ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea [Magistrale] in Matematica

Gli assiomi di Antifondazione nella teoria degli insiemi

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERO PLAZZI

Presentata da:
VANESSA JACQUIER

Sessione unica
Anno Accademico 2015/2016

A mia madre,

E a tutti coloro che lottano

per quello in cui credono.

Indice

Introduzione

In questa tesi si presenta e si esamina la teoria degli insiemi con l'introduzione dell'Assioma di Antifondazione. Inizialmente si illustrerà il passaggio dalla teoria degli insiemi ben fondati (ZFC) a quella degli insiemi non ben fondati o iperinsiemi (ZFA), si focalizzerà l'attenzione sull'interpretazione di un insieme come grafo e sul risultato di Aczel del 1988, per poi passare a trattare il concetto di bisimulazione e la consistenza delle due teorie precedentemente enunciate; infine si mostreranno formulazioni alternative dell'assioma di Antifondazione, AFA.
Nel primo capitolo presenteremo gli assiomi che costituiscono la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel. Poi costruiremo la teoria ZFC, aggiungendo agli assiomi presentati l'assioma di scelta. Illustreremo una variazione di quest'ultimo, precisamente *l'assioma della scelta dipendende*, che risulterà essere una formulazione alternativa più utile per il nostro lavoro. Dopo l'introduzione dell'assioma di regolarità e dell'assioma di fondazione, faremo una distinzione tra gli insiemi ben fondati e quelli non ben fondati. Infine spiegheremo nel dettaglio cosa sono e a cosa servono quegli oggetti matematici chiamati *atomi* e utilizzati nel corso di questa tesi.
Nel secondo capitolo studieremo i grafi, la loro rappresentazione e il legame con gli insiemi. Chiariremo il concetto di *decorazione* di un grafo e, attraverso l'introduzione (e il successivo approfondimento) del Lemma del Collasso, passeremo alla spiegazione dell'assioma di Antifondazione. Nell'ultima sezione di questo capitolo

vedremo una diversa formulazione dell'assioma di Antifondazione, $LAFA$, attraverso lo studio dei grafi etichettati. Per una maggiore comprensione inseriremo, all'interno del capitolo, degli esempi di insiemi non ben fondati.
Il terzo capitolo è incentrato sulla nozione di *bisimilarità*. Spiegheremo cosa si intende per *bisimulazione*, mostreremo alcune proprietà di questa relazione e altre che derivano dalla sua applicazione ai grafi, ai sistemi di equazioni e agli insiemi. Grazie all'introduzione di questo concetto, sarà possibile mostrare il Lemma di Soluzione e il suo stretto legame con l'assioma di Antifondazione. In conclusione illustreremo la connessione esistente tra la decorazione di un grafo e un sistema di equazioni.
Nel quarto capitolo costruiremo un modello M della teoria ZFC^- attraverso il quale sarà possibile esaminare la consistenza di ZFC e ZFA.
Nel quinto ed ultimo capitolo presenteremo delle versioni alternative dell'assioma di Antifondazione, AFA; in particolare analizzeremo la versione di Finsler e quella di Scott attraverso la *bisimulazione regolare*, concetto che introdurremo all'inizio del capitolo; infine formuleremo la variante di AFA di Boffa.

Capitolo 1

ZF(C) e ZFA

In questo capitolo si presenteranno gli assiomi che costituiscono la teoria degli insiemi ZF(C) e le principali definizioni che da essi derivano. Si analizzeranno in particolare l'assioma di scelta e l'assioma della scelta dipendente. Verranno, quindi, introdotti l'assioma di fondazione e la versione più forte (assioma di regolarità) per giungere infine alla loro sostituzione con un altro assioma, protagonista di questa tesi, l'assioma di Antifondazione, AFA. Prima di mostrare quest'ultimo sarò necessario definire nuovi enti matematici, gli iperinsiemi, utilizzati nella nuova teoria ZFA, nella quale lavoreremo.

1.1 Presentazione assiomatica della teoria standard degli insiemi

L'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, sviluppata principalmente da Zermelo e Fraenkel, può essere paragonata alla geometria Euclidea, che per oltre 2000 anni è stata considerata come il perfetto esempio di rigore matematico. Tale procedimento di assiomatizzazione e formalizzazione, avvenuto attraverso la logica dei predicati di Hilbert, è dovuto all'esigenza di sopperire ai problemi generati dai paradossi riscontrati all'inizio del XX secolo. Nella geometria Euclidea si assume l'esistenza di varie entità matematiche, come i punti, le rette e altri oggetti geometrici, si definiscono proprietà ed operazioni su di essi, fino a formulare teoremi derivanti dagli assiomi dati. Per quanto riguarda la teoria degli insiemi di Zermelo si procede in modo analogo; partiamo, quindi col definire W come un universo di oggetti, alcuni di essi saranno insiemi, e definiamo delle operazioni su W:

$x = y \Longleftrightarrow x$ e y sono lo stesso oggetto;
$Set(x) \Longleftrightarrow x$ è un insieme;
$x \in y \Longleftrightarrow \mathrm{Set}(y)$ e x è elemento di y.

Abbiamo introdotto la proprietà *Set*, *essere un insieme*, poiché vi sono degli oggetti di W che non soddisfano questa proprietà, vale a dire che non sono insiemi. Chiamiamo *atomi* tali oggetti, non richiediamo esplicitamente la loro esistenza, poiché così facendo esprimiamo la possibilità che tutti gli elementi di W siano insiemi [6, cap. 3.5-3.6]. Adesso si possono introdurre gli assiomi della teoria standard [6, cap. 3]; nel far questo indichiamo informalmente con le variabili *a,b,c...* gli insiemi e con *x,y,z...* le collezioni di oggetti.

Assioma 1.1. ***Assioma di estensione (o estensionalità):***

$$\forall a \; \forall b \; (a = b) \Longleftrightarrow \forall x (x \in a \Longleftrightarrow x \in b)$$

Questo significa che ogni insieme è completamente determinato dai suoi elementi e quindi che due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi.

Assioma 1.2. ***Assioma di specificazione o separazione:***

$$\forall a \; \forall x \; (x \in a \wedge \phi(x)) \Longrightarrow Set\,\{x \in a | \phi(x)\}$$

Dato un insieme a e una proprietà $\phi(x)$, la collezione degli $x \in a$ che soddisfano ϕ è un insieme.

Inoltre tale insieme è reso unico grazie al precedente assioma di estensione 1.1.

Osservazione 1.3. Lo schema di specificazione 1.2 è in realtà composto da molti assiomi, ognuno associato ad una particolare proprietà specifica ϕ , che *separa* gli oggetti che la soddisfano da quelli che non la soddisfano.

Con l'assunzione 1.2 è possibile definire l'insieme vuoto come segue:

Definizione 1.4. Sia a un insieme, allora $\emptyset = \{x \in a | x \neq x\}$ indipendentemente all'insieme a scelto.

Questo, però, non permette di provare l'esistenza di nessun insieme non vuoto, dunque occorre introdurre altri assiomi:

Assioma 1.5. ***Assioma della coppia:***

$$\forall x \ \forall y \ \exists a \ \forall t \ [t \in a \Longleftrightarrow (t = x \vee t = y)]$$

Dati due oggetti x, y qualunque esiste un insieme a che li contiene come elementi.

Attraverso l'assioma di estensione 1.1 e quello di specificazione 1.2 è possibile, adesso, definire le *coppie non ordinate* nel modo seguente:

Definizione 1.6. Dati x e y qualunque e un insieme a definito come nell'assioma della coppia 1.5, allora

$$\{z \in a | z = x \vee z = y\} = \{z | z = x \vee z = y\} = \{x, y\}$$

è una *coppia non ordinata*, cioè l'unico insieme che contiene come elementi soltanto x e y. Nel caso in cui $x = y$, $\{x, y\}$ coincide per estensione con $\{x\}$, detto *singoletto* (o *singleton*) di a.

Ci resta da enunciare l'assioma dell'unione e quello della potenza.

Assioma 1.7. ***Assioma dell'unione:***

$$\forall b\ \exists a\ \forall t\ [t \in a \Longleftrightarrow \exists x \in b\,(t \in x)]$$

Dato un insieme b qualunque, esiste sempre un insieme a che contiene come elementi tutti gli elementi di elementi di b.

Attraverso i primi due assiomi, 1.1 e 1.2, è possibile, adesso, definire le *unioni* nel modo seguente:

Definizione 1.8. Data una famiglia di insiemi E e un insieme a definito come nell'assioma dell'unione 1.7:

$$a = \{z | \exists x \in b(z \in x)\} = \bigcup b$$

è l'*unione* degli elementi di b.

Vediamo infine l'assioma della potenza:

Assioma 1.9. ***Assioma della potenza:***

$$\forall b\ \exists a\ \forall c\ \ (c \subseteq b) \Longrightarrow c \in a$$

Dato un insieme b qualunque, esiste sempre un insieme a che contiene come elementi tutti i sottoinsiemi di b.

Attraverso i primi due assiomi, 1.1 e 1.2, è possibile, adesso, definire l'*insieme potenza* nel modo seguente:

Definizione 1.10. Dato un insieme b e un insieme a definito come nell'assioma della potenza 1.9:

$$a = \{z | Set(z) \wedge z \subseteq b\} = P(b)$$

è l'*insieme potenza* o *insieme delle parti* di b.

A questo punto è possibile costruire degli insiemi, purché siano finiti. Con il successivo assioma si stabilisce anche l'esistenza di almeno un insieme infinito.

Assioma 1.11. ***Assioma dell'infinito:***

$$\exists a\, \forall x \ (\emptyset \in a \land x \in a) \Longrightarrow \{x\} \in a$$

Esiste un insieme che contiene l'insieme vuoto e il singleton di ogni suo elemento.

Questo assioma non ci dá una definizione ben precisa di un *insieme infinito*, ma permette di provare l'esistenza di un insieme I tale che, applicando l'assioma, $I = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\} ...\}$ cioè l'insieme infinito dei numeri naturali $\mathbb{N}$.
Resta da introdurre lo *Schema di rimpiazzamento*, dovuto principalmente a Fraenkel, il quale ci permette di ottenere un nuovo insieme sostituendo gli elementi di un insieme dato con altri.

Assioma 1.12. ***Schema di rimpiazzamento:*** *Dato un insieme a e un'operazione unaria H, l'immagine $H[a] = \{H(x)|x \in a\}$ di a tramite H è un insieme.*

L'operazione unaria H associa in modo preciso e univoco un oggetto ad ogni elemento $x \in a$, quindi l'immagine $H[a]$ è costruita *rimpiazzando* ogni $x \in a$ con il corrispondente $H(x)$.

Osservazione 1.13. Questo schema può sostituire gli assiomi di specificazione 1.2 e della coppia 1.5.

1.2 Assiomi della scelta e della scelta dipendente

L'assioma che enunciamo qui di seguito ha creato numerose dispute fra i matematici. Per molto tempo, infatti, si è ritenuto doveroso mostrare un procedimento dettagliato per dimostrare l'esistenza di un ente matematico prima di poterlo utilizzare. Il seguente assioma, invece, cambia il ragionamento fino ad allora adottato: postula l'esistenza di tale ente senza fornirne una costruzione generale dettagliata.

Assioma 1.14. ***Assioma di scelta (AC)***: *Data una famiglia $E \neq \emptyset$ di insiemi non vuoti, esiste sempre una funzione che ad ogni insieme della famiglia associa un suo elemento*

$$f : E \longrightarrow \bigcup E \text{ tale che } f(x) \in x, \forall x \in E.$$

Equivalentemente: *Dati due insiemi a, b e una relazione binaria $P \subseteq a \times b$, se per ogni $x \in a$ esiste $y \in b$ per cui vale $P(x, y)$ allora esiste $f : a \longrightarrow b$ tale che si ha $P(x, f(x))$ $\forall x \in a$.* $(\star)$

Si mostra, ora, che il precedente assioma implica l'*assioma della scelta dipendente*, più adatto al nostro uso.

Assioma 1.15. ***Assioma della scelta dipendente (DC)*** *[6, cap. 8.13]: Per ogni insieme a e per ogni relazione $P \subseteq a \times a$, se $u \in a$ e $\forall x \in a$, $\exists y \in a$ tale che $P(x, y)$, allora $\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow a$ tale che :*

- $f(0) = u$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ P(f(n), f(n+1))$.

Teorema 1.16. *$AC \Longrightarrow DC$*

Dimostrazione. Sia $\epsilon : P(a) \backslash \{\emptyset\} \rightarrow a$ una funzione di scelta su a e si applichi la proprietà $(\star)$. A questo punto è sufficiente definire per ricorsione la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow a$ tale che:

- $f(0) = u$;
- $f(n+1) = \epsilon(\{y \in a | P(f(n), y)\})$.

□

In seguito, dopo aver introdotto i grafi, potremo dimostrare un'importante equivalenza con l'assioma della scelta dipendente.

1.3 Assiomi di fondazione e regolarità

Si osserva, a questo punto, che intuitivamente un insieme non dovrebbe appartenere a se stesso come elemento, ma tale considerazione non è deducibile dai precedenti assiomi; si ha quindi la necessità di presentare un ulteriore postulato: l'assioma di fondazione o, in forma forte, assioma di regolarità.

Definizione 1.17. . Un insieme a è ben fondato se non esiste una successione $\in$-discendente in esso, cioè una successione $(x_m)_{m=0}^{\infty}$ tale che

$$\ldots \in x_{n+1} \in x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0 = a.$$

Tale proprietà viene indicata con $WF(a)$.

Definizione 1.18. . Un insieme a è regolare se è vuoto oppure se contiene un elemento disgiunto da esso: $a = \emptyset$ oppure se $\exists b$ *tale che* $b \in a$ *e* $a \cap b = \emptyset$. Tale proprietà viene indicata con $Reg(a)$.

Assioma 1.19. ***Assioma di fondazione***: *Ogni insieme è ben fondato.*

Assioma 1.20. ***Assioma di regolarità***: *Ogni insieme è regolare.*

É possibile dimostrare che in ZF^- (teoria assiomatica che comprende gli assiomi 1.1 ,1.2 ,1.5 ,1.7 , 1.9 , 1.11 , 1.12) l'assioma di regolarità implica quello di fondazione:

Teorema 1.21. $ZF^- \vdash Reg \Rightarrow FA$

Dimostrazione. Si suppone che non valga l'assioma di fondazione 1.19 e si dimostra che allora non vale nemmeno quello di regolarità. Sia a un insieme non ben fondato, $a \neq \emptyset$, esiste quindi una successione $\in$-discendente in esso $x = (x_m)_{m=0}^{\infty}$. Poiché le successioni sono funzioni, si consideri l'insieme $b = \{x_m | m \in \mathbb{N}\} = Im(x)$. Preso un qualsiasi elemento x_m di b si osserva che $x_{m+1} \in x_m \cap b$, quindi $x_m \cap b \neq \emptyset$, quindi b non è regolare e dunque non vale Reg. $\square$

Tutti questi assiomi 1.1 ,1.2 ,1.5 ,1.7 , 1.9 , 1.11 , 1.12, 1.14, 1.20 costituiscono la struttura della teoria ZFC degli insiemi.

1.4 Insiemi non ben fondati o iperinsiemi

L'assioma di fondazione permette un'elegante costruzione della totalità e gerarchia degli insiemi, ma non è strettamente necessario alla matematica. Esso non genera una restrizione nella teoria degli insiemi, poiché se consideriamo la collezione di tutti gli insiemi ben fondati WF e osserviamo che ogni insieme di insiemi ben fondati è a sua volta ben fondato, allora è possibile mostrare facilmente che, relativamente a WF, valgono tutti gli assiomi della teoria degli insiemi ZFC^- (comprendente gli assiomi di ZFC escluso, ovviamente, quello di fondazione o regolarità). Il lavoro di Aczel[1] del 1988, però, ci ha mostrato che esiste un altro dominio di oggetti astratti che estende l'ordinario dominio ben fondato, come l'insieme dei numeri reali estende quello dei numeri razionali. Possiamo, quindi, escludere dalla teoria degli insiemi l'assioma di fondazione e introdurne un altro, opposto al primo, detto *assioma di Antifondazione*. Questo postulato, con la costruzione dei cosidetti *iperinsiemi* (o insiemi non ben fondati), risulta più adatto a spiegare fenomeni circolari presenti sia nell'ambito informatico sia in quello delle scienze umane. Adesso presentiamo un esempio per mostrare cosa si intende per *fenomeno circolare* in matematica:

Esempio 1.22. Consideriamo una successione definita per ricorrenza in questo modo:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}$$

[1]Peter Aczel 1941-., matematico e logico inglese.

cioè

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Essa avrà per risultato il numero aureo

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il caso presentato è un banale fenomeno circolare, che si risolve con l'applicazione di una definizione per induzione.

Iniziamo, quindi, con la seguente definizione di iperinsieme:

Definizione 1.23. Un insieme a è un iperinsieme, o insieme non ben fondato, se esiste una successione $\in$-discendente infinita in a :

$$\ldots \in x_{n+1} \in x_n \in x_{n-1} \ldots \in x_1 \in a.$$

Se tale successione non esiste, come già detto, a è un insieme ben fondato.

Esempio 1.24. Consideriamo l'insieme $a = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \ldots\}\}\}\}$ che si può scrivere anche come $a = \{\emptyset, a\}$ e poiché a è elemento di se stesso allora a è un iperinsieme per come è definito.

Questa nuova teoria, che chiameremo ***ZFA***, deve basarsi su nuovi assiomi e su una nuova definizione di uguaglianza tra iperinsiemi, in modo da rispondere a domande del tipo: cosa significa $\alpha = \{\alpha\}$? E se $\alpha = \{\alpha\}$ e $\beta = \{\beta\}$, allora α e β sono identici? Quanti elementi ha un insieme α tale che $\alpha = \{\alpha, \{\alpha\}\}$? Questi nuovi assiomi nascono dalla necessità di esprimere una differente concezione di insieme in ZFA. Infatti la teoria ZFC analizza gli insiemi come fossero scatole da riempire: gli oggetti inseriti nella scatola formano un insieme; la teoria ZFA, invece, considera un insieme come un oggetto con una sua propria struttura indipendente dalla natura dei particolari elementi che lo formano.

1.5 Atomi

Iniziamo questa sezione con il fare una distinzione tra cosa si intende per *insieme* e cosa si intende per *classe*. Ogni proprietà dovrebbe fissare un insieme: l'insieme di tutti gli oggetti che soddisfano tale proprietà; ma alcune di esse determinano delle collezioni che sono *troppo estese* per essere considerate propriamente insiemi, per esempio *essere un insieme* oppure *essere un insieme che non è elemento di sé stesso* o ancora *essere un numero cardinale*, *essere un numero ordinale*. Le collezioni, determinate da un particolare predicato, vengono dette **classi**. Quindi un insieme è una classe, ma una classe può non essere un insieme e in questo caso è detta *classe propria*. Se assumessimo che non ci fosse differenza tra le due definizioni, giungeremmo a dei paradossi, come quello esposto da Russell nel 1902.
Intuitivamente possiamo, quindi, affermare che nel mondo vi sono vari tipi di collezioni: alcune sono insiemi e altre non lo sono. Per quello che abbiamo esposto fin qui, $\emptyset = \{x|x \neq x\}$ è un insieme, *l'insieme vuoto*, e da esso è possibile costruire altri insiemi. Ma se volessimo applicare la teoria degli insiemi in un ambito diverso dalla matematica, partire dall'insieme vuoto risulterebbe innaturale, in quanto vorremmo poter costruire gli insiemi che contengano qualsiasi tipo di oggetto, astratto o meno, numeri o altro. Per questo introduciamo una collezione $\boldsymbol{U}$ di *atomi*, oggetti che non sono insiemi o classi e che non possiedono elementi.
Si deve osservare inoltre che le operazioni definite su tutti gli insiemi non sono funzioni, dato che il loro dominio è una classe; ciò che le rende operazioni sta nel fatto che la loro azione è definibile [4, cap. 2.4].
Si ricorda che un insieme a si dice *transitivo* se per ogni insieme b, elemento di a, esso ha la proprietà che tutti i suoi elementi x appartengono ad a:

$$\forall b\ \forall x(x \in b \wedge b \in a \Longrightarrow x \in a)$$

Questo significa che se un insieme (a) è transitivo, allora tutti gli elementi (x) dei suoi elementi (b) sono anch'essi suoi elementi (se $b \in a$ allora $b \subseteq a$).

Definizione 1.25. Per ogni insieme a si definisce *chiusura transitiva* di a, e si indica con $TC(a)$, il più piccolo insieme transitivo che include a ($a \subseteq TC(a)$).

Quindi:

- $TC(a)$ è transitivo
- $a \subseteq TC(a)$
- $\forall b$ *insieme transitivo tale che* $a \subseteq b$ *si ha* $TC(a) \subseteq b$

L'esistenza di $TC(a)$ è giustificata dalla seguente rappresentazione di tale insieme:

$$TC(a) = \bigcup \{a, \bigcup a, \bigcup \bigcup a, \ldots\}$$

Osservazione 1.26. Il più piccolo insieme transitivo che contiene a come elemento sarà allora $TC(\{a\})$. [4, cap. 2.1]

A questo punto possiamo introdurre il concetto di *supporto* di un insieme.

Definizione 1.27. Il supporto di un insieme a, $support(a)$, è l'insieme $TC(a) \cap \boldsymbol{U}$. Gli elementi del supporto sono gli atomi "contenuti in qualche modo" nell'insieme a (vale a dire che tali atomi sono contenuti in a, o in elementi di a, o in elementi di elementi di a...).

Definizione 1.28. Un insieme a si dice puro se $support(a) = \emptyset$

Quindi un insieme puro può avere solo insiemi puri come elementi. Adesso possiamo definire per ogni sottoinsieme $A \subseteq \boldsymbol{U}$:

$$V_{afa}[A] = \{a | Set(a) \text{ e } support(a) \subseteq A\}$$

che è sempre una classe. Se $A = \emptyset$ allora $V_{afa}[A]$ viene indicato con V_{afa}, omettendo A dalla notazione e indicando, così, la classe di tutti gli insiemi puri.
$V_{afa}[A]$ è una collezione di insiemi e gli atomi non vi appartengono, in particolare si ha $A \cap V_{afa}[A] = \emptyset \ \forall A \subseteq \boldsymbol{U}$. Anche $V_{afa}[\boldsymbol{U}]$ è una collezione senza atomi di insiemi, i quali appartengono invece all'unione $V_{afa}[\boldsymbol{U}] \cup \boldsymbol{U}$, sulla quale gli assiomi della teoria degli insiemi sono asserzioni logiche. Nella teoria standard degli insiemi, gli assiomi utilizzano il simbolo di appartenenza $\in$, ma qui si considera anche $\boldsymbol{U}$ come simbolo di proprietà. Per esempio *x è un insieme* significa che $\neg \boldsymbol{U}(\mathbf{x})$ e si esprime come $x \notin \boldsymbol{U}$, abusando della notazione, come abbiamo precedentemente fatto quando abbiamo scritto $A \subseteq \boldsymbol{U}$ [4, cap. 2.4].
Un fatto importante, che prendiamo come assioma, è che nonostante gli atomi siano elementi dell'universo degli insiemi, essi non hanno elementi. Assumere questo è lecito poiché gli atomi sono privi della struttura tipica di un insieme. Dunque dobbiamo *aggiustare* gli assiomi della teoria standard in modo che possano comprendere anche gli atomi. Per esempio l'assioma di estensione diventa:

$$\forall a, b \notin \boldsymbol{U} \ \forall x \ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Longrightarrow a = b$$

Si procede in modo analogo con gli altri assiomi.
Ora introduciamo uno dei principali assiomi da trattare con gli atomi, *l'assioma di abbondanza*, precisiamo che esso è consistente nella teoria standard e lo utilizzeremo nel quarto capitolo di questa tesi per trattare la consistenza della teoria ZFA.

Assioma 1.29. ***Assioma di Abbondanza.*** *Per ogni insieme S esiste sempre una funzione iniettiva $f : S \longrightarrow \boldsymbol{U}$ la cui immagine $f[S]$ è disgiunta da S (vale a dire $f[S] \cap S = \emptyset$).*

Questo assioma garantisce l'esistenza di nuovi atomi e, quando lo utilizziamo, assumiamo che esistano nuovi atomi x_s in corrispondenza con gli elementi s di S.

Se vogliamo essere sicuri che questi atomi non appaiano in nessun altro *ambiente* considerato, allora basterà applicare tale assioma all'unione $S \cup T$, dove T è l'insieme di tutti gli atomi considerati.
Esiste anche un versione più forte di questo assioma ed è la seguente [4, cap. 2.4]:

Assioma 1.30. ***Assioma di Abbondanza in forma forte.*** *Esiste un'operazione* $\mathtt{new}(a, b)$ *tale che:*

- *Per ogni insieme* a *e per ogni* $b \subseteq \boldsymbol{U}$ *si ha:* $\mathtt{new}(a, b) \in \boldsymbol{U} \setminus b$*;*
- *Per ogni insieme* $a' \neq a$ *e per ogni* $b \subseteq \boldsymbol{U}$ *si ha* $\mathtt{new}(a, b) \neq \mathtt{new}(a', b)$.

L'idea è che tale operazione $\mathtt{new}(a, b)$ fornisca un nuovo atomo che non è presente in b e, fissato b, essa risulta essere una funzione iniettiva. Inoltre, sebbene una delle ipotesi dell'assioma sia $b \subseteq \boldsymbol{U}$, nel caso in cui questo non si verifichi è possibile utilizzare *support*(b) e quindi creare degli atomi che non solo non appartengono a b, ma nemmeno agli elementi di b.

