Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

FORMULE DI QUADRATURA GAUSSIANE

Relatore:
Prof. Valeria Simoncini

Presentata da:
Michele Martinelli

Anno Accademico 2015/2016

A Ilaria per avermi supportato e sopportato...
Ai miei genitori per aver sempre creduto in me...
A tutti coloro che hanno contribuito a questo mio traguardo,
in particolare Alberto e Federico

Introduzione

Il calcolo di integrali riveste un ruolo fondamentale in matematica. Per certe funzioni, utilizzando diversi metodi, è possibile calcolare $\int_a^b f(x)dx$, anche se spesso risulta difficile o impossibile determinare tale valore per via analitica. A volte, anche nel caso in cui si riuscisse a trovare una primitiva della f, l'espressione finale sarebbe così complessa rispetto alla funzione integranda da suggerire l'uso di approcci diversi. Un altro inconveniente è quello di trovarsi di fronte ad una funzione f definita solo per punti, oppure valutabile per ogni x mediante una routine, ed in questo caso non è affatto possibile procedere con un approccio analitico. È il caso ad esempio di funzioni che descrivono dati sperimentali. Pertanto, supponendo di conoscere o di poter valutare la funzione integranda f in punti $\{x_i\}$ prefissati, oppure da noi scelti, esaminiamo la costruzione di formule dette di quadratura, del tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

I punti $\{x_i\}$ vengono chiamati nodi, e in base alla scelta di questi ultimi si hanno diverse formule di quadratura che danno luogo a differenti condizioni di convergenza, rapidità di convergenza, stabilità e costo computazionale.
Naturalmente, le formule di quadratura non si sostituiscono ai classici metodi analitici, anzi, sono proprio questi a dare dei suggerimenti per semplificare il problema e per scegliere la formula di quadratura più adatta.
Le formule di quadratura che studierò in questa tesi sono principalmente quelle Gaussiane, che sono caratterizzate da proprietà di precisione migliori rispetto a formule elementari quali quelle di Newton-Cotes.

Indice

1 Polinomi ortogonali **1**

1.1 Polinomi ortogonali classici 6

2 Formule di quadratura **9**

2.1 Formule di quadratura interpolatorie 9

2.2 Formule di Newton-Cotes 13

2.2.1 Formule Composite 15

2.3 Formule di quadratura Gaussiane 16

2.4 Formule Gaussiane Classiche 19

3 Esempi di applicazione **25**

Bibliografia **29**

Capitolo 1

Polinomi ortogonali

In questo capitolo verrà data la definizione di polinomi ortogonali, e verranno illustrate le loro principali proprietà, che serviranno poi per la costruzione delle formule di quadratura Gaussiane.
Si consideri lo spazio delle funzioni $(L^2([a,b]), \|\cdot\|_{L^2})$ che, munito del prodotto scalare definito da:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} \stackrel{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

è uno spazio di Hilbert. Più in generale, se prendiamo una funzione peso w non negativa su $[a,b]$, possiamo considerare lo spazio di funzioni $(L^2_w([a,b]), \|\cdot\|_{L^2_w})$ dove:

$$L^2_w([a,b]) \stackrel{def}{=} \{f \text{ misurabili } t.c \int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx < \infty\}$$

che con il prodotto scalare definito nel modo seguente:

$$\langle f, g\rangle_{L^2_w} \stackrel{def}{=} \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \tag{1.1}$$

è anch'esso uno spazio di Hilbert.

Osservazione 1. Se scegliamo $w(x) \equiv 1$ allora $L^2_w([a,b]) = L^2([a,b])$.

Proposizione 1.1. *Si consideri lo spazio* $(L^2_w([a,b]), \|\cdot\|_{L^2_w})$ *con* w *funzione non negativa su* $[a,b]$ *che soddisfa:*

$$m_k = \int_a^b |x|^k w(x)dx < \infty \quad k = 0, 1, 2...$$

cioè i momenti m_k *esistono e sono finiti. Allora* $L^2_w([a,b])$ *contiene lo spazio dei polinomi* $\mathbb{P}_k$ *di grado* k *(con* $k \in \mathbb{N}$ *arbitrario).*

Dimostrazione. Scegliamo $k \in \mathbb{N}$ e considero un polinomio p_k qualsiasi appartenente a $\mathbb{P}_k$. Scriviamo $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \; a_i x^i$. Siccome i momenti m_k sono finiti per ipotesi e dovendo valere la disuguaglianza triangolare si ha:

$$\|p_k\|^2_{L^2_w} = \int_a^b \; w(x) \sum_{i=0}^{k} \; |a_k x^{2i}| dx < \infty,$$

quindi $\mathbb{P}_k \in L^2_w([a,b])$. □

Definizione 1.1. Due polinomi p, q appartenenti a $L^2_w([a,b])$ sono ortogonali se:

$$\langle p, q \rangle_{L^2_w} = 0.$$

Notazione. D'ora in poi scriverò $\langle \cdot, \cdot \rangle$ per indicare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_w}$.

Definizione 1.2. Un sistema di polinomi $\{P_0, P_1, ..., P_n, ...\}$ con $P_n(x) = k_{n,0}x^n + k_{n,1}x^{n-1} + ... + k_{n,n}$ e $k_{n,n} \neq 0$ è detto ortogonale in $[a,b]$ rispetto alla funzione peso w se:

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b \; w(x) P_n(x) P_m(x) dx = 0 \qquad \textit{per } n \neq m.$$

Il sistema di polinomi $\{P_k\}$ viene detto ortonormale se è ortogonale e se

$$h_n \overset{def}{=} \langle P_n, P_n \rangle \overset{def}{=} \|P_n\|^2_{L^2_w} = 1.$$

Osservazione 2. Una famiglia di polinomi ortogonali $\{P_0, ..., P_n, ...\}$ in (a,b) rispetto alla funzione peso w si può costruire usando la procedura di Gram-Schmidt a partire dalla base $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$.

Osservazione 3. I polinomi ortogonali $P_0, P_1, ..., P_n$ sono linearmente indipendenti e formano quindi una base dello spazio vettoriale $\mathbb{P}_n$ dei polinomi di grado minore uguale a n.

