} e^{-\frac{(x - \mu t - nm)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} = \sum_{n \geq 0} P_n \Gamma_n$$

ove $P_n = P(N_t = n)$ e Γ_n è la densità di $\mu t + B_t + \sum_{k=1}^n Z_k$.

Dimostrazione. Infatti per $H \in \mathcal{B}$ abbiamo

$$P(X_t \in H) = \sum_{n \geq 0} P(X_t \in H | N_t = n) P(N_t = n)$$

Dal teorema (A.2) sappiamo che $\mu t + \sigma W_t \sim \mathcal{N}_{\mu t, \sigma^2 t}$.

Dunque $\mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^n Z_k$ è somma finita di variabili aleatorie indipendenti di distribuzione normale. Tale somma ha distribuzione normale con valore atteso e varianza dati rispettivamente dalla somma dei valori attesi e delle varianze delle singole variabili, come si dimostra nel teorema (C.1).

Quindi abbiamo

$$\mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^n Z_k \sim \mathcal{N}_{\mu t + nm, \sigma^2 t + n\delta^2}$$

Inoltre sappiamo $P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, per cui concludiamo che la densità del processo X_t è data da

$$\Gamma_{X_t}(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\delta^2)}} e^{-\frac{(x - \mu t - nm)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} \quad (2.15)$$

□

Per quanto dedotto dalla Formula di Feynman-Kač la densità Γ_{X_t} in (2.15) è soluzione fondamentale dell'operatore integro-differenziale

$$Lf(t, x) = \mu \partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} f(t, x) + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x + y) - f(t, x)) \nu(dy) + \partial_t f(t, x)$$

ove, poiché $Z_n \sim \mathcal{N}_{m,\delta^2}$, abbiamo

$$\nu(dy) = \lambda \eta(dy) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\delta^2}} dy$$

Osservazione 2.7. La funzione caratteristica del processo salto-diffusione con $Z_n \sim \mathcal{N}_{m,\delta^2}$ ammette anch'essa un'espansione in serie

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{i\xi(\mu t + nm)} e^{-\frac{\xi^2}{2}(\sigma^2 t + n\delta^2)}$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(\xi) &= \mathbb{E}[e^{i\xi X_t}] = \mathbb{E}\left[e^{i\xi(\mu t + W_t)} e^{i\xi \sum_{n=1}^{N_t} Z_n} \right] \\ &= \mathbb{E}[e^{i\xi Y_t} e^{i\xi S_t}] = \varphi_{Y_t}(\xi) \varphi_{S_t}(\xi) \end{aligned}$$

ove si è posto $Y_t = \mu t + W_t$ e $S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$, e l'ultima uguaglianza si ottiene per indipendenza. Conoscendo le funzioni caratteristiche

$$\varphi_{Y_t}(\xi) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 t}, \quad \varphi_{S_t}(\xi) = e^{-\lambda t} e^{\lambda t \tilde{\eta}(\xi)}$$

ove $\tilde{\eta}(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi Z_1}] = \varphi_{Z_1}(\xi) = e^{im\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}\delta^2}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(\xi) &= \varphi_{Y_t}(\xi) \varphi_{S_t}(\xi) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 t} e^{-\lambda t} e^{\lambda t \tilde{\eta}(\xi)} \\ &= e^{i\mu t} e^{-\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 t} e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{im\xi n} e^{-\frac{\xi^2}{2}\delta^2 n} \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{i\xi(\mu t + nm)} e^{-\frac{\xi^2}{2}(\sigma^2 t + n\delta^2)} \end{aligned}$$

□

La scrittura della funzione caratteristica era ottenibile anche con un ragionamento analogo a quanto visto per la funzione densità.

Osservazione 2.8. Riconosciamo inoltre il legame che sussiste tra la funzione densità e la funzione caratteristica

$$\Gamma_{X_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \phi_{X_t}(\xi) d\xi$$

Dimostrazione. Infatti osserviamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \phi_{X_t}(\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{i\xi(\mu t + nm)} e^{-\frac{\xi^2}{2}(\sigma^2 t + n\delta^2)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2}(\sigma^2 t + n\delta^2)} e^{i\xi(\mu t - x + nm)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t + n\delta^2}{2}}} e^{-\frac{(\mu t - x + nm)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} \\
&= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\delta^2)}} e^{-\frac{(\mu t - x + nm)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}}
\end{aligned}$$

□

che corrisponde a quanto calcolato in (2.15).

Vogliamo osservare graficamente la differenza fra i processi Y_t e X_t definiti da

$$Y_t = \mu t + \sigma W_t, \quad X_t = Y_t + S_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

Per X_t consideriamo $Z_n \sim \mathcal{N}_{m,\delta^2}$. Scegliamo l'intervallo temporale unitario $[0, 1]$, e i seguenti parametri

$$\mu = 0.1, \quad \sigma = 0.1, \quad \lambda = 10$$

$$m = 0.02, \quad \delta = 0.15$$

La scelta $\lambda = 10$, l'intensità del processo N , indica che nell'intervallo temporale unitario avvengono in media 10 salti.

Dunque vediamo il grafico delle traiettorie di Y e il grafico delle traiettorie di X .

Notiamo come le traiettorie di Y siano continue, mentre quelle di X abbiano delle discontinuità in corrispondenza degli istanti temporali in cui avvengono i salti.

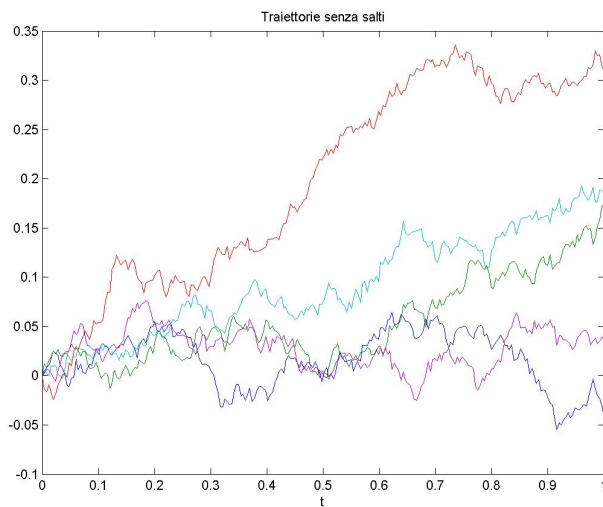


Figura 2.1: Traiettorie processo Y

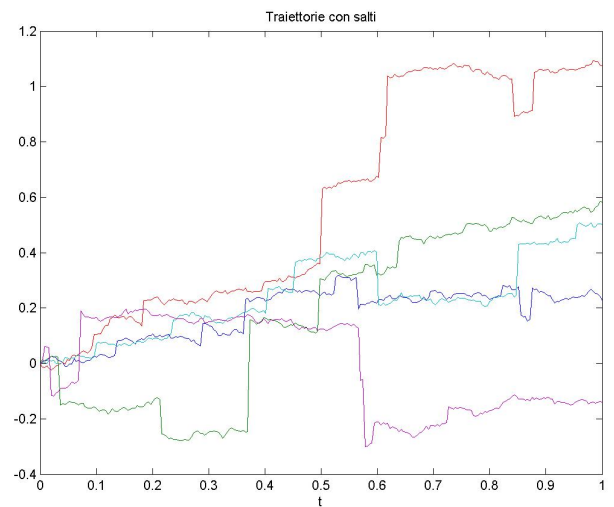


Figura 2.2: Traiettorie processo X

Osserviamo graficamente la differenza fra una traiettoria di Y e la corrispondente traiettoria di X ,