Capitolo 2

Insiemi come grafi

Per comprendere il significato e l'utilizzo dell'assioma di Antifondazione, introdurremo in questo capitolo il concetto di ***grafo*** [6, def. 6.34 e cap. 9] e le relazioni che intercorrono tra grafi e insiemi.

2.1 Grafi e decorazioni

Ogni insieme può essere rappresentato come un grafo G, vale a dire un insieme di *nodi*, che rappresentano i sottoinsiemi dell'insieme considerato, e *archi* (*rami* o *spigoli orientati*), che useremo per rappresentare le relazioni di appartenenza dell'insieme. Ogni arco è quindi una coppia ordinata di nodi (n, n').

Definizione 2.1.

- Se (n, n') è un arco, ciò significa che i due nodi n e n' sono collegati tra loro e si scriverà $n \longrightarrow n'$. In questo caso n si dice *padre* di n' e n' si dirà *figlio* di n;

- Un *cammino* (o *percorso*) è una sequenza finita o infinita di nodi $n_1 \longrightarrow n_2 \longrightarrow n_3 \longrightarrow \ldots$ concatenati tra loro tramite archi $(n_1, n_2), (n_2, n_3), \ldots$;

- Un *cammino da n a m* è una sequenza che parte dal nodo n e termina nel nodo m: $n \longrightarrow n_1 \longrightarrow n_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow m$; la *lunghezza* di un cammino da n a m è pari al numero degli archi che formano il percorso $m - n$ (che equivale al numero dei nodi meno 1).

- Se un nodo n non ha figli è detto *foglia*.

E' necessario anche introdurre la definizione di grafo puntato.

Definizione 2.2. Un **grafo puntato** (G, p) è un grafo G con un nodo distinto p, chiamato *il suo punto*, che rappresenta l'intero insieme.

- Un grafo puntato si dice *accessibile*, e si indica con *apg*, se per ogni suo nodo $q \neq p$ esiste un cammino $p \longrightarrow n_1 \longrightarrow n_2 \longrightarrow n_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow q$;

- Se in un *apg* ogni cammino da p a $q \neq p$ è unico, allora il grafo si dice *albero* e p si dice *radice*.

Osservazione 2.3. Anche un grafo costituito da un solo nodo senza rami è considerato un *apg*.

Per le rappresentazioni degli insiemi utilizzeremo diagrammi ad albero accessibili e il punto verrà sempre collocato al vertice.

Definizione 2.4. Una **decorazione** di un grafo è l'assegnazione di un insieme $d(n)$ ad ogni nodo n del grafo, in modo che gli elementi dell'insieme assegnato a un nodo siano gli insiemi assegnati ai suoi figli, quindi $d(n) = \{d(m) | n \longrightarrow m\}$.

Definizione 2.5. Una **rappresentazione** di un insieme a è un *apg* (G, p) in cui l'insieme è assegnato al suo punto: $d(p) = a$.
Una *rappresentazione canonica* di un insieme puro a è un grafo puntato $(TC(a), a)$ dove $\longrightarrow_{TC(a)}$ è $\ni$, vale a dire la restrizione inversa di $\in$ su $TC(a)$; questa è sicuramente una rappresentazione di a, poiché la funzione identità $d(x) = x$ è una decorazione dell'insieme, $a \in TC(a)$ e $d(a) = a$.

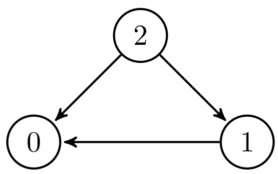
Osservazione 2.6. Come definito, la decorazione assegna ad ogni nodo n l'insieme dei $d(m)$ tali che $n \longrightarrow m$, quindi avremo che $d(m) \in d(n)$, $\forall m$.

Osservazione 2.7. La chiusura transitiva, di cui parlavamo nel capitolo 1, relativa ad un grafo G è un grafo $\bar{G}$ dove $x \longrightarrow_{\bar{G}} y$ se e solo se esiste un cammino da x a y in G, vale a dire $(\exists z_0, z_1, \ldots, z_n)\,[x = z_0 \longrightarrow z_1, \ldots, z_{n-1} \longrightarrow z_n = y]$

Definizione 2.8. Un *apg* è detto *rappresentazione esatta* se la sua decorazione è iniettiva, vale a dire che a nodi distinti sono assegnati insiemi distinti attraverso la decorazione.

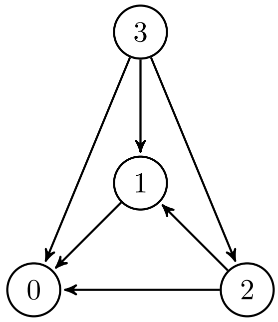
Mostriamo degli esempi di *apg* [1, cap. 1, pag. 3-4]:

Esempio 2.9. Rappresentazione del numero naturale $2 = \{0, 1\}$.



Il nodo etichettato con 0 non ha figli e quindi ad esso va assegnato l'insieme vuoto $\emptyset$. Il nodo sulla destra ha come figlio solo il nodo con l'etichetta 0, perciò a questo assegneremo l'insieme $\{0\}$ e l'etichetta 1. Il nodo all'apice ha due figli, gli assegneremo l'insieme $\{0, 1\}$ e l'etichetta 2.

Esempio 2.10. Rappresentazione del numero naturale $3 = \{0, 1, 2\}$.



Procediamo nel modo analogo al precedente. Assegnamo al nodo etichettato con 0 l'insieme vuoto. Al nodo centrale, il quale ha un unico figlio, assegnamo l'insieme $\{0\}$ e l'etichetta 1. Al nodo più a destra, con due figli, assegnamo l'insieme $\{0, 1\}$ e l'etichetta 2. Al nodo al vertice, invece, etichettato con 3, è stato assegnato l'insieme $\{0, 1, 2\}$.

Resta da stabilire in quali casi un grafo sia *ben fondato*.

Definizione 2.11. Un grafo si dice *ben fondato* se non ha percorsi infiniti, più precisamente se ogni suo sottografo[1], non vuoto, ha un elemento minimale:

$$\text{se } \emptyset \neq X \subseteq G \text{ allora } \exists m \in X \text{ tale che } \forall x \in X\ (m \nrightarrow x).$$

Questo significa che se in un *apg* ogni cammino da p a $q \neq p$ ha lunghezza finita, allora il grafo è ben fondato.
Possiamo adesso dimostrare la seguente equivalenza, di cui avevamo accennato nel capitolo 1:

Proposizione 2.12. *L'assioma della scelta dipendente (1.15) è equivalente alla seguente proposizione: un grafo G è ben fondato se e solo se non possiede nessun*

[1]Un *sottografo* G' di G è un grafo composto da un insieme di nodi incluso nell'insieme dei nodi di G e da un insieme di archi formato da tutti e soli gli archi che collegano, mediante la stessa relazione di G, i nodi di G'.

cammino infinito, ovvero non esiste una funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow G$ *tale che per ogni* n*,* $f(n) \longrightarrow f(n+1)$*.*

Dimostrazione. [6, prop. 8.19] Assumiamo per ipotesi DC (1.15). Supponiamo per assurdo che esista un cammino infinito $f : \mathbb{N} \longrightarrow G$, allora l'insieme $\{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$ non ha elemento minimo e quindi G non è ben fondato. Viceversa se G ha un sottoinsieme non vuoto X privo di elemento minimo, allora $\forall x \in X$ esiste $y \in X$ tale che $x \longrightarrow y$, quindi DC ci fornisce un infinito cammino che inizia da un qualsiasi $\bar{x} \in X$.
Assumiamo ora che ogni grafo che non possiede un cammino infinito sia ben fondato. Per le ipotesi dell'assioma 1.15 sia $\bar{x} \in a$ tale che $\forall x \in a$ esiste $y \in a$ per cui vale $P(x,y)$ e consideriamo un grafo $(a, \longrightarrow)$ in cui $x \longrightarrow y \iff P(x,y)$ con $x, y \in a$. Dall'assioma 1.15 dovrebbe seguire l'esistenza, per il grafo $(a, \longrightarrow)$, di un cammino infinito che comincia con $\bar{x}$; ma se assumiamo che il grafo non lo possieda allora deve esistere un elemento minimo $m \in a$. Ciò significa che $\forall y \in a \neg P(m,y)$ che contraddice l'ipotesi di DC. □

2.2 Dalle decorazioni ad AFA

Dopo questa piccola parentesi su DC, riprendiamo dalla nozione di decorazione soffermandoci sulla sua costruzione come visto negli esempi precedenti. Giungiamo così alla formulazione di un importante risultato della teoria degli insiemi:

Teorema 2.13. ***Lemma del collasso di Mostowski***[2] *[6, 11.36] (vedi anche [1, pag. 5]) : Ogni grafo ben fondato ha una decorazione ed essa è unica.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione del lemma si procede per induzione transfinita sulla relazione $\longrightarrow$ del grafo. Infatti il *Grounded Recursion Theorem* [6, 11.5]

[2] Andrzej Mostowski 1913-1975, matematico e logico ucraino.

mostra che per ogni grafo ben fondato $(G, \longrightarrow)$, e per ogni operazione binaria H, esiste un'unica funzione $f : G \longrightarrow f[G]$ tale che $f(x) = H(f|\{y \in G | x \longrightarrow y\}, x)$[3]. Basterà allora scegliere l'operazione $\bar{H}$ in questo modo:

$$\bar{H}(f) = Im(f) = \{f(x) | x \in Dom(f)\}.$$

In altre parole, come mostrato da Aczel, l'applicazione della definizione per ricorsione su una relazione ben fondata fornisce un'unica funzione d tale che per ogni nodo n del grafo $d(n) = \{d(n') | n \longrightarrow n'\}$, vale a dire che la decorazione d assegna l'insieme $d(n)$ al nodo n. □

Si nota l'immediata conseguenza:

Proposizione 2.14. *Ogni apg ben fondato è la rappresentazione di un unico insieme.*

Ma allora quali insiemi hanno rappresentazioni?

Proposizione 2.15. *Ogni insieme ha una rappresentazione.*

Dimostrazione. Associamo ad ogni insieme la sua *rappresentazione canonica*. Possiamo supporre, senza perdere di generalità, che l'insieme a considerato sia transitivo poichè la rappresentazione canonica di un insieme richiama la sua chiusura transitiva. Costruiamo quindi il grafo G che ha come nodi gli insiemi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tali che

$$\ldots \in a_2 \in a_1 \in a_0 = a$$

e come archi le coppie di nodi (x, y) tali che $y \in x$. Se a è messo in evidenza come *il suo punto*, allora G è l'*apg* che rappresenta a e la sua decorazione consiste nell'assegnazione di un insieme $b \subseteq a$ ad ogni nodo.
Si osserva che tale costruzione non richiede che l'insieme a sia ben fondato.

□

[3] $f|$ indica la restrizione della funzione f all'insieme indicato di seguito.

Inoltre ogni rappresentazione di un insieme può essere trasformata in una rappresentazione ad albero dello stesso insieme. Dato un *apg* possiamo costruire l'albero che ha come nodi i cammini finiti dell'*apg* a partire dal *suo punto*, e come rami le coppie di nodi della forma:

$$(a_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_n, a_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_n \longrightarrow a_{n+1}).$$

La radice di tale albero è il percorso $a_0 \longrightarrow a_0$ di lunghezza 1. Questo albero è l'espansione dell'*apg* e rappresenta qualsiasi insieme rappresentato dall'*apg*. L'espansione della rappresentazione canonica dell'insieme sarà chiamata *rappresentazione canonica ad albero* dell'insieme.

Come abbiamo appena visto nella precedente dimostrazione, la costruzione di una rappresentazione per un dato insieme non richiede che esso sia ben fondato. Per questo motivo si può introdurre l'*Assioma di Antifondazione*:

Assioma 2.16. ***Assioma di Antifondazione (AFA)*** *di Aczel:*

Ogni grafo ha una e una sola decorazione.

In conclusione:

- Ogni *apg* è la rappresentazione di un unico insieme;
- Ogni *apg* non ben fondato è la rappresentazione di un insieme non ben fondato.

Dunque un insieme è rappresentabile tramite un *apg* ed è quindi collegato ad una struttura. Questo, però, evidenzia il problema dell'uguaglianza tra insiemi non ben fondati: se un insieme può essere rappresentato da diversi *apg*, come si può stabilire se due diversi *apg* rappresentano lo stesso insieme?

2.3 Approfondimento sul Lemma del Collasso

Vediamo nel dettaglio la realizzazione del Lemma del Collasso come è presentata da *Barwise*[4] [3, cap. 7]. Sia p un atomo e sia a un insieme; siano x, y oggetti generici; scriviamo $C_x(y)$ per l'operazione $C(x, y)$ definita, attraverso il teorema di ricorsione [3, 6.4], in questo modo:

- $C_x(p) = p$
- $C_x(a) = \{C_x(y) | y \in a \cap x\}$

C è detta *funzione del collasso* e viene utilizzata quando $y \in x$.

Lemma 2.17. *Valgono le seguenti proprietà relative alla funzione del collasso:*

1. $C_p(a) = 0$ *per ogni insieme* a *e per ogni atomo* p*;*
2. *Se* $a \subseteq b$ *e* a *è transitivo allora* $C_b(x) = x \ \forall x \in a$*;*
3. $\forall b$ *l'insieme* $\{C_b(x) | x \in b\} = C_b(b)$ *è transitivo.*

Dimostrazione.

1. $C_p(a) = \{C_p(y) | y \in a \wedge y \in p\} = 0 \ \forall a, p.$
2. a è transitivo e $a \subseteq b$, quindi $x \subseteq a \subseteq b \ \forall x \in a$. Allora:
   $C_b(x) = \{C_b(y) | y \in x \cap b\} =$
   $= \{C_b(y) | y \in x\} =$
   $= \{y | y \in x\} =$
   $= x$
3. Posto $a = \{C_b(x) | x \in b\}$ si mostra che a è transitivo, ovvero si fa vedere che se $z \in y \in a$ allora $z \in a$. $y = C_b(x) \ \exists x \in b$, allora $z \in \{C_b(x') | x' \in x \cap b\}$, quindi $z \in C_b(x') \ \exists x' \in b$. Segue $z \in a$.

[4] Jon Barwise 1942-2000, matematico, filosofo e logico americano.

$\square$

Mostriamo un esempio per una miglior comprensione:

Esempio 2.18. Consideriamo i seguenti insiemi:

$$b = \{0, 1, 2, 4, \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}\}; \quad a = 3 = \{0, 1, 2\}$$

Applicando il punto 2 del lemma precedente, si ha:

- $C_b(0) = 0$
- $C_b(1) = 1$
- $C_b(2) = 2$

Adesso passiamo a calcolare $C_b(4)$:

- $C_b(4) = \{C_b(y) | y \in 4 \cap b\} = \{C_b(y) | y = \{0, 1, 2\}\} = 3$

Quindi 4 collassa su 3, ma $3 \notin b$.
Calcoliamo $C_b(\{1, 3, 4\})$ e $C_b(\{1, 4\})$:

- $C_b(\{1, 3, 4\}) = \{C_b(y) | y \in \{1, 3, 4\} \cap b\} =$
  $= \{C_b(y) | y = 1 \vee y = 4\} =$
  $= \{C_b(1), C_b(4)\} =$
  $= \{1, 3\}$
- $C_b(\{1, 4\}) = \{C_b(y) | y \in \{1, 4\} \cap b\} =$
  $= \{C_b(y) | y = 1 \vee y = 4\} =$
  $= \{C_b(1), C_b(4)\} =$
  $= \{1, 3\}$

Dunque $\{1, 3, 4\}$ collassa su $\{1, 4\}$.
Infine per il punto 3 del lemma si ha che l'insieme:

$$\{C_b(x)|x \in b\} = \{0, 1, 2, 3, \{1, 3\}\}$$

è transitivo.

Prima di passare alla formulazione del Lemma del Collasso di Barwise, diamo due definizioni:

Definizione 2.19. $\forall b$ insieme, si definisce la restrizione di $C_b(\cdot)$ a b:

$$c_b = \{\langle x, C_b(x)\rangle | x \in b\}.$$

Definiamo anche l'insieme transitivo *collasso di b*, $clpse(b)$ (vedi lemma 2.17):

$$clpse(b) = \{C_b(x)|x \in b\} = C_b(b).$$

Definizione 2.20. Un insieme b è *estensionale* se dati due qualunque insiemi distinti a_1, a_2 per ogni $x \in b$ tale che x appartiene a $a_1 \cup a_2$, x non appartiene a $a_1 \cap a_2$:

$$\forall x \in b\ (x \in a_1 \Longleftrightarrow x \in a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$

Nell'esempio 2.18 b non è estensionale, poiché $a_1 = \{1, 3, 4\}$ e $a_2 = \{1, 4\}$, quindi se prendiamo $x = 1$ ($x \in a_1 \cup a_2$) si ha che $x \in a_1 \cap a_2$.
Ogni insieme transitivo è estensionale e il seguente lemma ci mostra che ogni insieme estensionale è isomorfo ad un insieme transitivo.

Lemma 2.21. ***Lemma del Collasso*** *[versione di Barwise] Se a è un insieme estensionale allora c_a è una funzione iniettiva sull'insieme transitivo $clpse(a)$. Inoltre $\forall x, y \in a$ si ha $x \in y \Longleftrightarrow c_a(x) \in c_a(y)$. In altre parole c_a è un isomorfismo tra una struttura estensionale e una struttura transitiva.*

Dimostrazione. Per provare che c_a è iniettiva e che $c_a(x) \in c_a(y) \Longrightarrow x \in y$, procediamo nel modo seguente. Definiamo $\forall x, y$ una relazione $P(x, y)$ tale che:

$$[x, y \in a] \wedge [c_a(x) = c_a(y)] \Longleftrightarrow x = y$$

$$[x, y \in a] \wedge [c_a(x) \in c_a(y)] \Longleftrightarrow x \in y$$

$$[x, y \in a] \wedge [c_a(y) \in c_a(x)] \Longleftrightarrow y \in x$$

Sia x_0 tale che $\forall x \in x_0$ e $\forall y$ vale la relazione $P(x, y)$. Quindi $\forall y$ si ha $P(x_0, y)$. *(i)*
Sia y_0 tale che $\forall y \in y_0$ vale $P(x_0, y)$. Quindi $P(x_0, y_0)$. *(ii)*
Supposto che $x_0, y_0 \in a$ avremo tre casi:

1. $c_a(x_0) = c_a(y_0)$. Supponiamo per assurdo $x_0 \neq y_0$. Allora x_0, y_0 devono essere insiemi del tipo $c_a(p) = p$. Per ipotesi a è estensionale, quindi $\exists z \in a$ tale che $z \in (x_0 \cup y_0) \setminus (x_0 \cap y_0)$. Supponiamo senza perdere di generalità che $z \in x_0 \setminus y_0$, allora $c_a(z) \in c_a(x_0) = c_a(y_0)$, ma per *(i)* si ha $P(z, y_0)$ e quindi $z \in y_0$, il che è assurdo. Segue $x_0 = y_0$.

2. $c_a(x_0) \in c_a(y_0)$. Allora $\exists z \in y_0$ tale che $c_a(z) = c_a(x_0)$. Per *(ii)* si ha $P(x_0, z)$, quindi $z = x_0$ e dunque $x_0 \in y_0$.

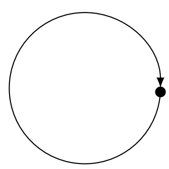
3. $c_a(y_0) \in c_a(x_0)$. Allora $\exists z \in x_0$ tale che $c_a(z) = c_a(y_0)$. Per *(i)* si ha che $\forall y$ vale $P(z, y)$, quindi scelto $y = y_0$ si ha $P(z, y_0)$, allora $z = y_0$ e dunque $y_0 \in x_0$.

□

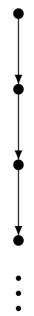
2.4 Esempi di rappresentazioni di iperinsiemi

Assumiamo l'assioma di Antifondazione ed esaminiamo alcuni esempi di rappresentazioni di insiemi non ben fondati [1, cap. 1]:

Esempio 2.22. Consideriamo il seguente *apg*:



Questa è la rappresentazione dell'insieme non ben fondato Ω tale che $\Omega = \{\Omega\}$. Procediamo con l'espansione ad albero e otteniamo:

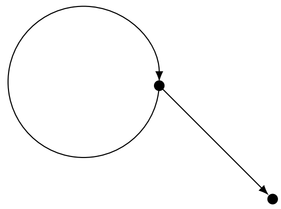


il quale ha come equazione associata $\Omega = \{\{\{\ldots\}\}\}$ se solo l'espressione a destra dell'uguaglianza avesse un significato indipendentemente determinato!
Intuitivamente si potrebbe pensare che Ω sia un oggetto infinito, poiché l'albero associato e l'espressione associata sono infiniti, ma in realtà Ω non è un insieme infinito, data la sua prima rappresentazione. Chiameremo gli insiemi che hanno rappresentazioni *finite*, simili a quella di Ω, *insiemi ereditariamente finiti*.
Inoltre, attraverso la seguente proposizione, si dimostra che Ω ha molte rappresentazioni mediante grafi:

Proposizione 2.23. *Un apg è una rappresentazione di Ω se e solo se ogni nodo dell'apg ha almeno un figlio.*

Dimostrazione. Data una rappresentazione di Ω con radice a, sia d una decorazione di tale rappresentazione tale che $d(a) = \Omega$. Se b è un qualsiasi nodo della rappresentazione esisterà un cammino $a = a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_n = b$, vale a dire $d(b) = d(a_n) \in d(a_{n-1}) \in \ldots \in d(a_1) \in d(a_0) = d(a) = \Omega$. Da ciò segue che, poiché Ω è il solo elemento di Ω, $d(b) = \Omega$ e dato che Ω ha elementi, allora il nodo b deve avere dei figli. Pertanto si è dimostrato che ogni nodo ha dei figli.
Viceversa, assumiamo che l'*apg* considerato abbia per ogni nodo almeno un figlio. L'assegnazione di Ω ad ogni nodo dell'*apg* è una decorazione dell'*apg* e quindi l'*apg* è una rappresentazione di Ω. $\square$

Esempio 2.24. L'*apg*



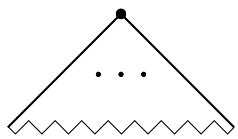
è la rappresentazione dell'insieme $\emptyset^*$ tale che

$$\emptyset^* = \{\emptyset, \emptyset^*\}$$

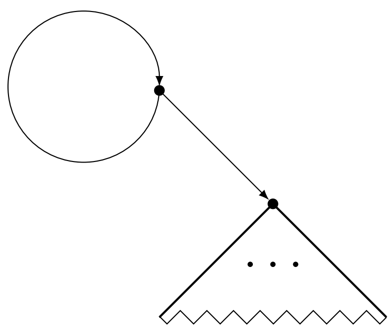
Si noti che abbiamo utilizzato l'*apg* dell'esercizio 2.22 per rappresentare parte di questo insieme, in particolare per la rappresentazione della parte in cui l'insieme richiama se stesso. Espandendo questa equazione si ha

$$\emptyset^* = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \ldots\}\}\}.$$

Esempio 2.25. Ora mostriamo un apg che richiama la precedente rappresentazione e la generalizza. Sia il seguente grafo la rappresentazione di un certo insieme a:



Allora



è la rappresentazione di un insieme a^* tale che

$$a^* = \{a, a^*\}.$$

Esaminiamo due casi particolari:

- Se $a = \emptyset$ ritorniamo all'esempio 2.24;
- Se, invece, $a = \Omega$ allora $\Omega^* = \Omega$, poiché Ω^* è l'unico insieme tale che $\Omega^* = \{\Omega, \Omega^*\}$ e $\Omega = \{\Omega\} = \{\Omega, \Omega\}$; ritorniamo all'esempio 2.22.

Esempio 2.26. Introduciamo in questo esempio le coppie ordinate di insiemi. Esse vengono solitamente rappresentate nel seguente modo:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Allora l'equazione ad una variabile

$$x = (\emptyset, x)$$

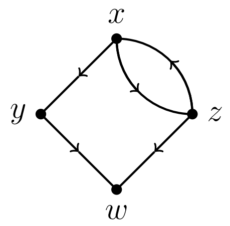
diventa

$$x = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, x\}\}.$$

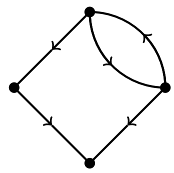
Essa è equivalente al seguente sistema di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} w = \emptyset \\ y = \{w\} \\ z = \{w, x\} \\ x = \{y, z\} \end{cases}$$

Questo sistema è valido quando gli insiemi x, y, z, w decorano correttamente il seguente *apg*:



Dall'assioma di Antifondazione segue che il precedente sistema ha un'unica soluzione e anche l'equazione $x = (\emptyset, x)$ ha un'unica soluzione con rappresentazione:



Inoltre, espandendo questa equazione si ottiene

$$x = (\emptyset, (\emptyset, (\emptyset, \ldots))).$$

Esempio 2.27. Generalizzando il risultato raggiunto nell'esercizio 2.26, si ha che data l'equazione:

$$x = (a, x)$$

per qualsiasi insieme a, essa ha un'unica soluzione:

$$x = (a, (a, (a, \ldots))).$$

In modo analogo si dimostra che date le variabili $x_0, x_1, x_2, \ldots$ e gli insiemi $a_0, a_1, a_2, \ldots$, il seguente sistema infinito:

$$\begin{cases} x_0 = (a_0, x_1) \\ x_1 = (a_1, x_2) \\ x_2 = (a_2, x_3) \\ \ldots \end{cases}$$

ha come *unica* soluzione il seguente sistema di espressioni infinite:

$$\begin{cases} x_0 = (a_0, (a_1, (a_2, \ldots))) \\ x_1 = (a_1, (a_2, (a_3, \ldots))) \\ x_2 = (a_2, (a_3, (a_4, \ldots))) \\ \ldots \end{cases}$$

2.5 LAFA

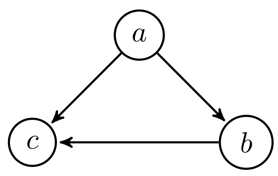
Introduciamo in questa sezione una versione più forte dell'assioma di Antifondazione AFA. Cominciamo con definire cosa siano un grafo etichettato e una decorazione etichettata [4, cap. 10.2]:

Definizione 2.28. Sia $A \subseteq \boldsymbol{U}$. Un *grafo etichettato* su A è una tripla $(G, \longrightarrow, l)$ tale che $(G, \longrightarrow)$ è un grafo ed l una funzione $l : G \longrightarrow P(A)$.