Osservazione 4. Scelto un sistema di polinomi ortogonali su $[a,b]$ rispetto alla funzione peso w, un generico polinomio Q_m può essere rappresentato univocamente nella seguente forma:

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \; c_k P_k(x), \tag{1.2}$$

con i coefficienti c_k definiti nel seguente modo:

$$c_k = \frac{\langle Q_m, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} = \frac{\int_a^b \; w(x) Q_m(x) P_k(x) dx}{\int_a^b \; w(x) P_k^2(x) dx}.$$

Teorema 1.2. *Sia* $\{P_0, P_1, ..., P_n, ...\}$ *un sistema di polinomi ortogonali, allora per ogni polinomio* q *di grado* $\leq n-1$ *si ha:*

$$\int_a^b w(x)P_n(x)q(x)dx = 0,$$

ed in particolare se $q(x) := x^k$ con $k = 0, 1, 2..., n-1$ allora:

$$\int_a^b w(x)P_n(x)x^k dx = 0.$$

Dimostrazione. Sia q di grado $0 \leq m \leq n-1$, se si applica (1.2) si vede facilmente che il risultato del teorema è corretto, infatti:

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)P_n(x)q(x)dx = \langle P_n, q\rangle &\overset{(1.2)}{=} \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{m} c_k P_k \right\rangle = \\ &= \langle P_n, c_0P_0 + ... + c_mP_m\rangle = \\ &= c_0 \langle P_n, P_m\rangle + ... + c_m \langle P_n, P_m\rangle = 0,\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza è stato usato il fatto che il sistema di polinomi $\{P_0, ..., P_n, ...\}$ è ortogonale. □

Teorema 1.3. *Sia* $\{P_0, P_1, ..., P_n, ...\}$ *una famiglia di polinomi ortogonali su* $[a, b]$ *rispetto ad una funzione peso* w *non negativa. Allora il polinomio* P_n *ha esattamente* n *radici reali distinte sull'intervallo aperto* $]a, b[$.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due passi:

Passo 1: dimostriamo che tutti gli zeri appartengono all'intervallo $]a, b[$.

Supponiamo che le radici in $]a, b[$ di P_n siano $x_1, ..., x_m$ con $m \leq n$, dobbiamo quindi far vedere $m = n$.

Supponiamo per assurdo che $m < n$, e scriviamo $P_n(x) = q(x)r(x)$.

Dove $q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$ e r ha segno costante nell'intervallo $[a, b]$, in quanto è una funzione continua e per come è stato scritto P_n, non si annulla mai nel suddetto intervallo.

Ora consideriamo:

$$\langle q, P_n\rangle = \int_a^b w(x)q(x)P_n(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)^2 r(x)dx \neq 0$$

perchè $q^2 r$ ha sempre lo stesso segno nell'intervallo $[a, b]$ in quanto q^2 è sempre positiva e r ha sempre lo stesso segno, ma per (1.2) siccome $\{P_i\}$ sono una famiglia di polinomi ortogonali posso scrivere il polinomio q come combinazione lineare dei $\{P_i\}$; allora per il Teorema 1.0.2. il Passo 1 è dimostrato

Passo 2: dimostriamo che tutti gli zeri sono distinti.

Scriviamo $P_n(x) = (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_k)^{m_k}$ dove $m_1+m_2+...+m_k = n$ e $m_i \geq 1$ per $i = 1, 2, ..., k$. Bisogna far vedere che le molteplicità algebriche m_i sono tutte uguali a 1 e cioè vorrebbe dire che $k = n$, quindi tutti gli zeri del polinomio P_n sono distinti. Supponiamo per assurdo che esista un certo m_j con $1 \leq j \leq k$ tale per cui $m_j > 1$. Allora prendiamo la funzione:

$$f(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_{j-1})^{m_{j-1}}(x - x_j)^{mod_2(m_j)}(x - x_{j+1})^{m_{j+1}} \cdots (x - x_k)^{m_k}.$$

Osserviamo che f ha grado strettamente minore del grado di P_n in quanto abbiamo supposto per assurdo che $m_j > 1$, quindi:

$$\langle f, P_n\rangle = \int_a^b w(x)f(x)P_n(x)dx = 0,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il Teorema 1.0.2. A questo punto dobbiamo osservare che la funzione integranda wfP_n ha segno costante su $[a, b]$, infatti w è non negativa per ipotesi, quindi dobbiamo far vedere che fP_n ha segno costante (positivo), infatti:

$$f(x)P_n(x) =$$
$$= (x - x_1)^{2m_1} \cdots (x - x_{j-1})^{2m_{j-1}}(x - x_j)^{mod_2(m_j)+m_j}(x - x_{j+1})^{2m_{j+1}} \cdots (x - x_k)^{2m_k},$$

quindi gli esponenti di $(x - x_i)$ sono tutti pari, compreso quello di $(x - x_j)$ perchè $m_j + mod_2(m_j)$ è sempre pari qualsiasi sia m_j. Allora possiamo effettivamente dire che wfP_n ha segno costante e quindi non può essere che $\int_a^b w(x)f(x)P_n(x)dx = 0$ come avevamo provato poco sopra, allora siamo arrivati ad una contraddizione e quindi è assurdo supporre che per un qualche $1 \leq j \leq k$ valga $m_j > 1$, allora $k = n$ e quindi l'asserto è provato.

□

Teorema 1.4. *Sia* $\{P_0, P_1, ..., P_n, ...\}$*, una famiglia di polinomi ortogonali su* $[a, b]$ *rispetto ad una funzione peso* w*, con i polinomi* P_j *espressi nel modo seguente:*

$$P_j(x) = k_{j,0}x^j + k_{j,1}x^{j-1} + ... + k_{j,j}.$$

Allora per $n \geq 1$ *vale:*

$$P_{n+1}(x) = (A_{n+1}x + B_{n+1})P_n(x) - C_nP_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, ... \tag{1.3}$$

dove i coefficienti A_{n+1}, B_{n+1}, C_n *sono:*

$$A_{n+1} = \frac{k_{n+1,0}}{k_{n,0}} = \frac{\langle P_{n+1}(x), P_{n+1}(x)\rangle}{\langle xP_n(x), P_{n+1}(x)\rangle},$$

$$B_{n+1} = A_{n+1}\left(\frac{k_{n+1,1}}{k_{n+1,0}} - \frac{k_{n,1}}{k_{n,0}}\right) = -A_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle},$$

$$C_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}\frac{h_n}{h_{n-1}} = \frac{A_{n+1}}{A_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}.$$

Dimostrazione. I polinomi $P_0, ..., P_n, xP_n$ sono linearmente indipendenti, quindi formano una base di $\mathbb{P}_{n+1}$. Allora esistono $\alpha_0, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ tali che:

$$P_{n+1} = \alpha_0P_0 + \alpha_1P_1 + ... + \alpha_{n+1}xP_n.$$

Ora prendiamo $j \neq n + 1$ e vediamo che:

$$0 = \langle P_j, P_{n+1}\rangle = \alpha_j \langle P_j, P_j\rangle + \alpha_{n+1} \langle P_j, xP_n\rangle =$$
$$= \alpha_j \langle P_j, P_j\rangle + \alpha_{n+1} \langle xP_j, P_n\rangle .$$