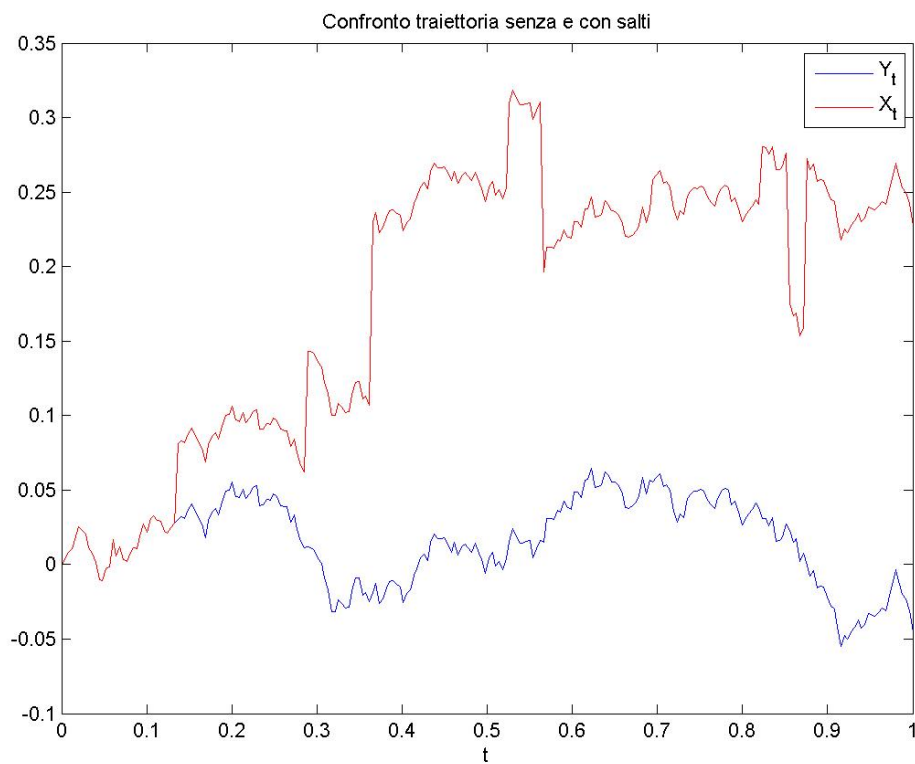


Figura 2.3: Confronto traiettoria di Y e X

Dalla Figura 2.3 si osserva come il grafico del processo X coincide con il grafico di Y traslato di una quantità Z_k in corrispondenza dei tempi T_k in cui siano avvenuti i salti.

Capitolo 3

Equazioni di Langevin

3.1 Equazione di Langevin

Consideriamo la SDE lineare in \mathbb{R}^2 data da

$$\begin{cases} dX_t^1 = dW_t \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \end{cases} \quad (3.1)$$

Questa equazione è la versione semplificata dell'equazione di Langevin [6] che descrive il moto di una particella nello spazio delle fasi. Le due componenti del processo X_t^1 e X_t^2 rappresentano la velocità e la posizione della particella rispettivamente.

Volendo mettere in risalto i coefficienti dell'equazione, scriviamo analogamente

$$dX_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t \quad (3.2)$$

ove quindi, per la scrittura delle SDE lineari vista in (1.5), si ha

$$N = 2, \quad d = 1, \quad b \equiv 0$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui notiamo che la matrice $\sigma\sigma^*$ non ha rango massimo.

Nonostante il rango della matrice $(\sigma\sigma^*)$ non sia massimo, cioè l'operatore associato all'equazione non sia uniformemente parabolico, vedremo che si può scrivere esplicitamente la densità di transizione del processo soluzione.

Per il teorema (1.2) la soluzione dell'equazione con dato iniziale x è data da

$$X_t^x = e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s \right)$$

Osservando che $B^2 = 0$, si ottiene

$$e^{sB} = I + sB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

per cui esplicitiamo il processo soluzione

$$\begin{aligned} X_t^x &= e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_s \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-s \end{pmatrix} dW_s \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} dW_s \end{aligned}$$

Scrivendo le componenti separatamente abbiamo quindi

$$\begin{cases} X_t^1 = x_1 + W_t \\ X_t^2 = x_2 + \int_0^t X_s^1 ds \end{cases} \implies \begin{cases} X_t^1 = x_1 + W_t \\ X_t^2 = x_2 + tx_1 + \int_0^t s dW_s \end{cases}$$

Inoltre, sempre per il teorema (1.2), X_t^x ha distribuzione multinormale con

$$m_x(t) = e^{tB} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^t (e^{sB} \sigma)(e^{sB} \sigma)^* ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\det C(t) = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12}$$

Per cui la matrice $C(t)$ è definita positiva per ogni $t > 0$.

Per quanto visto nel paragrafo 1.2, essendo $C(t)$ definita positiva, il processo X_t^x ha densità, soluzione fondamentale dell'operatore associato all'equazione.

Come constatato in (1.8) la densità di transizione del processo è data da

$$\Gamma(t, x, T, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \langle C(T-t)^{-1} (y - m_x(T-t)), (y - m_x(T-t)) \rangle}$$

ove si ha

$$y - m_x(t) = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - tx_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$C(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} & -\frac{6}{t^2} \\ -\frac{6}{t^2} & \frac{12}{t^3} \end{pmatrix},$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} f(t, x, y) &= -\frac{1}{2} \langle C(t)^{-1} (y - m_x(t)), (y - m_x(t)) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{t} & -\frac{6}{t^2} \\ -\frac{6}{t^2} & \frac{12}{t^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - tx_1 - x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - tx_1 - x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{t}(y_1 - x_1) - \frac{6}{t^2}(y_2 - tx_1 - x_2) \\ -\frac{6}{t^2}(y_1 - x_1) + \frac{12}{t^3}(y_2 - tx_1 - x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - tx_1 - x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{t}(y_1 - x_1)^2 - \frac{12}{t^2}(y_1 - x_1)(y_2 - tx_1 - x_2) + \frac{12}{t^3}(y_2 - tx_1 - x_2)^2 \right) \end{aligned}$$

Quindi, avendo $\det C(t) = \frac{t^4}{12}$, la scrittura esplicita della funzione densità è data da

$$\Gamma(t, x, T, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi(T-t)^2} \cdot \exp\left(-\frac{2(y_1 - x_1)^2}{(T-t)} + \frac{6(y_1 - x_1)(y_2 - tx_1 - x_2)}{(T-t)^2} - \frac{6(y_2 - tx_1 - x_2)^2}{(T-t)^3}\right)$$

Per i risultati visti nel paragrafo 1.1 la densità è soluzione fondamentale dell'operatore differenziale di Kolmogorov associato alla SDE di Langevin, che esplicitiamo

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (\sigma\sigma^*)_{ij} \partial_{x_i x_j} + \langle Bx, \nabla \rangle + \partial_t \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \partial_{x_i x_j} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \right\rangle + \partial_t \\
&= \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_1} + x_1 \partial_{x_2} + \partial_t
\end{aligned}$$

3.2 Equazione di Langevin con salti

Modifichiamo l'equazione di Langevin (3.1) aggiungendo alla prima componente una parte di salto, il processo di Poisson composto $S_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$.

Otteniamo l'equazione,

$$\begin{cases} dX_t^1 = dW_t + dS_t \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dX_t^1 = dW_t + \int_{\mathbb{R}} yJ(dt, dy) \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \end{cases}$$

Questa è un esempio di SDE lineare con salti, che nel seguito chiamiamo equazione di Langevin con salti.

Volendo mettere in risalto i coefficienti dell'equazione, scriviamo analogamente

$$\begin{aligned}
dX_t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} yJ(dt, dy) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} yJ(dt, dy) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ X_t^1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} J(dt, dy)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Posto

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione dell'equazione con dato iniziale x è data da

$$\begin{aligned}
X_t^x &= e^{tB} \left(x + \int_0^t e^{-sB} \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= e^{tB} x + \int_0^t e^{(t-s)B} \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

che si dimostra grazie alla formula di Itô. Infatti, ponendo

$$Y_t = x + \int_0^t e^{-sB} \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dY_t = e^{-tB} \begin{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} yJ(dt, dy) \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} dX_t &= d(e^{tB}Y_t) = Be^{tB}Y_t dt + e^{tB}dY_t \\ &= Be^{tB}Y_t dt + e^{tB}e^{-tB} \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= BX_t dt + \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero la SDE di partenza (3.3).