Definizione 2.29. Una *decorazione etichettata* di un grafo etichettato G su $A \subseteq \boldsymbol{U}$ è l'assegnazione di un insieme $d(g)$ ad ogni nodo n del grafo tale che:

$$d(n) = \{d(m) | n \longrightarrow m\} \cup l(n).$$

Bisogna fare attenzione quando disegniamo un grafo etichettato, infatti è facile confondere i valori assegnati dalla *funzione di etichetta* l con i nomi dei nodi che solitamente inseriamo nella figura. Per esempio, nel grafo etichettato:



i nodi sono a, b, c, mentre la funzione di etichetta l è così definita:

$$l(a) = \{x\};\ l(b) = \emptyset;\ l(c) = \{x, y\}.$$

La questione è che a, b, c non sono le etichette, nonostante così possa sembrare dal disegno; x e y sono atomi.
Sempre in riferimento a questo esempio, mostriamo la decorazione etichettata d:

$$d(a) = \{d(b), d(c), x\};$$

$$d(b) = \{d(c)\};$$

$$d(c) = \{x, y\}.$$

Esponiamo qui di seguito la nuova versione di AFA:

Assioma 2.30. ***Assioma di Antifondazione Etichettato (LAFA)*** *[1, cap. 1, pag. 10]:*

Ogni grafo etichettato ha un'unica decorazione etichettata.

AFA risulta un caso particolare di $LAFA$, più precisamente AFA rappresenta il caso in cui ogni nodo ha associato un insieme vuoto di etichette; ma è possibile anche mostrare che $LAFA$ è conseguenza di AFA.

Esempio 2.31. Applicazione di LAFA. Definiamo l'insieme x_n in questo modo:

$$x_n = (a_n, x_{n+1})$$

per $n = 0, 1, 2, \ldots$, dove gli a_i sono insiemi per $i = 0, 1, 2, \ldots$.
Costruiamo il grafo etichettato avente come nodi i numeri naturali, come archi le coppie $(n, n+1)$ $\forall n$, e come insiemi di etichette:

$$l(2n+1) = \{a_n\}.$$

Dall'assioma $LAFA$ segue che esiste un'unica decorazione etichettata d per il grafo considerato. Per $n = 0, 1, 2, \ldots$ d è definita in questo modo:

$$d(2n) = \{d(2n+1)\} \cup \{\{a_n\}\};$$

$$d(2n+1) = \{d(2n+2)\} \cup \{a_n\}.$$

Posto infatti $x_n = d(2n)$ si ha:

$$x_n = \{d(2n+1), \{a_n\}\} = \{\{x_{n+1}, a_n\}, \{a_n\}\} = (a_n, x_{n+1}) \quad \forall n$$

come volevamo. Inoltre, essi sono unici poiché unica è la decorazione d. [1, pag. 10-11]

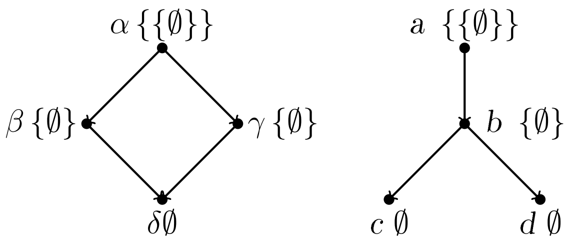
Capitolo 3

Bisimilarità

In questo capitolo tratteremo una nozione fondamentale e un risultato che è possibile dimostrare nella teoria degli insiemi non ben fondati: *l'equivalenza per bisimilarità o per bisimulazione*. Cominciamo con il concetto di bisimilarità associato ai grafi.

3.1 Bisimilarità tra grafi

E' facile costruire grafi puntati non isomorfi che rappresentano lo stesso insieme, anche ben fondato, come per esempio:



ma ci aspettiamo che se un grafo puntato G ammette un'unica decorazione d_G, allora l'insieme $A = d_G(G)$ è formato dagli invarianti di G [6, appendice B]. La definizione seguente identifica tali invarianti:

Definizione 3.1. Siano (G, p_G) e (H, p_H) due grafi puntati. Una relazione R, $R \subseteq G \times H$, è una *relazione di bisimilarità*, o *bisimulazione*, se è una relazione tra i punti $p_G R p_H$ e se vale l'implicazione

$$\begin{aligned} xRy \Longrightarrow \quad & \forall u \in G\ (x \longrightarrow u)\ \exists v \in H\ (y \longrightarrow v)\ \textit{tale che } uRv \\ \wedge\ & \forall v \in H\ (y \longrightarrow v)\ \exists u \in G\ (x \longrightarrow u)\ \textit{tale che } uRv \end{aligned}$$

Due grafi puntati G, H si dicono *bisimilari* se esiste una bisimulazione R tra i due:

$$G \equiv H \Longleftrightarrow \exists R \subseteq G \times H$$

Lemma 3.2. *La relazione di bisimilarità $\equiv$ è un'equivalenza che quindi ripartisce in classi i grafi puntati.*

Dimostrazione. La riflessività e la simmetria sono immediate. Resta da dimostrare la transitività. Supponiamo che (G_1, p_1),(G_2, p_2) e (G_3, p_3) siano grafi puntati e che R_1 e R_2 siano le relazioni di bisimulazione tra G_1 e G_2, G_2 e G_3 rispettivamente. Definiamo una relazione R in questo modo:

$$xRy \Longleftrightarrow \exists z\ \ (xR_1z \text{ e } zR_2y)$$

e verifichiamo che sia una bisimulazione. É chiaro che p_1Rp_3, dato che $p_1R_1p_2$ e $p_2R_2p_3$. Supponiamo che xRy, allora esisterà $z \in G_2$ tale che xR_1z e zR_2y. Se $x \longrightarrow u \in G_1$, allora per definizione di bisimilarità applicata a R_1 si ha $\exists v \in G_2$ $z \longrightarrow v$ tale che uR_1v; analogamente, per definizione di bisimilarità applicata a R_2 si ha $\exists w \in G_3$ $y \longrightarrow w$ tale che vR_2w. Dunque, dato che uR_1v e vR_2w, allora uRw. Abbiamo dimostrato metà della definizione 3.1, l'altra metà si dimostra in modo analogo. □

Teorema 3.3. *[6, B.29]. Siano G e H due grafi ben fondati con decorazioni associate d_G e d_H.* $\forall p \in G$ e $\forall q \in H$ *si ha:*

$$d_G(p) = d_H(q) \Longleftrightarrow (G, p) \equiv (H, q).$$

Dimostrazione. Per prima cosa definiamo una relazione R e dimostriamo che è una relazione di bisimilarità, utilizzando la definizione 3.1:

$$R = \{(x, y) \in G \times H | d_G(x) = d_H(y)\}$$

$xRy \Longrightarrow \{d_G(u)|u \longrightarrow x\} = \{d_H(v)|v \longrightarrow y\}$
$\Longrightarrow$ *(def. 3.1)* $(\forall u \in G$ *tale che* $x \longrightarrow u$, $\exists v \in H$ *tale che* $y \longrightarrow v$ *e*
$[d_G(u) = d_H(v)]) \wedge$
$(\forall v \in H$ tale che $y \rightarrow v$, $\exists u \in G$ tale che $x \rightarrow u$ *e*
$[d_G(u) = d_H(v)])$
$\Longrightarrow (\forall u \in G$ tale che $x \longrightarrow u$ $\exists v \in H$ tale che $y \longrightarrow v$ *e* $uRv)$
$\wedge$ $(\forall v \in H$ tale che $y \longrightarrow v$ $\exists u \in G$ tale che $x \longrightarrow u$ *e* $uRv)$.

Dunque se $p \in G$, $q \in H$ e $d_G(p) = d_H(q)$, allora la relazione R stabilisce che $(G, p) \equiv (H, q)$.
Viceversa supponiamo per assurdo che $\exists p \in G$, elemento minimo, tale che esista $q \in H$ e una relazione di bisimulazione R tra i due grafi puntati (G, p) e (H, q), ma $d_G(p) \neq d_H(q)$. Per definizione di bisimilarità, poiché pRq si ha:
$\forall u \in G$ tale che $p \longrightarrow u$ $\exists v \in H$ tale che $q \longrightarrow v$ e uRv, quindi
$\forall u \in G$ tale che $p \longrightarrow u$ $\exists v \in H$ tale che $q \longrightarrow v$ e $d_G(u) = d_H(v)$.
Analogamente $\forall v \in H$ tale che $q \longrightarrow v$ $\exists u \in G$ tale che $p \longrightarrow u$ e $d_G(u) = d_H(v)$.
E questo contraddice la scelta di p. $\square$

Attraverso l'assioma di Antifondazione 2.16, si può generalizzare il precedente teorema in questo modo:

Teorema 3.4. *[6, B.30] Siano G e H due grafi qualsiasi con decorazioni associate d_G e d_H. $\forall p \in G$* e *$\forall q \in H$ si ha*

$$d_G(p) = d_H(q) \Longleftrightarrow (G, p) \equiv (H, q).$$

Dimostrazione. La dimostrazione dell'implicazione "$\Longrightarrow$" è analoga a quella del teorema 3.3, poiché non dipende dal fatto che i grafi siano ben fondati.
Dimostriamo quindi l'altra implicazione "$\Longleftarrow$". Supponiamo che $R \subseteq G \times H$ sia una relazione di bisimilarità di G con H. Trasformiamo R in un grafo puntato che ha come suo punto la coppia di nodi (p_G, q_H) e come relazione sugli archi il prodotto di $\longrightarrow_G$ e $\longrightarrow_H$:

$$(p, q) \longrightarrow (u, v) \Longleftrightarrow p \longrightarrow_G u \ \wedge \ q \longrightarrow_H v$$

Per l'assioma di Antifondazione, d_G è l'unica decorazione del grafo G e, definita su R la funzione $d_G^R(p, q) = d_G(p)$, si ha:

$$x \in d_G^R(p,q) \Longleftrightarrow x \in d_G(p) \Longleftrightarrow \ \exists u \in G \ \textit{tale che} \ (p \longrightarrow u)[x = d_G(u)] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \ \exists u \in G, \ \exists v \in H \ \textit{tale che} \ (p \longrightarrow u)(q \longrightarrow v)[uRv \wedge x = d_G(u)] \ \ \Longleftrightarrow^{\star}$$
$$\Longleftrightarrow \ \exists (u,v) \in G \times H \ \textit{tale che} \ ((p,q) \longrightarrow (u,v))[x = d_G^R(u,v)].$$

La doppia implicazione in $\star$ vale poiché R è una bisimulazione, quindi pRq e $\forall u \in G \ \ \textit{tale che} \ p \longrightarrow u, \exists v \in H \ \textit{tale che} \ q \longrightarrow v$ che soddisfa uRv.
Dunque d_G^R è una decorazione per R, ma lo è anche d_H^R definita come $d_H^R(p, q) = d_H(q)$, dove d_H è l'unica decorazione del grafo H per l'assioma di Antifondazione. Dunque $\forall (p, q) \in R$, utilizzando nuovamente AFA, si ha:

$$d_G(p) = d_G^R(p,q) = d_H^R(p,q) = d_H(q)$$

che completa la dimostrazione. $\square$

3.2 Lemma di Soluzione

In questa sezione affrontiamo in modo differente l'assioma di Antifondazione introducendo una sua variante, detta *Lemma di Soluzione* e proposta da Barwise e Moss[1] [4, cap.6], per riuscire a trattare successivamente i sistemi bisimilari.

[1] Lawrence Moss 1959-., matematico e logico americano.

Il *Lemma di Soluzione* asserisce che ogni sistema di equazioni di un certo tipo ha una soluzione unica. Per introdurre il *Lemma* dobbiamo considerare un'espansione dell'universo degli insiemi puri, in questo modo è possibile trovare una soluzione a problemi irrisolubili nell'universo non espanso. Numerose volte abbiamo eseguito questo procedimento di espansione per trovare delle soluzioni in un universo più ampio, per esempio quando siamo passati dai numeri naturali ai numeri interi, dai numeri razionali ai numeri reali, dal piano Euclideo al piano proiettivo. L'universo degli insiemi puri viene arricchito con atomi e insiemi costruiti mediante essi. Gli atomi, come avevamo già detto nel primo capitolo, non hanno una struttura di insieme, ma possono essere utilizzati per formare insiemi.
L'ampliamento dell'universo è necessario per risolvere equazioni del tipo:

$$x = \{q, x\}$$

dove q è un atomo. Se vale l'assioma dell'uguaglianza allora l'equazione

$$y = \{q, \{q, y\}\}$$

deve avere le stesse soluzioni della precedente, ovvero deve esistere un iperinsieme *(vedi cap. 1.4 di questa tesi)* che le soddisfi entrambe, come lo stesso numero razionale soddisfa le equazioni $2x = 3$ e $4y = 6$. L'assioma di Antifondazione, presentato nella forma del Lemma di Soluzione, dichiara che ogni sistema di equazioni di un certo tipo ha una soluzione. Ma la domanda è: quante soluzioni ha un'equazione del tipo $x = \{q, x\}$? Una? Due? Infinite? Supponiamo che x_1 e x_2 siano due soluzioni dell'equazione considerata. Espandendo indefinitamente si ha: $x_i = \{q, \{q, \{q, \{q, ...\}\}\}\}$ per $i = 1, 2$. Attraverso l'assioma di estensione 1.1 *(un insieme è completamente determinato dai suoi elementi)* concludiamo che $x_1 = x_2$, quindi

ogni sistema di equazioni ha un'unica soluzione

come asserisce, in maniera informale, il Lemma di Soluzione [2].

3.3 Modelli di sistemi e soluzioni

Per rendere la formulazione del Lemma di Soluzione un vero e proprio assioma, dobbiamo capire che cosa si intende per sistema di equazioni e per soluzione del sistema [4, cap. 6.1]. Vi sono due particolari problemi da risolvere. Il primo problema verte sul fatto che non tutto ciò che intuitivamente può essere considerato come un'equazione ha soluzione. Per esempio: sia P l'operazione di insieme potenza, il teorema di Cantor [4, prop. 2.4] nega l'esistenza di una funzione suriettiva da A in $P(A)$, pertanto l'equazione $x = P(x)$ non può avere soluzione. Se proviamo a considerare un elemento ideale che rappresenti la soluzione di tale equazione, il risultato è l'incoerenza della nozione di insieme come ordinariamente intesa in un sistema assiomatico. Allora ci chiediamo quali equazioni possano essere risolte nell'estensione del nostro universo di insiemi. Il secondo problema è che vogliamo enunciare gli assiomi della teoria degli insiemi solo in termini insiemistici; non vogliamo che i nostri assiomi si riferiscano alle equazioni, ma ad un modello per le nozioni di sistema di equazioni e soluzione del sistema, all'interno della nostra teoria degli insiemi. Procediamo con l'esaminare il seguente esempio:

Esempio 3.5. Fissiamo due oggetti p e q e cerchiamo degli insiemi x, y e z che soddisfino le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = \{x, y\} \\ y = \{p, q, y, z\} \\ z = \{p, x, y\} \end{cases}$$

Possiamo chiamare *"atomi"*[2] p e q; scriviamo $A = \{p, q\}$.

[2] In questo caso il termine "atomo" indica un oggetto matematico fissato (che potrebbe essere un insieme! vedi [4, esempio 6.1]) *sul* quale *(in funzione del quale)* si costruiscono le soluzioni dei sistemi di equazioni. Gli autori utilizzano in questo contesto una distinzione tra *atomi* e *urelements*, che qui non è stata riproposta.

Chiamiamo *indeterminate* x, y, z; scriviamo $X = \{x, y, z\}$. Gli insiemi desiderati (x, y, z) sono costruiti "al di sopra" di p e q. Quello che vogliamo è un modello per asserire le condizioni sugli insiemi che soddisfino le equazioni date. La costruzione di tale modello viene fatta attraverso una funzione e definita sull'insieme X, i cui valori sono:

$$\begin{cases} e_x = \{x, y\} \\ e_y = \{p, q, y, z\} \\ e_z = \{p, x, y\} \end{cases}$$

Modelliamo quindi la soluzione s, la quale dovrà essere una funzione definita su X che dà un insieme s_x $\forall x \in X$. Questi insiemi devono soddisfare il sistema, quindi avremo:

$$\begin{cases} s_x = \{s_x, s_y\} \\ s_y = \{p, q, s_y, s_z\} \\ s_z = \{p, s_x, s_y\} \end{cases}$$

Si noti che gli atomi p e q non sono nel dominio di s, poiché vogliamo definire le soluzioni del sistema in termini di questi oggetti fissati. Una richiesta analoga alle tre condizioni poste su s è la seguente:

$$s_v = \{s_w | w \in (e_v \cap X)\} \cup \{w | w \in (e_v \cap A)\} \quad \forall v \in X.$$

Nel seguente modello viene formalizzato quanto detto nell'esempio:

Definizione 3.6.

- Un sistema piatto di equazioni è una terna $\xi = \langle X, A, e\rangle$, dove $X \subseteq \boldsymbol{U}$ è un insieme, A è un insieme disgiunto da X e e è una funzione tale che $e : X \longrightarrow P(X \cup A)$.

- X è detto *insieme delle indeterminate* di ξ;
  A è detto *insieme degli "atomi"* di ξ.
  $\forall v \in X$, l'insieme $b_v = e_v \cap X$ è detto insieme delle indeterminate dalle quali v dipende in modo immediato;
  $\forall v \in X$, l'insieme $c_v = e_v \cap A$ è detto insieme degli "atomi" dai quali v dipende in modo immediato.

- Una soluzione del sistema piatto ξ è una funzione s di dominio X tale che

  $$s_x = \{s_y | y \in b_x\} \cup c_x \text{ per } x \in X.$$

  Questo equivale a richiedere $s_x = \{s_y | y \in e_x\}$ con $s_a = a$ per $a \in A$.

Si ricorda che un sistema può essere anche formato da un'unica equazione, per questo motivo è possibile avere $X = \emptyset$, cioè un sistema senza intederminate che avrà come soluzione la funzione vuota. Inoltre è possibile avere anche $e_x = \emptyset$.

3.4 AFA come Lemma di Soluzione

Ora è possibile enunciare una formulazione alternativa equivalente di AFA, quello che finora abbiamo chiamato Lemma di Soluzione [4, cap. 6.2]:

Assioma 3.7. *Ogni sistema piatto di equazioni ξ ha un'unica soluzione s.*

Una volta enunciato AFA, definiamo l'insieme delle soluzioni per qualsiasi sistema di equazioni ξ:

$$\text{solution-set}(\xi) = \{s_v | v \in X\} = s[X]$$

questo è l'insieme di tutti i valori della forma s_v dove s è la soluzione di ξ e v varia sulle indeterminate di ξ. Si può dimostrare facilmente che tale insieme è transitivo:

Proposizione 3.8. *Sia $A \subseteq \boldsymbol{U}$ e sia $\xi = \langle X, A, e \rangle$ un sistema piatto. Allora se b e c sono insiemi tali che $b \in c \in$ solution-set(ξ), allora $c \in$ solution-set(ξ). Vale a dire che l'insieme solution-set(ξ) è transitivo.*

Dimostrazione. Sia Z=solution-set(ξ). Ogni elemento di uno degli insiemi s_x è un elemento di A oppure è della forma s_y, $\exists y \in X$. Dunque Z è transitivo. $\square$

Inoltre, possiamo ridefinire $V_{afa}[A]$ *(vedi cap. 1.5 di questa tesi)* come la collezione di tutti gli insiemi che sono soluzioni di qualche sistema che utilizza A come insieme di atomi:

$$V_{afa}[A] = \bigcup \{\textit{solution-set}\,(\xi)\,|\xi \text{ è un sistema piatto con "atomi" in } A\}.$$

Si osserva che gli "atomi" di un sistema di equazioni possono essere *oggetti* qualsiasi, ma se consideriamo come "atomi" solo quelli che definiscono il sistema, allora gli insiemi di soluzione non conterrano altri oggetti. Adesso proponiamo un esempio che mostra la difficoltà nell'utilizzo del Lemma di Soluzione e come poter aggirare tale difficoltà.

Esempio 3.9. Supponiamo di voler risolvere l'equazione:

$$x = \{\{x, q\}, p\}.$$

Poiché non possiamo scrivere il lato destro di questa equazione come l'unione di un insieme di indeterminate e un insieme di atomi, allora è impossibile modellare questa equazione. Possiamo, però, aggirare il problema utilizzando il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x = \{y, p\} \\ y = \{x, q\} \end{cases}$$

Ora ogni lato destro può essere scritto nella forma desiderata. Per esempio l'insieme delle indeterminate dalle quali dipende x è $\{y\}$, mentre la parte costante dell'equazione per x è $\{p\}$; scrivo $x = \{y\} \cup \{p\}$. L'insieme che vogliamo trovare è un elemento dell'insieme soluzione di questo sistema espanso di equazioni.

Nonostante questa difficoltà, è sempre possibile, come nel precedente esempio, riformulare il sistema in modo da avere sempre la stessa famiglia $V_{afa}[A]$ per ogni $A \subseteq \boldsymbol{U}$. Questo è possibile introducendo la nozione di *sistema canonico piatto* [4, cap. 6.3].

Definizione 3.10. Sia a un insieme e sia $\xi = \langle X, A, e\rangle$ un sistema piatto di equazioni, dove $X = TC(\{a\}) \setminus A$, $A = support(a)$ e $e_x = x\ \forall x \in X$. ξ è detto *sistema canonico piatto per a*.

Enunciamo adesso una forma più generale del Lemma di Soluzione, introducendo il concetto di *sistema generale di equazioni*:

Definizione 3.11. Un *sistema generale di equazioni* è una tripla $\xi = \langle X, A, e\rangle$ dove $X \subseteq \boldsymbol{U}$ è un insieme, $A \subseteq \boldsymbol{U}$ è un altro insieme ed e è una funzione $e : X \longrightarrow V_{afa}[X \cup A]$. Inoltre s è detta *soluzione* di ξ se è una funzione di dominio X tale che $\forall x \in X$ si ha $s_x = e_x[s]$.

Grazie all'utilizzo dell'assioma di Abbondanza forte, è possibile dimostrare che AFA implica il Lemma di Soluzione [4, theorem 6.3] e che le due versioni dell'assioma sono equivalenti.

Teorema 3.12. *[4, theorem 8.2] Ogni sistema generale di equazioni ξ ha un'unica soluzione s. Inoltre l'insieme di soluzione di ξ è un sottoinsieme di $V_{afa}[A]$, dove A è l'insieme degli atomi di ξ.*

Come abbiamo visto, l'assioma di Antifondazione implica che ogni sistema di equazioni ha una soluzione. É naturale domandarsi quali sistemi hanno soluzione se assumiamo, invece, l'assioma di fondazione. La risposta è semplice.

Sia la relazione $<$ definita sulle indeterminate di un sistema piatto in questo modo $x < y \Longleftrightarrow y \in e_x$, allora il sistema è ben fondato se è ben fondata $<$ su X. Quindi *l'assioma di fondazione è equivalente a dire che solo i sistemi piatti ben fondati hanno soluzione*. Questo risultato è una formulazione alternativa del Lemma del Collasso 2.13.

3.5 Bimisilarità tra sistemi di equazioni

Nella costruzione degli iperinsiemi come estensione degli insiemi ben fondati, dobbiamo pensare che sistemi differenti di equazioni possono dare la stessa soluzione. Per far questo, mostriamo alcuni esempi [4, cap. 7].

Esempio 3.13. Consideriamo due sistemi di equazioni ξ_1 e ξ_2, definiti nel modo seguente:

1. $$x = \{x\}$$

2. $$\begin{cases} x = \{y\} \\ y = \{x, z\} \\ z = \{x\} \end{cases}$$

Questi due differenti sistemi di equazioni sono entrambi soddisfatti dall'insieme $\Omega = \{\Omega\}$, nel senso che in 1. $x = \Omega$, mentre in 2. $x = y = z = \Omega$. Tale insieme è l'unico insieme che possiede sé stesso come singleton.