Se scegliamo $j \leq n - 2$ il polinomio xP_j ha grado minore di n e quindi $\langle xP_j, P_n\rangle = 0$ per il Teorema 1.0.2. Perciò per ogni $j \leq n - 2$ deve essere che $\alpha_j = 0$, possiamo scrivere quindi che:

$$P_{n+1} = \alpha_{n-1}P_{n-1} + \alpha_nP_n + \alpha_{n+1}xP_n.$$

Quindi ponendo $A_{n+1} = \alpha_{n+1}, B_{n+1} = \alpha_n, C_n = -\alpha_{n-1}$ la relazione a tre termini in (1.3) è provata. Le costanti A_{n+1}, B_{n+1}, C_n possono essere calcolate moltiplicando scalarmente per P_{n+1}, P_n, P_{n-1} entrambi i membri della (1.3), infatti si ha che:

$$\langle P_{n+1}, P_{n+1}\rangle = A_{n+1} \langle P_{n+1}, xP_n\rangle ,$$
$$0 = B_{n+1} \langle P_n, P_n\rangle + A_{n+1} \langle P_n, xP_n\rangle ,$$
$$0 = -C_n \langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle + A_{n+1} \langle P_{n-1}, xP_n\rangle .$$

□

Teorema 1.5. *Se $x_1 < ... < x_n$ sono gli zeri di P_n, e se $y_1 < ... < y_{n+1}$ sono gli zeri di P_{n+1} allora si ha che:*

$$a < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < ...y_n < x_n < y_{n+1} < b,$$

cioè vale una proprietà di "interlacing".

Teorema 1.6. *Sia $\{P_0, P_1, ..., P_n, ...\}$ una famiglia di polinomi ortogonali su $[a, b]$ rispetto alla funzione peso w. Allora gli n+1 zeri del polinomio P_{n+1} sono gli autovalori della seguente matrice:*

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

dove i coefficienti α_j, β_j sono definiti nel modo seguente:

$$\alpha_j = \frac{k_{j-1,1}}{k_{j-1,0}} - \frac{k_{j,1}}{k_{j,0}}, \qquad \beta_j = \frac{k_{j-1,0}}{k_{j,0}} \sqrt{\frac{h_j}{h_{j-1}}}.$$

1.1 Polinomi ortogonali classici

I polinomi ortogonali più utilizzati sono quelli che comunemente vengono denominati classici e sono i seguenti:

(i) Polinomi di Legendre $P_n(x)$ Intervallo: $[-1, 1]$; Funzione peso $w(x) = 1$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \\ (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$k_{n,0} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \qquad h_n = \frac{2}{2n+1}$$

(ii) Polinomi di Laguerre $L_n(x)$ Intervallo: $[0, +\infty]$; Funzione peso $w(x) = e^{-x}$

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$k_{n,0} = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad h_n = 1$$

(iii) Polinomi di Hermite $H_n(x)$ Intervallo: $[-\infty, +\infty]$;

Funzione peso $w(x) = e^{-x^2}$

$$\begin{cases} H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x \\ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$k_{n,0} = 2^n$ $\qquad h_n = \sqrt{\pi}2^n n!$

(iv) Polinomi di Chebyshev $T_n(x)$ Intervallo:$[-1, 1]$;

Funzione peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$k_{n,0} = 2^{n-1} \qquad h_n = \begin{cases} \pi \quad se \quad n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \quad se \quad n > 0 \end{cases}$$

Capitolo 2

Formule di quadratura

2.1 Formule di quadratura interpolatorie

In questa sezione descriverò le formule di quadratura interpolatorie, e cioè quelle formule che permettono di calcolare con approssimazione più o meno buona un'integrale, attraverso la sostituzione della funzione integranda, con un'altra funzione più semplice da integrare come i polinomi.
Cercheremo di costruire delle formule che approssimino $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.
Un modo per farlo è scegliere dei nodi $\{x_0, ..., x_n\}$ (cioè dei punti appartenenti al dominio di f) e dei valori (detti pesi) w_i, in maniera tale che risulti:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i). \tag{2.1}$$

L'idea più semplice per fare ciò è sostituire, alla funzione integranda f, il *polinomio interpolante f secondo Lagrange*, di grado n, nei nodi *distinti* $\{x_0, ..., x_n\}$.

Definizione 2.1. Siano $\{x_0, ..., x_n\}$ nodi *distinti.* L'insieme $\{L_0, L_1, ..., L_n\}$ con i polinomi L_i definiti nel modo seguente:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \tag{2.2}$$

viene chiamata base di polinomi di Lagrange.

Osservazione 5. $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$

Supponiamo di avere quindi una funzione f e di voler trovare il polinomio p_n che interpoli f nei nodi *distinti* $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, allora usando la base di polinomi di Lagrange risulta che:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x). \tag{2.3}$$

Infatti se volessimo calcolare p_n per un qualche x_j appartenente all'insieme dei nodi $\{x_0, ..., x_n\}$, risulterebbe, usando quanto detto nell'osservazione 5, che: $p_n(x_j) = f(x_j)$.

Definizione 2.2. Definiamo $E_n(f, x) \overset{def}{=} f(x) - f_n(x)$ dove f_n è la funzione che approssima f. In generale le f_n che costruiremo, sono polinomi interpolanti f nei nodi $\{x_0, ..., x_n\}$, quindi del tipo (2.3).