Come visto nella sezione precedente $e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, da cui possiamo concludere

$$\begin{aligned} X_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ (t-s)dW_s + (t-s) \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} dW_s + \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ s dW_s + s \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Scrivendo le componenti separatamente abbiamo quindi

$$\begin{cases} X_t^1 = x_1 + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \\ X_t^2 = tx_1 + x_2 + \int_0^t s dW_s + \int_0^t s \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) \end{cases} \quad (3.4)$$

in modo equivalente

$$X_t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} ds + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix} J(ds, dy) \quad (3.5)$$

Osservazione 3.1. Un'analogia scrittura del processo soluzione in (3.5) è

$$\begin{cases} X_t^1 = x_1 + W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \\ X_t^2 = tx_1 + x_2 + \int_0^t s dW_s + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n T_n \end{cases} \quad (3.6)$$

Dimostrazione. Volendo scrivere le componenti della soluzione in termini del processo di Poisson, notiamo

$$\begin{aligned} dS_t &= \int_{\mathbb{R}} yJ(dt, dy) = \int_{\mathbb{R}} y \left(\sum_{n \geq 1} \delta_{Z_n}(dy) \delta_{T_n}(dt) \right) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \delta_{T_n}(dt) \int_{\mathbb{R}} y \delta_{Z_n}(dy) = \sum_{n \geq 1} \delta_{T_n}(dt) Z_n \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s) \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) &= \int_0^t s \int_{\mathbb{R}} yJ(ds, dy) = \int_0^t s \sum_{n \geq 1} \delta_{T_n}(ds) Z_n \\ &= \sum_{n \geq 1} Z_n T_n \mathbb{1}_{T_n \leq t} = \sum_{n \geq 1} Z_n T_n \mathbb{1}_{N_t \leq n} = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n T_n \end{aligned}$$

Per cui si ottiene la (3.6). □

3.2.1 PIDE associata

Vogliamo determinare l'operatore integro-differenziale associato all'equazione di Langevin con salti. A questo scopo occorre utilizzare la versione multidimensionale del teorema (2.2).

Denotiamo con W il moto browniano d -dimensionale definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F})_t)$ su cui valgono le ipotesi usuali. Sia poi \tilde{J} la misura di salto compensata definita in (2.6). Inoltre consideriamo $Z \in \mathbb{R}^N$ e le seguenti funzioni localmente limitate e misurabili:

- $\mu = \mu(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ coefficiente di drift
- $\sigma = \sigma(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N \times d}$ coefficiente di diffusione
- $a = a(t, x, y) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{N \times d}$ coefficiente di salti

Consideriamo la generica SDE con salti in \mathbb{R}^N

$$dX_t = u(t, X_t)dt + v(t, X_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}} a(t, X_{t-}, y)\tilde{J}(dt, dy), \quad X_0 = Z \quad (3.7)$$

la cui soluzione è un processo $(X_t)_{t \in [0, T]}$ tale che

$$v(t, X_t) \in L_{loc}^2, \quad a(t, X_{t-}, y) \in L_{\nu, loc}^2$$

Teorema 3.1 (Formula di Itô multidimensionale per SDE con salti). Sia X soluzione della SDE in (3.7), sia f una funzione limitata in $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Allora, sotto ipotesi standard di Lipshitzianità e di crescita dei coefficienti, si ha

$$df(t, X_t) = (\mathcal{A} + \partial_t)f(t, X_t)dt + v(t, X_t)\nabla f(t, X_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}} (f(t, X_{t-} + a(t, X_{t-}, y)) - f(t, X_{t-}))\tilde{J}(dt, dy) \quad (3.8)$$

ove \mathcal{A} è l'operatore integro-differenziale con coefficienti variabili

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(t, x) &= u(t, x)\nabla f(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (v(t, x)v^*(t, x))_t^{i,j} \partial_{x_i}\partial_{x_j}f(t, x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x + a(t, x, y)) - f(t, x) - a(t, x, y)\nabla f(t, x))\nu(dy) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pertanto concludiamo che l'operatore integro-differenziale associato alla SDE con salti in (3.7) è dato da

$$\begin{aligned} Lf(t, x) &= (\mathcal{A} + \partial_t)f(t, x) = u(t, x)\nabla f(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (v(t, x)v^*(t, x))_t^{i,j} \partial_{x_i}\partial_{x_j}f(t, x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (f(t, x + a(t, x, y)) - f(t, x) - a(t, x, y)\nabla f(t, x))\nu(dy) + \partial_t f(t, x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Osservazione 3.2. Grazie al teorema possiamo esplicitare l'operatore integro-differenziale associato all'equazione di Langevin con salti in (3.5) con punto iniziale $X_0 = \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, avendo prima cura di scriverla nella forma (3.7),

$$\begin{aligned} dX_t &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix} J(dt, dy) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix} \nu(dy) \right) dt + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix} \tilde{J}(dt, dy) \end{aligned}$$

Pertanto i coefficienti dell'equazione di Langevin con salti sono dati da

$$\begin{aligned} u(t, X_t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix} \nu(dy) \\ v(t, X_t) = v(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad a(t, X_t, y) = a(t, y) = \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(v(t)v^*(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

Per quanto visto in (3.10) l'operatore integro-differenziale associato è dato da

$$\begin{aligned} Lf(t, x) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix} \nu(dy) \right) \cdot \nabla f(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}^{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(t, x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix}) - f(t, x) - \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix} \cdot \nabla f(t, x) \right) \nu(dy) + \partial_t f(t, x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} \cdot \nabla f(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}^{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(t, x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \begin{pmatrix} y \\ ty \end{pmatrix}) - f(t, x) \right) \nu(dy) + \partial_t f(t, x) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Osservazione 3.3. Possiamo scrivere l'operatore integro-differenziale associato all'equazione di Langevin anche facendo riferimento alla scrittura equivalente dell'equazione vista in (3.3),

$$\begin{aligned} dX_t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_t dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} J(dt, dy) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ X_t^1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} J(dt, dy) \end{aligned}$$

ove è più esplicita la relazione tra la prima e la seconda componente.

Dunque nella forma (3.7),

$$dX_t = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ X_t^1 \end{pmatrix} + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \nu(dy) \right) dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{J}(dt, dy)$$

Pertanto otteniamo i coefficienti

$$\begin{aligned} u(t, X_t) &= u(X_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ X_t^1 \end{pmatrix} + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \nu(dy) \\ v(t, X_t) &= v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a(t, X_t, y) = a(y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(vv^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto visto in (3.10) l'operatore integro-differenziale è dato da

$$\begin{aligned} Lf(t, x) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \nu(dy) \right) \cdot \nabla f(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(t, x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}) - f(t, x) - \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla f(t, x) \right) \nu(dy) + \partial_t f(t, x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \nabla f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 f(t, x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}) - f(t, x) \right) \nu(dy) + \partial_t f(t, x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Otteniamo dunque l'operatore integro-differenziale di Kolmogorov

$$Lf(t, x) = \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 f(t, x) + x_1 \partial_{x_2} f(t, x) + \partial_t f(t, x) + \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}) - f(t, x) \right) \nu(dy)$$

3.2.2 Valore atteso, Covarianza

Il valore atteso del processo X in (3.4), soluzione dell'equazione di Langevin con salti, è dato da

$$m_x(t) = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + t \int_{\mathbb{R}} y \nu(dy) \\ x_2 + tx_1 + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} y \nu(dy) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t^1] &= x_1 + \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} y J(ds, dy) \right] = x_1 + \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N_t} Z_n \right] \\ &= x_1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n Z_k \mathbb{1}_{N_t=n} \right] = x_1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N_t = n) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k] \\ &= x_1 + e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} n \mathbb{E}[Z_1] = x_1 + \lambda t \mathbb{E}[Z_1] \\ &= x_1 + t \int_{\mathbb{R}} x \nu(dx) \end{aligned}$$

Per quanto visto nel teorema (2.1), per $f \in L^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}, ds \otimes \nu)$ abbiamo

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) J(ds, dx) \right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) \nu(dx) ds$$

Per cui otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t^2] &= x_2 + tx_1 + \mathbb{E} \left[\int_0^t (t-s) \int_{\mathbb{R}} y J(ds, dy) \right] \\ &= x_2 + tx_1 + \int_0^t (t-s) \int_{\mathbb{R}} y \nu(dy) ds \\ &= x_2 + tx_1 + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} y \nu(dy) \end{aligned}$$

□

La matrice di covarianza di X è data da

$$\text{cov}(X_t) = \begin{pmatrix} t + t \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx) & \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx) \\ \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx) & \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3} \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx) \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\text{cov}(X_t) = \mathbb{E} \begin{pmatrix} (X_t^1 - \mathbb{E}[X_t^1])^2 & (X_t^1 - \mathbb{E}[X_t^1])(X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2]) \\ (X_t^1 - \mathbb{E}[X_t^1])(X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2]) & (X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2])^2 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che per l'integrale stocastico valgono la proprietà di attesa nulla e l'isometria di Itô,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s, x) dW_s \right] = 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s, x) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t f^2(s, x) ds$$

Rimandiamo al [7] capitolo 4 per una trattazione completa dell'argomento. Ricordiamo anche che per il teorema (2.1), per $f \in L^2([0, +\infty[\times \mathbb{R}, ds \otimes \nu)$ si ha