Generalizziamo il precedente risultato con quanto segue:

Esempio 3.14. Sia $\xi = \langle X, A, e\rangle$ un sistema di equazioni tale che $A = \emptyset$, ma ogni $e_x \neq \emptyset$. $\forall v$, b_v è un insieme non vuoto contenente solo indeterminate, quindi $s_v = \Omega$. Ma allora per l'unicità di Ω, s è la sola soluzione di ξ.

Esempio 3.15. Consideriamo due sistemi di equazioni ξ_1 e ξ_2, così definiti:

1.
$$\begin{cases} x = \{y, z, w\} \\ y = \{p, w\} \\ z = \{w\} \\ w = \{z, w\} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x' = \{y', z'\} \\ y' = \{p, z'\} \\ z' = \{z'\} \end{cases}$$

p è un atomo in entrambi i sistemi. Sia s la soluzione di ξ_1. Le ultime due equazioni di ξ_1 suggeriscono che $s_z = s_w$, cioè che gli insiemi di soluzione per z e w sono gli stessi. Ma se $s_z = s_w$, abbiamo una soluzione s' di ξ_2 tale che $s'(x') = s_x$, $s'(y') = s_y$ e $s'(z') = s_z$ che è equivalente alla soluzione s (o alla sua restrizione a $\{x', y', z'\}$).

La domanda che ci poniamo è: quando due sistemi di equazioni hanno le stesse soluzioni (nel senso suggerito dagli esempi)? La risposta è relativamente semplice. Quando abbiamo due sistemi con le stesse soluzioni possiamo notare una relazione tra le loro equazioni. Questa relazione, che dà il nome a questo capitolo, è la bisimilarità.

Definizione 3.16. Sia $A \subseteq \boldsymbol{U}$ e siano $\xi = \langle X, A, e \rangle$ e $\xi' = \langle X', A', e' \rangle$ due sistemi piatti di equazioni.

- Una relazione di *bisimilarità* tra i due sistemi è una relazione R su $X \times X'$ tale che valgano le seguenti condizioni:

  1. Se xRx', allora $\forall y \in b_x \left(= e_x \cap X \right) \exists y' \in b'_{x'} \left(= e'_{x'} \cap X' \right)$ *tale che* yRy';
  2. Se xRx', allora $\forall y' \in b'_{x'}$ $\exists y \in b_x$ *tale che* yRy';
  3. Se xRx', allora e_x e $e'_{x'}$ contengono gli stessi "atomi", cioè

  $$e_x \cap A = e'_{x'} \cap A'.$$

- I due sistemi ξ e ξ' si dicono bisimilari, e si scrive $\xi \equiv \xi'$, se valgono le seguenti proprietà:

  1. $\forall x \in X$ $\exists x' \in X'$ *tale che* xRx';
  2. $\forall x' \in X'$ $\exists x \in X$ *tale che* xRx'.

Inoltre se i due insiemi di "atomi" sono uguali ($A = A'$), allora R è detta A-bisimulazione.

Esempio 3.17. Riprendiamo l'esempio 3.13 (*vedi [4, ex. 7.3]*) e mostriamo che i due sistemi sono bisimilari. Per far questo consideriamo la relazione R che lega x a x, y, z:

$$R = \{\langle x, x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle\}$$

e verifichiamo che valgano le condizioni date nella definizione.

- Consideriamo $\langle x, x \rangle$. L'unico elemento di $e_1(x)$ è x. Dobbiamo vedere se in $e_2(x)$ c'è un elemento in relazione con x. In $e_2(x)$ c'è y per cui vale xRy. Viceversa, l'unico elemento di $e_2(x)$ è y e, come già sappiamo, esiste x elemento di $e_1(x)$ tale che xRy.

- Consideriamo adesso $\langle x, z\rangle$. Analogamente a quanto appena fatto, ricerchiamo un elemento in $e_2(z)$ che sia in relazione con l'unico elemento di $e_1(x)$, cioè x. Ma l'unico elemento di $e_2(z)$ è proprio x, per cui vale xRx. Il viceversa è ovvio.

- Passiamo quindi alla coppia $\langle x, y\rangle$. Cerchiamo un elemento di $e_2(y)$ in relazione con x. Poiché $e_2(y)$ contiene x, concludiamo facilmente. Viceversa se consideriamo x come elemento di $e_2(y)$, sappiamo che x in $e_1(x)$ sarà in relazione con esso. Se consideriamo, invece, l'altro elemento di $e_2(y)$, cioè z, vediamo che anche in questo caso esiste un elemento, l'unico elemento, di $e_1(x)$ che è in relazione con z.

Anche i sistemi dell'esempio 3.15 sono bisimilari con relazione:

$$R = \{\langle x, x'\rangle, \langle y, y'\rangle, \langle z, z'\rangle, \langle w, z'\rangle\}.$$

Il seguente risultato mostra un'importante proprietà.

Teorema 3.18. *[4, theorem 7.1]. Siano ξ e ξ' due sistemi piatti di equazioni con lo stesso insieme di atomi[3] A. Essi hanno gli stessi insiemi soluzione se e solo se sono bisimilari.*

Dimostrazione.
"$\Longrightarrow$" Supponiamo che i due sistemi abbiano gli stessi insiemi soluzione e siano s e s' le soluzioni di ξ e ξ' rispettivamente.
Si definisce una relazione R su $X \times X'$ in questo modo:

$$xRx' \Longleftrightarrow s_x = s'_{x'}.$$

[3]Da questo momento in poi omettiamo le virgolette per differenziare gli "atomi", intesi come oggetti fissati *qualsiasi*, e gli atomi, intesi come urelements. Tale differenza è chiarita dal contesto in cui vengono utilizzati.

Poiché per ipotesi i due sistemi hanno gli stessi insieme soluzione, allora si verificano facilmente le condizioni di bisimilarità di R.

- Sia $x \in X$ tale che $s_x \in$ *solution-set* (ξ). Allora $\exists x' \in X'$ tale che $s_x = s'_{x'}$. Quindi, per come è definito R, si ha xRx'. Analogamente, sia $x' \in X'$ tale che $s'_{x'} \in$ *solution-set* (ξ'). Allora $\exists x \in X$ tale che $s_x = s'_{x'}$. Quindi, come prima, si ha xRx'.

- Supponiamo ora che xRx' e sia $y \in e_x \cap X$ (ciò significa che y appartiene alla "parte destra" di x, ovvero x sarà della forma $x = \{y, ...\}$). Dunque, poiché $s_y \in s_x = s'_{x'}$ (per come è definito x è ovvio che le soluzioni di y sono incluse nell'insieme soluzione di x), si ha $\exists y' \in e'_{x'}$ tale che $s_y = s'_{y'}$. Quindi yRy'. Analogamente, supponiamo che xRx' e sia $y' \in e'_{x'} \cap X'$. Dunque, poiché $s_{y'} \in s'_{x'} = s_x$, si ha $\exists y \in e_x$ tale che $s_y = s'_{y'}$. Quindi, come prima, yRy'.

- Infine, se $s_x = s'_{x'}$ allora essi conterrano gli stessi atomi, ovvero l'insieme degli atomi di s_x sarà uguale all'insieme degli atomi di $s'_{x'}$: $e_x \cap A = e'_{x'} \cap A$.

Segue che R è una bisimulazione.

"$\Longleftarrow$" Adesso assumiamo per ipotesi che i due sistemi siano bisimilari. Dobbiamo provare che i due sistemi hanno lo stesso insieme soluzione. Questo equivale a provare che se xRx' allora $s_x = s'_{x'}$. Prima di provare che $xRx' \Longrightarrow s_x = s'_{x'}$, dimostriamo l'equivalenza dei due enunciati.
Supponiamo sia $a \in$ *solution-set*(ξ), allora $a = s_x$ $\exists x \in X$. Per una delle condizioni di bisimulazione, enunciate nella definizione 3.16, si ha che $\exists x' \in X'$ tale che xRx'. Se $a = s_x = s'_{x'}$, allora $a \in$ *solution-set*(ξ'); questo prova la prima inclusione *solution-set*$(\xi) \subseteq$ *solution-set*(ξ'). Analogamente si prova l'altra inclusione *solution-set*$(\xi') \subseteq$ *solution-set*(ξ).

Adesso si dimostra che se xRx' allora $s_x = s'_{x'}$. Per far questo costruiamo un nuovo sistema generale piatto di equazione ξ^*, con lo stesso insieme di atomi A e con l'insieme X^* delle indeterminate composto dalle coppie $\langle x, x' \rangle$ tali che xRx'. Per tutte le coppie $\langle u, u' \rangle \in X^*$ si pone:

$$e^*_{<u,u'>} = \{\langle v, v' \rangle \in X^* | v \in e_u \text{ e } v' \in e'_{u'}\} \cup \{A \cap e_u\},$$

questo definisce il sistema ξ^*.

Ci sono due funzioni definite su X^*, le quali sono due possibili candidati come soluzioni del sistema ξ^*: $s^1_{\langle u,u' \rangle} = s_u$ e $s^2_{\langle u,u' \rangle} = s'_{u'}$. Ora, utilizzando l'ipotesi che R è una relazione di bisimilarità, si mostra che entrambe le funzioni sono soluzioni del sistema.
Consideriamo s^1 e supponiamo che $\langle u, u' \rangle$ sia una delle nostre indeterminate. Dobbiamo dimostrare che:

$$s^1_{\langle u,u' \rangle} = \left\{ s^1_{\langle v,v' \rangle} | \langle v, v' \rangle \in e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\} \cup \left\{ A \cap e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\}$$

e per far ciò prendiamo un elemento $b \in s^1_{\langle u,u' \rangle} = s_u$. Dato che s è una soluzione di ξ, allora b sarà della forma $b = s_w$ $\exists w \in X \cap e^1_u$ o è un atomo $z \in A \cap e^1_u$. Nel primo caso, $\exists w' \in X' \cap e'_v$ tale che wRw' e questo significa che $\langle w, w' \rangle \in X^*$. Nel secondo caso, $z \in A \cap e^*_{\langle u,u' \rangle}$ per definizione di $e^*_{\langle u,u' \rangle}$. Allora si è ottenuto che $b = s_w = s^1_{\langle w,w' \rangle}$ e cioè $b \in \left\{ s^1_{\langle v,v' \rangle} | \langle v, v' \rangle \in e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\} \cup \left\{ A \cap e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\}$.
Dunque in entrambi i casi

$$s^1_{\langle u,u' \rangle} \subseteq \left\{ s^1_{\langle v,v' \rangle} | \langle v, v' \rangle \in e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\} \cup \left\{ A \cap e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\}.$$

Per provare l'altra inclusione supponiamo di avere un elemento $b = s^1_{\langle v,v' \rangle} \in \left\{ s^1_{\langle v,v' \rangle} | \langle v, v' \rangle \in e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\} \cup \left\{ A \cap e^*_{\langle u,u' \rangle} \right\}$ e proviamo che $b \in s^1_{\langle u,u' \rangle}$. Ma $b = s^1_{\langle v,v' \rangle} = s_v$, $s_u = s^1_{\langle u,u' \rangle}$ e $b \in s_u$ poiché s è una soluzione di ξ. Se invece b fosse

un atomo appartenente a $A \cap e^*_{\langle u,u' \rangle}$, si avrebbe che $b \in A \cap e_u$ dalla definizione di $e^*_{\langle u,u' \rangle}$. Quindi anche in questo caso $b \in s_u = s^1_{\langle u,u' \rangle}$.
La dimostrazione per s^2 è analoga.
Detto ciò, entrambe s^1 e s^2 sono soluzioni del sistema ξ^*, ma per l'assioma di Antifondazione la soluzione esiste ed è unica, quindi $s^1 = s^2$ e $\forall \langle u, v \rangle \in R$ si ha $s_u = s_v$. □

Esempio 3.19. Nell'esempio 3.15 il sistema ξ^* è costituito dalle seguenti coppie di elementi:

$$\begin{cases} \langle x, x' \rangle = \{\langle y, y' \rangle, \langle z, z' \rangle, \langle w, z' \rangle\} \\ \langle y, y' \rangle = \{p, \langle w, z' \rangle\} \\ \langle z, z' \rangle = \{\langle w, z' \rangle\} \\ \langle w, z' \rangle = \{\langle z, z' \rangle, \langle w, z' \rangle\} \end{cases}$$

Corollario 3.20. *La relazione di bisimilarità tra sistemi piatti di equazioni, con lo stesso insieme di atomi, è un'equivalenza.*

Dimostrazione. *"Avere lo stesso insieme di soluzione"* è anch'essa un'equivalenza tra sistemi di equazioni, quindi, per il teorema precedente, la bisimulazione è un'equivalenza tra sistemi piatti di equazioni. □

Il fatto che sistemi bisimilari abbiano gli stessi insiemi soluzione può sorprendere quando utilizziamo l'assioma di Antifondazione per modellare alcuni fenomeni non ben fondati. Qualche volta, il modo di scrivere le equazioni porterà ad assegnare sistemi bisimilari ad oggetti distinti, che modelleranno, quindi, lo stesso insieme. Dunque bisogna porre attenzione sul codificare esplicitamente ogni importante distinzione all'interno del modello.

3.6 Bisimilarità tra insiemi

Come già detto, l'assioma di estensionalità non sempre è utile nel decidere se due iperinsiemi sono distinti o meno. Per esempio se $a = \{b\}$ e $b = \{a\}$, usando l'assioma, si conclude che $a = b \iff b = a$; mentre con i risultati raggiunti nel precedente paragrafo siamo in grado di stabilire l'uguaglianza tra i due insiemi $a = b = \Omega$, poiché sono soluzioni del sistema di equazioni $x = \{y\}$ e $y = \{x\}$. Dunque è possibile enunciare un criterio attraverso il quale stabilire l'identità tra insiemi[4], senza ricorrere alla loro rappresentazione mediante sistemi di equazioni o grafi.

Definizione 3.21. Una *relazione di bisimilarità (o bisimulazione)* su insiemi è una relazione binaria R sugli insiemi che soddisfa le seguenti condizioni:

- Se aRb allora $\forall c \in a\ \exists d \in b$ *tale che* cRd, dove c e d sono insiemi;
- Se aRb allora $\forall d \in b\ \exists c \in a$ *tale che* cRd, dove c e d sono insiemi;
- Se aRb allora $a \cap \boldsymbol{U} = b \cap \boldsymbol{U}$.

Se esiste una relazione di bisimilarità tra due insiemi a e b, allora a e b si dicono *bisimilari*, si scrive $a \equiv b$.

Vediamo un esempio:

Esempio 3.22. Sia p un atomo e siano dati due insiemi $a = \{p, a\}$ e $b = \{p, \{p, b\}\}$. Allora la seguente relazione R è una bisimulazione tale che aRb:

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, \{p, b\}\rangle\}.$$

Si osserva che in R non è stata inserita la coppia $\langle p, p\rangle$, poiché la definizione 3.21 non lo richiede.

[4] Da questo momento il termine *insieme* indica gli oggetti matematici che abbiamo chiamato *iperinsiemi*, i quali sono intesi come insiemi della teoria ZFA.

Il prossimo teorema, conseguenza del teorema 3.18, permette di stabilire, attraverso la bisimulazione, quando due insiemi sono identici.

Teorema 3.23. ***Forte estensionalità.***[4, *theorem 7.3*] *La relazione di identità I è la più grande relazione di bisimilarità sugli insiemi. Questo significa che:*

- *La relazione I è una bisimulazione;*
- *Se R è una relazione di bisimilarità sugli insiemi, allora R è una sottorelazione della relazione di identità. Cioè se aRb allora $a = b$.*

Dimostrazione. La prima condizione è verificata dalla definizione di bisimulazione. Per dimostrare la seconda condizione, supponiamo che aRb. Costruisco il sistema piatto canonico $\xi = \langle X, A, e\rangle$ per a, dove $A = support(a)$, $X = TC(\{a\}) \setminus A$ e $e_x = x \ \forall x \in X$. L'identità è una soluzione di ξ. Similmente, sia $\xi' = \langle X', A', e'\rangle$ il sistema piatto canonico per b.
A questo punto controlliamo che $A = A'$. Supponiamo che $p \in support(a)$, quindi $p \in a' \in \boldsymbol{U} \ \exists a' \in TC(\{a\})$. Allora esiste una sequenza finita:

$$a = a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni ... \ni a_n = a'$$

e applicando per n volte, sugli insiemi della sequenza, il fatto che I è una bisimulazione, vediamo che $\exists b' \in TC(\{b\})$ tale che $a'Rb'$. Ma allora $p \in support(b)$. Questo prova che $A \subseteq A'$. L'altra inclusione si prova in modo analogo.
Sia R^* la restrizione di R su $X \times X'$. Utilizzeremo l'ipotesi che R è una bisimulazione tra insiemi per mostrare che R^* è una bisimulazione tra i due sistemi ξ e ξ'. Sia

$$Y = \{x \in X | \exists x' \in X' \ \textit{tale che} \ xR^*x'\} \subseteq X.$$

Mostriamo che $Y = X$, cioè che ogni elemento di X è in relazione con qualche elemento di X'. Per definizione $Y \subseteq X$. Inoltre Y contiene a e, poiché X' è transitivo, se $x \in Y$ e $y \in x$ allora $y \in Y$. Quindi Y è transitivo e contiene

a. Ma, poichè $TC(\{a\})$ è il più piccolo insieme transitivo contenente a, segue $X = TC(\{a\}) \subseteq Y$. Dalle due inclusioni segue $Y = X$. Analogamente si prova la proprietà simmetrica della bisimulazione ($Y' = X'$).
Adesso verifichiamo le condizioni di bisimilarità di R^*.
Supponiamo che xR^*y e che $x' \in e_x \cap X$. Ciò significa che $x' \in x \cap X$ e in particolare che x' è un insieme. Poiché R è una bisimulazione esisterà un $y' \in y$ tale che $x'Ry'$. Per la transitività di X' abbiamo che $y' \in X'$, quindi $y' \in e'_y \cap X'$ e $x'R^*y'$. Di nuovo la proprietà simmetrica si dimostra analogamente.
Infine si verifica la condizione sugli atomi. Sia xR^*y. Allora $x \cap \boldsymbol{U} = y \cap \boldsymbol{U}$. Ma $x \cap \boldsymbol{U}$ è un sottinsieme di $support(a) = A$, quindi $x \cap \boldsymbol{U} \subseteq A$. Similmente, $y \cap \boldsymbol{U} \subseteq A$. Allora si ha $e_x \cap A = x \cap A = x \cap \boldsymbol{U}$ e anche, ricordando $A = A'$, $e'_y \cap A = y \cap A = y \cap \boldsymbol{U}$. Dunque $e_x \cap A = e'_y \cap A$.
Abbiamo quindi provato che R^* è una bisimulazione sui sistemi piatti di equazioni e, poiché le mappe di identità sono soluzioni dei due sistemi ξ e ξ', possiamo utilizzare il teorema 3.18, il quale ci assicura che:

$$a = s_a = s_b = b.$$

Segue quindi la tesi. $\square$

3.7 Connessioni tra sistemi di equazioni e decorazioni di grafi

Abbiamo analizzato alcune forme dell'assioma di Antifondazione e la relazione di bisimilarità applicata a grafi, sistemi di equazioni e insiemi. Il Lemma di Soluzione, ovvero la versione di AFA per i sistemi di equazioni, risulta più facile da utilizzare nelle applicazioni e in processi non solo matematici, ma le decorazioni dei grafi e le soluzioni dei sistemi corrispondono, quindi il contenuto matematico dei vari approcci è lo stesso. Per questo presentiamo due interessanti risultati che stabiliscono un importante collegamento tra il concetto di sistema di equazioni e quello di decorazione di un grafo [4, cap 10.1-10.2].

Proposizione 3.24. *In ZFC^- le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1. *Ogni sistema piatto di equazioni senza atomi $\xi = \langle X, \emptyset, e \rangle$, dove e è una funzione $e : X \longrightarrow P(X)$, ha un'unica soluzione.*

2. *Ogni grafo G ha un'unica decorazione.*

Dimostrazione.
(1) $\Rightarrow$ (2). Sia G un grafo. Costruiamo il sistema ξ_G in questo modo: sia X un insieme di atomi in corrispondenza con G e scriviamo x_a per ogni atomo corrispondente all'elemento $a \in G$; sia e una funzione che associa ad ogni x_a un insieme di x_b dove $a \longrightarrow b$ in G. Quindi $X = \{x_a | a \in G\}$, $A = \emptyset$ e la funzione e è tale che $e_{x_a} = \{x_b | a \longrightarrow b \text{ con } a, b \in G\}$.
Per definizione, una soluzione s per ξ_G è una decorazione per G nel modo seguente: $d(a) = s(x_a)$. Viceversa se d è una decorazione per G, è una soluzione per ξ_G nel modo seguente: $s(x_a) = d(a)$. Quindi l'associazione di una decorazione ad una soluzione è una biezione e, poiché per (1) ξ_G ha un'unica soluzione, segue che G ha un'unica decorazione.
(2) $\Rightarrow$ (1). Sia $\xi = \langle X, \emptyset, e \rangle$ un sistema piatto di equazioni senza atomi e sia G_ξ il grafo che ha come nodi le indeterminate di ξ e tale che $x \longrightarrow y$ è in $G_\xi \Longleftrightarrow y \in e_x$.
Dunque la decorazione di G_ξ è una soluzione per ξ e l'unicità di quest'ultima segue per l'unicità della decorazione data dal punto (2). $\square$

Generalizziamo la proposizione precedente estendendola ai grafi etichettati con il seguente teorema:

Teorema 3.25. *Sia $A \subseteq \mathbf{U}$. In ZFC^- le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

- *Ogni sistema piatto di equazioni $\xi = \langle X, A, e \rangle$, dove $e : X \longrightarrow P(X \cup A)$, ha un'unica soluzione.*

- *Ogni grafo etichettato G ha un'unica decorazione etichettata.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema è praticamente la stessa della precedente proposizione. Dato il sistema piatto di equazioni ξ, costruiamo il grafo G_ξ come prima e lo etichettiamo con $l(b) = e_b \cap A$. Dato il grafo etichettato G, costruiamo il sistema $\xi_G = \langle G, A, e \rangle$, dove $e_g = \{h | g \longrightarrow h\} \cup l(g)$. Si osserva che una decorazione di un grafo G su A deve mappare i nodi di G negli elementi $V_{afa}[A]$, poiché una soluzione di un sistema di equazioni su A deve fare la stessa cosa. $\square$

Nei prossimi capitoli analizzeremo la consistenza delle due teorie, ZFC e ZFA, e infine presenteremo delle versioni alternative dell'assioma di Antifondazione AFA.

Capitolo 4

Consistenza di ZFA

Come abbiamo già detto, l'universo degli iperinsiemi è un'estensione dell'universo degli insiemi ben fondati. In questo capitolo dimostreremo che la teoria degli insiemi ZFA è consistente se lo è la teoria ZFC, vale a dire che se è possibile provare una contraddizione in ZFA allora è possibile provarla anche in ZFC. La dimostrazione [4, cap. 9] procederà nel modo seguente. Partendo da un modello M di ZFC^- *(ZFC senza FA)*, lo estenderemo ad un universo M_{afa}, dove gli assiomi di ZFC^- continueranno a valere e tutti i sistemi piatti di equazioni avranno soluzione. Prima di estendere M a M_{afa}, dovremo supporre che M sia fortemente estensionale[1], cioè che in M insiemi bisimilari sono identici. La forte estensionalità ci assicura che il modello M_{afa}, che andremo a costruire, includa M.
Presentiamo, qui sotto, lo schema di costruzione del modello che seguiremo:

1. Iniziamo con il considerare un modello M di ZFC^- fortemente estensionale, mostriamo la sua costruzione.

2. Consideriamo la classe di tutti i sistemi piatti puntati $\mathsf{e} = \langle \xi, x \rangle$ che appartengono a M. Definiamo

[1] Ogni modello di ZFC è fortemente estensionale e ogni modello di ZFC^- contiene un modello di ZFC.

$$\langle \xi, x\rangle = \langle \xi', x'\rangle \Longleftrightarrow \exists R \textit{ bisimulazione tra } \xi_x \textit{ e } \xi'_{x'} \textit{ tale che } xRx'.$$

Verifichiamo che R è un'equivalenza e scriviamo [e] per la classe di equivalenza di e.

3. Trasformiamo l'insieme delle classi di equivalenza in una struttura della teoria degli insiemi attraverso la relazione:

$$[\langle \xi, x\rangle] \in [\langle \xi', y\rangle] \Longleftrightarrow \exists z \in e'_y \cap X \textit{ tale che } \langle \xi, x\rangle \equiv \langle \xi', z\rangle.$$

Vediamo che tale relazione è ben definita, verificando che non dipende dalla scelta di particolari elementi delle classi di equivalenza. Come atomi di M_{afa} utilizziamo gli stessi di M.

4. Ci soffermiamo sullo scopo dell'estensione di M: fornire una struttura nella quale i sistemi piatti di equazioni abbiano una soluzione unica.

5. Mostriamo che M_{afa} soddisfa tutti gli assiomi della teoria ZFC^-.

6. Troviamo un'immersione $a \longrightarrow \bar{a}$ di M in M_{afa}. Essa deve essere iniettiva e deve soddisfare la seguente proprietà:

$$a \in b \text{ in } M \Longleftrightarrow \bar{a} \in \bar{b} \text{ in } M_{afa}.$$

7. In conclusione, verifichiamo che M_{afa} soddisfa la richiesta del punto (4), ovvero mostriamo che il Lemma di Soluzione vale in M_{afa}.

4.1 Costruzione di M_{afa}

Dato un modello M di ZFC^- fortemente estensionale, vediamo come è costruito (punto 1).