Proposizione 2.1. *Siano $x_0, ..., x_n$ nodi distinti appartenenti ad A. Prendo $x \in A$, e considero $[a, b]$, l'intervallo più piccolo contenuto in A tale per cui tutti gli $\{x_i\}$ e x sono contenuti in $[a, b]$. Consideriamo una funzione $f \in C^{(n+1)}([a, b])$. Allora esiste $\xi_x \in]a, b[$ tale che:*

$$E_n(f, x) \overset{def}{=} f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w(x) \tag{2.4}$$

dove $w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

Dimostrazione. si consideri la funzione definita come segue:

$$F(t) \overset{def}{=} f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w(x)} w(t), \ \ t \in [a, b]$$

osserviamo che $F \in C^{(n+1)}([a, b])$, infatti F è composizione di funzioni che appartengono a $C^{(n+1)}([a, b])$ in quanto $f \in C^{(n+1)}([a, b])$ per ipotesi, e $w, P_n \in C^{\infty}([a, b])$; inoltre $F(t)$ ha $n + 2$ zeri in quanto $F(x_i) = 0$ per $i = 0, 1, ..., n$ e $F(0) = 0$, allora si ha che:
F ha $n + 2$ zeri, F' ha $n + 1$ zeri,...,$F^{(n+1)}$ ha uno zero.
Allora chiamiamo ξ_x l'unico zero di $F^{(n+1)}$, quindi possiamo scrivere che:

$$F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w(x)} (n + 1)! = 0$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che ξ_x è l'unico zero di $F^{(n+1)}(t)$. □

Quindi, scelti i nodi $\{x_0, ..., x_n\}$ *distinti* in un intervallo $[a, b]$ possiamo ora, costruire esplicitamente una formula di quadratura (poi vedremo che sarà l'unica) di tipo interpolatorio per il calcolo di $I(f)$ come in (2.1). Infatti possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b p_n(x) + E_n(f,x)dx = \int_a^b p_n(x)dx + \int_a^b E_n(f,x)dx = \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx + R_n(f) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R_n(f)\end{aligned} \tag{2.5}$$

dove abbiamo posto:

- $R_n(f) \overset{def}{=} \int_a^b E_n(f,x)dx$ che rappresenta l'errore della formula di quadratura,
- $w_i = \int_a^b L_i(x)dx$ che rappresentano i pesi della formula di quadratura.

Le formule di quadratura come quella precedente, sono esatte, cioè l'errore $R_n(f) = 0$, tutte le volte che come f prendiamo un polinomio qualsiasi di grado $\leq n$. In particolare, $R_n(f) = 0$ quando $f(x) = 1, x, x^2, ..., x^n$. Questo ci garantisce l'unicità della formula di quadratura in (2.5), infatti:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + ... + w_n = m_0 \\ w_0x_0 + w_1x_1 + ... + w_nx_n = m_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_0x_0^n + w_1x_1^n + ... + w_nx_n^n = m_n \end{cases} \tag{2.6}$$

dove $m_k = \int_a^b x^k dx$.
Il sistema in (2.6) possiamo anche scriverlo come:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Osserviamo ora che la matrice dei coefficienti (nodi) $X_{i,j}$ precedente è di Vandermonde, quindi, ha determinante uguale a $\prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i,j \leq n}}^{n} (x_i - x_j)$, ma essendo tutti gli $\{x_i\}$ *distinti*, si ha che $X_{i,j}$ è non singolare, quindi la soluzione $(w_0, w_1, ..., w_n)^T$ è unica.

Una volta fissati i nodi $x_0, x_1, ..., x_n$ *distinti*, ed essendo unica la soluzione di (2.7), la formula di quadratura in (2.5) è unica in quanto i pesi $w_0, w_1, ..., w_n$ sono univocamente determinati dal sistema in (2.7).

Supponiamo ora di voler calcolare $I(f)$ con una formula di quadratura costruita su $n+1$ nodi *distinti*, nel caso in cui la funzione f o una delle sue prime derivate presenti delle singolarità oppure punti di discontinuità, e che la funzione f sia fattorizzabile nella forma $f(x) = w(x)g(x)$, dove w è una funzione che contiene le "singolarità" di f, e cioè, è la parte irregolare che compone f, mentre g è la parte regolare di f. Quindi possiamo scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b w(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i(x)g(x_i) + R_n(g) \tag{2.8}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che g si può scrivere come:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)g(x_i) + E_n(g, x)$$

e $w_i = \int_a^b w(x)L_i(x)dx$ e $R_n(g) = \int_a^b w(x)E_n(g, x)dx$. La funzione w deve essere tale da garantire l'esistenza degli integrali coinvolti. D'ora in poi ci riferiremo a formule interpolatorie pesate:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R_n(f) \tag{2.9}$$

in quanto la formula di quadratura in (2.5) non è altro che l'identità precedente con $w(x) \equiv 1$, quindi (2.9) generalizza (2.5).

Definizione 2.3. Una formula di quadratura si dice convergente se:

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(f) = 0.$$

Definizione 2.4. Una formula di quadratura ha grado di precisione d se è esatta (cioè se $R_n(f) = 0$) quando la funzione integranda f è un polinomio qualsiasi di grado $\leq d$ ed inoltre esiste almeno un polinomio di grado $d+1$ per cui l'errore $R_n(f)$ risulta non nullo.

Osservazione 6. Ogni formula del tipo (2.5) ha grado di precisione almeno n.

L'ipotesi che i nodi $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ debbano essere distinti è di fondamentale importanza, in quanto, come illustrato nel seguente teorema, garantisce l'unicità del polinomio interpolante.

Teorema 2.2. *Date le coppie* $(x_i, f(x_i)) \in \mathbb{R}^2$ *tali che* $x_i \neq x_j$ *e con* $i = 0, 1, .., n$ *esiste ed è unico il polinomio* $p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ *tale che* $p_n(x_i) = y_i, \;\; i = 0, 1, ..., n.$

La diversa scelta dei nodi $\{x_0, ..., x_n\}$ dà luogo a diverse tipologie di formule di quadratura:

(i) nodi equidistanti (formule di Newton-Cotes)

(ii) nodi coincidenti con gli zeri di polinomi ortogonali (formule Gaussiane)

2.2 Formule di Newton-Cotes

In questa sezione descriverò brevemente le formule di Newton-Cotes che ci serviranno poi per fare un confronto con le formule di quadratura Gaussiane, più precise nell'approssimare $I(f)$. Supponiamo ora di avere una funzione definita su un'intervallo limitato $[a, b]$, e scegliamo n nodi equidistanti, cioè una famiglia di punti definita nel seguente modo:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, ..., n, \quad h = \frac{b-a}{n}. \tag{2.10}$$

Definizione 2.5. Definiamo formule di quadratura di Newton-Cotes quelle formule che grazie alla scelta dei nodi come in (2.10) si scrivono nella maniera seguente:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R_n(f). \tag{2.11}$$

Esempio 2.1 (Formule del trapezio)**.** La formula del trapezio è una delle formule del tipo di (2.11) più elementari; si costruisce scegliendo come nodi i due estremi di integrazione a e b e sostituendo la f con il suo polinomio interpolante nei due nodi, cioè:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b P_1(x) + E_1(f, x) = \\
&= \int_a^b \left(\frac{(x-a)f(b)}{b-a} - \frac{(x-b)f(a)}{b-a} \right) dx + R_1(f) = \\
&= \left(\frac{b-a}{2} \right) (f(a) + f(b)) + R_1(f)
\end{aligned}$$