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) \tilde{J}(ds, dx) \right)^2 \right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f^2(s, x) \nu(dx) ds$$

e

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) \tilde{J}(ds, dx)$$

è una martingala, per cui

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) \tilde{J}(ds, dx) \right] = 0$$

Pertanto otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^1 - \mathbb{E}[X_t^1])^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t dW_s + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n - t \int_{\mathbb{R}} y\nu(dy)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t dW_s + \int_{\mathbb{R}} y\tilde{J}(ds, dy)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t dW_s\right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}} y\tilde{J}(ds, dy)\right)^2 + 2\left(\int_0^t dW_s\right)\left(\int_{\mathbb{R}} y\tilde{J}(ds, dy)\right)\right] \\
&= \int_0^t ds + \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} y\tilde{J}(ds, dy)\right)^2\right] \\
&= t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y^2\nu(dy)ds = t + t \int_{\mathbb{R}} y^2\nu(dy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2])^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t s dW_s + \int_0^t s \int_{\mathbb{R}} xJ(ds, dx) - \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} x\nu(dx)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t s dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx\tilde{J}(ds, dx)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t s dW_s\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx\tilde{J}(ds, dx)\right)^2\right] + \\
&\quad + 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t s dW_s\right)\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx\tilde{J}(ds, dx)\right)\right] \\
&= \int_0^t s^2 ds + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx\tilde{J}(ds, dx)\right)^2\right] \\
&= \frac{t^3}{3} + \int_0^t s^2 x^2\nu(dx)ds = \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3} \int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^1 - \mathbb{E}[X_t^1])(X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2])] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t dW_s + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n - t \int_{\mathbb{R}} x\nu(dx)\right)\right. \\
&\quad \cdot \left.\left(\int_0^t s dW_s + \int_0^t s \int_{\mathbb{R}} x J(ds, dx) - \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} x\nu(dx)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t dW_s + \int_{\mathbb{R}} x \tilde{J}(ds, dx)\right)\left(\int_0^t s dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx \tilde{J}(ds, dx)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t dW_s \int_0^t s dW_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t dW_s \int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx \tilde{J}(ds, dx)\right] + \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \tilde{J}(ds, dx) \int_0^t s dW_s\right] + \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \tilde{J}(ds, dx) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx \tilde{J}(ds, dx)\right] \\
&= \int_0^t s ds + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \tilde{J}(ds, dx) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx \tilde{J}(ds, dx)\right] \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx)
\end{aligned}$$

Per l'ultima uguaglianza si è usata l'isometria di Itô, in analogia con la proprietà di cui gode l'integrazione browniana.

3.3 Processi con salti integrali di funzioni deterministiche

Consideriamo il prototipo di processo stocastico con salti unidimensionale che sia somma di integrali di funzioni deterministiche, della forma

$$X_t = x + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t v(s) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(s, y) J(ds, dy) \quad (3.14)$$

con $x \in \mathbb{R}$, $u \in L_{loc}^1$, $v \in L_{loc}^2$ e $a \in L_{\nu, loc}^2$ funzioni a valori reali, W moto browniano unidimensionale e J la misura di salto del processo di Poisson composto S . Si vorrebbe determinare la distribuzione di un tale processo tramite la sua funzione caratteristica. Per farlo seguiamo l'idea di dimostrazione del teorema (A.2).

Proposizione 3.1. *Sia X il processo con salti in (3.14) con x , u , v e a come sopra. La funzione caratteristica di X è data da*

$$\varphi_{X_t}(\xi) = e^{i\xi X_0} e^{\int_0^t b(s) ds}$$

ove

$$b(t) = i\xi u(t) - \frac{\xi^2}{2} v^2(t) - \lambda t + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(t,y)} \nu(dy)$$

Dimostrazione. Volendo determinare

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X_t}]$$

poniamo

$$F(t, x) = e^{i\xi x}, \quad Z_t = F(t, X_t) = e^{i\xi X_t}$$

Ricordiamo la formula di Itô (2.9) unidimensionale per processi con salti

$$\begin{aligned} dZ_t = dF(t, X_t) &= (\mathcal{A} + \partial_t)F(t, X_t)dt + v(t, X_t)\partial_x F(t, X_t)dW_t \\ &+ \int_{\mathbb{R}} (F(t, X_{t-} + a(t, X_{t-}, y)) - F(t, X_{t-}))\tilde{J}(dt, dy) \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} \mathcal{A}F(t, x) &= u(t, x)\partial_x F(t, x) + \frac{v^2(t, x)}{2}\partial_{xx}F(t, x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} (F(t, x + a(t, x, y)) - F(t, x))\nu(dy) \end{aligned}$$

Mettendo assieme, e considerando $u(s, x) = u(s)$, $v(s, x) = v(s)$ funzioni di variabile solo temporale e $a(t, x, y) = a(t, y)$, si ottiene

$$\begin{aligned} dZ_t = dF(t, X_t) &= u(t)\partial_x F(t, X_t)dt + \frac{v^2(t)}{2}\partial_{xx}F(t, X_t)dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} (F(t, X_{t-} + a(t, y)) - F(t, X_{t-}))\nu(dy)dt + \partial_t F(t, X_t)dt \\ &+ v(t)\partial_x F(t, X_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}} (F(t, X_{t-} + a(t, y)) - F(t, X_{t-}))\tilde{J}(dt, dy) \\ &= u(t)\partial_x F(t, X_t)dt + \frac{v^2(t)}{2}\partial_{xx}F(t, X_t)dt + v(t)\partial_x F(t, X_t)dW_t \\ &+ \int_{\mathbb{R}} (F(t, X_{t-} + a(t, y)) - F(t, X_{t-}))J(dt, dy) + \partial_t F(t, X_t)dt \end{aligned}$$

Osserviamo che si ha

$$\partial_t F(t, x) = 0, \quad \partial_x F(t, x) = i\xi F(t, x), \quad \partial_x^2 F(t, x) = -\xi^2 F(t, x)$$

Pertanto otteniamo

$$dZ_t = dF(t, X_t) = u(t)i\xi F(t, X_t)dt - \frac{v^2(t)}{2}\xi^2 F(t, X_t)dt + v(t)i\xi F(t, X_t)dW_t \\ + \int_{\mathbb{R}} (F(t, X_{t-} + a(t, y)) - F(t, X_{t-}))J(dt, dy)$$

Quindi, integrando

$$Z_t = F(t, X_t) = Z_0 + \int_0^t \left(i\xi u(s) - \frac{\xi^2}{2}v^2(s) \right) F(s, X_s)ds + i\xi \int_0^t v(s)F(s, X_s)dW_s \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (F(s, X_{s-} + a(s, y)) - F(s, X_{s-}))J(ds, dy)$$

Facendone il valore atteso

$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[F(t, X_t)] = Z_0 + \int_0^t \left(i\xi u(s) - \frac{\xi^2}{2}v^2(s) \right) \mathbb{E}[F(s, X_s)]ds \\ + \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (F(s, X_{s-} + a(s, y)) - F(s, X_{s-}))J(ds, dy) \right]$$

Ora esplicitiamo l'ultimo integrale

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (F(s, X_{s-} + a(s, y)) - F(s, X_{s-}))J(ds, dy) \\ = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\xi X_{s-}} e^{i\xi a(s, y)} - e^{i\xi X_{s-}} \right) J(ds, dy) \\ = \int_0^t e^{i\xi X_{s-}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\xi a(s, y)} - 1 \right) J(ds, dy)$$

Da cui il valore atteso di questo integrale diventa

$$\int_0^t \mathbb{E}[e^{i\xi X_{s-}}] \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\xi a(s, y)} - 1 \right) \nu(dy)ds$$

Poiché $(e^{i\xi a(s, y)} - 1)$ è una funzione deterministica, e $\mathbb{E}[J(ds, dy)] = \nu(dy)ds$ per definizione di misura di Lévy.