Sia $\xi = \langle X, A, e\rangle$ un sistema piatto di equazioni e x un'indeterminata di ξ. Vogliamo eliminare tutte le indeterminate irrilevanti per il valore che verrà assegnato a x dalla soluzione. Definiamo $\xi_x = \langle X_x, A_x, e_x\rangle$ il sistema dove $X_x \subseteq X$ è il più piccolo sottoinsieme contenente x e tale che $\forall y \in X_x$ si ha $b_y \subseteq X_x$; A_x è l'insieme degli atomi occorrenti per e_y con $y \in X_x$, cioè $A_x = \bigcup\{c_y | y \in X_x\}$; e_x è la restrizione di e a X_x. Mostriamo l'importanza di questa costruzione nel seguente esempio:

Esempio 4.1. [4, ex. 9.1] Sia ξ un sistema di equazioni. Siano x e s un'indeterminata e la soluzione del sistema ξ rispettivamente. Sia s' la soluzione del sistema ξ_x. Si mostra che s' è la restrizione di s a X_x e in particolare $s'_x = s_x$.

Sia w la restrizione di s a X_x , quindi $\forall y \in X_x$ si ha $w_y = s_y$. Mostriamo allora che w è soluzione del sistema ξ_x. Si ricorda che, per costruzione, se $y \in X_x$ allora $b_y = e_y \cap X \subseteq X_x$ e $e_y \cap A = e_y \cap A_x$. Dunque:

$$s_y = \{s_z | z \in e_y \cap X\} \cup \{e_y \cap A\} = \{s_z | z \in e_y \cap X_x\} \cup \{e_y \cap A_x\}$$

Segue che w è una soluzione di ξ_x e per l'unicità del Lemma di Soluzione $w = s'$.

Il modello costruito M [4, cap. 9.1] è costituito allora dalle coppie $\langle \xi, x\rangle$, dette *sistemi piatti puntati di equazioni*, dove $\xi = \langle X, A, e\rangle$ è un sistema di equazioni su A (che appartiene al modello M), $x \in X$, $X_x = X$ e $A_x = A \subseteq \boldsymbol{U}$. Le richieste $X_x = X$ e $A_x = A$ stabiliscono che ogni cosa in ξ è riferita a x e quindi all'insieme s_x. Denoteremo i sistemi puntati con lettere come e, e' e indicheremo con $\boldsymbol{PS}$ la classe di tutti questi sistemi o atomi (punto 2). A questo punto definiamo

$$\langle \xi, x\rangle \equiv \langle \xi', x'\rangle \iff A = A' \text{ e } \exists R\ A\text{-bisimulazione tra } \xi_x \text{ e } \xi'_x \text{ tale che } xRx'.$$

Gli insiemi del nostro modello M_{afa} sono essenzialmente le classi di equivalenza dei sistemi piatti puntati rispetto alla relazione $\equiv$. Tuttavia, queste classi di equivalenza sono classi proprie, mentre noi vorremmo che gli elementi di M_{afa} fossero insiemi. Risolviamo il problema in questo modo: l'assioma di abbondanza (*vedi assioma 1.29*) ci dà una classe propria $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{U}$ e una classe propria di coppie di elementi di $\boldsymbol{C}$ ben ordinate secondo $<$. $\forall x \in \boldsymbol{C}$ esiste α_x *ordinale* e $\forall X \subseteq \boldsymbol{C}$ esiste $\alpha_X = sup_{x \in X} \alpha_x$. Ora diciamo che e$= \langle\langle X, A, e\rangle, x\rangle$ è *standard* se $X \subseteq \boldsymbol{C}$ e se $\langle Y, A, e'\rangle \equiv \xi$ allora $\alpha_X \leq \alpha_Y$.
Per ogni sistema puntato $\boldsymbol{F}$, c'è un sistema puntato standard equivalente $\boldsymbol{F'}$; inoltre tale sistema $\boldsymbol{F'}$ esiste unico. Definiamo quindi `[e]`:

Definizione 4.2. `[e]`$= \{\mathtt{f} | \mathtt{f}$ *è standard e* $\mathtt{f} \equiv \mathtt{e}\}$.

Prima della relazione di appartenenza in M_{afa} (punto 3), definiamo una relazione E sui sistemi puntati di M:

$$\langle \xi, x\rangle E \langle \xi', y\rangle \Longleftrightarrow \exists z \in e'_y \cap X' \textit{ tale che } \langle \xi, x\rangle \equiv \langle \xi'_z, z\rangle.$$

Questo significa che se una delle indeterminate di e'_y, detta z, ha la proprietà $\langle \xi, x\rangle \equiv \langle \xi'_z, z\rangle$, allora $\langle \xi, x\rangle$ è in relazione E con $\langle \xi', y\rangle$. Non è necessario che i due sistemi puntati $\langle \xi, x\rangle$ e $\langle \xi', y\rangle$ abbiano gli stessi atomi per essere messi in relazione mediante E, ma se sono in relazione ξ_x e ξ'_z avranno gli stessi insiemi di atomi.
L'idea che sta sotto questa definizione è la seguente. Supponiamo di avere due sistemi $\langle \xi, x\rangle$ e $\langle \xi', y\rangle$ di M in relazione tra loro mediante E. Siano s e s' le soluzioni di ξ e ξ' rispettivamente. Allora gli insiemi s_x e s'_x sono uguali, poiché $\equiv$ è una bisimulazione. Ma dato che $s'_z \in s'_y$, si ha $s_x = s'_z \in s_y$. La chiave del nostro ragionamento sta nel fatto che i sistemi puntati appartengono ad M, ma determinano insiemi in M_{afa}. In questo modo la relazione di appartenenza in M_{afa} può essere definita in termini di sistemi di M, dove interviene E. Dunque, definiamo la relazione di appartenenza tra insiemi di M_{afa}:

$$[\langle \xi, x\rangle] \in [\langle \xi', y\rangle] \text{ in } M_{afa} \Longleftrightarrow \langle \xi, x\rangle E \langle \xi', y\rangle \text{ in } M. \tag{4.1}$$

Ora vogliamo estendere $\equiv$ e E, in modo da mettere in relazione gli atomi con i sistemi puntati.

Definizione 4.3. Siano $x \in \boldsymbol{U}$, $p \in \boldsymbol{PS}$, si definisce $x \equiv p \Longleftrightarrow x = p$. Se p è un atomo di M, si definisce $pE\langle \xi, x\rangle \Longleftrightarrow p \in c_x$. Mentre nel modello M_{afa} che stiamo costruendo, si ha

$$p \in [\langle \xi, x\rangle] \, in \; M_{afa} \Longleftrightarrow p \in e_x. \tag{4.2}$$

A questo punto ci resta da verificare la buona definizione della relazione di appartenenza in M_{afa}; nel seguente lemma (punti 3. e 4.) è mostrato proprio che tale definizione è indipendente dalla scelta dei rappresentanti delle classi di equivalenza.

Lemma 4.4. *[4, lemma 9.1] Su* $\boldsymbol{PS}$ *valgono le seguenti proprietà relative alle due relazioni* $\equiv$ *e* E*:*

1. $\equiv$ *è un'equivalenza;*

2. $y \in e_x \cap X \Longrightarrow \langle \xi_y, y\rangle E \langle \xi, x\rangle$;

3. $\mathsf{e}_1 \equiv \mathsf{e}_2$, $f_1 \equiv f_2$ *e* $\mathsf{e}_1 E f_1 \Longrightarrow \mathsf{e}_2 E f_2$;

4. $\mathsf{e} \equiv f$ *e* $pE\mathsf{e} \Longrightarrow pEf$;

5. $\mathsf{e} \equiv f \Longleftrightarrow$ *valgono le seguenti condizioni:*

   (a) $\forall \mathsf{e}' E \mathsf{e} \; \exists \; f' E f$ *tale che* $\mathsf{e}' \equiv f'$;

   (b) $\forall f' E f \; \exists \; \mathsf{e}' E \mathsf{e}$ *tale che* $\mathsf{e}' \equiv f'$;

   (c) $\forall p$ *atomo,* $pE\mathsf{e} \Longleftrightarrow pEf$.

Dimostrazione.

1. Per dimostrare che $\equiv$ è un'equivalenza, iniziamo provando la proprietà riflessiva. Sia $\langle\xi, x\rangle$ un sistema puntato; la relazione $E = \{\langle y, y\rangle | y \in X_x\}$ è una A-bisimulazione tra ξ_x e se stesso, quindi $\langle\xi, x\rangle \equiv \langle\xi, x\rangle$.
   Per vedere la simmetria, supponiamo che $\langle\xi, x\rangle \equiv \langle\xi', x'\rangle$. Per definizione, ciò significa che gli insiemi di atomi A e A' sono uguali e che esiste una A-bisimulazione E tra ξ_x e $\xi'_{x'}$ tale che xEx'. Consideriamo la relazione inversa di E: $E^{-1} = \{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in E\}$, essa è una A-bisimulazione tra $\xi'_{x'}$ e ξ_x; dunque $\langle\xi', x'\rangle \equiv \langle\xi, x\rangle$.
   Mostriamo, infine, la proprietà transitiva di tale relazione. Supponiamo $\langle\xi, x\rangle \equiv \langle\xi', x'\rangle$ e $\langle\xi', x'\rangle \equiv \langle\xi'', x''\rangle$. Da $\langle\xi, x\rangle \equiv \langle\xi', x'\rangle$ segue che $A = A'$ e che esiste una A-bisimulazione S tra ξ_x e $\xi'_{x'}$. Da $\langle\xi', x'\rangle \equiv \langle\xi'', x''\rangle$ segue che $A' = A''$ e che esiste una A-bisimulazione T tra $\xi'_{x'}$ e $\xi''_{x''}$. Dunque $A = A' = A''$ e consideriamo la relazione

   $$E = \{\langle u, v\rangle \in X_x \times X''_{x''} | \exists y \in X' \textit{ tale che } \langle u, y\rangle \in S \textit{ e } \langle y, v\rangle \in T\}.$$

   Essa è una A-bisimulazione tra ξ_x e $\xi''_{x''}$; segue quindi $\langle\xi, x\rangle \equiv \langle\xi'', x''\rangle$.

2. Per ipotesi si ha $y \in e_x \cap X$ e, banalmente per 1., $\langle\xi_y, y\rangle \equiv \langle\xi_y, y\rangle$, quindi per definizione segue $\langle\xi_y, y\rangle E \langle\xi, x\rangle$.

3. Poniamo

   $$\mathtt{e}_1 = \langle\xi_1, x_1\rangle;\ \mathtt{f}_1 = \langle\xi'_1, x'_1\rangle;$$

   $$\mathtt{e}_2 = \langle\xi_2, x_2\rangle;\ \mathtt{f}_2 = \langle\xi'_2, x'_2\rangle.$$

   Per ipotesi abbiamo che $\mathtt{e}_1 E \mathtt{f}_1$, cioè $\langle\xi_1, x_1\rangle E \langle\xi'_1, x'_1\rangle$, vale a dire che esiste $z \in (\mathtt{e}'_1)_{x'_1} \cap X'_1$ tale che $\langle\xi_1, x_1\rangle \equiv \langle(\xi'_1)_z, z\rangle$. Inoltre $\mathtt{e}_1 \equiv \mathtt{e}_2$, cioè vale $\langle\xi_1, x_1\rangle \equiv \langle\xi_2, x_2\rangle$, quindi per simmetria e transitività di $\equiv$, si ha

$$\langle \xi_2, x_2 \rangle \equiv \langle (\xi'_1)_z \,, z \rangle.$$

Sempre per ipotesi si ha $\mathtt{f}_1 \equiv \mathtt{f}_2$, cioè $\langle \xi'_1, x'_1 \rangle \equiv \langle \xi'_2, x'_2 \rangle$, da cui segue che $\langle (\xi'_1)_z \,, z \rangle \equiv \langle (\xi'_2)_z \,, z \rangle$. Ancora per la transitività di $\equiv$, si può concludere che $\langle \xi_2, x_2 \rangle \equiv \langle (\xi'_2)_z \,, z \rangle$, vale a dire $\mathtt{e}_2 E \mathtt{f}_2$.

4. Poniamo $\mathtt{e}= \langle \xi, x \rangle$ e $\mathtt{f}= \langle \xi', x' \rangle$. Per ipotesi si ha $pE\mathtt{e}$, quindi $p \in \mathtt{e}_x$. Inoltre, sempre per ipotesi, $\mathtt{e}\equiv\mathtt{f}$, quindi per definizione $A = A'$ ed esiste una A-bisimulazione R tra ξ_x e $\xi'_{x'}$ tale che xRx'. Per definizione di A-bisimulazione si ha che $\mathtt{e}_x \cap A = \mathtt{e}'_{x'} \cap A'$ e, poiché $p \in \mathtt{e}_x$, allora vale anche $p \in \mathtt{e}'_{x'}$, cioè $pE\mathtt{f}$.

5. Dimostriamo prima "$\Longrightarrow$".
Poniamo $\mathtt{e}= \langle \xi, x \rangle$, $\mathtt{f}= \langle \xi', y \rangle$; dalle ipotesi si ha $\langle \xi, x \rangle \equiv \langle \xi', y \rangle$. Supponiamo $\langle \vartheta, u \rangle \equiv \langle \xi, x \rangle$, vale a dire che $\exists z \in \mathtt{e}_x \cap X$ tale che $\langle \vartheta, u \rangle \equiv \langle \xi_z, z \rangle$. Ma poiché $\langle \xi, x \rangle \equiv \langle \xi', y \rangle$, allora $\exists w \in \mathtt{e}'_y \cap X'$ tale che $\langle \xi_z, z \rangle = \langle \xi'_w, w \rangle$. Per la proprietà transitiva di $\equiv$, $\langle \vartheta, u \rangle \equiv \left(\langle \xi_z, z \rangle \equiv \right) \langle \xi'_w, w \rangle$.
Utilizzando il punto 2. del lemma, a questo punto si ha $\langle \xi'_w, w \rangle E \langle \xi', y \rangle$. Dunque $\langle \xi'_w, w \rangle$ è il nostro $\mathtt{f}'$ cercato. Abbiamo quindi dimostrato (a); (b) ha una dimostrazione analoga, mentre (c) è immediato (dal punto 4.).
Passiamo ora alla dimostrazione inversa "$\Longleftarrow$".
Assumiamo come ipotesi (a), (b), (c). Consideriamo la relazione E^* su $X \times X'$ tale che $uE^*w \Longleftrightarrow \langle \xi_u, u \rangle \equiv \langle \xi'_w, w \rangle$. Utilizzando (a), (b), (c) e il punto 2. vediamo che E^* è una bisimulazione tra ξ e ξ' e che xE^*y.

□

Come abbiamo detto, M_{afa} è l'insieme delle classi di equivalenza dei sistemi puntati di M e gli atomi di M_{afa} sono quelli di M; la relazione di appartenenza di M_{afa} è definita tramite 4.1 e 4.2.

4.2 Sistemi di bisimulazione

Dato un modello fortemente estensionale $M \models ZFC^-$ e definita una struttura M_{afa} basata su M, abbiamo bisogno di una costruzione generale che prenda un insieme di sistemi puntati ed un insieme di atomi e produca un altro sistema puntato [4, cap. 9.2].

Proposizione 4.5. *Sia $S \subseteq \boldsymbol{PS}$. $\exists\, S^+$ sistema puntato tale che $\forall \mathsf{p} \in \boldsymbol{PS}$, $\mathsf{p} R S^+ \iff \exists\ \mathsf{q} \in S$ tale che $\mathsf{p} \equiv \mathsf{q}$. Inoltre se e è un qualsiasi sistema puntato con questa proprietà, allora $\mathsf{e} \equiv S^+$.*

Dimostrazione. Sia $S_0 = S \setminus \boldsymbol{U}$. Gli insiemi di indeterminate dei sistemi di S_0 sono a due a due disgiunti per l'assioma di abbondanza (*vedi 1.29*). Richiediamo che il sistema puntato S^+ abbia come insiemi di indeterminate le unioni degli insiemi di indeterminate degli elementi di S con l'aggiunta di una nuova indeterminata, per esempio z. Chiamiamo X questo insieme. Gli atomi di S^+ sono le unioni degli atomi dei sistemi di S_0, insieme a tutti gli atomi di $S \cap \boldsymbol{U}$. Le equazioni di S^+ sono le unioni delle equazioni degli $\xi \in S_0$ più una:

$$z = \{x_\xi | \xi \in S_0\} \cup (S \cap \boldsymbol{U}),$$

dove x_ξ è l'indeterminata distinta del sistema puntato ξ. L'unicità di S^+ segue dal punto 5) del lemma 4.4. □

Vediamo un esempio [4, ex. 9.2]:

Esempio 4.6. Consideriamo il sistema piatto $\xi = \langle \{x, y\}, \{a, b\}, e \rangle$, dove e è data da:

$$\begin{cases} x = \{a, y\} \\ y = \{b, x\} \end{cases}$$

Scriviamo e_x e e_y per i sistemi puntati $\langle \xi, x \rangle$ e $\langle \xi, y \rangle$ rispettivamente. Mostriamo le bisimulazioni che forniscono le seguenti equivalenze:

$$\mathsf{e}_x = \{a, \mathsf{e}_y\}^+$$

$$\mathsf{e}_y = \{b, \mathsf{e}_x\}^+$$

Scriviamo $\{a, \mathsf{e}_y\}^+$ come il sistema puntato $\langle\langle\{x, y, z\}, \{a, b\}, e'\rangle, z\rangle$, dove $\mathsf{e}'_x = \{a, y\}$, $\mathsf{e}'_y = \{b, x\}$ e $\mathsf{e}'_z = \{a, y\}$. La bisimulazione che stavamo cercando è:

$$\{\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle x, z\rangle\}$$

Scriviamo poi $\{b, \mathsf{e}_x\}^+$ come il sistema puntato $\langle\langle\{x, y, z\}, \{a, b\}, e''\rangle, z\rangle$, dove $\mathsf{e}''_x = \{a, y\}$, $\mathsf{e}''_y = \{b, x\}$ e $\mathsf{e}''_z = \{b, x\}$. La bisimulazione che stavamo cercando è:

$$\{\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle y, z\rangle\}$$

Si sono così dimostrate le due uguaglianze.

Soffermiamoci sul precedente esempio. Invece di parlare di un sistema piatto e prendere *certe* equazioni di bisimulazione, vogliamo prendere un *sistema di equazioni di bisimulazione* e risolverlo. Per questo iniziamo con la seguente definizione:

Definizione 4.7.

1. Un sistema piatto di bisimulazione è una terna $\xi = \langle X, A, e\rangle$, dove $X \subseteq \boldsymbol{U}$ è un insieme, $A \subseteq \boldsymbol{U}$ è un insieme disgiunto da X, e e è una funzione tale che $e : X \longrightarrow P(X \cup A)$.

2. X è l'insieme delle indeterminate del sistema, mentre A è l'insieme degli atomi. Inoltre $\forall v \in X$ si pone:

$$b_v = e_v \cap X;$$

$$c_v = e_v \cap A.$$

3. Una soluzione di bisimulazione per il sistema è una funzione s di dominio X che dà per ogni $x \in X$ un sistema puntato e soddisfa ogni equazione nel senso della bisimulazione, cioé:

$$s_x \equiv (\{s_y | y \in b_x\} \cup c_x)^+.$$

La teoria degli insiemi senza l'assioma di Antifondazione non riesce a risolvere un sistema piatto di equazioni ξ (come quello definito sopra); tuttavia ξ è anche un sistema piatto di bisimulazione e quindi ha senso domandarsi se esso abbia una soluzione unica nel senso della precedente definizione (punto 4). Al riguardo esponiamo e dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 4.8. *[4, theorem 9.3] Sia $\xi = \langle X, A, e \rangle$ un sistema piatto di bisimulazione in ZFC^-. Allora esiste una e una sola soluzione di bisimulazione s. Questo significa che se t è una soluzione di bisimulazione per ξ, allora $\forall x \in X$ si ha $t_x \equiv s_x$.*

Dimostrazione. La soluzione di bisimulazione è data da $s_x = \xi_x$, quindi per l'esistenza basta mostrare che $\forall x \in X \ \xi_x = (\{\xi_y | y \in b_x\} \cup c_x)^+$, che altro non è che la generalizzazione dell'esempio 4.6.
La dimostrazione per l'unicità invece è più complessa. Mostriamo l'idea che sta alla base di questa dimostrazione con un esempio. Supponiamo di avere il seguente sistema di bisimulazione ξ:

$$\begin{cases} x = \{p, y, z\} \\ y = \{q, x\} \\ z = \emptyset \end{cases} \tag{4.3}$$

Una soluzione di bisimulazione è data dai tre sistemi puntati ϑ, τ, μ tali che:

$$\begin{cases} \vartheta = \{p, \tau, \mu\}^+ \\ \tau = \{q, \vartheta\}^+ \\ \mu = \{\emptyset\}^+ \end{cases}$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \vartheta =<< X, A, e >, x' > \\ \tau =<< Y, B, f >, y' > \\ \mu =<< Z, C, g >, z' > \end{cases}$$

A questo punto verifichiamo che $A = B = \{p, q\}$ e $C = \emptyset$. Possiamo assumere che X, Y e Z siano a due a due disgiunti, poiché essi corrispondono alle variabili utilizzate in ξ. Quindi avendo variabili disgiunte, possiamo unire tutti i sistemi puntati in un unico sistema più grande $\mathtt{s}$. Dunque:

$$\mathtt{s}_{x'} = \vartheta,\ \mathtt{s}_{y'} = \tau,\ \mathtt{s}_{z'} = \mu.$$

Consideriamo la seguente relazione T:

$$T = \{\langle u, v\rangle \in (X \cup Y \cup Z) \times \{x, y, z\}\, |\mathtt{s}_u \equiv \mathtt{s}_{v'}\}.$$

Quindi $\langle u, x\rangle \in T$ significa che $\mathtt{s}_u \equiv \mathtt{s}_{x'}$ e notiamo che T contiene: $\langle x', x\rangle$ (dato che $\mathtt{s}_{x'} \equiv \mathtt{s}_{x'}$), $\langle y', y\rangle$ e $\langle z', z\rangle$. Quindi T, così definita, mette in relazione le variabili contenute in $X \cup Y \cup Z$ con l'insieme $\{x, y, z\}$ degli atomi del sistema originale ξ 4.3. Sia ora T_x una relazione definita come segue:

$$T_x = T \cap (X \times \{x, y, z\}).$$

Analogamente definiamo:

$$T_y = T \cap (Y \times \{x, y, z\});$$

$$T_z = T \cap (Z \times \{x, y, z\}).$$

Dimostreremo che T_x è una bisimulazione tra $\mathtt{s}_x$ e ξ_x. Analogamente si dimostra per T_y e T_z. Prendiamo $\langle u, x\rangle$: sappiamo che esso appartiene a T_x, allora $\mathtt{s}_u \equiv \mathtt{s}_{x'}$; ma $\mathtt{s}_{x'} = \{p, \mathtt{s}_{y'}, \mathtt{s}_{z'}\}^+$, dunque $e_u \cap \boldsymbol{U} = \{p\}$ e ogni $v \in e_u$, che non è un atomo, è bisimilare a $\mathtt{s}_{y'}$ oppure a $\mathtt{s}_{z'}$. Si deduce quindi che ogni $v \in e_u$, che non è un atomo o è tale che $\langle v, y\rangle$ o $\langle v, z\rangle$, appartiene a T_x. Il viceversa è banale. Resta da verificare la condizione sugli atomi. Si assume che l'insieme degli atomi di $\mathtt{s}_{x'}$ è lo stesso del sistema ξ_x, cioè $\{p, q\}$, quindi T_x mantiene gli stessi atomi. Vale lo stesso anche per le altre relazioni T_y e T_z. Questo significa che se $\langle u, v\rangle \in T$ gli atomi di $\mathtt{s}_u$ sono gli stessi del sistema ξ_v.
T_x è una bisimulazione e ogni elemento di X è in relazione con qualche elemento di $\{x, y, z\}$. Questo è una semplice conseguenza del fatto che nel nostro sistema puntato ogni variabile è accessibile. Segue che T è una bisimulazione tra $\mathtt{s}$ e ξ e si conclude che $\mathtt{s}$ è l'unica soluzione di bisimulazione del sistema. $\square$

Il teorema 4.8 è un grande passo verso la prova della consistenza di ZFA. L'importanza di questo risultato sta nel fatto che esso afferma la risolubilità di equazioni di bisimulazione con soluzioni "quasi uniche" all'interno della teoria degli insiemi **senza** l'assioma di Antifondazione. Il resto della costruzione del modello si fa passando al quoziente per ottenere soluzioni effettive e la loro unicità.

4.3 M_{afa} è un modello di ZFC^-

In questa sezione sono illustrate alcune dimostrazioni sul fatto che gli assiomi della teoria ZFC^- valgono in M_{afa} [4, cap. 9.3] (punto 5). Per far questo traduciamo ogni assioma φ in un asserto φ^{tr} sui sistemi puntati di M e proviamo la sua validità in ZFC^-.

La traduzione di un assioma φ viene fatta in questo modo:

- si riscrive φ utilizzando soltanto i simboli $\in$ e $=$;
- si sostituisce $\in$ con E, $=$ con $\equiv$;
- si sostituisce un quantificatore "per tutti gli insiemi x" con un quantificatore "per tutti i sistemi puntati $\mathtt{e}$"
- si sostituisce un quantificatore esistenziale su un insieme con un quantificatore esistenziale sui sistemi puntati.