Nell'ultima espressione $R_1(f) = \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$

Dimostrazione. L'errore di interpolazione per (2.4) è:

$$E_1(f,x) = \frac{f''(\xi_x)}{2} w(x)$$

quindi per trovare $R_1(f)$ basta calcolare $\int_a^b E_1(f,x)dx$, infatti:

$$\int_a^b E_1(f,x)dx = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2} w(x)dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)dx =$$
$$= \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

la dimostrazione è conclusa se dimostriamo l'uguaglianza precedente:

$$\int_a^b \left(\frac{f''(\xi_x)}{2}\right)(w(x))dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

osserviamo ora, che $(x-a)(x-b)$ è continua e ha segno costante (negativo) in $[a,b]$, ed essendo $f''(\xi_x)$ una funzione continua posso usare il seguente risultato:
$\int_a^b h(x)g(x)dx = h(\xi)\int_a^b g(x)dx$ *se* g *ha segno costante in* $[a,b]$ *e* h *è una funzione continua in* $[a,b]$. Dimostriamo il risultato nel caso che ci serve (cioè con g funzione con segno costante negativo; la dimostrazione con g funzione con segno costante positivo è analoga).
essendo h una funzione continua su di un compatto, abbiamo che h ha massimo e minimo e quindi possiamo scrivere:

$$\max_{[a,b]} h(x) \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b h(x)g(x)dx \leq \min_{[a,b]} h(x) \int_a^b g(x)dx$$
$$\Rightarrow \max_{[a,b]} h(x) \leq \frac{\int_a^b h(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq \min_{[a,b]} h(x)$$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]\ t.c\ h(\xi) = \dfrac{\int_a^b h(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

quindi la dimostrazione è conclusa. □

Esempio 2.2 (Formule di Cavalieri-Simpson)**.** La formula di Cavalieri-Simpson usa come nodi i due estremi dell'intervallo, più il punto medio degli estremi, ottenendo così la seguente formula:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + R_2(f) =$$
$$= \left(\frac{b-a}{6}\right)\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) - \frac{(b-a)^5}{90} f^4(\xi).$$

Osservazione 7. Si dimostra che, se approssimiamo f con il suo polinomio interpolante nei nodi $\{x_0, ..., x_n\}$, il grado di esattezza è n se n è dispari, $n+1$ se n è pari

2.2.1 Formule Composite

Nei due esempi precedenti abbiamo osservato che, gli errori, sia nella formula dei trapezi che in quella di Cavalieri-Simpson, dipendono dall'ampiezza dell'intervallo che stiamo considerando. Quindi per far si che l'errore della formula di quadratura sia inferiore, possiamo pensare di dividere il nostro intervallo in tanti intervallini, in ognuno dei quali applichiamo la formula che abbiamo scelto. Per completare gli esempi precedenti facciamo vedere come vengono modificate la formula dei trapezi e di Cavalieri-Simpson composita:

Esempio 2.3 (Formula dei trapezi composita)**.** Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in m intervalli I_k con $k = 0, 1, 2, ..., m-1$ tutti di lunghezza $\frac{b-a}{m}$ e di estremi $[x_k, x_{k+1}]$; quindi per quanto visto nell'esempio 2.1 possiamo scrivere che:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{b-a}{2m}(f(x_i) + f(x_{i+1})) + R_{1,m}(f) =$$

$$= \frac{b-a}{2m}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)) + R_{1,m}(f)$$

dove

$$R_{1,m}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{m}\right)^3 f''(\xi_i) = \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{m^2} f''(\xi) \quad con\ \xi \in [a, b]$$

Esempio 2.4 (Formula di Cavalieri-Simpson composita)**.** Per la formula di Cavalieri-Simpson composita facciamo la stessa cosa che abbiamo fatto per quella dei trapezi composita, facendo però attenzione, al fatto che, qui dobbiamo fare per ogni intervallo I_k tre valutazioni della funzione f, cioè, in corrispondenza degli estremi dell'intervallo stesso x_k, x_{k+1}, e del punto medio degli stessi estremi $\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$. Quindi la formula composita diventa:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{b-a}{6m}(f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})) + R_{2,m}(f) =$$

$$= \frac{b-a}{6m}\left(f(x_0) + 4\sum_{i\ dispari} f(x_i) + 2\sum_{i\ pari} f(x_i) + f(x_{2m})\right) + R_{2,m}(f),$$

dove

$$R_{2,m}(f) = -\frac{1}{180}\frac{(b-a)^5}{(2m)^4} f^4(\xi).$$

Osservazione 8. Le formule di quadratura composite sono molto più precise rispetto a quelle "normali", però necessitano di più valutazioni della funzione f, facendo così aumentare il costo computazionale.

La seguente tabella riassume quanto mostrato negli esempi 2.1-2.4.

Formula	Approssimazione	Errore
Trapezi	$\left(\frac{b-a}{2}\right)(f(a)+f(b))$	$\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$
Trapezi composita	$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b-a}{2m}(f(x_i)+f(x_{i+1}))$	$\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{m^2} f''(\xi)$
C-S	$\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$	$-\frac{1}{90}(b-a)^5 f^4(\xi)$
C-S composita	$\frac{b-a}{6m}\left(f(x_0)+4\sum_{i \text{ dispari}} f(x_i)+2\sum_{i \text{ pari}} f(x_i)+f(x_{2m})\right)$	$-\frac{1}{180}\frac{(b-a)^5}{(2m)^4} f^4(\xi)$

2.3 Formule di quadratura Gaussiane

Ora ci chiediamo, visto che possiamo scegliere la distribuzione dei nodi nell'intervallo $[a, b]$, qual'è quella più conveniente? In altre parole ci chiediamo se esistono delle formule del tipo di (2.9), con grado di precisione che sia il più elevato possibile. Prima di poter rispondere a questa domanda, supponiamo che la funzione peso w soddisfi le seguenti ipotesi:

(i) $w(x) \not\equiv 0$ e $w(x) \leq 0$ in $[a, b]$

(ii) esistano e sono finiti tutti i momenti $m_k = \int_a^b w(x)x^k dx, \quad k = 0, 1, ...$

Osservazione 9. Sicuramente non esistono formule di quadratura di tipo (2.9) con grado di precisione $2n + 2$ in quanto se esistessero dovrebbero soddisfare $R_n(f) = 0$ anche quando come f prendiamo $f(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$; infatti lo si vede dal fatto che:

$$\int_a^b w(x)\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot 0 + R_n(f),$$

ma siccome l'integrale $\int_a^b w(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 dx$ è sempre positivo si ha che $R_n(f)$ non può essere uguale a zero.