Di conseguenza abbiamo

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}[F(t, X_t)] = Z_0 + \int_0^t \left(i\xi u(s) - \frac{\xi^2}{2}v^2(s) \right) \mathbb{E}[e^{i\xi X_s}]ds \\ + \int_0^t \mathbb{E}[e^{i\xi X_{s-}}] \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi a(s, y)} - 1) \nu(dy)ds \\ = Z_0 + \int_0^t \mathbb{E}[F(s, X_{s-})] \left(i\xi u(s) - \frac{\xi^2}{2}v^2(s) + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi a(s, y)} - 1) \nu(dy) \right) ds$$

Si evince dunque che $\mathbb{E}[F(t, X_t)]$, ossia $\varphi_{X_t}(\xi)$, risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = b(t)g(t) \\ g(0) = Z_0 \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} b(t) &= i\xi u(t) - \frac{\xi^2}{2}v^2(t) + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi a(t,y)} - 1)\nu(dy) \\ &= i\xi u(t) - \frac{\xi^2}{2}v^2(t) - \lambda t + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(t,y)}\nu(dy) \end{aligned}$$

quindi ne concludiamo che la funzione caratteristica di X è data da

$$\varphi_{X_t}(\xi) = g(t) = Z_0 e^{\int_0^t b(s)ds} = e^{i\xi X_0} e^{\int_0^t b(s)ds}$$

□

Osservazione 3.4. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \varphi_{X_t}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= \left(\varphi_{X_t}(\xi) \cdot \left(iX_0 + \int_0^t \left(iu(s) - \xi v^2(s) + \int_{\mathbb{R}} ia(s,y) e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy) \right) ds \right) \right) \Big|_{\xi=0} \\ &= iX_0 + \int_0^t iu(s)ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} ia(s,y)\nu(dy)ds \\ &= i \left(X_0 + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(s,y)\nu(dy)ds \right) \\ &= i\mathbb{E}[X_t] \end{aligned}$$

Osservazione 3.5. Applichiamo questo risultato al processo di salto-diffusione unidimensionale

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k = \mu t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} xJ(ds, dx)$$

nel caso in cui $Z_k \sim \mathcal{N}_{m,\delta^2}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, & u(s) &= \mu, & v(s) &= \sigma, & a(s,y) &= y \\ \nu(dy) &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\delta^2}} dy \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}(\xi) &= \exp \left(\int_0^t \left(i\xi\mu - \frac{\xi^2}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1)\nu(dy) \right) ds \right) \\
&= \exp \left(ti\xi\mu - t\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 - \lambda t + t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} \nu(dy) \right) \\
&= \exp \left(ti\xi\mu - t\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 - \lambda t + \frac{\lambda t}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\delta^2}} dy \right) \\
&= \exp \left(ti\xi\mu - t\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 - \lambda t + \frac{\lambda t}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\delta^2}} dy \right) \\
&= \exp \left(ti\xi\mu - t\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 - \lambda t + \frac{\lambda t e^{-\frac{m}{\delta^2}}}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} e^{y(i\xi + \frac{m}{\delta^2})} dy \right) \\
&= \exp \left(ti\xi\mu - t\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 - \lambda t + \lambda t e^{-\frac{\xi^2\delta^2}{2}} e^{i\xi m} \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \exp \left(ti\xi\mu - t\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 - \lambda t \right) \frac{(\lambda t e^{-\frac{\xi^2\delta^2}{2}} e^{i\xi m})^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{ti\xi\mu} e^{-t\frac{\xi^2}{2}\sigma^2} e^{-\frac{n\xi^2\delta^2}{2}} e^{ni\xi m} \\
&= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{i\xi(t\mu + nm)} e^{-\frac{\xi^2}{2}(t\sigma^2 + n\delta^2)}
\end{aligned}$$

ove

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2}} e^{y(i\xi + \frac{m}{\delta^2})} dy = \sqrt{2\pi\delta^2} e^{-\frac{\xi^2\delta^2}{2}} e^{i\xi m}$$

viene calcolato come integrale di Gauss.

Il risultato corrisponde a quanto precedentemente stabilito nell'osservazione (2.7).

Osservazione 3.6. Applichiamo questo risultato alla prima componente della soluzione di Langevin con salti

$$X_t^1 = x_1 + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x J(ds, dx)$$

In questo caso abbiamo

$$u(s) = 0, \quad v(s) \equiv 1, \quad a(s, y) = a(y) = y$$

quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^t b(s) ds &= \int_0^t \left(-\frac{\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1)\nu(dy) \right) ds \\
&= -t\frac{\xi^2}{2} + t \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1)\nu(dy)
\end{aligned}$$

Da cui

$$\phi_{X_t^1}(\xi) = \exp(i\xi X_0^1) \exp\left(\int_0^t b(s) ds\right) = \exp(i\xi x_1) \exp\left(-t\frac{\xi^2}{2}\right) \exp\left(t \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1)\nu(dy)\right)$$

Osservazione 3.7. Applichiamo il risultato alla seconda componente della soluzione di Langevin

$$X_t^2 = x_2 + tx_1 + \int_0^t s dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} sx J(ds, dx)$$

Dove

$$u(s) \equiv x_1, \quad v(s) = s, \quad a(s, x) = sx$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_0^t b(s) ds &= \int_0^t \left(i\xi x_1 - \frac{\xi^2}{2} s^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi sy} - 1)\nu(dy) \right) ds \\ &= i\xi tx_1 - \frac{\xi^2}{2} \frac{t^3}{3} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi sy} - 1)\nu(dy) ds \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \phi_{X_t^2}(\xi) &= \exp(i\xi X_0^2) \exp\left(\int_0^t b(s) ds\right) \\ &= \exp(i\xi(x_2 + tx_1)) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} \frac{t^3}{3}\right) \exp\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi sy} - 1)\nu(dy) ds\right) \end{aligned}$$

Corollario 3.1. Sia X_t il processo in (3.14), la densità del processo è data da

$$\begin{aligned} \Gamma_{X_t}(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} \int_0^t v^2(s) ds + i\xi(X_0 - x + \int_0^t u(t) ds)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(t,y)} \nu(dy) ds\right) d\xi \end{aligned}$$

Dimostrazione. Esprimiamo la densità del processo utilizzando il legame che sussiste tra questa e la funzione caratteristica, di cui abbiamo la scrittura esplicita dalla proposizione (3.1). Si ottiene

$$\begin{aligned}
\Gamma_{X_t}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi_{X_t}(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{i\xi X_0} e^{\int_0^t b(s) ds} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{i\xi X_0} \exp \left(\int_0^t \left(i\xi u(s) - \frac{\xi^2}{2} v^2(s) - \lambda + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy) \right) ds \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \int_0^t v^2(s) ds + i\xi (X_0 - x + \int_0^t u(s) ds) \right) \\
&\quad \cdot \exp \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy) ds \right) d\xi
\end{aligned}$$

□

Scriviamo la versione multidimensionale della proposizione (3.1), risultato che ci consentirà di scrivere la funzione caratteristica del processo soluzione dell'equazione di Langevin con salti. Sia dunque X il prototipo di processo stocastico con salti in \mathbb{R}^N che sia somma di integrali di funzioni deterministiche, della forma

$$X_t = x + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t v(s) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(s, y) J(ds, dy) \quad (3.15)$$

con $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in L_{loc}^1$ a valori in \mathbb{R}^N , $v \in L_{loc}^2$ e $a \in L_{\nu, loc}^2$ a valori in $\mathbb{R}^{N \times d}$, localmente limitate e misurabili, W moto browniano d -dimensionale e J la misura di salto del processo di Poisson composto S .

Proposizione 3.2. *Sia X il processo in (3.15) con x , u , v e a come sopra. La funzione caratteristica di X è data da*

$$\varphi_{X_t}(\xi) = e^{i\xi X_0} e^{\int_0^t b(s) ds}$$

con

$$b(s) = i\xi u(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle - \lambda t + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy)$$

Dimostrazione. Volendo determinare

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X_t}]$$

poniamo

$$F(t, x) = e^{i\xi x}, \quad Z_t = F(t, X_t) = e^{i\xi X_t}$$

Utilizziamo la formula di Itô multidimensionale per processi con salti (3.8)

$$dZ_t = dF(t, X_t) = u(t, X_t)\nabla F(t, X_t)dt + v(t, X_t)\nabla F(t, X_t)dW_t + \partial_t F(t, X_t)dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} F(t, X_t) d\langle X^i, X^j \rangle_t + \int_{\mathbb{R}} (F(t, X_{t-} + a((t, X_{t-}, y))) - F(t, X_{t-})) J(dt, dy)$$

ove sappiamo $d\langle X^i, X^j \rangle_t = (v(t, X_t)v^*(t, X_t))_t^{ij} dt$.