Prendiamo per esempio l'assioma di estensione:

$$\forall a\ \forall b\ (a = b) \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in a \Longleftrightarrow x \in b).$$

Tradotto diventa:

$$\forall\ \mathtt{e}\ \forall\ \mathtt{f}\ (\mathtt{e}{\equiv}\mathtt{f}) \Longleftrightarrow \forall\ \mathtt{p}\ (\mathtt{p}E\mathtt{e}\Leftrightarrow \mathtt{p}E\mathtt{f}).$$

Abbiamo cambiato le variabili insieme con quelle dei sistemi puntati; nella traduzione variabili come $\mathtt{p}$ e $\mathtt{q}$ variano su $\boldsymbol{PS}$, possono essere quindi sia sistemi puntati sia atomi.
Perché questa procedura di traduzione è corretta?
M_{afa} è l'insieme delle classi di equivalenza di sistemi puntati (e atomi) e la verifica di un assioma in M_{afa} richiede di lavorare con tali classi. Dunque prima di tutto dobbiamo verificare che la validità di una formula nel linguaggio della teoria degli insiemi sia indipendente dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza. Non è difficile dimostrare, per induzione sulla formula, che per ogni formula:

$$M_{afa} \models \varphi([\mathtt{e}_1], ...[\mathtt{e}_n]) \Longleftrightarrow M \models \varphi^{tr}(\mathtt{e}_1, ..., \mathtt{e}_n).$$

Dunque, potremo riassumere con il seguente schema:

$$\varphi \text{ assioma in } ZFA \Longrightarrow \text{traduzione di } \varphi \text{ in } \varphi^{tr} \Longrightarrow \text{dimostrazione validità di } \varphi^{tr}$$
$$\text{in } ZFC^{-} \Longrightarrow M \text{ soddisfa } \varphi^{tr} \Longrightarrow M_{afa} \text{ soddisfa } \varphi.$$

Passiamo quindi a verificare le traduzioni degli assiomi:

1. ASSIOMA DI ESTENSIONE: Abbiamo già visto la traduzione; la sua validità è data dal fatto che, per il lemma 4.4 (riflessività di $\equiv$ e punto 5.), se $\mathtt{e}$ e $\mathtt{f}$ hanno gli stessi E-membri allora $\mathtt{e}\equiv\mathtt{f}$.

2. ASSIOMA DELLA COPPIA:

$$\forall x \ \forall y \ \exists a \ \forall t[t \in a \Longleftrightarrow (t = x \vee t = y)],$$

   Tradotto diventa:

$$\forall \ \mathtt{e} \ \forall \ \mathtt{f} \ \exists \ \mathtt{g} \ \forall \ \mathtt{h} \ [\mathtt{h}E\mathtt{g} \ (\mathtt{h}\equiv\mathtt{e} \ \vee \ \mathtt{h}\equiv\mathtt{f})].$$

   La sua validità segue dal teorema 4.8.

3. ASSIOMA DELL'UNIONE (1.7): Siano $\mathtt{e}= \langle\langle X, A, e\rangle x\rangle$ un sistema puntato, S l'insieme $\{y \in X | \exists z \in e_x \textit{ tale che } y \in e_z\}$ e $\mathtt{f}= \{\mathtt{e}_y | y \in S\}^{+}$. Allora: $(\mathtt{f}= \bigcup \mathtt{e})^{tr}$.

4. ASSIOMA DELLA POTENZA (1.9): Prima di procedere con la traduzione di questo assioma, diamo una definizione generale:

   Definizione 4.9. Un sistema puntato $\mathtt{e}$ è detto *E-sottoinsieme* di $\mathtt{f}$ se per ogni x E-elemento di $\mathtt{e}$, esiste y E-elemento di $\mathtt{f}$ tale che: $x \equiv y$. In altre parole $(\mathtt{e}\subseteq\mathtt{f})^{tr}$.

Sia $\xi = \langle X, A, e\rangle$ e sia $\mathtt{e}$ il sistema puntato $\mathtt{e}= \langle \xi, x\rangle$. Consideriamo gli E-sottoinsiemi di $\mathtt{e}$ così definiti: $\forall Y \subseteq X$, $\forall B \subseteq A$

$$\mathtt{e}_{Y,B} = (\{\mathtt{e}_y | y \in Y\} \cup B)^+.$$

E' molto importante notare che ogni E-sottoinsieme di $\mathtt{e}$ è della forma di $\mathtt{e}_{Y,B}$. Per le definizioni date e per la proposizione 4.5, possiamo considerare il sistema puntato

$$\mathtt{f}= \{\mathtt{e}_{Y,B} | Y \subseteq X, B \subseteq A\}^+.$$

Dunque vale la traduzione dell'assioma della potenza:

$$[\forall\ \mathtt{g}\ (\mathtt{g}\subseteq\mathtt{e}) \Longrightarrow \mathtt{g}\in\mathtt{f}]^{tr}.$$

5. : ASSIOMA DELL'INFINITO 1.11: Per tradurre e verificare questo assioma, abbiamo bisogno che la classe degli insiemi sia immersa nella classe dei sistemi puntati (punto 6). Allora siano a un insieme, ξ_a il sistema canonico di equazioni per a, $\bar{a}$ il sistema puntato $\bar{a} = \langle \xi_a, a\rangle$. Per ogni insieme $b \in a$ si ha $\bar{b}E\bar{a}$. Viceversa, se $\mathtt{f}E\bar{a}$ allora $\exists b \in a$ tale che $\mathtt{f}\equiv \bar{b}$.

   Torniamo all'assioma dell'infinito. Sia w un insieme induttivo:

   $$\emptyset \in w \wedge (\forall b)[b \in w \Longrightarrow \exists c \in w :\ c = b \cup \{b\}].$$

   Quindi $\bar{\emptyset}E\bar{w}$; dobbiamo provare che ogni sistema puntato $\mathtt{e}$ tale che $\mathtt{e}E\bar{w}$ ha un successore ($\mathtt{f}=\mathtt{e}\cup\{\mathtt{e}\}$).

   Allora, sia $\mathtt{e}$ un sistema puntato tale che $\mathtt{e}E\bar{w}$: $\exists n \in w$ tale che $\mathtt{e}\equiv \bar{n}$. Ora $\bar{n}$ ha la proprietà che per ogni sistema puntato $\mathtt{f}$ vale $\mathtt{f}E\overline{n+1}$ se e solo se $\mathtt{f}\equiv \bar{n}$ oppure $\mathtt{f}E\bar{n}$. Allora $(\overline{n+1} = \bar{n} \cup \{\bar{n}\})^{tr}$, quindi si ha $(\mathtt{f}=\mathtt{e}\cup\{\mathtt{e}\})^{tr}$.

   Dunque $\bar{w}$ soddisfa la traduzione dell'assioma dell'infinito:

   $$(\exists a : \emptyset \in a \vee \forall b[b \in a \Longrightarrow \exists c \in a : c = b \cup \{b\}])^{tr}.$$

4.4 Trasformazione e verifica di AFA

Prima di mostrare la traduzione e la validità dell'assioma di Antifondazione in M_{afa}, è necessario dare qualche definizione [4, cap. 9.4]:

Definizione 4.10. Siano $a, b \in \boldsymbol{PS}$ e sia $\{a,b\}^+$ il sistema puntato descritto dalla proposizione 4.5. Esso ha a e b come E-elementi. Ora definiamo un sistema puntato che agisce come la coppia ordinata $\langle a, b\rangle$:

$$\langle a,b\rangle^+ = \left\{\{a\}^+, \{a,b\}^+\right\}^+.$$

Estendiamo tale definizione alle triple:

$$\langle a,b,c\rangle^+ = \langle a, \langle b,c\rangle^+\rangle^+.$$

Definizione 4.11. Sia f la funzione $f : \boldsymbol{PS} \longrightarrow \boldsymbol{PS}$. Definiamo il sistema puntato f^+ in questo modo:

$$f^+ = \{\langle a, f(a)\rangle^+ | a \in dom(f)\}^+.$$

Si osserva che l'operatore $+$ ha significati differenti a seconda che si applichi a coppie, a triple o a funzioni.

Definizione 4.12. Sia $\xi = \langle X, A, e\rangle$ un sistema piatto in M. Definiamo il sistema puntato ξ^+ di M in questo modo:

$$\xi^+ = \langle X^+, A^+, \{\langle x, (e_x)^+\rangle^+ | x \in X\}\rangle^+.$$

Si osserva che l'operatore $+$ posto su X, A e ogni e_x è quello descritto dalla proposizione 4.5.

Ora presentiamo un lemma in cui si afferma che le proprietà delle coppie non ordinate, coppie ordinate, triple e domini valgono anche in M_{afa}.

Lemma 4.13. *Siano* $\mathtt{e}$, $\mathtt{f}$ *e* $\mathtt{g}$ *dei sistemi puntati, allora valgono le seguenti:*

1. $(\mathtt{g} = \{\mathtt{e},\mathtt{f}\})^{tr} \Longleftrightarrow \mathtt{g} \equiv \{\mathtt{e},\mathtt{f}\}^{+}$;
2. $(\mathtt{g} = \langle \mathtt{e},\mathtt{f}\rangle)^{tr} \Longleftrightarrow \mathtt{g} \equiv \langle \mathtt{e},\mathtt{f}\rangle^{+}$;
3. $(\mathtt{g} = \langle \mathtt{e}_1,\mathtt{e}_2,\mathtt{e}_3\rangle)^{tr} \Longleftrightarrow \mathtt{g} \equiv \langle \mathtt{e}_1,\mathtt{e}_2,\mathtt{e}_3\rangle^{+}$;
4. $(\mathtt{e} \subseteq \boldsymbol{U})^{tr} \Longleftrightarrow \exists A \subseteq \boldsymbol{U}$ *tale che* $\mathtt{e} \equiv A^{+}$.

Dimostrazione. In questa dimostrazione si omette di provare il verso $\Longleftarrow$ che deriva dall'applicazione delle definizioni date sopra.

1. Per ipotesi si ha $(\mathtt{g} = \{\mathtt{e},\mathtt{f}\})^{tr}$, vale a dire che $\mathtt{e}\in\mathtt{g}$, $\mathtt{f}\in\mathtt{g}$ e $\forall$ $\mathtt{h}\in\mathtt{g}$ si ha $\mathtt{h}=\mathtt{e}$ oppure $\mathtt{h}=\mathtt{f}$. Il che tradotto diventa $\mathtt{e}E\mathtt{g}$, $\mathtt{f}E\mathtt{g}$ e $\forall$ $\mathtt{h}E\mathtt{g}$ si ha $\mathtt{h}\equiv\mathtt{e}$ oppure $\mathtt{h}\equiv\mathtt{f}$. Utilizzando a questo punto il teorema 4.8, si conclude $\mathtt{g} \equiv \{\mathtt{e},\mathtt{f}\}^{+}$ (considerando il sistema di bisimulazione $x = \{\mathtt{e},\ \mathtt{f}\}$);

2. Per ipotesi si ha $(\mathtt{g} = \langle\mathtt{e},\mathtt{f}\rangle)^{tr}$, vale a dire che esistono $\mathtt{h}_1$ e $\mathtt{h}_2$ tali che

$$(\mathtt{h}_1 = \{\mathtt{e},\mathtt{f}\})^{tr},\ (\mathtt{h}_2 = \{\mathtt{f},\mathtt{f}\})^{tr} \text{ e } (\mathtt{g} = \{\mathtt{h}_1,\mathtt{h}_2\})^{tr}.$$

   Dal punto 1. abbiamo che

$$\mathtt{h}_1 \equiv \{\mathtt{e},\mathtt{f}\}^{+},\ \mathtt{h}_2 \equiv \{\mathtt{f},\mathtt{f}\}^{+} \text{ e } \mathtt{g} \equiv \{\mathtt{h}_1,\mathtt{h}_2\}^{+}.$$

   Unendo queste bisimulazioni si ottiene $\mathtt{g} \equiv \langle\mathtt{e},\mathtt{f}\rangle^{+}$;

3. La dimostrazione di questo punto è analoga a quella del punto 2.

4. Per ipotesi si ha $(\mathtt{e} \subseteq \boldsymbol{U})^{tr}$, vale a dire che per ogni $\mathtt{p} \in \boldsymbol{PS}$ se $\mathtt{p}E\mathtt{e}$ allora $\mathtt{p} \in \boldsymbol{U}$. Scriviamo $\mathtt{e}$ come $\langle X, A, e, x\rangle$ e verifichiamo che $e_x \cap X = \emptyset$.

Se $y \in e_x \cap X$ allora $\mathsf{e}_y E \mathsf{e}$, ma questo contraddice l'ipotesi $(\mathsf{e} \subseteq \boldsymbol{U})^{tr}$. Dunque $e_x \cap X = \emptyset$, il che implica $X = X_x = \{x\}$. Ora dalla definizione di $\boldsymbol{PS}$ si ha che A deve essere un insieme di atomi, quindi segue $\mathsf{e} \equiv A^+$.

$\square$

Nel seguente lemma, invece, si afferma che le proprietà relative alle funzioni valgono anche in M_{afa}.

Lemma 4.14. *Siano e, f, g e h dei sistemi puntati, allora valgono le seguenti:*

1. *("f è una funzione")^{tr} $\Longleftrightarrow \exists f : \boldsymbol{PS} \longrightarrow \boldsymbol{PS}$ funzione tale che:*
   - *(a) se $f(\mathsf{p}) \equiv f(\mathsf{q})$, allora $\mathsf{p} \equiv \mathsf{q}$;*
   - *(b) $f^+ \equiv \mathsf{f}$.*
2. *Sia $f : \boldsymbol{PS} \longrightarrow \boldsymbol{PS}$ una funzione tale che $f^+ \equiv \mathsf{f}$. Allora $(f(\mathsf{g}) = \mathsf{h})^{tr}$ se e solo se esistono $\mathsf{g}' \equiv \mathsf{g}$ e $\mathsf{h}' \equiv \mathsf{h}$ tali che $f(\mathsf{g}') = \mathsf{h}'$;*
3. *Sia $S \subseteq \boldsymbol{PS}$. Siano $f : S \longrightarrow \boldsymbol{PS}$ e $g : S \longrightarrow \boldsymbol{PS}$. Allora $f(p) = g(p)$ $\forall p \in S$ se e solo se $f^+ = g^+$;*
4. *("e è un sistema piatto, i cui "atomi" non sono insiemi[2] ")^{tr} $\Longleftrightarrow \exists \xi$ sistema di bisimulazione piatto tale che $\mathsf{e} \equiv \xi^+$;*
5. *("e è un sistema piatto ed s è una soluzione di e")^{tr} $\Longleftrightarrow \exists \xi$ sistema di bisimulazione piatto tale che $\mathsf{e} \equiv \xi^+$ ed una soluzione di bisimulazione s di ξ tale che $s^+ \equiv \mathsf{s}$.*

Dimostrazione. Anche in questo caso omettiamo la dimostrazione di "$\Longleftarrow$", poiché si ricava facilmente per definizione.

[2] vedi nota 2 del capitolo 3.

1. Sia $\texttt{f}= \langle\langle X, A, e\rangle x\rangle$. Dal lemma 4.13, $\forall y \in e_x$ ("$\texttt{f}_y$ è una coppia ordinata di punti")^{tr}. $\forall y \in c$ esiste una coppia di punti $\langle \texttt{p}_y, \texttt{q}_y\rangle$ tale che $\langle \texttt{p}_y, b_y\rangle^+ \equiv \texttt{f}_y$. Sia S un insieme contenente una coppia $\langle \texttt{p}_y, \texttt{q}_y\rangle$ $\forall y \in e_x$. Per l'assioma di scelta, si trova un sottoinsieme $f \subseteq S$ tale che:

   (a) $\forall$ $\langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle \in S$ esiste $\langle \texttt{p}', \texttt{q}'\rangle \in f$ tale che $\texttt{p} \equiv \texttt{p}'$.

   (b) Se $\langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle$, $\langle \texttt{p}', \texttt{q}'\rangle$ sono elementi distinti di f, allora $\texttt{p} \not\equiv \texttt{p}'$.

   La condizione 2., dimostrata qui di seguito, ci assicura che f sia una funzione e che valga (a). Verifichiamo (b). Basta mostrare che $\forall y \in e_y$ $\exists \langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle \in f$ tale che $\langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle^+ \equiv \texttt{f}_y$. Dalla condizione (a), $\exists \langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle \in f$ tale che $\texttt{p} \equiv \texttt{p}_y$. Allora $\exists z \in e_x$ tale che $\langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle^+ \equiv \texttt{f}_z$. Dunque

   $$(\text{"}\texttt{f} \text{ è una funzione, } \langle \texttt{p}_y, \texttt{q}_y\rangle^+,\ \texttt{p}_y \equiv \texttt{p} \text{ e } \langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle^+ \in \texttt{f}\text{"})^{tr}.$$

   Quindi $\texttt{q}_y \equiv \texttt{q}$. Allora si conclude $\langle \texttt{p}, \texttt{q}\rangle^+ \equiv \langle \texttt{p}_y, \texttt{q}_y\rangle^+ \equiv \texttt{f}_y$.

2. Per ipotesi si ha $(\langle \texttt{g}, \texttt{h}\rangle \in \texttt{f})^{tr}$ e $f^+ \equiv \texttt{f}$, allora esiste $\langle \texttt{g}', \texttt{h}'\rangle \in f$ tale che $\langle \texttt{g}, \texttt{h}\rangle \equiv \langle \texttt{g}', \texttt{h}'\rangle$. Dal lemma 4.13 segue che $\texttt{g} \equiv \texttt{g}'$ e $\texttt{h} \equiv \texttt{h}'$.

3. Sia $\texttt{e}Ef^+$, allora esiste $\texttt{p} \in S$ tale che $\texttt{e} \equiv \langle \texttt{p}, f(\texttt{p})\rangle^+$. Dalle ipotesi si ha $f(\texttt{p}) \equiv g(\texttt{p})$, dunque $\texttt{e} \equiv \langle \texttt{p}, g(\texttt{p})\rangle^+ E g^+$. Vale anche il viceversa, quindi possiamo concludere che f^+ e g^+ hanno gli stessi E-elementi. Segue $f^+ \equiv g^+$.

4. E' noto che $\exists$ $\texttt{e}_1$, $\texttt{e}_2$, $\texttt{e}_3$ tali che $\texttt{e} = \langle \texttt{e}_1, \texttt{e}_2, \texttt{e}_3\rangle^+$. Inoltre esistono $X \subseteq \boldsymbol{U}$, $A \subseteq \boldsymbol{U}$ tali che $\texttt{e}_1 \equiv X^+$ e $\texttt{e}_2 \equiv A^+$. Da 1. segue che esiste e tale che $e^+ \equiv \texttt{e}_3$. Dunque $\forall x \in X$ abbiamo $(\texttt{e}_3(x) \subseteq \texttt{e}_1 \cup \texttt{e}_2)^{tr}$. Allora $\forall x$, $\exists b_x \subseteq X \cup A$ tale che $\texttt{e}_3(x) \equiv (b_x)^+$. Sia e la funzione definita su X da $e_x = b_x$, quindi $\xi = \langle X, A, e\rangle$ è un sistema piatto di equazioni e allora:

   $$\{\langle x, (e_x)^+\rangle^+ | x \in X\} \equiv \texttt{e}_3.$$

Perciò

$$\xi = \langle X^+, A^+, e^+ \rangle \equiv \langle \mathtt{e}_1,\mathtt{e}_2,\mathtt{e}_3 \rangle^+ = \mathtt{e}.$$

5. Questa ultima parte è il risultato principale del lemma che porta alla formulazione del teorema successivo. In questa fase vediamo infatti come la soluzione di un sistema piatto sia correlata ad una soluzione di bisimulazione. Da 4. si trova un sistema piatto $\xi = \langle X, A, e \rangle$ tale che $\xi^+ \equiv \mathtt{e}$. Da 1. si trova una funzione s definita su X tale che $s^+ \equiv \mathtt{s}$. $\forall x \in X$ allora si ha:

$$(\mathtt{s}_x = \{\mathtt{s}_y | y \in b_x\} \cup c_x)^{tr}.$$

Ciò significa che per ogni $p \in \boldsymbol{PS}$ si ha $pE\mathtt{s}_x$ se e solo se $\exists y \in b_x$ tale che $\mathtt{s}_x \equiv b_x$ oppure $p \in c_x$. Dalla proposizione 4.5

$$\mathtt{s}_x \equiv (\{\mathtt{s}_y | y \in b_x\} \cup c_x)^+.$$

Da 2. si ha $\forall x \in X$ $\mathtt{s}_x \equiv s_x$. Allora $\forall x \in X$:

$$s_x \equiv (\{s_y | y \in b_x\} \cup c_x)^+.$$

E questo mostra che s è una soluzione di bisimulazione per ξ.

□

E' possibile dimostrare, attraverso i precedenti lemmi, che anche l'assioma di scelta vale in M_{afa} [4, ex. 9.5]:
ASSIOMA DI SCELTA) Supponiamo che valga ("$\mathtt{f}$ è una relazione")^{tr} e procediamo utilizzando la dimostrazione del punto 1. del lemma 4.14. Sia S un insieme contenente la coppia $\langle \mathtt{p}_y,\mathtt{q}_y \rangle$ $\forall y \in e_x$. Attraverso l'assioma di scelta, possiamo trovare una funzione $f \subseteq S$ con le proprietà (a) e (b) del lemma. Allora utilizzando

" $\Longleftarrow$ " del punto 1. si ha ("$\mathtt{e}$ è una funzione con lo stesso dominio di $\mathtt{f}$")^{tr}. Quindi vale AC^{tr}.

Per concludere dimostriamo un teorema, che enuncia la validità dell'assioma di Antifondazione in M_{afa} (punto 7).

Teorema 4.15. *[4, theorem 9.6] Per ogni sistema puntato* $\mathtt{e}$ *se ("*$\mathtt{e}$ *è un sistema piatto")*^{tr} *allora esiste* $\mathtt{s}$ *tale che ("*$\mathtt{s}$ *è una soluzione di* $\mathtt{e}$*")*^{tr} *e per ogni* $\mathtt{f}$ *se ("*$\mathtt{f}$ *è una soluzione di* $\mathtt{e}$*")*^{tr} *allora* $\mathtt{s}\equiv\mathtt{f}$.

Dimostrazione. Sappiamo che $(ZFC^{-})^{tr}$ vale in M_{afa}; per il teorema 3.12 dobbiamo considerare un sistema piatto di equazioni, i cui "atomi" non siano insiemi (*vedi sezione 3.4 di questa tesi*). Assumiamo che

("$\mathtt{e}$ è un sistema piatto, i cui "atomi" non sono insiemi")^{tr}

Dal punto 4. del lemma 4.14, sia ξ un sistema di bisimulazione piatto equivalente a $\mathtt{e}$; sia X l'insieme delle indeterminate di ξ. Dal teorema 4.8, sia s una soluzione di bisimulazione per ξ. Dal punto 5. del lemma 4.14 si ha ("s^{+} è una soluzione per ξ")^{tr}. Inoltre, se ("$\mathtt{f}$ è una soluzione")^{tr}, allora esiste t, soluzione di bisimulazione per ξ, tale che $t^{+}\equiv\mathtt{f}$. Ma allora, per l'unicità data dal teorema 4.8, $\forall x\in X$ si ha $t_x\equiv s_x$. Dal punto 3. del lemma 4.14 segue $t^{+}\equiv s^{+}$, perciò $\mathtt{f}\equiv t^{+}$ come volevamo. □

Questo teorema, attraverso l'assioma di Abbondanza forte, prova la validità del Lemma di Soluzione in M_{afa} [4, cap. 6.3].

Capitolo 5

Versioni alternative di AFA

Proporremo in questo capitolo delle formulazioni alternative dell'assioma di Antifondazione di Aczel. Abbiamo già esaminato il Lemma di Soluzione, proposto da Barwise e Moss, e la versione etichettata dell'assioma ($LAFA$), vediamo allora gli assiomi di Antifondazione di Finsler[1], di Scott[2] e l'assioma debole di Boffa[3] [1, cap. 4-5].

5.1 Bisimulazioni regolari

Prima di presentare queste varianti dell'assioma di Antifondazione, introduciamo un concetto che utilizzeremo per mostrare l'equivalenza fra le variazioni di AFA: *la bisimulazione regolare*.

Definizione 5.1. Il termine *sistema*, che utilizzeremo in questo capitolo, indica una classe di nodi e una classe di archi, intesi come coppie ordinate di nodi. Inoltre si richiede che in un sistema M, per ogni nodo a, la classe dei figli di a sia l'insieme:

[1] Paul Finsler 1894-1970, astronomo e matematico tedesco.

[2] Dana Scott 1932-., matematico, filosofo e informatico americano.

[3] Maurice Boffa 1939-2001, matematico belga.

$$a_M = \{b \in M | a \longrightarrow b\}.$$

Si nota che un grafo altro non è che un *sistema piccolo*, mentre un *sistema grande* è dato dall'universo V dove $a \longrightarrow b\ \forall b \in a$. Dato il sistema M, per ogni $a \in M$ associamo un apg (*vedi capitolo 2*), che chiameremo Ma, costruito nel modo seguente [1, cap. 1 - pag. 13]:

I nodi e gli archi di Ma sono i nodi e gli archi di M che si trovano sul percorso che inizia da a, il quale diventa il punto di Ma.