Il seguente Teorema garantisce l'esistenza di una ed una sola formula del tipo (2.9) con grado di precisione $2n + 1$

Teorema 2.3. *La formula di quadratura*

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R_n(f) \tag{2.12}$$

ha grado di precisione $2n+1$ *se e solo se essa è di tipo interpolatorio e gli* $n+1$ *nodi* $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *coincidono con gli* $n+1$ *zeri del polinomio* P_{n+1} *di grado* $n+1$*, ortogonale in* $[a,b]$ *rispetto alla funzione peso* w*.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Dobbiamo dimostrare che la formula di quadratura in (2.12) è di tipo interpolatorio e che i nodi $x_0, x_1, ..., x_n$ coincidono con gli n+1 zeri del polinomio ortogonale P_{n+1} in $[a,b]$. La formula in (2.12) ha grado di precisione $2n+1$ quindi, in particolare, ha grado di precisione almeno n, ma le formule del tipo (2.12) che hanno grado di precisione almeno n sono necessariamente interpolatorie per quanto detto in precedenza. Ora scegliamo in (2.12) $f(x) \overset{def}{=} P_{n+1}(x)x^k \quad k = 0, 1, 2..., n$ con $P_{n+1}(x)$ polinomio che si annulla in $x_0, x_1, ..., x_n$ definito come segue:

$$P_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{2.13}$$

Osserviamo che:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n} w_i P_{n+1}(x_i)x^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., n$$

in quanto abbiamo che $R_n(f) = 0$ perchè (2.12) ha grado di precisione $2n+1$ per ipotesi. Ora per come è stato definito P_{n+1} possiamo dire che:

$$\int_a^b w(x)P_{n+1}(x)x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n$$

Quindi, P_{n+1} è ortogonale rispetto alla funzione peso w.
$\Leftarrow$ Ora assumiamo che (2.12) sia interpolatoria e che P_{n+1} definito in (2.13) sia ortogonale rispetto a w in $[a,b]$ e dimostriamo che (2.12) ha grado di precisione $2n+1$. Consideriamo un polinomio generico π_d di grado d con $n+1 \leq d \leq 2n+1$ e lo dividiamo per il polinomio P_{n+1} ottenendo la relazione:

$$\pi_d(x) = P_{n+1}(x)q_{d-n+1} + r_n(x)$$

dove il polinomio q_{d-n-1} ha al massimo grado n (nel caso in cui $d = 2n+1$) e il polinomio resto r_n per il lemma di divisione di polinomi deve avere grado $< n+1$. Ora, l'errore $R_n(f)$ è un funzionale lineare, infatti:

$$\begin{aligned} R_n(f+g) &= \int_a^b w(x)(f(x)+g(x))dx - \sum_{i=0}^{n} w_i(f(x_i+g(x_i)) = \\ = \int_a^b w(x)f(x)dx &+ \int_a^b w(x)g(x)dx - \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) - \sum_{i=0}^{n} w_i g(x_i) = \\ &= R_n(f) + R_n(g). \end{aligned}$$

Posso dunque scrivere:

$$R_n(\pi_d) = R_n(P_{n+1}q_{d-n-1}) + R_n(r_n) = 0,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $R_n(r_n) = 0$ perchè le formule del tipo (2.12) hanno almeno grado di precisione n ed inoltre $R_n(P_{n+1}q_{d-n-1}) = 0$ in quanto P_{n+1} è ortogonale rispetto a w su $[a,b]$ e q_{d-n-1} ha grado al più n. Siccome d può assumere anche il valore $2n+1$, il teorema è dimostrato. □

Definizione 2.6. Le formule di quadratura che soddisfano il Teorema precedente, cioè quelle che hanno grado di precisione $2n+1$ vengono definite Gaussiane.

Ora vediamo come possiamo costruire i pesi w_i in (2.12).
Consideriamo la funzione scelta ad hoc:

$$f(x) \overset{def}{=} \frac{P_{n+1}(x)}{x-x_k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x-x_i) \tag{2.14}$$

utilizzando questa f in (2.12) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_k}dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) &= \sum_{i=0}^{n} w_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_i - x_j) = \\ &= w_k(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n) \\ &= w_k P'_{n+1}(x_k). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dove in (2.15) abbiamo usato il fatto che, per come l'abbiamo scelta, f è un polinomio di grado n, di conseguenza la formula di quadratura deve essere esatta, cioè $R_n(f) = 0$. Riscrivendo meglio quanto ottenuto in (2.15) possiamo dire che:

$$w_k = \frac{1}{P'_{n+1}(x_k)} \int_a^b w(x)\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_k}dx. \tag{2.16}$$

Osservazione 10. Quanto abbiamo scritto in (2.16) vale in generale per qualsiasi formula di quadratura del tipo (2.9), infatti per trovare l'espressione finale per i w_k non abbiamo usato il fatto che la formula dovesse avere grado di esattezza $2n+1$, ma soltanto n.

Osservazione 11. Abbiamo potuto ricavare (2.15) usando la funzione f in (2.14) perchè abbiamo dimostrato che la formula di quadratura con grado di esattezza n è *unica* una volta scelti i nodi $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$.

Osservazione 12. I pesi w_k delle formule di quadratura Gaussiane sono tutti positivi, infatti in (2.12) scegliendo $f(x) = \left(\dfrac{P_{n+1}(x)}{x - x_k}\right)^2$ che ha grado $2n$ (quindi $R_n(f) = 0$ perchè $2n \leq 2n+1$, che è il grado di precisione delle formule Gaussiane), otteniamo che:

$$w_k = \frac{1}{(P'_{n+1}(x_k))^2} \int_a^b w(x) \left(\frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k}\right)^2 dx, \qquad k = 0, 1, 2..., n$$

Osservazione 13. Una formula per calcolare i pesi w_i decisamente più interessante delle precedenti è la seguente:

$$w_i = \frac{k_{n+1,0} h_n}{k_{n,0} P'_{n+1}(x_i) P_n(x_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{2.17}$$

Teorema 2.4. *Sia $f \in C^{2n+2}([a, b])$, allora:*

$$\int_a^b w(x) f(x) dx - \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} h_{n+1}, \qquad \xi \in]a, b[\tag{2.18}$$

dove P_{n+1} appartiene alla famiglia di polinomi ortogonali $\{P_j\}$ su $[a, b]$ rispetto alla funzione peso w e $x_0, x_1, ..., x_n$ sono gli $n+1$ zeri del polinomio ortogonale P_{n+1} di grado $n+1$.