Consideriamo $u(s, x) = u(s)$, $v(s, x) = v(s)$ funzioni di variabile solo temporale e $a(t, x, y) = a(t, y)$. Inoltre, avendo che

$$\partial_t F(t, x) = 0, \quad \nabla F(t, x) = i\xi F(t, x), \quad \partial_{x_i} \partial_{x_j} F(t, x) = -\xi^2 F(t, x)$$

otteniamo

$$dZ_t = dF(t, X_t) = i\xi u(t) \cdot e^{i\xi X_t} dt + i\xi v(t) \cdot e^{i\xi X_t} dW_t - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(t)v^*(t))_t^{ij} \xi, \xi \rangle e^{i\xi X_t} dt + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi X_{t-}} (e^{i\xi a(t,y)} - 1) J(dt, dy)$$

Pertanto, integrando

$$Z_t = F(t, X_t) = Z_0 + \int_0^t \left(i\xi u(s) \cdot e^{i\xi X_s} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle e^{i\xi X_s} \right) ds + i\xi \int_0^t v(s) \cdot e^{i\xi X_s} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi X_{s-}} (e^{i\xi a(s,y)} - 1) J(ds, dy)$$

Facendone il valore atteso

$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[F(t, X_t)] = Z_0 + \int_0^t \left(i\xi u(s) \cdot \mathbb{E}[e^{i\xi X_s}] - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle \mathbb{E}[e^{i\xi X_s}] \right) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{i\xi X_{s-}}] (e^{i\xi a(s,y)} - 1) \nu(dy) ds$$

Da cui infine

$$\varphi_{X_t}(\xi) = Z_0 + \int_0^t \mathbb{E}[e^{i\xi X_s}] \left(i\xi u(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi a(s,y)} - 1) \nu(dy) \right) ds$$

Si evince dunque che $\mathbb{E}[F(t, X_t)]$, ossia $\varphi_{X_t}(\xi)$, risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = b(t)g(t) \\ g(0) = Z_0 \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} b(s) &= i\xi u(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi a(s,y)} - 1) \nu(dy) \\ &= i\xi u(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle - \lambda + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy) \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che la funzione caratteristica di X in (3.15) è data da

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(\xi) &= g(t) = Z_0 e^{\int_0^t b(s) ds} = e^{i\xi X_0} e^{\int_0^t b(s) ds} = \exp\left(i\xi X_0 + \int_0^t b(s) ds\right) \\ &= \exp\left(i\xi X_0 - \lambda t + \int_0^t \left(i\xi u(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy)\right) ds\right) \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.8. Osserviamo, come nel caso unidimensionale, che

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \varphi_{X_t}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= \left(\phi_{X_t}(\xi) \cdot \left(iX_0 + \int_0^t \left(iu(s) - (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi + \int_{\mathbb{R}} ia(s,y) e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy) \right) ds \right) \right) \Big|_{\xi=0} \\ &= iX_0 + \int_0^t iu(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} ia(s,y) \nu(dy) ds \\ &= i \left(X_0 + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(s,y) \nu(dy) ds \right) \\ &= i\mathbb{E}[X_t] \end{aligned}$$

Corollario 3.2. Sia X_t il processo in (3.15), la funzione densità è data da

$$\begin{aligned} \Gamma_{X_t}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(X_0-x)} e^{-\lambda t} \\ &\quad \cdot \exp\left(\int_0^t \left(i\xi u(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy)\right) ds\right) d\xi \end{aligned}$$

Dimostrazione. Come nel caso unidimensionale esprimiamo la funzione densità del processo utilizzando il legame che sussiste tra questa e la funzione caratteristica. Otteniamo

$$\begin{aligned}\Gamma_{X_t}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \phi_{X_t}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{i\xi X_0} e^{\int_0^t b(s) ds} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(X_0-x)} e^{-\lambda t} \\ &\quad \cdot \exp\left(\int_0^t \left(i\xi u(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy)\right) ds\right) d\xi\end{aligned}$$

□

Osservazione 3.9. Applichiamo il risultato della proposizione (3.2) al processo X_t soluzione dell'equazione di Langevin con salto

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} ds + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix} J(ds, dy)$$

ove quindi

$$\begin{aligned}X_0 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad u(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad v(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}, \quad a(s, y) = \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix} \\ v(s) \cdot v^*(s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}b(s) &= i\xi u(s) - \frac{1}{2} \langle (v(s)v^*(s))_s^{ij} \xi, \xi \rangle - \lambda + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi a(s,y)} \nu(dy) \\ &= i\xi \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{pmatrix} \xi, \xi \rangle - \lambda + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} \nu(dy)\end{aligned}$$

Integrando otteniamo

$$\int_0^t b(s) ds = i\xi t \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \xi, \xi \rangle - \lambda t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} \nu(dy) ds$$

Concludiamo che la funzione caratteristica di X_t è data da

$$\begin{aligned}\varphi_{X_t}(\xi) &= \exp i\xi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \exp \left(i\xi t \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \xi, \xi \rangle - \lambda t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} \nu(dy) ds \right) \\ &= e^{-\lambda t} \exp \left(i\xi \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \xi, \xi \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} \nu(dy) ds \right)\end{aligned}$$

Mentre la funzione densità è data da

$$\Gamma_{X_t}(x) = \frac{e^{-\lambda t}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \exp \left(i\xi \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \xi, \xi \right\rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} \nu(dy) ds \right) d\xi$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \varphi_{X_t}(\xi) \Big|_{\xi=0} &= \left(\phi_{X_t}(\xi) \cdot \left(i \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} i \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} \nu(dy) ds \right) \right) \Big|_{\xi=0} \\ &= i \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} + i \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix} \nu(dy) ds \\ &= i\mathbb{E}[X_t] \end{aligned}$$

In linea con quanto precedentemente calcolato in (3.13).

Nel caso in cui $Z_k \sim \mathcal{N}_{m, \delta^2}$, quindi

$$\nu(dy) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\delta^2}} dy$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} \nu(dy) ds &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\delta^2}} dy \\ &= \lambda \int_0^t \exp \left(\frac{im\xi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \right) \exp \left(-\frac{1}{2\delta^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{pmatrix} \xi, \xi \right\rangle \right) ds \end{aligned}$$

Per cui otteniamo la funzione densità

$$\begin{aligned} \Gamma_{X_t}(x) &= \frac{e^{-\lambda t}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \exp \left(i\xi \begin{pmatrix} x_1 \\ tx_1 + x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \xi, \xi \right\rangle \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(\lambda \int_0^t \exp \left(\frac{im\xi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \right) \exp \left(-\frac{1}{2\delta^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{pmatrix} \xi, \xi \right\rangle \right) ds \right) d\xi \end{aligned}$$

Osserviamo graficamente la differenza che sussiste tra il processo Y soluzione dell'equazione di Langevin senza salti in (3.2) dato da

$$\begin{cases} Y_t^1 = x_1 + W_t \\ Y_t^2 = x_2 + \int_0^t X_s^1 ds \end{cases} \implies \begin{cases} Y_t^1 = x_1 + W_t \\ Y_t^2 = x_2 + tx_1 + \int_0^t s dW_s \end{cases}$$

e il processo X soluzione dell'equazione di Langevin con salti in (3.3), dato da

$$\begin{cases} X_t^1 = x_1 + W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \\ X_t^2 = x_2 + \int_0^t X_s^1 ds \end{cases} \implies \begin{cases} X_t^1 = x_1 + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y J(ds, dy) \\ X_t^2 = tx_1 + x_2 + \int_0^t s dW_s + \int_0^t s \int_{\mathbb{R}} y J(ds, dy) \end{cases}$$

Scegliamo $Z_k \sim \mathcal{N}_{m, \delta^2}$ per il processo di Poisson che viene aggiunto alla prima componente di X . Per la realizzazione numerica si considera l'intervallo temporale unitario $[0, 1]$ che viene suddiviso in 200 intervalli di uguale lunghezza, e i parametri

$$\lambda = 10, \quad m = 0, \quad \delta = 1$$

Avendo scelto l'intensità del processo di Poisson $N \lambda = 10$, si hanno in media 10 salti nell'intervallo temporale unitario.