Definizione 5.2. Si definisce *mappa di sistema*[4] dal sistema M al sistema M' una funzione di mappatura $\pi : M \longrightarrow M'$ tale che per $a \in M$ si ha:

$$(\pi a)_{M'} = \{\pi b | b \in a_M\}.$$

Se π è biettiva allora è detta *isomorfismo di sistema*.
Inoltre si dice M-decorazione del grafo G una mappa di sistema $G \longrightarrow M$.

Si osserva che se G è un grafo, allora la mappa di sistema $G \longrightarrow V$, ovvero la V-decorazione di G, è semplicemente la decorazione del grafo.
Diamo adesso tre definizioni riguardanti i sistemi e mostriamo tre importanti risultati:

Definizione 5.3. Un sistema M si dice *estensionale* se $\forall a, b \in M$ si ha:

$$a_M = b_M \Longrightarrow a = b.$$

M si dice *fortemente estensionale* se $\forall a, b \in M$ si ha:

$$a \equiv_M b \Longrightarrow a = b,$$

dove $a \equiv_M b$ [1, pag. 20] è l'unica bisimulazione massima che esiste su ogni sistema M (*vedi anche il teorema 3.23*).

[4] Con *mappa* si intende una funzione che ha come dominio un grafo.

Definizione 5.4. Un sistema M si dice *completo* se ogni grafo ha un'unica M-decorazione.

Definizione 5.5. Un sistema M si dice *pieno* se per ogni x sottoinsieme di M esiste un unico $a \in M$ tale che $x = a_M$.

Si ricorda che ogni apg ha la forma (G, a) oppure (come utilizzeremo in questo capitolo) Ga, dove G è un grafo e a è un nodo di G e la classe degli apg forma un sistema V_0 con archi (Ga, Gb) quando $a \longrightarrow b$ nel grafo G. Indichiamo con V_c il grafo avente gli elementi dell'insieme c come nodi e come archi le coppie ordinate $x \longrightarrow y$ $\forall x \in y$ e $x, y \in c$.

Proposizione 5.6. *$\forall M$ sistema $\exists!$ mappa di sistema $M \longrightarrow V_c$.*

Dimostrazione. Se $a \in M$, allora $Ma \in V_0$. Inoltre la mappa $M \longrightarrow V_0$ che assegna Ma ad $a \in M$ è chiaramente una mappa di sistema. Componendo quest'ultima con la mappa $\pi_c : V_0 \longrightarrow V_c$, otteniamo una mappa di sistema $M \longrightarrow V_c$. Abbiamo provato l'esistenza. E' possibile provare l'unicità di questa mappa nella dimostrazione del seguente teorema [1, theorem 2.19 - pag. 26]:

Teorema 5.7. *$\forall M$ sistema, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *M è fortemente estensionale;*
- *$\forall M_0$ sistema piccolo esiste al massimo una mappa di sistema $M_0 \longrightarrow M$;*
- *$\forall M'$ sistema, tutte le mappe di sistema $M \longrightarrow M'$ sono iniettive.*

□

Da questa proposizione, applicata ai sistemi piccoli M, segue che V_c è completo.

Teorema 5.8. *Dato un sistema M, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\forall M'$ sistema $\exists!$ mappa di sistema $M' \longrightarrow M$;*

2. *M è completo;*

3. *M è isomorfo tramite una mappa a V_c.*

Dimostrazione.

- 1. $\Longrightarrow$ 2. segue banalmente per definizione di *sistema completo*.

- 2. $\Longrightarrow$ 3. Per ipotesi si ha un sistema completo M. Sia $\pi : M \longrightarrow V_c$ l'unica mappa di sistema (l'esistenza segue per la proposizione 5.6); π è iniettiva poiché M è fortemente estensionale. Se $a \in V_c$, allora $V_c a$ è un apg avente un'unica M-decorazione, d. Quindi $\pi \circ d : V_c a \longrightarrow V_c$ è una mappa di sistema, in particolare, poiché V_c è fortemente estensionale, risulta essere la mappa identità su $V_c a$. Dunque $a = \pi(d(a))$. Segue che π è sia suriettiva che iniettiva e allora vale l'isomorfismo $M \cong V_c$.

- 3. $\Longrightarrow$ 1. segue immediatamente dalla proposizione 5.6.

□

Proposizione 5.9. *Ogni sistema completo è pieno.*

Dimostrazione. Sia M un sistema completo e sia $x \subseteq M$ un insieme. Consideriamo il grafo G_0 composto dai nodi e dagli archi di M, posti sul cammino che inizia dal nodo x. Sia G un grafo ottenuto aggiungendo a G_0 un nuovo nodo $*$ e nuovi archi $(*, y)$ $\forall y \in x$. Poiché M è completo per ipotesi, G ha un'unica M-decorazione, d. Restringendo d ai nodi di G_0, otteniamo una decorazione per G_0; ma la mappa identità è l'unica M-decorazione di G_0, quindi $dx = x$, $\forall x \in G_0$. Allora se $a = d*$, significa che $a \in M$ tale che:

$$a_M = \{dy | * \longrightarrow y \text{ in } G\} = x.$$

Ora supponiamo di avere $a' \in M$ tale che $a'_M = x$. Allora esiste una M-decorazione d' di G tale che $d'* = a'$ e $d'y = y$, $\forall y \in G_0$. Ma poiché d è l'unica M-decorazione di G, allora $d = d'$ e si ha:

$$a' = d'* = d* = a.$$

Dunque abbiamo dimostrato che esiste un'unica $a \in M$ tale che $a_M = x$, vale a dire che il sistema M è pieno. $\square$

Torniamo al concetto di bisimilarità:

Definizione 5.10. Una relazione di bisimulazione E su V_0 è una *bisimulazione regolare* se valgono le seguenti asserzioni:

1. E è una relazione di equivalenza su V_0;
2. $Ga \cong G'b \Longrightarrow (Ga)E(G'b)$;
3. $a_G = b_G \Longrightarrow (Ga)E(Gb)\ \forall a, b \in G$.

Osservazione 5.11. Si può dimostrare facilmente che $\equiv_{V_0}$ è una bisimulazione regolare tale che $\forall M$ sistema si ha: $Ma \equiv_{V_0} Mb \Longleftrightarrow a \equiv_M b$.

Assumiamo da adesso che $\sim$ sia una bisimulazione regolare e diamo due definizioni riguardanti i sistemi di equazioni [1, pag. 41-42] (*e anche* [4, cap. 7]).

Definizione 5.12. Un sistema M si dice *$\sim$-estensionale* se

$$Ma \sim Mb \Longrightarrow a = b.$$

Definizione 5.13. Un sistema M si dice *$\sim$-completo* se è $\sim$-estensionale e se ogni grafo $\sim$-estensionale ha una M-decorazione.

E' possibile dimostrare [1, pag. 41-42], attraverso la definizione 5.12, che se M è $\sim$-estensionale allora per ogni sistema M_0 esiste una mappa di sistema iniettiva $M_0 \longrightarrow M$.

Dunque la M-decorazione, a cui fa riferimento la definizione 5.13, è necessariamente unica ($\star$).

Il nostro scopo consiste nel costruire un sistema $\sim$-completo. Sia $V_0^\sim$ il sottosistema di V_0 consistente negli apg $\sim$-estensionali e comprendente tutti gli archi di V_0 tra essi. Sia $V_c^\sim$ un sistema $\sim$-estensionale tale che esista una mappa di sistema suriettiva $\pi^\sim : V_0^\sim \longrightarrow V_c^\sim$ che soddisfa:

$$Ga \sim G'a' \Longleftrightarrow \pi(Ga) = \pi(G'a')$$

$\forall Ga, G'a'$ apg $\sim$-estensionali.
L'esistenza di questo sistema $V_c^\sim$ e della mappa $\pi^\sim$ è garantita dal seguente lemma:

Lemma 5.14. *Per ogni sistema M esiste un sistema M' e una mappa di sistema suriettiva $\pi : M \longrightarrow M'$ tale che $\forall x, y \in M$ si ha:*

$$Mx \sim My \Longleftrightarrow \pi(x) = \pi(y).$$

Inoltre se Mx è $\sim$-estensionale per ogni $x \in M$, allora M' è $\sim$-estensionale.

Dimostrazione. Per provare la prima parte del lemma dobbiamo definire il concetto di *quoziente* di sistema.

Definizione 5.15. Sia $\pi : M \longrightarrow M'$ un quoziente di una classe M rispetto ad una relazione di equivalenza R su M, vale a dire:

$$aRb \Longleftrightarrow \pi a = \pi b.$$

- Se M è un sistema e R una bisimulazione su M. Allora π è la mappa di sistema che associa agli archi (a, b) di M archi di M', composti dalle coppie ordinate $(\pi a, \pi b)$. $\pi : M \longrightarrow M'$ (o talvolta semplicemente M') si definisce *quoziente* del sistema M rispetto alla bisimulazione R. Inoltre due quozienti, definiti in questo modo, saranno isomorfi tra loro.

- Se $\pi : M \longrightarrow M'$ è un quoziente di un sistema M rispetto alla relazione $\equiv_M$, allora π si dice *quoziente fortemente estensionale* di M.

A questo punto utilizziamo il risultato generale (la cui dimostrazione si trova su [1, lemma 2.17 - pag. 25]):

Ogni sistema ha un quoziente fortemente estensionale.

e otteniamo la tesi.
Per quanto riguarda la seconda parte, osserviamo che $\forall a \in M$ la restrizione di π a Ma è una mappa di sistema suriettiva $Ma \longrightarrow M'(\pi a)$. Supponiamo di avere $x, y \in Ma$ tali che $\pi x = \pi y$. Allora $Mx \sim My$ e, dall'estensionalità di Ma, segue $x = y$. Dunque la restrizione $\pi_{|Ma}$ è un isomorfismo di sistema $Ma \cong M'(\pi a)$, quindi $Ma \sim M'(\pi a)$.
Mostriamo adesso che M' è $\sim$-estensionale. Poiché $\pi : M \longrightarrow M'$ è suriettiva, basterà mostrare che:

$$M'(\pi a) \sim M'(\pi b) \Longrightarrow \pi a = \pi b.$$

Assumendo quindi che $M'(\pi a) \sim M'(\pi b)$ si ha:

$$Ma \sim M'(\pi a) \sim M'(\pi b) \sim Mb,$$

dato che $Ma \sim Mb$, segue $\pi a = \pi b$ come volevamo. Abbiamo la tesi per definizione $\sim$-estensionalità. $\square$

Si osserva che se prendiamo $M = V_0^{\sim}$ e se $x = Ga \in M$ si ha $Mx \cong Ga$ e, applicando il precedente lemma, $Mx \sim Ga$ con Mx $\sim$-estensionale come Ga.

Proposizione 5.16. *Per ogni sistema $\sim$-estensionale M esiste un'unica mappa di sistema iniettiva $M \longrightarrow V_c^{\sim}$.*

Dimostrazione. Poiché $V_c^{\sim}$ è $\sim$-estensionale, segue da $(*)$ l'unicità della mappa di sistema definita come sopra. Dimostriamo, allora, l'esistenza di tale mappa. Consideriamo $\pi_M : M \longrightarrow V_0^{\sim}$, la quale è una mappa di sistema, dove $\pi_M a = Ma$ per ogni $a \in M$. Componendo questa con $\pi^{\sim} : V_0^{\sim} \longrightarrow V_c^{\sim}$, otteniamo una mappa di sistema $\pi^{\sim} \circ \pi_M : M \longrightarrow V_c^{\sim}$. Quindi resta solo da mostrare l'iniettività della mappa: siano $x, y \in M$ tali che $\pi^{\sim}(Mx) = \pi^{\sim}(My)$, allora $Mx \sim My$ e, poiché M è $\sim$-estensionale, $x = y$. $\square$

Corollario 5.17. *$V_c^{\sim}$ è $\sim$-completo.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che $V_c^{\sim}$ è $\sim$-estensionale, allora non ci resta che applicare la precedente proposizione ai sistemi piccoli M. $\square$

Dati due sistemi M e M', $M \preceq M'$ se esiste una mappa di sistema iniettiva $M \longrightarrow M'$. Si osserva che $\preceq$ è sia riflessiva che transitiva.

Teorema 5.18. *[1, theorem 4.7] Sia M un sistema $\sim$-estensionale. Allora le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1. *M è $\sim$-completo;*
2. *$M_0 \preceq M$, $\forall M_0$ sistema $\sim$-estensionale;*
3. *$M \preceq M' \Longrightarrow M \cong M'$, $\forall M'$ sistema $\sim$-estensionale;*
4. *$M \cong V_c^{\sim}$.*

Dimostrazione.

- 1. $\Longrightarrow$ 2. Sia M un sistema $\sim$-completo e sia M_0 un sistema $\sim$-estensionale. Allora per $a \in M_0$, l'apg $M_0 a$ deve avere una M-decorazione iniettiva d_a unica per $(\star)$. Definiamo $d : M_0 \longrightarrow M$ in questo modo:

$$da = d_a a,\ \forall a \in M_0.$$

Allora:

$$(da)_M = \{dx | x \in a_{M_0}\}.$$

Quindi d è una mappa di sistema. Ci resta da verificare l'iniettività di d. Siano:

$$d_x : M_0 x \cong M(dx) \text{ e } d_y : M_0 y \cong M(dy).$$

Se $dx = dy$ allora si ha:

$$M_0 x \cong M(dx) = M(dy) \cong M_0 y.$$

e, poiché M_0 è un sistema $\sim$-estensionale, segue $x = y$. Dunque d è iniettiva.

- 2. $\Longrightarrow$ 3. Sia $M \preceq M'$, dove M' è $\sim$-estensionale. Dal punto 2., si ha che $M' \preceq M$. Allora esistono due mappe di sistema iniettive $M \longrightarrow M'$ e $M' \longrightarrow M$. Da $(\star)$ segue che le loro composizione devono essere la mappa identità rispettivamente su M e su M'. Quindi $M \cong M'$.

- 3. $\Longrightarrow$ 4. Usando la proposizione 5.16 si ha $M \preceq V_c^{\sim}$ e poiché $V_c^{\sim}$ è $\sim$-estensionale, applicando il punto 3., segue la tesi.

- 4. $\Longrightarrow$ 1. Questo risultato si trova applicando il corollario 5.17.

$\square$

Lemma 5.19. *Ogni sistema $\sim$-completo è pieno.*

Dimostrazione. Sia $x \subseteq M$ un insieme, dove M è un sistema $\sim$-completo. Come nella dimostrazione della proposizione 5.9, possiamo costruire un grafo G_0 avente i nodi e gli archi di M che si trovano sul cammino che comincia dal nodo x. A questo punto si può costruire un grafo G, ottenuto da G_0 aggiungendo un nuovo nodo $*$ e nuovi archi $(*, y)$ dove $y \in x$. Se G è $\sim$-estensionale, considerando l'unica M-decorazione di G, possiamo procedere come prima. Nel caso in cui G non sia $\sim$-estensionale, poiché G_0 lo è comunque, allora $G* \sim Ga$, $\exists a \in G_0$. Dal fatto che $\sim$ è una bisimulazione segue:

$$\forall y \in *_G,\ \exists a' \in a_G :\ Gy \sim Ga' \ \wedge\ \forall a' \in a_G,\ \exists y \in *_G :\ Gy \sim Ga'.$$

Ma $*_G = x$ e $a \in M$ con $a_G = a_M$, allora:

$$\forall y \in x,\ \exists a' \in a_M :\ My \sim Ma' \ \wedge\ \forall a' \in a_M,\ \exists y \in x :\ My \sim Ma'.$$

Quindi, dalla $\sim$-estensionalità di M, si ha $x = a_M$. L'unicità di a deriva dal fatto che M, essendo $\sim$-estensionale, è anche estensionale. $\square$

5.2 $AFA^{\sim}$

Dopo aver mostrato cosa si intende per *bisimulazione regolare*, utilizziamo tale concetto per variare l'assioma di Antifondazione AFA [1, cap.4 -pag. 45]. Data una formula $\phi(x, y)$, definita nel linguaggio della teoria degli insiemi, dove x e y sono variabili libere e non ci sono parametri, essa definisce la bisimulazione regolare $\sim$ su V: per ogni apg c e d

$$c \sim d \Longleftrightarrow V \models \phi(c, d).$$

Assumiamo che $\phi(x, y)$ sia fissata e ci riferiamo ad essa con la definizione di $\sim$. Usando la definizione di $\sim$, possiamo esprimere la $\sim$-completezza di V; chiamiamo questa proprietà $AFA^{\sim}$, la quale rappresenta una generalizzazione di AFA. Nel caso in cui la $\sim$ bisimulazione regolare sia $\equiv_V$ si ottiene che:

$$AFA^{\sim} \Longleftrightarrow AFA.$$

Possiamo dividere AFA e $AFA^{\sim}$ in due parti:

- AFA_1: Ogni grafo ha almeno una decorazione;
- AFA_2: Ogni grafo ha massimo una decorazione.
- $AFA_1^{\sim}$: Ogni grafo $\sim$-estensionale ha almeno una decorazione iniettiva;
- $AFA_2^{\sim}$: V è $\sim$-estensionale.

Ne segue che:

Proposizione 5.20.

1. $AFA_1^{\sim} \Longleftrightarrow$ *ogni apg $\sim$-estensionale è una rappresentazione esatta;*
2. $AFA_2^{\sim} \Longleftrightarrow$ *ogni rappresentazione esatta è $\sim$-estensionale.*

Dunque:

$AFA^{\sim}$ è equivalente alla proposizione: un apg è una rappresentazione esatta se e solo se è $\sim$-estensionale.

5.3 FAFA

In questa sezione viene presa in esame la variante di Finsler, $FAFA$, dell'assioma di Antifondazione [1, cap. 4 - pag. 46], [7, cap. 2.8 - pag 287]. Finsler presenta tre assiomi su un universo costruito da una collezione di oggetti, detti insiemi, e da una relazione binaria $\in$ tra di essi. Gli assiomi proposti da Finsler sono i seguenti:

1. $\in$ è decidibile [5];

2. Insiemi isomorfi sono uguali;

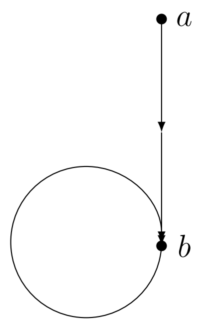
3. Non esiste un'estensione propria dell'universo che soddisfi 1. e 2.

Vogliamo trasformare questi assiomi nel linguaggio utilizzato fino ad ora, quello di Aczel. Se consideriamo l'universo di Finsler come un sistema "di Aczel", allora il primo assioma può essere trascurato. Per quanto riguarda il secondo assioma, invece, possiamo tradurre la nozione di isomorfismo di Finsler in questo modo: sia M un sistema, siano $a, b \in M$; a e b sono isomorfi se gli apg Ma e Mb, da essi determinati, sono isomorfi. Dunque il sistema M è un modello dell'assioma 2. $\Longleftrightarrow$ M è $\cong$-estensionale, cioè:

$$Ma \cong Mb \Longrightarrow a = b.$$

Ma questo è inadeguato! Infatti il secondo assioma di Finsler dovrebbe essere un rafforzamento dell'assioma di estensionalità, però un sistema $\cong$-estensionale (def. 5.12) non è necessariamente estensionale (def. 5.3). Per comprendere meglio questo concetto, mostriamo un semplice esempio:

Esempio 5.21. Consideriamo il seguente grafo:



Esso ha due nodi, a e b, e due archi, (a, b) e (b, b). Chiaramente $Ga \ncong Gb$, ma $a_G = \{b\} = b_G$. Allora G risulta essere $\cong$-estensionale, ma non estensionale!

[5] Una formula φ è decidibile se può essere provata la validità di φ o della sua negazione.

Una corretta formulazione della nozione di isomorfismo di Finsler si ha utilizzando la seguente costruzione: sia M un sistema e sia $a \in M$; sia $(Ma)^*$ l'apg costituito da nodi e archi di Ma, che si trovano sui cammini che iniziano da qualche figlio di a, e da un nuovo nodo $*$ ed un nuovo arco $(*, x)$ $\forall x$ figlio di a. Dunque $*$ è il punto di $(Ma)^*$. Si osserva che se a non si trova su nessun percorso che ha inizio da un suo figlio, allora $(Ma)^*$ è isomorfo a Ma attraverso l'isomorfismo dato dall'identità eccetto per il fatto che $*$ è mappato da a. Se invece a si trova su un tale cammino allora $(Ma)^*$ è costituito da nodi e archi di Ma insieme ai nuovi nodi e ai nuovi archi.
Definiamo allora un *isomorfismo nel senso di Finsler* se $(Ma)^* \cong (Mb)^*$. Inoltre notiamo che se $a_M = b_M$ allora $(Ma)^* = (Mb)^*$ e quindi $(Ma)^* \cong (Mb)^*$. Sia ora $\cong^*$ la relazione su V_0 definita come segue:

$$Ga \cong^* Gb \Longleftrightarrow (Ga)^* \cong (Gb)^*$$

Definizione 5.22. Si definisce un sistema M *sistema Finsler-estensionale* se è $\cong^*$-estensionale, vale a dire se:

$$Ma \cong^* Mb \Longrightarrow a = b.$$

Un sistema Finsler-estensionale è quindi un modello del secondo assioma di Finsler. Ci resta da tradurre il terzo assioma. Consideriamo un sistema Finsler-estensionale, esso è un modello dell'assioma 3. se ogni mappa di sistema iniettiva $M \longrightarrow M'$, dove M' è un sistema Finsler-estensionale, è un isomorfismo. Dal teorema 5.18 segue che un sistema M è un modello per gli assiomi di Finsler se e solo se M è Finsler-completo, cioè M è $\cong^*$-completo.
Unendo i nostri risultati possiamo formare $AFA^{\cong^*}$, che chiameremo assioma di Antifondazione di Finsler o $FAFA$. Inoltre è possibile riformulare $FAFA$ in questo modo:

Un apg è una rappresentazione esatta se e solo se è Finsler-estensionale.

5.4 SAFA

Nella costruzione di un modello di ZFC^- con insiemi non ben fondati, Scott (1960) utilizza alberi *non ridondanti* [1, cap. 4 - pag 49 e bibliografia relativa].

Definizione 5.23. Si definiscono *ridondanti* (*redundant*) gli alberi che hanno un automorfismo proprio, vale a dire un automorfismo che permuta qualche nodo; viceversa l'albero si dice *non ridondante* (*irredundant*).

Un'altra caratteristica degli alberi ridondanti, data da Scott, è la seguente:

Proposizione 5.24. *Un albero Tr è ridondante $\Longleftrightarrow \exists c$ nodo di Tr e $\exists a, b \in c_T$ con $a \neq b$ tali che $Ta \cong Tb$, vale a dire che un albero è ridondante solo nel caso in cui i due sotto-alberi, aventi come radici due nodi distinti, sono isomorfi.*

L'idea di Scott era quella di rappresentare la struttura di un insieme attraverso gli alberi non ridondanti. Si ricorda che una rappresentazione canonica ad albero di un insieme c è ottenuta espandendo ($unfolding$) la rappresentazione canonica V_c di c (*vedi cap. 2 - pag. 24 di questa tesi*). Costruiamo, quindi, il modello di Scott. Sia V_0^t un sottosistema di V costituito dagli alberi non ridondanti aventi tutti gli archi di V_0 tra i nodi considerati. Un sistema V_c^t e una mappa di sistema suriettiva $\pi : V_0^t \longrightarrow V_c^t$ sono costruiti in modo che:

$$\pi(Tr) = \pi(T'r') \Longleftrightarrow Tr \cong T'r'.$$

E' possibile mostrare che V_c^t è un modello di ZFC^-. Inoltre esso rappresenta un modello della seguente affermazione:

un albero è isomorfo ad una rappresentazione canonica ad albero se e solo se è non ridondante.

Questo risultato è detto assioma di Antifondazione di Scott o $SAFA$.
Adesso mostriamo che $SAFA$ e il suo modello V_c^t non sono altro che casi particolari

di $AFA^{\sim}$ e il suo modello $V_c^{\sim}$. Per far questo basterà considerare una particolare bisimulazione regolare. Per ogni apg Ga, sia $(Ga)^t$ costruito in questo modo: i nodi di $(Ga)^t$ sono i cammini finiti di Ga che iniziano da a. Consideriamo la relazione $\cong^t$ definita su V_0 in questo modo:

$$Ga \cong^t G'a' \Longleftrightarrow (Ga)^t \cong (G'a')^t.$$

Osservazione 5.25. E' possibile dimostrare che le definizioni di $\cong^t$ e $\cong^*$ sono valide per tutti i modelli pieni.

Mettendo insieme questi risultati, otteniamo $AFA^{\cong^t}$ e il suo modello $V_c^{\cong^t}$. Con i prossimi tre risultati si mostra che $AFA^{\cong^t}$ è equivalente a $SAFA$.