2.4 Formule Gaussiane Classiche

Le formule Gaussiane classiche, quelle associate ai polinomi ortogonali classici definiti nel Capitolo 1, sono le seguenti:

(i) Formule di Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

La seguente tabella mette in evidenza nodi, pesi ed errori, per formule di quadratura di Gauss-Legendre, costruite rispettivamente su 1-5 nodi.

n	x_i	$w_i = w_{n-i}$	R_{n+1}
0	0	2	$0.333 f''(\xi)$
1	± 0.5773502692	1	$0.741 \cdot 10^{-2} f^4(\xi)$
2	± 0.7745966692	0.5555555556	$0.635 \cdot 10^{-4} f^6(\xi)$
	0	0.8888888889	
3	± 0.8611363116	0.3478548451	$0.288 \cdot 10^{-6} f^8(\xi)$
	± 0.3399810436	0.6521451549	
4	± 0.9061798459	0.2369268851	
	± 0.5384693101	0.4786286705	$0.808 \cdot 10^{-9} f^{10}(\xi)$
	0	0.5688888889	

(ii) Formule di Gauss-Laguerre

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

n	x_i	w_i	R_{n+1}
0	1	1	$0.500 f^2(\xi)$
1	0.5857864376	0.8535533906	$0.167 f^{(4)}(\xi)$
	3.414213562	0.1464466094	
2	0.4157745568	0.7110930099	
	2.29428036	0.2785177336	$0.500 \cdot 10^{-1} f^{(6)}(\xi)$
	6.289945083	$0.103892565 \cdot 10^{-1}$	
3	0.3225476896	0.6031541043	
	1.745761101	0.3574186924	$0.143 \cdot 10^{-1} f^{(8)}(\xi)$
	4.536620297	$0.3888790852 \cdot 10^{-1}$	
	9.395070912	$0.5392947056 \cdot 10^{-3}$	
4	0.2635603197	0.5217556106	
	1.413403059	0.3986668111	
	3.596425771	$0.7594244968 \cdot 10^{-1}$	$0.397 \cdot 10^{-2} f^{(10)}(\xi)$
	7.085810006	$0.3611758680 \cdot 10^{-2}$	
	12.64080084	$0.2336997239 \cdot 10^{-4}$	

(iii) Formule di Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

n	x_i	$w_i = w_{n-i}$	R_{n+1}
0	0	1.772453851	$0.433 f''(\xi)$
1	± 0.7071067812	0.8862269255	$0.369 \cdot 10_{-1} f^{(4)}(\xi)$
2	± 1.224744871	0.2954089752	$0.185 \cdot 10^{-2} f^{(6)}(\xi)$
	0	1.181635901	
3	± 1.650680124	$0.8131283545 \cdot 10^{-1}$	$0.659 \cdot 10^{-4} f^{(8)}(\xi)$
	± 0.5246476233	0.8049140900	
4	± 2.02018287	$0.1995324206 \cdot 10^{-1}$	
	± 0.9585724646	0.3936193232	$0.183 \cdot 10^{-5} f^{(10)}(\xi)$
	0	0.9453087205	

(iv) Formule di Gauss-Chebyshev

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

Gli $n+1$ zeri del polinomio di Chebyshev (quindi gli $n+1$ nodi) di grado $n+1$ si calcolano con la seguente formula:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{2.19}$$

Mentre per quanto riguarda l'errore di quadratura, utilizzando il Teorema 2.4. si ha la seguente identità:

$$R_{n+1}(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)} f^{2n+2}(\xi), \quad \xi \in]a, b[.$$

Osservazione 14. I pesi $w_0, w_1, ..., w_n$ sono identicamente uguali a $\dfrac{\pi}{n+1}$.

Dimostrazione. Sostituendo i relativi valori per $k_{n+1,0}$, h_n e $k_{n,0}$ nella (2.17) abbiamo che:

$$w_i = \frac{\pi}{T'_{n+1}(x_i) T_n(x_i)}, \tag{2.20}$$

quindi quello che dobbiamo verificare è che per ogni $i = 0, 1, .., n$ vale:

$$T'_{n+1}(x_i)T_n(x_i) = n + 1.$$

Il $k + 1-$esimo polinomio di Chebyshev si può scrivere tramite la relazione:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x). \tag{2.21}$$

Per semplificare i conti ed ottenere il risultato poniamo $x = \cos(\varphi)$ quindi $\varphi = \arccos(x)$. Allora possiamo scrivere il polinomio di Chebyshev di grado n come:

$$T_n(\cos\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\varphi)^k (\sin\varphi)^{n-k} \cos\left(\frac{(n-k)\pi}{2}\right) = \cos(n\varphi). \tag{2.22}$$

Adesso scriviamo $T'_{n+1}(x)$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx}T_{n+1}(x) = \frac{d}{d\varphi}T_{n+1}(\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{d\varphi}\cos((n+1)\varphi)\frac{d(\arccos x)}{dx} = \\ &= (n+1)\frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin\varphi}, \end{aligned}$$

ma essendo per $i = 0, 1, ..., n$, $T_{n+1}(\cos\varphi_i) = \cos((n+1)\varphi_i) = 0$ dove i φ_i sono tali per cui l'i-esimo nodo $x_i = \cos(\varphi_i)$ possiamo dire che:

$$\begin{aligned} 0 = T_{n+1}(\cos\varphi_i) &= 2\cos\varphi_i T_n(\cos\varphi_i) - T_{n-1}(\cos\varphi_i) = \\ &= 2\cos\varphi_i \cos n\varphi_i - \cos((n-1)\varphi_i) = \\ &= 2\cos\varphi_i \cos n\varphi_i - cos(n\varphi_i - \varphi_i) = \\ &= 2\cos\varphi_i \cos n\varphi_i - (\cos n\varphi_i \cos\varphi_i + \sin n\varphi_i \sin\varphi) = \\ &= \cos\varphi_i \cos n\varphi_i - \sin\varphi_i \sin n\varphi_i. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ora possiamo finalmente scrivere l'espressione per $T'_{n+1}(x_i)T_n(x_i)$, che è la seguente:

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(x_i)T_n(x_i) &= (n+1)\frac{\sin((n+1)\varphi_i)\cos n\varphi_i}{\sin\varphi_i} = \\ &= (n+1)\frac{\sin(n\varphi_i + \varphi_i)\cos n\varphi_i}{\sin\varphi_i} = \\ &= (n+1)\frac{(\sin n\varphi_i \cos\varphi_i + \cos n\varphi_i \sin\varphi_i)\cos n\varphi_i}{\sin\varphi_i} = \\ &= (n+1)\frac{\sin n\varphi_i \cos\varphi_i \cos n\varphi_i + \sin\varphi_i \cos^2 n\varphi_i}{\sin\varphi_i} = \\ &= (n+1)\frac{\sin^2 n\varphi_i \sin\varphi_i + \sin\varphi_i \cos^2 n\varphi i}{\sin\varphi_i}, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione (2.23). Adesso ci siamo perchè raccogliendo nell'ultima espressione $\sin \varphi_i$ otteniamo $T'_{n+1}(x_i)T_n(x_i) = n + 1$, quindi:

$$w_i = \frac{\pi}{n+1}. \tag{2.24}$$

$\square$

Capitolo 3

Esempi di applicazione

Esempio 3.1. (Runge) Consideriamo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2} \approx 1.5707963267.$$

La seguente tabella mostra le diverse approssimazioni del nostro integrale con i metodi descritti nel capito precedente, dove m è il numero di suddivisioni dell'intervallo $[-1, 1]$ ed $n+1$ è il numero di nodi che scegliamo per costruire le formule Gaussiane.

m	Trapezi composita	C-S composita	n	Gauss-Chebyshev	Newton-Cotes
2	$\underline{1.5}$	$\underline{1.5}666666666$	0	3.1415926535	2
4	$\underline{1.5}499999999$	$\underline{1.5707}843137$	1	$\underline{1.}4809609793$	$\underline{1}$
8	$\underline{1.5}655882352$	$\underline{1.570796}2512$	2	$\underline{1.}6455961518$	$\underline{1.}6666666666$
10	$\underline{1.5}674630569$	$\underline{1.5707963}069$	3	$\underline{1.5}901530935$	$\underline{1.5}999999999$
16	$\underline{1.5}694942472$	$\underline{1.57079632}56$	4	$\underline{1.5}878054208$	$\underline{1.5}599999999$
32	$\underline{1.570}4708060$	$\underline{1.5707963267}$	5	$\underline{1.5}818777581$	$\underline{1.5}656108597$
64	$\underline{1.5707}149465$	$\underline{1.5707963267}$	6	$\underline{1.57}91181759$	$\underline{1.57}30402930$
128	$\underline{1.5707}759817$	$\underline{1.5707963267}$	7	$\underline{1.57}71595097$	$\underline{1.57}19863311$
256	$\underline{1.57079}12405$	$\underline{1.5707963267}$	8	$\underline{1.57}58380902$	$\underline{1.570}2304388$
			64	$\underline{1.570}8936496$	
			256	$\underline{1.5708}025529$	
			512	$\underline{1.57079}78894$	

Esempio 3.2. Si consideri:

$$\int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)dx = \frac{1}{25}(e^{-2\pi}(3-10\pi)-3) \approx -0.1221226046$$

Anche per questo integrale illustriamo alcuni metodi di approssimazione:

m	Trapezi composita	C-S composita	n	Gauss-Chebyshev	Newton-Cotes
2	0.4449351988	−0.6242461895	0	1.3399027061	0.8530085557
4	−0.3569508424	−0.1189836241	1	−0.3639922202	0.0368618420
8	−0.1784754212	−0.1210373242	2	0.7676605689	0.5809596511
16	−0.1353968485	−0.1220487944	3	−0.3960533965	−0.3694663345
32	−0.1253858079	−0.1221179227	4	−0.1762943504	−0.7045932455
64	−0.1229348940	−0.1221223110	5	−0.1026130699	−0.4143148963
128	−0.1223254567	−0.1221225862	6	−0.1252074183	−0.0720233048
256	−0.1221733038	−0.1221226034	7	−0.1228180374	−0.0702776513
1024	−0.1221257730	−0.1221226046	8	−0.1225058354	−0.0581638399
			16	−0.1221137764	
			32	−0.1221116914	
			64	−0.1221192152	
			128	−0.1221217064	
			512	−0.1221225470	

Esempio 3.3. Supponiamo ora di voler calcolare con i metodi di quadratura visti nel capitolo precedente $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, che è notoriamente uguale a $\sqrt{\pi} \approx 1.7724538509$. Prima di procedere è necessario osservare che abbiamo bisogno di restringere l'intervallo in questione $[-\infty, +\infty]$, in quanto le procedure di approssimazione che abbiamo introdotto sono per intervalli limitati. Quindi scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_{-10}^{+10} e^{-x^2}dx, \tag{3.1}$$

notando che il contributo relativo alla parte troncata è trascurabile, infatti e^{-10^2} è dell'ordine di 10^{-44}. Notare che, l'approssimazione fatta in (3.1) si è potuta fare perchè sapevamo già che l'integrale in questione è convergente, quindi prima di fare un'approssimazione simile è sempre bene verificare che l'integrale che stiamo considerando è convergente.

Vediamo alcuni metodi con cui il nostro integrale può essere approssimato:

m	Trapezi composita	C-S composita	n	Gauss-Hermite	Newton-Cotes
2	10	3.3333333335	0	1.7724538519	20
4	5	1.6795363609	1	1.7724538516	$7.44015 \cdot 10^{-43}$
8	2.509652270	1.5352579845	2	1.7724538514	13.3333333333
10	2.0732630056	1.6724286045	3	1.7724538508	0.0002241800
16	1.7788565561	1.7703196158	4	1.7724538510	2.6666666666
32	1.7724538509	1.7724538508	5	1.7724538509	0.1271919367
64	1.7724538509	1.7724538509	6	1.7724538509	6.4762096916
128	1.7724538509	1.7724538509	7	1.7724538509	0.8989321531

Questi esempi mostrano come in generale le formule Gaussiane sono più precise man mano che il grado n aumenta, convergendo al valore esatto; invece quelle di Newton-Cotes talvolta non convergono affatto!

Bibliografia

[1] G.Monegato, *Fondamenti di Calcolo Numerico*, Editrice Levrotto & Bella Torino, 1990.

[2] V.Comincioli, *Analisi Numerica: Metodi, Modelli, Applicazioni*, McGraw-Hill, 1995

[3] D.A.Bini, *Appunti di Istituzioni di Analisi Numerica*, 2015.

[4] A. Sommariva, *Polinomi Ortogonali*, 2014