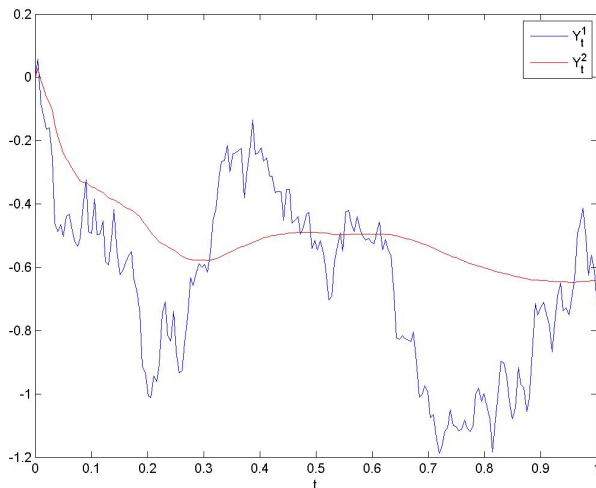


Figura 3.1: componenti Langevin senza salto

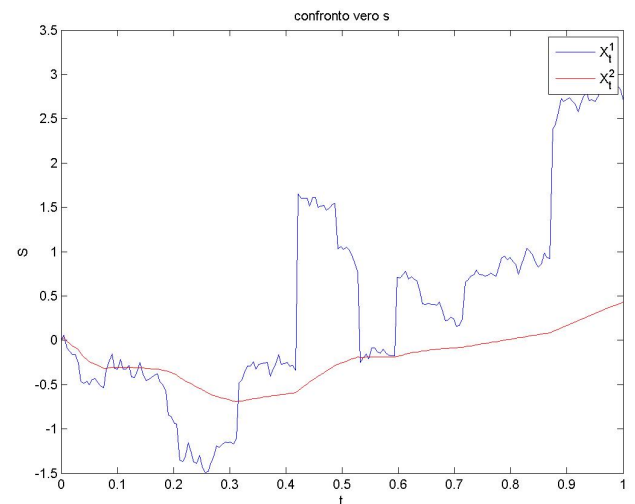


Figura 3.2: componenti Langevin con salto

In Figura 3.1 si confrontano la traiettoria della prima componente e la media della seconda componente del processo Y , entrambe continue.

Mentre in Figura 3.2 si confrontano la traiettoria della prima componente e la media della seconda componente del processo X , la prima discontinua a causa della parte di salto che le è stata aggiunta, la seconda componente è continua, perché definita come integrale della prima.

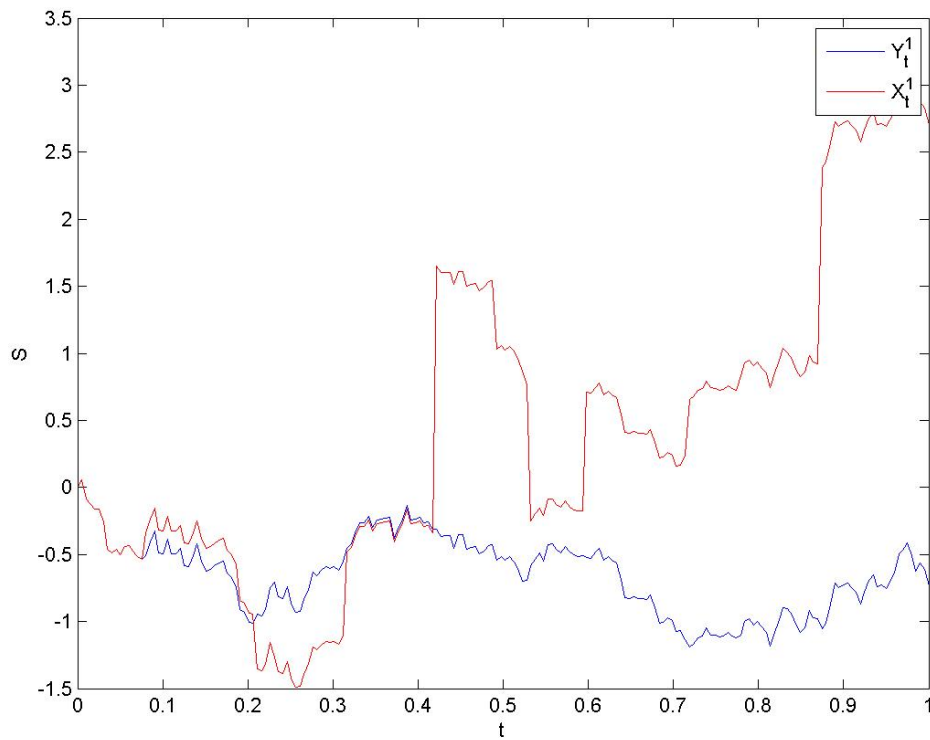


Figura 3.3: Confronto traiettoria prima componente di Y e X

In Figura 3.3 si confrontano la traiettoria della prima componente di Y e di X . La prima componente di X coincide con il grafico di Y traslato di una quantità Z_k in corrispondenza dei tempi T_k in cui siano avvenuti i salti.

3.4 Proprietà di gruppo

Abbiamo visto l'operatore differenziale di Kolmogorov associato all'equazione di Langevin è dato da

$$L_0 f(t, x) = \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_1} f(t, x) + x_1 \partial_{x_2} f(t, x) + \partial_t f(t, x)$$

Nel paragrafo 1.2.2 abbiamo dimostrato che L_0 è invariante per la traslazione sinistra

$$l_\zeta(t, x) = l_{(\tau, \xi)}(t, x) = (\tau, \xi) \circ (t, x) = (t + \tau, x + e^{tB} \xi)$$

Consideriamo l'operatore integro-differenziale di Kolmogorov associato all'equazione di Langevin con salto dato da

$$\begin{aligned} Lf(t, x) &= \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_1} f(t, x) + x_1 \partial_{x_2} f(t, x) + \partial_t f(t, x) + \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}) - f(t, x) \right) \nu(dy) \\ &= L_0 f(t, x) + Tf(t, x) \end{aligned}$$

ove si pone

$$Tf(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}) - f(t, x) \right) \nu(dy)$$

L è invariante per le traslazioni l_ζ se e solo se lo T è invariante, ossia se

$$T(f(l_\zeta(t, x))) = (Tf)(l_\zeta(t, x))$$

Dimostriamo che l'operatore integrale T è invariante per le traslazioni l_ζ . Infatti

$$\begin{aligned} (Tf)(l_\zeta(t, x)) &= (Tf)(t + \tau, x + e^{tB} \xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(t + \tau, x + e^{tB} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}) - f(t + \tau, x + e^{tB} \xi) \right) \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(f_\zeta(t, x + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}) - f_\zeta(t, x) \right) \nu(dy) \\ &= T(f(l_\zeta(t, x))) \end{aligned}$$

L'operatore integro-differenziale di Kolmogorov L , a differenza dell'operatore differenziale di Kolmogorov L_0 , non è omogeneo rispetto alla dilatazione definita in (1.19).

Appendice A

Formule di Itô

Siano W un moto browniano unidimensionale su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F})_t)$ la cui filtrazione verifichi le ipotesi usuali.

Definizione A.1. Si chiama *processo di Itô* un processo stocastico della forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t \in [0, T] \quad (\text{A.1})$$

ove X_0 è una variabile aleatoria \mathcal{F}_0 -misurabile, $\mu \in \mathbb{L}_{loc}^1$ e $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^2$. In notazione differenziale scriviamo

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

I processi μ e σ sono chiamati coefficiente di *drift* e *diffusione* rispettivamente e sono univocamente determinati.

Il processo di Itô risulta dunque essere la somma del processo continuo e a variazione limitata $X_0 + \int_0^t \mu_s ds$ e la martingala localmente continua $\int_0^t \sigma_s dW_s$.

Corollario A.1. Sia X un processo di Itô della forma (A.1), la sua variazione quadratica è data da

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

in forma differenziale

$$d\langle X \rangle_t = \sigma_t^2 dt$$

Infatti il drift è un processo continuo e a variazione limitata, dunque ha variazione quadratica nulla.

Teorema A.1. (Formula di Itô unidimensionale) Sia X un processo di Itô della forma (A.1) e sia $f = f(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Allora il processo $Y_t = f(t, X_t)$ è

un processo di Itô e si ha

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx}f(t, X_t)d\langle X \rangle_t \\ &= \left(\partial_t + \mu_t\partial_x + \frac{1}{2}\sigma_t^2\partial_{xx}\right)f(t, X_t)dt + \sigma_t\partial_x f(t, X_t)dW_t \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Teorema A.2. Sia $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$, con W moto Browniano unidimensionale, $\mu \in \mathbb{L}^1([0, T])$, e con $\sigma \in \mathbb{L}^2([0, T])$ funzioni deterministiche.