Lemma 5.26. *L'espansione di un apg $\cong^t$-estensionale è un albero non ridondante.*

Dimostrazione. Sia Gn un apg $\cong^t$-estensionale; sia $c \in (Gn)^t$ e siano $a, b \in c_G$ tali che $(Gn)^t a \cong (Gn)^t b$. Allora:

$$(Ga)^t = (Gn)^t a \cong (Gn)^t b = (Gb)^t.$$

Segue $(Ga)^t \cong (Gb)^t$ e quindi $a = b$ poiché G è $\cong^t$-estensionale. Dunque $(Gn)^t$ è un albero non ridondante. □

Lemma 5.27. *Sia Tr un albero non ridondante, allora esiste un apg $\cong^t$-estensionale Gn e una mappa di sistema suriettiva $\pi : Tr \longrightarrow Gn$ tale che $Tr \cong (Gn)^t$ e $\forall a, b \in Tr$ si ha:*

$$\pi a = \pi b \Longleftrightarrow Ta \cong Tb.$$

Dimostrazione. Sia Tr un albero non ridondante. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza tra i nodi di Tr definita come segue:

$$a \sim b \Longleftrightarrow Ta \cong Tb,$$

per ogni $a, b \in Tr$. Ora poiché $\sim$ è una bisimulazione di equivalenza, possiamo considerare il quoziente $\pi : Tr \longrightarrow Gn$ di Tr rispetto alla relazione $\sim$, vale a dire:

$$\pi a = \{b \in Tr | a \sim b\}, \exists a \in Tr.$$

e $G = \{\pi a | a \in Tr\}$, $n = \pi r$. Ci resta da dimostrare che $Tr \cong (Gn)^t$. A tal proposito, definiamo $\varphi : Tr \longrightarrow (Gn)^t$ tale che:

$$\varphi a = (\pi r, ..., \pi a), \exists a \in Tr$$

dove $r \longrightarrow ... \longrightarrow a$ è l'unico cammino dell'albero Tr che parte dalla radice r e termina nel nodo a. Si osserva facilmente che φ è una mappa di sistema suriettiva, dimostriamo invece l'iniettività. Siano $a, b \in Tr$ tali che $\varphi a = \varphi b = (n, ..., c)$. Allora esistono due cammini, $r \longrightarrow ... \longrightarrow a$ e $r \longrightarrow ... \longrightarrow b$, in Tr tali che
$\pi r = n$, ..., $\pi a = \pi b = c$. Supponiamo per assurdo che $a \neq b$, allora $\exists c'$ in $n \longrightarrow ... \longrightarrow c$, i cui nodi corrispondenti:

$$a' \text{ in } r \longrightarrow ... \longrightarrow a,$$

$$b' \text{ in } r \longrightarrow ... \longrightarrow b$$

sono distinti, nonostante $\pi a' = \pi b' = c'$. Dunque $Ta' \cong Tb'$ e i nodi a', b' sono figli del nodo comune che li precede nei rispettivi cammini $r \longrightarrow ... \longrightarrow a' \longrightarrow ... \longrightarrow a$ e $r \longrightarrow ... \longrightarrow b' \longrightarrow ... \longrightarrow b$. Quindi, poiché Tr è un albero non ridondante, $a' = b'$ e questo è assurdo per come avevamo scelto a' e b'. Dunque $a = b$ e vale l'iniettività di φ. Segue che φ è una mappa di sistema biettiva e quindi $Tr \cong (Gn)^t$. $\square$

Lemma 5.28. *Se Ga e $G'a'$ sono apg $\cong^t$-estensionali, allora si ha:*

$$Ga \cong^t G'a' \Longrightarrow Ga \cong G'a'.$$

Dimostrazione. Siano Ga e $G'a'$ due apg $\cong^t$-estensionali tali che $Ga \cong^t G'a'$. Dal lemma 5.26 si ha che $(Ga)^t$ e $(G'a')^t$ sono due alberi non ridondanti isomorfi. Sia

φ l'isomorfismo: $(Ga)^t \cong (G'a')^t$ e definiamo la mappa di sistema $\pi : Ga \longrightarrow G'a'$ come segue:
Se $b \in Ga$, sia σ un cammino da a a b in Ga. Allora $\sigma \in (Ga)^t$ e quindi $\varphi\sigma \in (G'a')^t$. Sia πb l'ultimo nodo c in $G'a'$ sul cammino $\varphi\sigma$. Facilmente si prova che π è un sistema di mappe, vediamo invece la buona definizione di πb: oltre a σ, sia anche $\bar{\sigma}$ un cammino da a a b in Ga e sia $\bar{c}$ l'ultimo nodo in $G'a'$ di $\varphi\bar{\sigma}$. Si osserva che i sottoalberi di $(Ga)^t$ determinati dai due cammini σ e $\bar{\sigma}$ sono entrambi isomorfi all'albero $(Gb)^t$ e quindi sono isomorfi tra loro. Da questo segue che i corrispondendi sottoalberi di $G'a'$ determinati da $\varphi\sigma$ e $\varphi\bar{\sigma}$ saranno isomorfi tra loro. Ma questi ultimi sono isomorfi rispettivamente a $(G'c)^t$ e a $(G'\bar{c})^t$, dunque $(G'c)^t \cong (G'\bar{c})^t$ e quindi $G'c \cong^t G'\bar{c}$. Dato che G' è $\cong^t$-estensionale segue $c = \bar{c}$, allora π è ben definito. Similmente si mostrano l'iniettività e la suriettività di π. $\square$

Possiamo suddividere $SAFA$ in due parti:

- $SAFA_1$: Ogni albero non ridondante è isomorfo ad una rappresentazione canonica ad albero;
- $SAFA_2$: Ogni rappresentazione canonica ad albero è non ridondante.

Ora si dimostra il seguente teorema di collegamento tra $SAFA$ e $AFA^{\cong^t}$:

Teorema 5.29.

1. $SAFA_2 \Longleftrightarrow AFA_2^{\cong^t}$;
2. $SAFA \Longrightarrow AFA_1^{\cong^t} \Longrightarrow SAFA_1$;
3. $SAFA \Longleftrightarrow AFA^{\cong^t}$.

Dimostrazione. Iniziamo provando le due implicazioni di 1.

1a. $SAFA_2 \Longrightarrow AFA_2^{\cong^t}$

Siano a e b due insiemi e sia $c = \{a, b\}$. Utilizzando $SAFA_2$ si ha che l'albero $(Vc)^t$ è non ridondante, quindi:

$$(Va)^t \cong (Vb)^t \Longrightarrow a = b.$$

Allora V è $\cong^t$-estensionale e abbiamo quindi provato $AFA_2^{\cong^t}$.

1b. $AFA_2^{\cong^t} \Longrightarrow SAFA_2$

Utilizzando $AFA_2^{\cong^t}$ si ha che l'apg Va è $\cong^t$-estensionale, dunque dal lemma 5.26 segue che l'albero $(Va)^t$ è non ridondante. Vale allora $SAFA_2$.

Vediamo adesso la dimostrazione di 2.:

2a. $SAFA \Longrightarrow AFA_1^{\cong^t}$

Sia Ga un apg $\cong^t$-estensionale. Allora, per il lemma 5.26, l'albero $(Ga)^t$ è non ridondante. Utilizzando $SAFA_1$ si ha che esiste un insieme c tale che $(Ga)^t \cong (Vc)^t$; da 1. e $SAFA_2$ abbiamo poi che Vc è $\cong^t$-estensionale; infine dal lemma 5.28 si ha $Ga \cong Vc$. Ga è quindi una rappresentazione esatta di c, segue $AFA_1^{\cong^t}$.

2b. $AFA_1^{\cong^t} \Longrightarrow SAFA_1$

Sia Tr un albero non ridondante e sia $\pi : Tr \longrightarrow Gn$ come descritto nel lemma 5.27, allora Gn è $\cong^t$-estensionale e $T \cong (Gn)^t$. Da $AFA_1^{\cong^t}$ si ha che esiste un insieme c tale che $Gn \cong Vc$, allora $Tr \cong (Ga)^t \cong (Vc)^t$. Dunque Tr è isomorfo alla rappresentazione canonica ad albero, quindi segue $SAFA_1$.

Infine 3. è conseguenza immediata di 1. e 2. □

In conclusione si può formulare $SAFA$ in questo modo:

Un apg è una rappresentazione esatta se e solo se è Scott-estensionale.

5.5 Relazioni tra le precedenti variazioni di AFA

Fino ad ora abbiamo considerato tre differenti tipi di bisimulazione regolare $\sim$ e abbiamo dato tre formulazioni differenti dell'assioma di Antifondazione $AFA^{\sim}$. Analizziamo quindi i legami tra le tre relazioni $\equiv_{V_0}$, $\cong^*$, $\cong^t$ e i tre rispettivi assiomi di Antifondazione AFA, $FAFA$, $SAFA$, dimostrando che essi sono a due a due incompatibili, benchè consistenti in ZFC^- [1, cap. 4 - pag. 52]. Anzitutto, dalle dimostrazioni precedenti segue che:

Proposizione 5.30. *Sia $\sim$ una bisimulazione regolare con una definizione valida per tutti i modelli. Allora:*

1. *Ogni sistema fortemente estensionale è $\sim$-estensionale (vedi def. 5.3 e def. 5.12);*

2. *Ogni sistema $\sim$-estensionale è Finsler-estensionale (vedi def. 5.12 e costruzione alla sezione 5.3);*

3. *Se con $FAFA_2$ si indica la proprietà che ogni rappresentazione esatta è un apg Finsler-estensionale, allora: $AFA_2 \Longrightarrow AFA_2^{\sim} \Longrightarrow FAFA_2$ (vedi def. 2.8, def. 5.22, suddivisione di AFA e $AFA^{\sim}$ alla sezione 5.2 e prop. 5.20);*

4. *Se con $FAFA_1$ si indica la proprietà che ogni apg Finsler-estensionale è isomorfo ad una rappresentazione esatta, allora si ha: $FAFA_1 \Longrightarrow AFA_1^{\sim} \Longrightarrow AFA_1$ (vedi def. 2.8 e suddivisione di AFA e $AFA^{\sim}$ alla sezione 5.2);*

5. *Se esiste un sistema $\sim$-estensionale, ma non fortemente estensionale, allora: $\neg(AFA_1^{\sim} \wedge AFA_2)$ (vedi def. 5.3, def. 5.12 e suddivisione di AFA e $AFA^{\sim}$ alla sezione 5.2);*

6. *Se esiste un sistema Finsler-estensionale, ma non $\sim$-estensionale, allora:* $\neg(FAFA_1 \wedge AFA_2^{\sim})$ *(vedi def. 5.3, def. 5.22 e prop. 5.20);*

7. *Se valgono 5. e 6., allora gli assiomi AFA, $FAFA$ e $AFA^{\sim}$ sono incompatibili a due a due.*

Per provare l'incompatibilità tra i tre assiomi di Antifondazione, vediamo il seguente teorema:

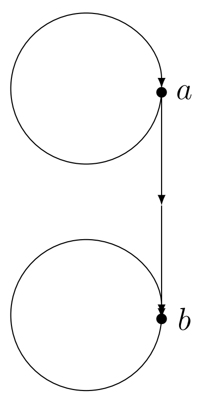
Teorema 5.31.

1. *Esiste un grafo $\cong^t$-estensionale che non è fortemente estensionale;*

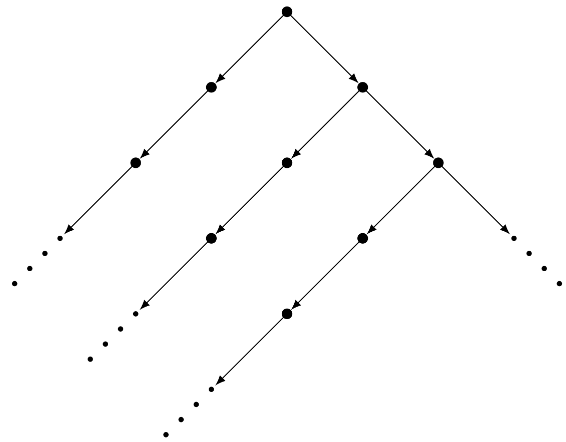
2. *Esiste un grafo Finsler-estensionale che non è $\cong^t$-estensionale.*

Dimostrazione.

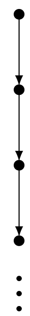
1. Consideriamo il grafo G:



dove a e b sono nodi distinti. Esso è $\cong^t$-estensionale poiché $(Ga)^t \ncong (Gb)^t$; infatti $(Ga)^t$ è fatto in questo modo:

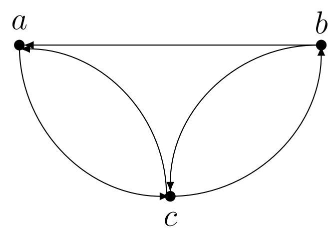


$(Gb)^t$ invece:

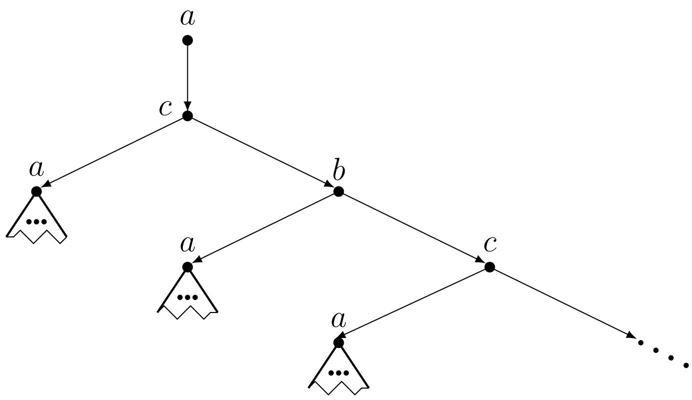


Ma il grafo G non è fortemente estensionale: assumendo AFA si ha che Ga non è una rappresentazione esatta di Ω mentre Gb lo è; assumendo $SAFA$, invece, Gb resta una rappresentazione esatta di Ω, mentre Ga è una rappresentazione esatta dell'insieme $T \neq \Omega$ tale che $T = \{\Omega, T\}$.

2. Sia G il grafo:



dove a, b e c sono nodi distinti. Si osserva che l'espansione $(Ga)^t$ dell'apg Ga ha la seguente forma:



dove i nodi dell'albero sono etichettati con i nomi dei corrispondenti nodi di G. Da questo diagramma risulta chiaro che i sottoalberi $(Gb)^t$ e $(Gc)^t$ sono isomorfi. Questo mostra che G non è $\cong^t$-estensionale, ma è chiaramente estensionale. Inoltre da ogni nodo risulta accessibile ogni altro nodo, quindi G è anche Finsler-estensionale.

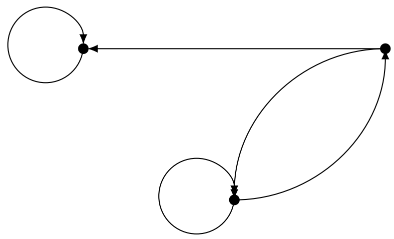
Si osserva che, assumendo AFA, l'unica decorazione di G assegnerà l'insieme Ω ad ogni nodo. Ma, per $SAFA$, esiste una decorazione di G in cui ai nodi b e c è assegnato l'insieme $X = \{X, Y\}$, mentre al nodo a è assegnato l'insieme $Y = \{X\}$. Per $FAFA$, invece, esiste un'unica decorazione iniettiva che assegna ai nodi a, b e c gli insiemi distinti $A = \{C\}$, $B = \{A, C\}$ e $C = \{B, C\}$.

□

Segue il seguente risultato:

AFA, $FAFA$, $SAFA$ sono assiomi incompatibili a due a due.

Il seguente esempio, proposto da Scott Johnson[6], dopo altri elaborati da Randall Dougherty[7] e Lawrence Moss, visualizza il risultato precedente:



5.6 BAFA

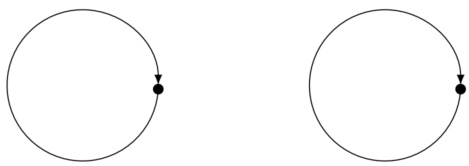
Sia W_a il sottografo del sistema V, composto da tutti i nodi nell'insieme a e da tutti gli archi di V tra di essi. Si osserva che W_a è necessariamente estensionale quando a è un insieme transitivo. Chiamiamo BA_1 l'assioma seguente [1, cap.5]:

Ogni grafo estensionale è isomorfo a W_a per qualche insieme transitivo a.

In questa sezione mostreremo che BA_1 è una forma più forte di $AFA_1^{\sim}$.

Definizione 5.32. Un insieme x si dice *riflessivo* se $x = \{x\}$.

Si osserva che esiste al massimo un insieme riflessivo; basta applicare $FAFA_2$, dal quale segue che due insiemi riflessivi sono isomorfi tra loro, e $AFA^{\sim}$, per l'esistenza di uno di essi. Se assumiamo BA_1, però, giungiamo ad una contraddizione con questo ultimo risultato. Per esempio consideriamo il grafo estensionale seguente:



[6]Scott Johnson 1961-1988, matematico americano.

[7]Randall Dougherty 1961-., matematico e informatico americano.

Esso può essere visto come un insieme composto da due elementi, che sono insiemi riflessivi. Nello stesso modo è possibile costruire un insieme di insiemi riflessivi di qualsiasi cardinalità, quindi se ne deduce la seguente proposizione:

Proposizione 5.33. *Assumendo BA_1, gli insiemi riflessivi formano una classe propria.*

Quindi alla domanda (*vedi capitolo 2 di questa tesi*):

quale apg è una rappresentazione esatta?

Rispondiamo in questo modo:

Assumendo BA_1, un apg è una rappresentazione esatta se e solo se è estensionale.

In realtà, possiamo fare di più, possiamo dimostrare la seguente equivalenza:

Proposizione 5.34. *L'assioma BA_1 è equivalente ad asserire che un apg è una rappresentazione esatta se e solo se è estensionale*

Dimostrazione. Dall'assioma di estensionalità segue che ogni rappresentazione esatta deve essere estensionale. Sia Ga un apg estensionale, allora per BA_1 devono esistere un insieme transitivo c e $b \in c$ tali che $Ga \cong (W_c)b \cong Vb$. Quindi Ga è una rappresentazione esatta.
Viceversa, supponiamo che ogni apg estensionale sia una rappresentazione esatta. Sia G un grafo estensionale. A questo punto si hanno due casi:

- $\exists a \in G$, $a_G = G$.
  In questo caso si ha che Ga è un apg estensionale contenente tutti i nodi di G. Quindi, poiché Ga è una rappresentazione esatta, si ha $Ga \cong Vc$ per qualche insieme c. Ma c deve essere un insieme transitivo, poiché $a_G = G$, allora $c \in c$ e quindi $G \cong W_c$.

- $\forall a \in G$, $a_G \neq G$.

  Consideriamo l'apg estensionale $G'*$ formato dai nodi di G più un nuovo nodo $*$ e dagli archi $(*, a)$, $\forall a \in G$. Dato che questo grafo è estensionale, sarà una rappresentazione esatta e quindi $G'* \cong Vc$ per qualche insieme c. Ora, dato che $a \in *_{G'}$, si ha $a \subseteq *_{G'}$ e da questo risultato segue che l'insieme c è transitivo e quindi $G \cong W_c$.

$\square$

Segue facilmente:

Corollario 5.35. *$BA_1 \Longrightarrow AFA_1^{\sim} \wedge \neg AFA_2^{\sim}$ per ogni bisimulazione regolare $\sim$.*

Adesso mostriamo una versione più forte di BA_1, precisamente *l'assioma di Antifondazione di Boffa*. Per introdurlo abbiamo bisogno della seguente definizione:

Definizione 5.36. Il sistema M è detto *sottosistema transitivo* di M', e si scrive $M \trianglelefteq M'$, se:

- $M \subseteq M'$;
- $x_{M'} = x_M$, $\forall x \in M$.

Formuliamo dunque l'assioma di Antifondazione di Boffa, o $BAFA$, e la versione di quest'ultimo con l'utilizzo dei diagrammi:

- Ogni decorazione esatta, di un sottografo transitivo di un grafo estensionale, può essere estesa a una decorazione esatta dell'intero grafo.
- Il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dashed] & \\
G_0 \arrow[u] \arrow[r] & V
\end{tikzcd}$$

può sempre essere completato. Questo significa che dati i grafi estensionali G_0 e G, tali che $G_0 \trianglelefteq G$, e data la mappa di sistema iniettiva $G_0 \longrightarrow V$, esiste un'altra mappa di sistema iniettiva $G \longrightarrow V$ che rende il diagramma commutativo.

Questo assioma non risulta essere tra gli assiomi $AFA^{\sim}$ per nessuna bisimulazione regolare, ma è comunque equivalente ad AFA [1, cap.5].

Conclusioni

Il lavoro svolto in questa tesi riguarda la realizzazione di una teoria degli insiemi comprendente l'Assioma di Antifondazione. Abbiamo esposto come dalla teoria standard sia possibile passare alla teoria ZFA, come la consistenza dell'una influisca sull'altra e come sia fondamentale il concetto di *bisimulazione* per quest'ultima. Per quanto riguarda le applicazioni, tale teoria è basilare per la spiegazione di numerosi fenomeni circolari, per esempio gli Hypergames e la coinduzione; ma non solo, infatti l'importanza di essa sta nelle sue numerose applicazioni anche in ambiti non propriamente matematici. Per esempio, essa fornisce degli strumenti per lo studio degli *stream*, utilizzati nel campo informatico; è utilizzata nel linguaggio di programmazione $HMLSS$; è fondamentale per lo studio della teoria degli automi finiti (sistemi dinamici discreti) *(vedi [1], [2], [4])*.

Bibliografia

[1] Aczel P., *Non Well Founded Set*, CLSI, Stanford University, 1988, disponibile all'indirizzo $http : //www.irafs.org/courses/materials/aczel\_set\_theory.pdf$.

[2] Barwise J., Moss L., "Hypersets", Math Intelligencer 13, 1991.

[3] Barwise J., *Admissible Sets and Structures*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1975.

[4] Barwise J., Moss L., *Vicious circles: On the mathematics of non well founded phenomena*, CLSI, Indiana University, 1995.

[5] Basti G., "Logica Filosofica e Filosofia Formale", disponibile all'indirizzo $http : //www.irafs.org$ e anche su $http : //www.stoqat.pul.org$.

[6] Moschovakis Y., *Notes on Set Theory*, New York, Springer-Verlag, 2006^2.

[7] Roth D., Schneider G., "The Interpretation of Classes in Axiomatic Set Theory" in Link G. (Ed.), *Formalism and Beyond on the nature of Mathematical Discourse*, De Gruyter Ontos, 2014, pag. 375-314.

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il Professor Piero Plazzi per la passione trasmessimi verso la Matematica, per gli utili consigli, il sostegno e la pazienza dimostratami durante la stesura dell'elaborato.

Inoltre i miei più sentiti ringraziamenti vanno a mia madre, che ha sempre creduto in me, anche quando io per prima pensavo di non farcela, senza di lei non sarei qui adesso; a mio padre, che si è sempre mostrato molto entusiasta, e forse un po' sorpreso, per tutti i risultati raggiunti; ai miei nonni, ai miei zii e a tutta la mia famiglia per il loro supporto e la loro presenza, oggi e sempre.

Ringrazio le mie migliori amiche: Eleonora, mia "sorella", per esserci in qualsiasi momento, notte e giorno, da ormai 20 anni; Erika, per capirmi con uno sguardo, per non avermi mai abbandonata, per avermi aspettata, per esser sempre stata sincera e aver detto la sua opinione anche quando discordava con la mia; Alessandra N., per le sue inimitabili sedute di psicologia, per i balli, il karaoke, le litigate e le coccole, per essere allo stesso tempo la persona a cui ambisco diventare e quella più simile a me; Caterina, compagna di sventure ed ex coinquilina, per avermi insegnato ad essere un po' più come lei e per aver imparato ad essere un po' più come me, per il sostegno vicino e lontano; Alessandra G., il mio topo, la mia Lei, la mia storica amica del liceo, con la quale, dopo un insensato distacco, sto ricostruendo qualcosa di incredibile.

Ringrazio le mie adorate sorelle bolognesi, Silvia A., Chiara e Corinna, per avermi accompagnato in questo viaggio lontano da casa ed essere riuscite a trasformare una house in una vera e propria home. Insieme siamo state, siamo e saremo sempre una famiglia.

Ringrazio i miei migliori amici Andre, Albe, Nicco e Chicco, per esser stati infinitamente pazienti e per aver condiviso i nostri segreti più nascosti e aver svelato le verità più imbarazzanti. E Filippo, per esserci stato nel momento del bisogno e nel delirio più totale.

Ringrazio le mie "famiglie acquisite" Mariani, Pucci e Fantoni, in particolare Giulio, Denise e Francesca, per la loro immancabile presenza e il loro infinito affetto dimostratomi fin dall'infanzia.

Ringrazio Valentina e Silvia M., mie colleghe e amiche, per avermi sempre assecondata, sostenuta e appoggiata nelle mie follie più strane. E ringrazio Mirko, che non solo si è rivelato un aiuto prezioso per la mia carriera universitaria, ma anche un grandissimo amico di confidenze e discorsi nerd.

Ringrazio i miei ex coinquilini, Federico ed Edoardo S., che hanno dovuto sopportare quotidianamente le mie stramberie. Due persone fantastiche, esilaranti e attente, con le quali ho condiviso momenti assurdi.

Vorrei ringraziare anche Frammenti&Trame, in particolare la mitica Patrizia e il mitico Curi, i miei amici Cusu, Nanno, Fio, Romains e Marcone, che, nonostante i nostri numerosi alti e bassi, ci sono sempre stati e ci saranno sempre.

E per ultimo, ma non per importanza, ringrazio Edoardo che mi ha fatto scoprire la felicità delirante, che ha stravolto la mia prospettiva e reso il mondo migliore. Lo ringrazio per essere, inconsapevolmente, la mia ancora di salvezza, la luce in fondo al tunnel, l'insostituibile, il futuro.