Allora X ha distribuzione normale, $X_t \sim \mathcal{N}_{m(t), \text{var}(t)}$, con

$$m(t) = \mathbb{E}[X_t] = X_0 + \int_0^t \mu(s)ds, \quad \text{var}(X_t) = \int_0^t \sigma^2(s)ds$$

Dimostrazione. È sufficiente provare che la funzione caratteristica del processo X_t è data da

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \exp\left(i\xi\left(X_0 + \int_0^t \mu(s)ds\right) - \frac{\xi^2}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds\right)$$

A questo scopo consideriamo la funzione $F(t, x) = e^{itx}$. Osserviamo che si ha

$$\partial_t F(t, x) = 0, \quad \partial_x F(t, x) = i\xi F(t, x), \quad \partial_{xx} F(t, x) = -\xi^2 F(t, x)$$

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad d\langle X \rangle_t = \sigma^2(t)dt$$

Considerando il processo $Z_t = F(t, X_t) = e^{i\xi X_t}$, e utilizzando la formula di Itô, abbiamo

$$de^{i\xi X_t} = dZ_t = \left(i\xi\mu(t) - \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2(t)\right)Z_t dt + i\xi\sigma(t)Z_t dW_t$$

per cui integrando ottenimo

$$e^{i\xi X_t} = Z_t = Z_0 + \int_0^t \left(i\xi\mu(s) - \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2(s)\right)Z_s ds + i\xi \int_0^t \sigma(s)Z_s dW_s$$

Volendo ottenere la funzione caratteristica del processo X_t , calcoliamo il valore atteso del processo $Z_t = e^{i\xi X_t}$

$$\mathbb{E}[Z_t] = Z_0 + \int_0^t \mathbb{E}[Z_s] \left(i\xi\mu(s) - \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2(s)\right) ds$$

In altri termini, ponendo $y(t) = \mathbb{E}[Z_t]$, si ha che y risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(0) = Z_0 \end{cases}$$

con $a(t) = i\xi\mu(t) - \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2(s)$. Per cui si conclude

$$y(t) = Z_0 e^{\int_0^t a(s) ds}$$

Esplicitamente la funzione caratteristica è data da

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(\xi) &= \mathbb{E}[e^{i\xi X_t}] = \exp(i\xi X_0) \exp \int_0^t (i\xi\mu(s) - \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2(s)) ds = \\ &= \exp \left(i\xi \left(X_0 + \int_0^t \mu(s) ds \right) - \frac{1}{2}\xi^2 \int_0^t \sigma^2(s) ds \right) \end{aligned}$$

il che dimostra che il processo X_t ha distribuzione normale con

$$\mathbb{E}[X_t] = X_0 + \int_0^t \mu(s) ds, \quad \text{var}(X_t) = \int_0^t \sigma^2(s) ds$$

□

Siano W un moto browniano d -dimensionale su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F})_t)$ la cui filtrazione verifichi le ipotesi usuali.

Definizione A.2. Si chiama *processo di Itô* N -dimensionale un processo stocastico della forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t \in [0, T] \quad (\text{A.3})$$

ove X_0 è una variabile aleatoria \mathcal{F}_0 misurabile, $\mu \in \mathbb{L}_{loc}^1$ è un vettore $N \times 1$ e $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^2$ è una matrice $N \times d$. In notazione differenziale scriviamo

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad dX_t^i = \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dW_t^j$$

Lemma A.1. Sia X un processo di Itô della forma (A.3), allora

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \int_0^t (\sigma \sigma^*)^{ij}_s ds$$

in forma differenziale

$$d\langle X^i, X^j \rangle_t = (\sigma \sigma^*)^{ij}_t dt$$

Teorema A.3. (Formula di Itô multidimensionale) Sia X un processo di Itô della forma (A.3) e sia $f = f(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Allora il processo $Y_t = f(t, X_t)$ è un processo di Itô e si ha

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \partial_t f(t, X_t) dt + \nabla_x f(t, X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i x_j} f(t, X_t) d\langle X^i, X^j \rangle_t \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\sigma \sigma^*)^{ij}_t \partial_{x_i x_j} + \mu_t \cdot \nabla_x + \partial_t \right) f(t, X_t) dt + \sigma_t \cdot \nabla_x f(t, X_t) dW_t \end{aligned} \tag{A.4}$$

Teorema A.4. Se $\mu \in L^1$ e $\sigma \in L^2$ sono funzioni deterministiche allora il processo soluzione dell'equazione

$$dX_t = \mu(t) dt + \sigma(t) dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^N$$

ha distribuzione multinormale con

$$\mathbb{E}[X_t] = x + \int_0^t \mu(s) ds, \quad cov(X_t) = \int_0^t \sigma(s) \sigma^*(s) ds$$

La dimostrazione è analoga al caso unidimensionale.

Appendice B

Proprietà di gruppo

Abbiamo definito l'operazione

$$l_{\zeta}(t, x) = l_{(\tau, \xi)}(t, x) = (\tau, \xi) \circ (t, x) = (t + \tau, x + e^{tB}\xi)$$

Verifichiamo che $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ sia un gruppo

- 1) chiusura $\forall (\tau, \xi), (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$(\tau, \xi) \circ (t, x) = (t + \tau, x + e^{tB}\xi) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

- 2) proprietà associativa $((\alpha, \beta) \circ (\tau, \xi)) \circ (t, x) = (\alpha, \beta) \circ ((\tau, \xi) \circ (t, x))$

$$\begin{aligned} ((\alpha, \beta) \circ (\tau, \xi)) \circ (t, x) &= (\tau + \alpha, \xi + e^{\tau B}\beta) \circ (t, x) \\ &= (t + \tau + \alpha, x + e^{tB}(\xi + e^{\tau B}\beta)) \\ &= (t + \tau + \alpha, x + e^{tB}\xi + e^{(t+\tau)B}\beta) \\ &= (\alpha, \beta) \circ (t + \tau, x + e^{tB}\xi) \\ &= (\alpha, \beta) \circ ((\tau, \xi) \circ (t, x)) \end{aligned}$$

- elemento neutro $(0, 0) \circ (t, x) = (t, x) = (t, x) \circ (0, 0)$

- elemento inverso $(t, x)^{-1} = (-t, -e^{tB}x)$

$$\text{Infatti } (t, x) \circ (-t, -e^{tB}x) = (-t + t, -e^{tB}x + e^{tB}x) = (0, 0)$$

Appendice C

Somma di v.a. normali

Teorema C.1. Siano Y_1, \dots, Y_n variabili aleatorie indipendenti di distribuzione normale, rispettivamente $\mathcal{N}_{m_1, \sigma_1^2}, \dots, \mathcal{N}_{m_n, \sigma_n^2}$. Allora

$$Y_1 + \dots + Y_n \sim \mathcal{N}_{m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

Dimostrazione. Per indipendenza la funzione caratteristica di $Y_1 + \dots + Y_n$ è data dal prodotto delle singole funzioni caratteristiche

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_1 + \dots + Y_n}(\xi) &= \varphi_{Y_1}(\xi) \dots \varphi_{Y_n}(\xi) \\ &= \mathbb{E}[e^{i\xi Y_1}] \dots \mathbb{E}[e^{i\xi Y_n}] \\ &= \exp\left(i\xi m_1 - \frac{\sigma_1^2 \xi^2}{2}\right) \dots \exp\left(i\xi m_n - \frac{\sigma_n^2 \xi^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\xi(m_1 + \dots + m_n) - \frac{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)\xi^2}{2}\right) \end{aligned}$$

che è, per l'appunto, la funzione caratteristica della distribuzione normale di valore atteso $m_1 + \dots + m_n$ e varianza $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$. \square

Bibliografia

- [1] David Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*, volume 116 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2009.
- [2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, and F. Uguzzoni. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [3] Maria Giovanna Garroni and Jose Luis Menaldi. *Second order elliptic integro-differential problems*, volume 430 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.
- [4] A. Lanconelli and A. Pascucci. Nash estimates and upper bounds for non-homogeneous kolmogorov equations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 146, 20 giugno 2016.
- [5] E. Lanconelli and S. Polidoro. On a class of hypoelliptic evolution operators. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 52(1):29–63, 1994. Partial differential equations, II (Turin, 1993).
- [6] Paul Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 146, 1908.
- [7] Andrea Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing*, volume 2 of *Bocconi & Springer Series*. Springer, Milan; Bocconi University Press, Milan, 2011.